

Oznaka poročila: ARRS-RPROJ-ZP-2010-1/166

ZAKLJUČNO POROČILO O REZULTATIH RAZISKOVALNEGA PROJEKTA

A. PODATKI O RAZISKOVALNEM PROJEKTU

1. Osnovni podatki o raziskovalnem projektu

Šifra projekta	Z1-0518
Naslov projekta	Razvoj novih metod in uporaba znanih metod matematičnega programiranja v kombinatorični optimizaciji in realni algebri
Vodja projekta	22649 Janez Povh
Tip projekta	Zt Podoktorski projekt - temeljni
Obseg raziskovalnih ur	3.400
Cenovni razred	B
Trajanje projekta	02.2008 - 01.2010
Nosilna raziskovalna organizacija	101 Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko
Raziskovalne organizacije - soizvajalke	
Družbeno-ekonomski cilj	13. Splošni napredek znanja - RiR financiran iz drugih virov (ne iz splošnih univerzitetnih fondov - SUF)

2. Sofinancerji¹

1.	Naziv	
	Naslov	
2.	Naziv	
	Naslov	
3.	Naziv	
	Naslov	

B. REZULTATI IN DOSEŽKI RAZISKOVALNEGA PROJEKTA

3. Poročilo o realizaciji programa raziskovalnega projekta²

V projektu sem zastavil naslednje glavne cilje:

- Poiskati razširitve Burerjevega rezultata [B06] tudi na optimizacijske probleme, kjer so omejitve nelinearne, spremenljivke pa so lahko zvezne ali diskretne.
- Poiskati nove aproksimacije stožca kopozitivnih matrik, ki bodo natančnejše in z vidika časovne zahtevnosti primerljive z dosedanjimi ali celo boljše.
- Najti postopek, s katerim bomo teoretično zanesljivo in praktično učinkovito

ugotovili, ali je nek realen polinom v nekomutativnih spremenljivkah enak vsoti hermitskih kvadratov.

4. Razvoj programskega paketa, ki bo računsko učinkovito ter numerično natančno izvedel postopek iz prejšnje točke in bo v vsebinskem smislu nadgradnja paketa Sostools [Sos].

Cilj 1 smo v celoti realizirali, saj smo:

- Našli način, kako nekatere nekonveksne optimizacijske probleme zapisati kot linearne programe nad stožcem kopolitivnih ali popolnoma pozitivnih matrik.

Natančneje, našli smo način, kako nekonveksne kvadratične probleme nad množico ortogonalnih matrik zapisati kot linearne popolnoma pozitivne programe. Pokazali smo, da je v posebnem primeru to posplošitev znanega Anstreicher-Wolkoviczevega rezultata iz leta 2000, ki pravi, da je problem nekonveksne kvadratične optimizacije nad ortonormalnimi matrikami problem semidefinitnega programiranja.

Rezultate smo objavili v članku Semidefinite approximations for quadratic programs over orthogonal

matrices, ki je že objavljen v elektronski obliki v reviji Journal of global optimization, tiskana objava pa je predvidena za jesen 2010.

Nadaljevanje tega članka je članek CONTRIBUTION OF COPOSITIVE FORMULATIONS TO GRAPH PARTITIONING PROBLEM, ki smo ga poslali v revijo Optimization in kjer je v fazi pridobivanja recenzijskih mnenj.

- Našli posplošitev Burerjevega izreka na vse kvadratne optimizacijske probleme, kjer je dopustna množica opisana kot presek konveksnega stožca s hiperravnino in mrežo $\{0,1\}$ točk. Ta rezultat je bil dobljen med obiskom dr. Gabrielle Eichfelder novembra 2009 in bo objavljen v članku, ki ga skupaj z omenjeno avtorico pripravljava za oddajo.

Cilj 2: Ta cilj je bil le delno dosežen. Skupaj z M Schweighoferjem, S. Burgdorf, I. Klepom in M. Duer smo testirali ideje o momentnih matričnih problemih z navezavo na kopolitivne programe ter o aproksimaciji stožca kopolitivnih matrik z zelo finimi simpleksi. Dobili smo nekaj manjših rezultatov, z raziskavami v tej smeri pa mislimo nadaljevati tudi v 2010.

Cilj 3 smo realizirali v celoti, skladno z načrtom. V resnici smo ga precej presegli:

- Našli smo metodo, ki smo jo poimenovali Newton chip method (metoda Newtonovih odrezkov), s katero zgeneriramo pravo bazo monomov, nad katero moramo nato z ustrezno prilagojeno Metodo Gramove matrike (Gram matrix method) poiskati SOHS razcep. Metodo smo ustrezno razširili tudi na probleme iskanja SOHS razcepov modulo ciklična ekvivalenca.

Slednji problem je mnogo zahtevnejši, saj moramo v splošnem upoštevati mnogo večjo množico monomov. Obe verziji Metode Newtonovih odrezkov sta ugodni in v splošnem najboljši možni metodi (obstaja cel kup primerov, kjer dasta ravno najkrajši možni seznam monomov).

- Prav tako smo raziskali, kako dobiti dobre spodnje meje za minimum nekomutativnih polinomov ter za minimum sledi nekomutativnih polinomov z uporabo sohs koncepta.

Za ocenjevanje minimuma sledi smo razširili koncept momentnih razširitev, ki sta ga za komutativne polinome vpeljala Lassere in Parrilo.

Definirali smo splošnejšo verzijo momentnega problema sledi z uporabo Borelovih mer v nasprotju z uporabo končno mnogo atomičnih mer, kot je

narejeno v članku od Sabine Burgdorf in Igorja Klepa. Pokazali smo, da se lahko omejimo na odsekane momentne probleme, saj če te znamo rešiti, znamo rešiti tudi originalne momentne probleme.

Reševanje odsekanega momentnega problema je zaznamovano s pojmom monotonosti razširitev momentnih matrik.

Natančneje, če je dualna rešitev za problem minimizacije sledi nekomutativnih polinomov monotona, potem je tako dobljena spodnja meja tesna in z uporabo Gelfand-Naimark-Segal (GNS) konstrukcije dobimo matrike, kjer je dosežen minimum sledi.

Pri tem smo uporabili še Artin-Wedderburnovo dekompozicijo in algoritem od Murote,

Kanna, Kojime in Kojime. Te rezultate smo objavili v članku Semidefinite programming and sums of hermitian squares of

noncommutative polynomials, prav tako smo oddali članek

Semidefinite Programming Certificates For Tracial

Matrix Inequalities, ki je šele na začetku recenzijskega postopka.

Ta del raziskave predstavlja bistveno preseganje cilja 3.

- Našli smo metodo za iskanje eksaktnih racionalnih rešitev, ki temelji na konceptualni metodi od Parrila in Peyrla iz leta 2008.

S to metodo smo našli odgovor na nekaj vprašanj iz BMV domneve, ki je dobro znana v matematični fiziki.

Natančneje, pokazali smo, da sta BMV polinoma $S_{\{8,2\}}(X, Y)$ in $S_{\{12,4\}}(X, Y)$ enaka vsoti hermitskih kvadratov in komutatorjev, medtem ko polinoma $S_{\{14,6\}}(X, Y)$ ter $S_{\{16,8\}}(X^2, Y^2)$ nista vsota hermitskih kvadratov in komutatorjev.

Še posebej zadnji od teh rezultatov je pomemben, saj odgovori na edino odprto vprašanje iz rokopisa članka, napisanega s strani B. Collinsa, K.J. Dykeme in F. Torres-Ayale (2009).

Ta rezultat je opisan v članku On The Nonexistence Of Sum Of Squares Certificates For The BMV Conjecture, ki je sprejet v objavo v Journal of Mathematical Physics.

Cilj 4

V okolju MATLAB smo napisali programski paket NCsostools, ki vsebuje knjižnico programov za delo z nekomutativnimi polinomi (seštevanje, množenje s konstantami, navadno množenje in hermitsko množenje, potenciranje, poenostavljanje itd.). Prav tako vsebuje programe, ki zaznajo, ali je dani polinom vsota hermitskih kvadratov (modulo ciklična ekvivalenca) ter poišče SOHS spodnje meje, preveri, če je NC polinom konveksen ipd. V tem paketu so tudi funkcije za iskanje racionalnih rešitev ter za preverjanje, ali obstajajo monotone rešitve dualnih problemov za iskanje minimuma sledi polinoma. Če take rešitve obstajajo, jih znamo najti ter s pomočjo njih najti matrike, kjer je dosežen minimum sledi.

Ti programi imajo implementirane različne verzije Metode Newtonovih odrezkov, ki so bile razvite v sklopu cilja 3. Kjerkoli pridemo do problema semidefinitnega programiranja, programi ponudijo na razpolago dva solverja (Sedumi in SDPT3). Izkazalo se je, da problemi nimajo takih lastnosti, da bi bilo smotrno uporabiti metode prvega reda za reševanje prilagojenih semidefinitnih programov.

Celoten programski paket se imenuje NCsostools in je prosto dostopen na domači strani

<http://ncsostools.fis.unm.si/>. Vsebino paketa smo opisali v članku NCSOSTOOLS: A computer algebra system for symbolic and numerical computation with noncommutative polynomials, ki smo ga poslali v objavo v revijo Optimization methods and software. Članek je pripet temu poročilu.

OPOMBA: Nekateri zelo pomembni znanstveni in družbeno relevantni rezultati iz naslova tega projekta so v postopku objavljanja, zato jih zaradi omejitev spletnega obrazca nisem mogel vnesti pri točkah 6 in 7 spodaj.

4. Ocena stopnje realizacije zastavljenih raziskovalnih ciljev³

Cilj 1: Poiskati razširitve Burerjevega rezultata [B06] tudi na optimizacijske probleme, kjer so omejitve nelinearne, spremenljivke pa so lahko zvezne ali diskretne.

Cilj 1 smo realizirali v celoti, saj smo našli razširitev reprezentacije na nekonveksne kvadratične probleme nad ortogonalnimi matrikami.

Našli smo tudi posplošitev Burerjevega izreka na vse kvadratne optimizacijske probleme, kjer je dopustna množica opisana kot presek konveksnega stožca s hiperravnino in mrežo $\{0,1\}$ točk.

Cilj 2: Poiskati nove aproksimacije stožca kopozitivnih matrik, ki bodo natančnejše in z vidika časovne zahtevnosti primerljive z dosedanjimi ali celo boljše.

Ta cilj je bil delno dosežen. Testirali smo ideje o momentnih matričnih problemih z navezavo na kopozitivne programe ter o aproksimaciji stožca kopozitivnih matrik z zelo finimi simpleksi. Dobili smo nekaj manjših rezultatov, z raziskavami v tej smeri pa mislimo nadaljevati tudi v 2010.

Cilj 3. Najti postopek, s katerim bomo teoretično zanesljivo in praktično učinkovito ugotovili, ali je nek realen polinom v nekomutativnih spremenljivkah enak vsoti kvadratov.

Cilj je realiziran v celoti, v resnici je precej presežen. Študija pozitivnosti sledi in navezava na vsote hemitskih kvadratov in komutatorjev je presežek plana, prav tako tudi raziskava dualnih momentnih matrik in iskanje matrik, kjer je dosežen minimum sledi za primere, ko so dualne momentne matrike monotone.

Cilj 4. Razvoj programskega paketa, ki bo računsko učinkovito ter numerično natančno izvedel postopek iz prejšnje točke in bo v vsebinskem smislu nadgradnja paketa

Sostools [Sos].

Cilj je v celoti dosežen. Natančneje, je presežen, saj so vsi vsebinski presežki iz cilja 3 ustrezno programsko podprti.

5. Utemeljitev morebitnih sprememb programa raziskovalnega projekta⁴

Program ni bil spremenjen.

6. Najpomembnejši znanstveni rezultati projektne skupine⁵

		Znanstveni rezultat	
1.	Naslov	SLO	Semidefinitno programiranje in vsote hermitskih kvadratov nekomutativnih polinomov
		ANG	Semidefinite programming and sums of hermitian squares of noncommutative polynomials
	Opis	SLO	V članku opišemo algoritem za iskanje razcepa nekomutativnih polinomov na vsote hermitskih kvadratov. Algoritem temelji na t.i. Metodi Newtonovih odrezkov, ki je nekomutativna analogija klasične metode Newtonovega politopa.
		ANG	An algorithm for finding sums of hermitian squares decompositions for polynomials in noncommuting variables is presented. The algorithm is based on the "Newton chip method", a noncommutative analog of the classical Newton polytope method, and semidefinite programming.
	Objavljeno v	Journal of Pure and Applied Algebra	
	Tipologija	1.01 Izvirni znanstveni članek	
	COBISS.SI-ID	15438937	
2.	Naslov	SLO	Semidefinitne aproksimacije kvadratičnih programov nad ortogonalnimi matrikami
		ANG	Semidefinite approximations for quadratic programs over orthogonal matrices
	Opis	SLO	V članku pokažemo, da lahko kvadratne probleme nad množico, opisano z matrikami iz $\{n \times k\}$, ki imajo ortogonalne stolpce, zapišemo kot semidefinitne programe z matrikami reda $n \times k$, ki imajo enako vrednost. S tem rezultatom lahko pomembno izboljšamo Donath-Hoffman-ovo spodnjomejo za problem delitve grafa. Pokažemo še, da kopolitivno izboljšanje semidefinitnih spodnjih mej za problem delitve grafa in problem kvadratičnega prirejanja rezultira v optimalni vrednosti.
		ANG	We show that when the feasible set of a quadratic problem consists of orthogonal matrices from $R^{n \times k}$, then we can transform it into a semidefinite program in matrices of order kn which has the same optimal value. We show how to improve significantly using this result the well-known Donath-Hoffman eigenvalue lower bound for GPP by semidefinite programming. We also show that the copositive strengthening of the semidefinite lower bounds for graph partitioning quadratic assignment problem yields the exact values.
	Objavljeno v	Discrete optimization	
	Tipologija	1.01 Izvirni znanstveni članek	
	COBISS.SI-ID	15143001	
3.	Naslov	SLO	Kopolitivne in semidefinitne poenostavitve problema kvadratičnega prirejanja
		ANG	Copositive and semidefinite relaxations of the quadratic assignment problem

	Opis	SLO	V članku sistematično prikažemo različne stožčne poenostavitve problema kvadratičnega prirejanja. Najprej pokažemo, kako ta problem zapisati kot linearen program nad stožcem kopolitivnih matrik. Prikažemo tudi rešljive poenostavitve tega problema in jih primerjamo z ostalimi, ki jih navaja literatura. Dokažemo, da so mnoge od teh poenostavitev ekvivalentne.
		ANG	We take a systematic look at various conic relaxations of QAP. We first show that QAP can equivalently be formulated as a linear program over the cone of completely positive matrices. We also look at tractable approximations and compare with several relaxations from the literature. We show that several of the well-studied models are in fact equivalent.
	Objavljeno v	Journal of global optimization	
	Tipologija	1.01 Izvirni znanstveni članek	
	COBISS.SI-ID	1024132929	
4.	Naslov	SLO	NCsostools programski paket
		ANG	NCsostools software package
	Opis	SLO	V tem paketu so sprogramitrane v okolju Matlab vse funkcije za delo z NC polinomi ter za preverjanje SOHS razcepov in pozitivnosti polinomov
		ANG	The package contains Matlab functions and procedures to handle NC polynomials and to check SOHS decompositions and positivity of such polynomials.
	Objavljeno v	http://ncsostools.fis.unm.si/	
	Tipologija	2.20 Zaključena znanstvena zbirka podatkov ali korpus	
	COBISS.SI-ID	15233113	
5.	Naslov	SLO	Iskanje optimuma s semidefinitnim in kopolitivnim programiranjem - novi pristopi za reševanje težkih problemov
		ANG	Towards the optimum by semidefinite and copositive programming : new approach to approximate hard optimization problems
	Opis	SLO	V knjigi opišem nekaj novih metod za (približno) iskanje optimuma težkih optimizacijskih problemov. Vse temeljijo na semidefinitnem in kopolitivnem programiranju. Kopolitivni rezultati se v izvedbeni fazi močno navežejo na semidefinitno programiranje.
		ANG	Several new methods to approximate the optimum of hard problems based on copositive and semidefinite programming are presented. All copositive results eventually rely on semidefinite programming.
	Objavljeno v	VDM Verlag Dr. Müller Saarbrücken	
	Tipologija	2.01 Znanstvena monografija	
	COBISS.SI-ID	15199833	

7. Najpomembnejši družbeno-ekonomsko relevantni rezultati projektne skupine⁶

Družbeno-ekonomsko relevantni rezultat			
1.	Naslov	SLO	NCsostools - odprtokodni programski paket za delo z nekomutativnimi polinomi.
		ANG	NCsostools - an opensource software package to handle the noncommutative polynomials.
	Opis	SLO	V okolju MATLAB smo napisali programski paket NCsostools, ki vsebuje knjižnico programov za delo z nekomutativnimi polinomi. Prav tako vsebuje programe, ki zaznajo, ali je dani polinom vsota hermitskih kvadratov in komutatorjev ter poišče SOHS spodnje meje, preveri, če je NC polinom konveksen, poišče racionalne vsote hermitskih kvadratov za polinome z racionalnimi koeficienti ter najde matrike, kjer je dosežen minimum sledi polinoma. Celoten programski paket je prosto dostopen na http://ncsostools.fis.unm.si/ .

			<p>We wrote a Matlab package NCsostools which contains routines to handle the NC polynomials (multiplication, addition, power, simplification etc.) , and routines to detect whether given NC polynomial is SOHS (modulo cyclic equivalence). A routine to find rational SOHS decomposition for NC polynomials with rational coefficients is provided as well as a routine for extracting the minimum of trace of NC polynomial.</p> <p>The package is available from http://ncsostools.fis.unm.si/.</p>
	Šifra	F.23	Razvoj novih sistemskih, normativnih, programskih in metodoloških rešitev
	Objavljeno v	Poslano v Optimization methods and software	
	Tipologija	2.21 Programska oprema	
	COBISS.SI-ID	15233369	
2.	Naslov	SLO	Informacijska družba in informacijska tehnologija 2009
		ANG	Information society and information technology 2009
	Opis	SLO	Konferenca je pokrivala širok spekter področij, ki spadajo v domeno informacijske družbe in informacijske tehnologije.
		ANG	The conference covered wide range of topics from information society and information technology.
	Šifra	B.02	Predsedovanje programskemu odboru konference
	Objavljeno v	Konferenci sem le predsedoval in upravljal programski odbor. Nisem pa objavil nobenega članka na tej konferenci.	
	Tipologija	2.31 Zbornik recenziranih znanstvenih prispevkov na mednarodni ali tuji konferenci	
	COBISS.SI-ID	23008807	
3.	Naslov	SLO	10. Simpozij iz operacijskih raziskav v Sloveniji
		ANG	10th Symposium on operations research in Slovenia.
	Opis	SLO	Konferenca združuje najpomembnejše aplikativne matematike iz širše regije. Rezultat konference je zbornik recenziranih člankov, najboljši članki pa bodo objavljeni tudi v posebni izdaji SCII revije Central European Journal of Operations Research, ki je v pripravi.
		ANG	At the conference best regional applied mathematicians meets. As a result there is published a conference proceedings with peer review papers and a special issue of Central European Journal of Operations Research, which is an SCII journal and is currently under preparation.
	Šifra	B.01	Organizator znanstvenega srečanja
	Objavljeno v	Zbornik posveta, spletna stran posveta	
	Tipologija	2.31 Zbornik recenziranih znanstvenih prispevkov na mednarodni ali tuji konferenci	
	COBISS.SI-ID	1024060481	
4.	Naslov	SLO	Prispevek kopozitivnega programiranja k reševanju problema delitve grafa
		ANG	Contribution of copositive formulations to graph partitioning problem
	Opis	SLO	V članku predstavimo analizo različnih kopozitivnih formulacij problema delitve grafa in semidefinitnih poenostavitev, ki sledijo iz njih. Dokažemo, da sta formulaciji, ki sledi Burerjevemu in Povhovemu konceptu, ekvivalentni in da obe porodita semidefinitne poenostavitve, ki so boljše od Donath-Hofmannove in Wolkowicz-Zhaoove spodnje meje.
		ANG	This paper provides analysis of several copositive formulations of the Graph partitioning problem (GPP) and semidefinite relaxations based on them. We prove that the copositive formulations based on results from Burer and Povh are equivalent and that they both imply semidefinite relaxations which are stronger than the Donath-Hofmann eigenvalue lower bound and projected semidefinite lower bound from Wolkowicz and Zhao.
	Šifra	B.03	Referat na mednarodni znanstveni konferenci
	Objavljeno v	Zbornik konference SOR2009	

	Tipologija	1.08	Objavljeni znanstveni prispevek na konferenci
	COBISS.SI-ID	1024060737	
5.	Naslov	SLO	O faktorizaciji nekomutativnih polinomov s semidefinitnim programiranjem
		ANG	On factorization of non-commutative polynomials by semidefinite programming.
	Opis	SLO	Predavanje na to temo sem imel na najpomembnejši konferenci iz področja optimizacije: International symposium on mathematical programming, ki se odvija vsake tri leta. Predstavil sem rezultate o nekomutativnih polinomih, ki sem jih dobil tekom izvajanja podoktorskega projekta.
		ANG	I gave the lecture at the most important optimization conference International symposium on mathematical programming, which is organized every third year. I presented the recent results about non-commutative polynomials, obtained while the post-doc project.
	Šifra	B.03	Referat na mednarodni znanstveni konferenci
	Objavljeno v	Povzetek je objavljen v zborniku ISMP 2009.	
	Tipologija	1.12	Objavljeni povzetek znanstvenega prispevka na konferenci
COBISS.SI-ID	1024052801		

8. Drugi pomembni rezultati projektne skupine⁷

Rezultat projekta je 6 izvirnih znanstvenih člankov, od katerih je eden objavljen (je v cobissu), eden je objavljen le elektronsko (je tudi v cobissu), eden je sprejet v objavo, trije pa so v postopku pridobivanja prvih recenzij. Vsi neobjavljeni članki so pripeti temu poročilu.

9. Pomen raziskovalnih rezultatov projektne skupine⁸

9.1. Pomen za razvoj znanosti⁹

SLO

Realizirani cilji projekta ustvarjajo most med znanstveniki s področja realne algebraične geometrije in operacijskih raziskav (matematičnega programiranja) in so dober primer uporabe obstoječih metod matematičnega programiranja v algebri. Posebna struktura dobljenih problemov tudi vabi ljudi iz okolja matematičnega programiranja, da razmislijo o morebitni novi metodi, ki bi delovala na takih posebnih primerih.

Projekt je torej v celoti dosegel osnovni namen, ki je, da se tesneje prepleteta dve zelo obetajoči smeri v raziskovalni matematiki: realna algebraična geometrija in matematično programiranje, natančneje nelinearno programiranje, s ciljem produkcije novih znanstvenih spoznanj.

Temu področju sta v Sloveniji pristopila še dva matematika in en doktorski študent, kar je že po številu dobra skupina, ki je številčno močnejša od mnogih drugih skupin, ki se ukvarjajo s podobnimi problemi.

Rezultati, dobljeni v okviru ciljev 3 in 4, so vzbudili velik interes pri matematikih, ki se ukvarjajo s študijem nekomutativnih polinomov in optimizacijo le teh, saj imajo sedaj orodje, ki omogoča enostavno izvajanje operacij nad temi polinomi, hkrati pa učinkovito preverjanje, ali so polinomi enaki vsoti herm. kvadratov (modulo cikl. ekv.), iskanje racionalnih rešitev, ekstrakcijo minimizatorjev ipd.

Programski paket NCsostools postaja ekvivalent tovrstnim paketom za komutativne polinome (GloptyPoly, SOStools).

Glavni rezultati s tega področja so: različne verzije Metode Newtonovih odrezkov, semidefinitni zapisi problemov testiranja konvelsnosti nekomutativnih polinomov, praktično in teoretično delujoča metoda za iskanje racionalnih SOHS razcepov, razrešitev vprašanj glede nekaterih posebnih BMV polinomov (ali imajo SOHS razcep ali ne).

Realizacija glavnih ciljev 1 in 2 ima odmev med vsemi tistimi matematiki, ki vidijo v študiju kopolitivnega stožca matrik pot do splošnega okvira za aproksimacijo težkih optimizacijskih problemov. Dobljeni rezultati omogočajo, da izpeljemo nove, učinkovitejše spodnje meje za optimalne vrednosti raznih NP-težkih polinomov.

Glavni rezultati: zapis zelo splošnih nelinearnih problemov kot problemov kopozitivnega programiranja, uspešna aproksimacija težkih problemov z uporabo semidefinitnega programiranja, ugotovitev relacij med različnimi kopozitivnimi reprezentacijami.

ANG

The goals that we reached with this project are bridge between researchers from real algebraic geometry and mathematical programming. They are also an important application of mathematical programming in the real algebraic geometry. The special structure of the resulting problems is a motivation for mathematical programming society to develop special optimization methods for such problems. The projects aims, i.e. making tighter connections between mathematical programming society and real algebraic society, were completely achieved. Slovenian group working in this area has grown and now there are 4 mathematicians active in this research, including one PhD student. This is already comparable with other research groups working on these problems.

Realization of the objectives 3 and 4 help significantly the mathematicians which study non-commutative polynomials and optimization above them, because they have a tool to handle the NC polynomials as well to provide fast and accurate answer on the question if given polynomial is SOHS (modulo cyc. equivalence), how to obtain rational SOHS decomposition of a rational NC polynomial, how to extract the minimum of a trace of NC polynomial etc. Software package NCsostools is becoming a package of choice for NC polynomials and is therefore a non-commutative equivalent of commutative packages SOSTools and GloptiPoly.

Main results: several version of Newton chip method, semidefinite formulations for NC polynomial convexity properties, practically and theoretically efficient methods to find rational SOHS factorizations, closing some open problems about particular BMV polynomials, NCsostools,...

Successful realization of objective 1 and 2 is important since this gives rise to a general framework for further copositive and semidefinite relaxations of many NP-hard combinatorial problems.

Main results: reformulations of hard non-convex problems as a copositive linear problems, tractable relaxations of hard problems by semidefinite programming, establishing relations between several copositive representations.

9.2. Pomen za razvoj Slovenije¹⁰

SLO

V Sloveniji ima projekt zelo pozitiven učinek: krepi skupino matematično obarvanih raziskovalcev s področja operacijskih raziskav. Le ta je bila do sedaj zelo majhna in pogosto premalo podkrovana z novimi matematičnimi odkritji. V tej skupini je izredno malo strokovnjakov s področja matematičnega programiranja. Tekom izvajanja projekta se je oblikovala skupina 4 ljudi, ki v Sloveniji delajo na tem področju in dosejajo dobre mednarodne rezultate. Skupina povezuje tudi ugledne matematike iz tujine, natančneje, tekem izvajanja projekta so se spletle trdne vezi z naslednjimi raziskovalci iz tujine:

- Univerza v Konstanzu, Nemčija
 - prof. dr. Marcus Schweighofer iz nemške Univerze v Konstanzu,
 - doktorska študentka Sabine Burgdorf,
- Univerza v Erlangnu, Nemčija:
 - doc. dr. Gabrielle Eichfelder
- Univerza v Groningenu, Nizozemska:
 - prof. dr. Miriam Duer
- Univerza v Kaliforniji, San Diego:
 - prof. dr. Bill Helton
- Univerza na Dunaju, Avstrija:
 - prof. dr. Immanuel Bomze

Skupina je prepoznana tako s strani teoretičnih kot tudi uporabnih matematikov. Ustvarja tudi večji interes za to področje, ki se že kaže v enem novem doktorskem študentu iz tega področja.

ANG

In Slovenia the project has very positive effect: it strengthens the operations research society. This society is actually very small and many researchers do not follow recent developments in the sub-area of mathematical programming.

During the two-year period of the project a new group of 4 Slovenian researchers has been formed and has achieved very good international recognition. It has established strong international relations with several eminent researchers:

University in Konstanz, Germany:

prof. Marcus Schweighofer, PhD,

- Sabine Burgdorf, PhD candidate

University of Erlangen-Nürnberg, Germany:

- prof. Gabrielle Eichfelder, PhD

University of Groningen, The Netherlands:

- prof. Miriam Duer, PhD

University of California at San Diego:

prof. Bill Helton, PhD

University of Vienna, Austrija:

- prof. Immanuel Bomze, PhD

The group is recognized within the theoretical and applied mathematicians and generates stronger interest for this research topics, resulting also in a new Slovene PhD student working in this area.

10. Samo za aplikativne projekte!

Označite, katerega od navedenih ciljev ste si zastavili pri aplikativnem projektu, katere konkretne rezultate ste dosegli in v kakšni meri so doseženi rezultati uporabljeni

Cilj		
F.01	Pridobitev novih praktičnih znanj, informacij in veščin	
	Zastavljen cilj	<input type="radio"/> DA <input type="radio"/> NE
	Rezultat	<input type="text"/>
	Uporaba rezultatov	<input type="text"/>
F.02	Pridobitev novih znanstvenih spoznanj	
	Zastavljen cilj	<input type="radio"/> DA <input type="radio"/> NE
	Rezultat	<input type="text"/>
	Uporaba rezultatov	<input type="text"/>
F.03	Večja usposobljenost raziskovalno-razvojnega osebja	
	Zastavljen cilj	<input type="radio"/> DA <input type="radio"/> NE
	Rezultat	<input type="text"/>
	Uporaba rezultatov	<input type="text"/>
F.04	Dvig tehnološke ravni	
	Zastavljen cilj	<input type="radio"/> DA <input type="radio"/> NE
	Rezultat	<input type="text"/>
	Uporaba rezultatov	<input type="text"/>
F.05	Sposobnost za začetek novega tehnološkega razvoja	
	Zastavljen cilj	<input type="radio"/> DA <input type="radio"/> NE
	Rezultat	<input type="text"/>
	Uporaba rezultatov	<input type="text"/>
F.06	Razvoj novega izdelka	

	Zastavljen cilj	<input type="radio"/> DA <input type="radio"/> NE
	Rezultat	<input type="text"/>
	Uporaba rezultatov	<input type="text"/>
F.07	Izboljšanje obstoječega izdelka	
	Zastavljen cilj	<input type="radio"/> DA <input type="radio"/> NE
	Rezultat	<input type="text"/>
	Uporaba rezultatov	<input type="text"/>
F.08	Razvoj in izdelava prototipa	
	Zastavljen cilj	<input type="radio"/> DA <input type="radio"/> NE
	Rezultat	<input type="text"/>
	Uporaba rezultatov	<input type="text"/>
F.09	Razvoj novega tehnološkega procesa oz. tehnologije	
	Zastavljen cilj	<input type="radio"/> DA <input type="radio"/> NE
	Rezultat	<input type="text"/>
	Uporaba rezultatov	<input type="text"/>
F.10	Izboljšanje obstoječega tehnološkega procesa oz. tehnologije	
	Zastavljen cilj	<input type="radio"/> DA <input type="radio"/> NE
	Rezultat	<input type="text"/>
	Uporaba rezultatov	<input type="text"/>
F.11	Razvoj nove storitve	
	Zastavljen cilj	<input type="radio"/> DA <input type="radio"/> NE
	Rezultat	<input type="text"/>
	Uporaba rezultatov	<input type="text"/>
F.12	Izboljšanje obstoječe storitve	
	Zastavljen cilj	<input type="radio"/> DA <input type="radio"/> NE
	Rezultat	<input type="text"/>
	Uporaba rezultatov	<input type="text"/>
F.13	Razvoj novih proizvodnih metod in instrumentov oz. proizvodnih procesov	
	Zastavljen cilj	<input type="radio"/> DA <input type="radio"/> NE
	Rezultat	<input type="text"/>
	Uporaba rezultatov	<input type="text"/>
F.14	Izboljšanje obstoječih proizvodnih metod in instrumentov oz. proizvodnih procesov	
	Zastavljen cilj	<input type="radio"/> DA <input type="radio"/> NE
	Rezultat	<input type="text"/>
	Uporaba rezultatov	<input type="text"/>
F.15	Razvoj novega informacijskega sistema/podatkovnih baz	
	Zastavljen cilj	<input type="radio"/> DA <input type="radio"/> NE
	Rezultat	<input type="text"/>

	Uporaba rezultatov	<input type="text"/>
F.16	Izboljšanje obstoječega informacijskega sistema/podatkovnih baz	
	Zastavljen cilj	<input type="radio"/> DA <input type="radio"/> NE
	Rezultat	<input type="text"/>
	Uporaba rezultatov	<input type="text"/>
F.17	Prenos obstoječih tehnologij, znanj, metod in postopkov v prakso	
	Zastavljen cilj	<input type="radio"/> DA <input type="radio"/> NE
	Rezultat	<input type="text"/>
	Uporaba rezultatov	<input type="text"/>
F.18	Posredovanje novih znanj neposrednim uporabnikom (seminarji, forumi, konference)	
	Zastavljen cilj	<input type="radio"/> DA <input type="radio"/> NE
	Rezultat	<input type="text"/>
	Uporaba rezultatov	<input type="text"/>
F.19	Znanje, ki vodi k ustanovitvi novega podjetja ("spin off")	
	Zastavljen cilj	<input type="radio"/> DA <input type="radio"/> NE
	Rezultat	<input type="text"/>
	Uporaba rezultatov	<input type="text"/>
F.20	Ustanovitev novega podjetja ("spin off")	
	Zastavljen cilj	<input type="radio"/> DA <input type="radio"/> NE
	Rezultat	<input type="text"/>
	Uporaba rezultatov	<input type="text"/>
F.21	Razvoj novih zdravstvenih/diagnostičnih metod/postopkov	
	Zastavljen cilj	<input type="radio"/> DA <input type="radio"/> NE
	Rezultat	<input type="text"/>
	Uporaba rezultatov	<input type="text"/>
F.22	Izboljšanje obstoječih zdravstvenih/diagnostičnih metod/postopkov	
	Zastavljen cilj	<input type="radio"/> DA <input type="radio"/> NE
	Rezultat	<input type="text"/>
	Uporaba rezultatov	<input type="text"/>
F.23	Razvoj novih sistemskih, normativnih, programskih in metodoloških rešitev	
	Zastavljen cilj	<input type="radio"/> DA <input type="radio"/> NE
	Rezultat	<input type="text"/>
	Uporaba rezultatov	<input type="text"/>
F.24	Izboljšanje obstoječih sistemskih, normativnih, programskih in metodoloških rešitev	
	Zastavljen cilj	<input type="radio"/> DA <input type="radio"/> NE
	Rezultat	<input type="text"/>
	Uporaba rezultatov	<input type="text"/>

F.25	Razvoj novih organizacijskih in upravljavskih rešitev	
	Zastavljen cilj	<input type="radio"/> DA <input type="radio"/> NE
	Rezultat	<input type="text"/>
	Uporaba rezultatov	<input type="text"/>
F.26	Izboljšanje obstoječih organizacijskih in upravljavskih rešitev	
	Zastavljen cilj	<input type="radio"/> DA <input type="radio"/> NE
	Rezultat	<input type="text"/>
	Uporaba rezultatov	<input type="text"/>
F.27	Prispevek k ohranjanju/varovanje naravne in kulturne dediščine	
	Zastavljen cilj	<input type="radio"/> DA <input type="radio"/> NE
	Rezultat	<input type="text"/>
	Uporaba rezultatov	<input type="text"/>
F.28	Priprava/organizacija razstave	
	Zastavljen cilj	<input type="radio"/> DA <input type="radio"/> NE
	Rezultat	<input type="text"/>
	Uporaba rezultatov	<input type="text"/>
F.29	Prispevek k razvoju nacionalne kulturne identitete	
	Zastavljen cilj	<input type="radio"/> DA <input type="radio"/> NE
	Rezultat	<input type="text"/>
	Uporaba rezultatov	<input type="text"/>
F.30	Strokovna ocena stanja	
	Zastavljen cilj	<input type="radio"/> DA <input type="radio"/> NE
	Rezultat	<input type="text"/>
	Uporaba rezultatov	<input type="text"/>
F.31	Razvoj standardov	
	Zastavljen cilj	<input type="radio"/> DA <input type="radio"/> NE
	Rezultat	<input type="text"/>
	Uporaba rezultatov	<input type="text"/>
F.32	Mednarodni patent	
	Zastavljen cilj	<input type="radio"/> DA <input type="radio"/> NE
	Rezultat	<input type="text"/>
	Uporaba rezultatov	<input type="text"/>
F.33	Patent v Sloveniji	
	Zastavljen cilj	<input type="radio"/> DA <input type="radio"/> NE
	Rezultat	<input type="text"/>
	Uporaba rezultatov	<input type="text"/>
F.34	Svetovalna dejavnost	
	Zastavljen cilj	<input type="radio"/> DA <input type="radio"/> NE

	Rezultat	<input type="text"/>
	Uporaba rezultatov	<input type="text"/>
F.35	Drugo	
	Zastavljen cilj	<input type="radio"/> DA <input type="radio"/> NE
	Rezultat	<input type="text"/>
	Uporaba rezultatov	<input type="text"/>

Komentar

11. Samo za aplikativne projekte!

Označite potencialne vplive oziroma učinke vaših rezultatov na navedena področja

	Vpliv	Ni vpliva	Majhen vpliv	Srednji vpliv	Velik vpliv	
G.01	Razvoj visoko-šolskega izobraževanja					
G.01.01.	Razvoj dodiplomskega izobraževanja	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
G.01.02.	Razvoj podiplomskega izobraževanja	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
G.01.03.	Drugo: <input type="text"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
G.02	Gospodarski razvoj					
G.02.01	Razširitev ponudbe novih izdelkov/storitev na trgu	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
G.02.02.	Širitev obstoječih trgov	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
G.02.03.	Znižanje stroškov proizvodnje	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
G.02.04.	Zmanjšanje porabe materialov in energije	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
G.02.05.	Razširitev področja dejavnosti	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
G.02.06.	Večja konkurenčna sposobnost	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
G.02.07.	Večji delež izvoza	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
G.02.08.	Povečanje dobička	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
G.02.09.	Nova delovna mesta	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
G.02.10.	Dvig izobrazbene strukture zaposlenih	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
G.02.11.	Nov investicijski zagon	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
G.02.12.	Drugo: <input type="text"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
G.03	Tehnološki razvoj					
G.03.01.	Tehnološka razširitev/posodobitev dejavnosti	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
G.03.02.	Tehnološko prestrukturiranje dejavnosti	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
G.03.03.	Uvajanje novih tehnologij	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
G.03.04.	Drugo: <input type="text"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
G.04	Družbeni razvoj					
G.04.01	Dvig kvalitete življenja	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	

G.04.02.	Izboljšanje vodenja in upravljanja	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
G.04.03.	Izboljšanje delovanja administracije in javne uprave	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
G.04.04.	Razvoj socialnih dejavnosti	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
G.04.05.	Razvoj civilne družbe	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
G.04.06.	Drugo:	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
G.05.	Ohranjanje in razvoj nacionalne naravne in kulturne dediščine in identitete	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
G.06.	Varovanje okolja in trajnostni razvoj	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
G.07	Razvoj družbene infrastrukture					
G.07.01.	Informacijsko-komunikacijska infrastruktura	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
G.07.02.	Prometna infrastruktura	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
G.07.03.	Energetska infrastruktura	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
G.07.04.	Drugo:	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
G.08.	Varovanje zdravja in razvoj zdravstvenega varstva	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
G.09.	Drugo:	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	

Komentar

--

12. Pomen raziskovanja za sofinancerje, navedene v 2. točki¹¹

1.	Sofinancer		
	Vrednost sofinanciranja za celotno obdobje trajanja projekta je znašala:		EUR
	Odstotek od utemeljenih stroškov projekta:		%
	Najpomembnejši rezultati raziskovanja za sofinancerja		Šifra
	1.		
	2.		
	3.		
	4.		
	Komentar		
	Ocena		
2.	Sofinancer		
	Vrednost sofinanciranja za celotno obdobje trajanja projekta je znašala:		EUR

		Odstotek od utemeljenih stroškov projekta:		%
	Najpomembnejši rezultati raziskovanja za sofinancerja			Šifra
	1.			
	2.			
	3.			
	4.			
	5.			
	Komentar			
	Ocena			
3.	Sofinancer			
	Vrednost sofinanciranja za celotno obdobje trajanja projekta je znašala:			EUR
	Odstotek od utemeljenih stroškov projekta:			%
	Najpomembnejši rezultati raziskovanja za sofinancerja			Šifra
	1.			
	2.			
	3.			
	4.			
	5.			
	Komentar			
	Ocena			

C. IZJAVE

Podpisani izjavljam/o, da:

- so vsi podatki, ki jih navajamo v poročilu, resnični in točni
- se strinjamo z obdelavo podatkov v skladu z zakonodajo o varstvu osebnih podatkov za potrebe ocenjevanja, za objavo 6., 7. in 8. točke na spletni strani <http://sicris.izum.si/> ter obdelavo teh podatkov za evidence ARRS
- so vsi podatki v obrazcu v elektronski obliki identični podatkom v obrazcu v pisni obliki
- so z vsebino zaključnega poročila seznanjeni in se strinjajo vsi soizvajalci projekta

Podpisi:

Janez Povh	in	
podpis vodje raziskovalnega projekta		zastopnik oz. pooblaščen oseba RO

Kraj in datum:

Novo mesto

19.4.2010

Oznaka poročila: ARRS-RPROJ-ZP-2010-1/166

¹ Samo za aplikativne projekte. [Nazaj](#)

² Napišite kratko vsebinsko poročilo, kjer boste predstavili raziskovalno hipotezo in opis raziskovanja. Navedite ključne ugotovitve, znanstvena spoznanja ter rezultate in učinke raziskovalnega projekta. Največ 18.000 znakov vključno s presledki (približno tri strani, velikosti pisave 11). [Nazaj](#)

³ Realizacija raziskovalne hipoteze. Največ 3.000 znakov vključno s presledki (približno pol strani, velikosti pisave 11). [Nazaj](#)

⁴ Samo v primeru bistvenih odstopanj in sprememb od predvidenega programa raziskovalnega projekta, kot je bil zapisan v predlogu raziskovalnega projekta. Največ 3.000 znakov vključno s presledki (približno pol strani, velikosti pisave 11). [Nazaj](#)

⁵ Navedite največ pet najpomembnejših znanstvenih rezultatov projektne skupine, ki so nastali v času trajanja projekta v okviru raziskovalnega projekta, ki je predmet poročanja. Za vsak rezultat navedite naslov v slovenskem in angleškem jeziku (največ 150 znakov vključno s presledki), rezultat opišite (največ 600 znakov vključno s presledki) v slovenskem in angleškem jeziku, navedite, kje je objavljen (največ 500 znakov vključno s presledki), izberite ustrezno šifro tipa objave po Tipologiji dokumentov/del za vodenje bibliografij v sistemu COBISS ter napišite ustrezno COBISS.SI-ID številko bibliografske enote. Navedeni rezultati bodo objavljeni na spletni strani <http://sicris.izum.si/>.

PRIMER (v slovenskem jeziku):

Naslov: Regulacija delovanja beta-2 integrinskih receptorjev s katepsinom X;

Opis: Cisteinske proteaze imajo pomembno vlogo pri nastanku in napredovanju raka. Zadnje študije kažejo njihovo povezanost s procesi celičnega signaliziranja in imunskega odziva. V tem znanstvenem članku smo prvi dokazali... (največ 600 znakov vključno s presledki)

Objavljeno v: OBERMAJER, N., PREMZL, A., ZAVAŠNIK-BERGANT, T., TURK, B., KOS, J.. Carboxypeptidase cathepsin X mediates $\beta 2$ - integrin dependent adhesion of differentiated U-937 cells. Exp. Cell Res., 2006, 312, 2515-2527, JCR IF (2005): 4.148

Tipologija: 1.01 - Izvirni znanstveni članek

COBISS.SI-ID: 1920113 [Nazaj](#)

⁶ Navedite največ pet najpomembnejših družbeno-ekonomsko relevantnih rezultatov projektne skupine, ki so nastali v času trajanja projekta v okviru raziskovalnega projekta, ki je predmet poročanja. Za vsak rezultat navedite naslov (največ 150 znakov vključno s presledki), rezultat opišite (največ 600 znakov vključno s presledki), izberite ustrezen rezultat, ki je v Šifrantu raziskovalnih rezultatov in učinkov (Glej: <http://www.arrs.gov.si/sl/gradivo/sifranti/sif-razisk-rezult.asp>), navedite, kje je rezultat objavljen (največ 500 znakov vključno s presledki), izberite ustrezno šifro tipa objave po Tipologiji dokumentov/del za vodenje bibliografij v sistemu COBISS ter napišite ustrezno COBISS.SI-ID številko bibliografske enote.

Navedeni rezultati bodo objavljeni na spletni strani <http://sicris.izum.si/>. [Nazaj](#)

⁷ Navedite rezultate raziskovalnega projekta v primeru, da katerega od rezultatov ni mogoče navesti v točkah 6 in 7 (npr. ker se ga v sistemu COBISS ne vodi). Največ 2.000 znakov vključno s presledki. [Nazaj](#)

⁸ Pomen raziskovalnih rezultatov za razvoj znanosti in za razvoj Slovenije bo objavljen na spletni strani: <http://sicris.izum.si/> za posamezen projekt, ki je predmet poročanja. [Nazaj](#)

⁹ Največ 4.000 znakov vključno s presledki [Nazaj](#)

¹⁰ Največ 4.000 znakov vključno s presledki [Nazaj](#)

¹¹ Rubrike izpolnite/prepišite skladno z obrazcem "Izjava sofinancerja" (<http://www.arrs.gov.si/sl/progproj/rproj/gradivo/>), ki ga mora izpolniti sofinancer. Podpisan obrazec "Izjava sofinancerja" pridobi in hrani nosilna raziskovalna organizacija – izvajalka projekta. [Nazaj](#)

Obrazec: ARRS-RPROJ-ZP/2010 v1.00a

03-C0-EE-0B-10-66-13-DF-D6-4D-2C-7A-2F-F6-DF-32-64-43-AD-6D