Die

niedere construirende und

berechnende

Elementar-Geometrie.

Ein

leichtfaßliches Lehrbuch

für

Handwerker und überhaupt für Alle, die zu ihren Geschäften geometrische Kenntnisse brauchen.

von
Johann Kersnik Lehrer
der Physik etc.

Mit einer Kupfertafel.

Laibach.

Gedruckt bei Ignaz Aloys Edlen v. Kleinmayr.

1830.

Vorbericht.

Zur Herausgabe der hier vorliegenden Elemente bewog mich:

1. Das Bedürfniß eines zweckmäßigen geometrischen Elementar-Werkchens, für Anfänger in der Geometrie, für Zeichner, Handwerker und Künstler, die nicht Gelegenheit haben, einen ordentlichen mathematischen Lehrcurs zu besuchen, und öfters anderer Vorbereitungswissenschaften entbehren.
2. Die eigene Erfahrung, die ich an der hiesigen Gewerbs-Industrie-Schule machte; denn mir wurde stets die erfreuliche Ueberzeugung zu Theil, daß die Schüler dieser so nützlichen Anstalt unerwartete Fortschritte in der Geometrie machten, wenn ich meine Vorlesungen mit den vorliegenden Anfangsgründen begann.
3. Dürften durch die vorliegenden Anfangsgründe manche Jünglinge zum Studium der Geometrie, wegen ihrer leichten Faßlichkeit angeeifert werden.
4. Endlich und insbesondere, um den Schülern der Gewerbs-Industrie-Schule ein Büchelchen in die Hand zu geben, wodurch sie in Stand gesetzt wären, das in der Schule Gehörte, auch zu Hause zu wiederhohlen und leichter auszuüben.

Der Verfasser.

Vorbericht

für

die geneigten Leser.

Dieses geometrische Werkchen, als die ersten Anfangsgründe, ist für solche, die nicht Zeit und Gelegenheit haben, schulmäßig den Studien obzuliegen; — deswegen ist hier die streng mathematische Beweisform gänzlich beseitiget worden. Anfangsgründe der Geometrie werden da nur in Hinsicht ihrer practischen Anwendung gelehret und vorgetragen.

Einige vorläufige Erläuterungen
die das
Verstehen und Lesen geometrischer Werke erleichtern.

Die arithmetischen Zeichen:

$=$ ist das Zeichen der Gleichheit, z. B. $5 = 4 + 1$, d. i., 5 ist gleich 4 mehr 1.

Das Zeichen $+$ bedeutet die Addition, z. B. $5 + 6$, das heißt: 5 und 6 sollen addirt werden.

Das Zeichen — bedeutet die Subtraction, z. B. $6 - 5$, das heißt: 5 soll von 6 abgezogen oder subtrahirt werden.

Das Zeichen $\times$ bedeutet die Multiplication, z. B. 5×6, das heißt: 5 soll durch 6 multiplicirt werden.

Das Zeichen : bedeutet die Division, z. B. $10 : 2$, das heißt: 10 soll durch 2 dividirt werden.

Oder allgemein $a + b = c$, d. h. a zu b addirt, ist gleich c.
$a - b = d$, d. h. b von a abgezogen, ist gleich d.
$a \times b = ab$, d. h. a multiplicirt b, ist gleich ab.
$a : b = q$, d. h. a dividirt durch b, ist gleich q.

2a, 3a, na, heißt so viel, als die Größe a ist zweimal, dreimal, nmal genommen worden.

a^2, a^3, a^n, heißt: a ist zur 2ten, 3ten, nten Würde oder Potenz erhoben worden.

$\frac{a}{2}$, $\frac{a}{3}$, $\frac{a}{n}$, heißt: die Größe a ist durch 2, 3, n dividirt worden.

$\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[n]{a}$, heißt: aus der Größe a ist die 2te, 3te, nte Wurzel zu suchen.

$a : b, c : d$, heißt: es verhält sich a geometrisch zu b, c verhält sich geometrisch zu d.

a — b, c — d, heißt: es verhält sich a arithmetisch zu b, c verhält sich arithmetisch zu d.

a : b = c : d, bezeichnet eine geometrische Proportion.

a — b = c — d, bezeichnet eine arithmetische Proportion.

a ∷ b ∷ c ∷ d ∷ e ∷ f, bedeutet eine geometrische Reihe oder Progression.

a — b — c — d — e — f, bedeutet eine arithmetische Reihe oder Progression.

Log. bedeutet das Wort: Logarithmus.

Geometrische Zeichen.

Zeichen eines Winkels überhaupt	∠		
„ eines rechten Winkels	∟		
„ der Parallel-Linien	∥		
„ der Parallel- und gleichen Linien	#		
„ eines Dreieckes oder Triangels überhaupt . .	△		
„ eines rechtwinkelichten Triangels	⊿		
„ eines Quadrates	□		
„ mehrere	▫		
„ eines Rechteckes oder Rectangels	▭		
„ eines Rhombus	▱		
„ eines Rhomboides	▱		
„ der Kreis-Linie oder Peripherie	P	oder	p
„ der halben Kreis-Linie	$\frac{P}{2}$	„	$\frac{p}{2}$
„ des Quadranten	$\frac{P}{4}$	„	$\frac{p}{4}$
„ eines Bogens	⌒	„	∝
„ eines Durchmessers oder Diameter . . .	D	„	d
„ eines Halbmessers oder Radius	R	„	r
„ einer Kreis- oder Zirkelfläche	C	„	c
„ einer halben Kreisfläche	$\frac{C}{2}$	„	$\frac{c}{2}$
„ einer viertel Kreisfläche	$\frac{C}{4}$	„	$\frac{c}{4}$

Erster Theil.

I. Abschnitt.

Das für die ersten Anfänger und die Zeichner Nothwendigste aus der Geometrie.

§. 1.

Was Puncte, Linien, Winkel, Dreiecke, Vielecke, Kreise, andere Flächen, Körper u. s. f. für Dinge sind, lernt man in den allerersten Anfangsgründen der Geometrie.

§. 2.

Wem ist es unbekannt, wie häufig diese Namen im gemeinen Leben vorkommen? Deswegen ist es gewiß nützlich, ihre Eigenschaften, ihre Entstehung und Verzeichnung besonders zu erklären und zu zeigen, wie sie einsichtlich anzuwenden sind, und welche Vortheile diese Anwendung gewähret.

§. 3.

Es lehrt Jedermann die Erfahrung, daß er sich so, wie jedes andere Ding irgendwo befindet; dieses irgendwo heißt der Raum, näher bestimmt der Ort, der Platz.

§. 4.

Gewöhnlich läßt sich der Raum nach dreierlei Seiten oder Ausdehnungen betrachten, und bekömmt den Namen eines geometrischen Körpers; ist der Raum ausgefüllet, oder mit Materie besetzet, eines physischen Körpers.

§. 5.

Ein geometrischer Körper ist demnach die Ausdehnung des Raumes in die Länge, Breite und Höhe; denkt man sich diese drei Bestimmungen, abgesehen von allen Stoffen, so hat man den Begriff von einem geometrischen Körper, mit dem man im gemeinen Leben selten oder niemals zu thun hat.

§. 6.

Die Gränzen oder das Aeußerste des Körpers heißt man die Fläche, insbesondere Oberfläche, wenn von der ganzen Begränzung des ganzen Körpers die Rede ist.

§. 7.

Die Gränzen oder das Aeußerste an einer Fläche, heißt die Linie.

§. 8.

Die Gränzen der Linien heißen Puncte. Es erhellet von selbst, was man unter Standpunct, Anhaltpunct, Theilungs-, Angriffs-, Scheidungs-Punct u. s. f. verstehen soll.

§. 9.

Wenn man auch diese Begriffe aus der Bewegung eines Punctes, einer Linie, einer Fläche, ableitet, so ist es schwer, den Begriff vom geometrischen Puncte festzusetzen.

§. 10.

Den Punct bezeichnen Verschiedene verschieden. Der Lehrer der Geometrie mit einem Buchstaben, gewöhnlich, wenn nur von einem die Rede ist, mit a, spricht man von zweien, so braucht man dazu a und b. — Der Zeichner bezeichnet den Punct mit einem Tusche-, Kreide-, Kohle-, Tinten- oder Färbe-Tuft.

Der Feldmesser bedient sich zur Bezeichnung der Puncte auf dem Felde, der Pflöcke, Stangen, Fahnen, Kreuzbalken und sogar der Pyramiden. Jeder Handwerker bedient sich eines eigenen Instrumentes zur Bezeichnung der in seinem Handwerke vorkommenden Stellpuncte.

§. 11.

Eine Linie wird in der Geometrie durch einen Strich angezeigt, den man mit der Tinte, Kreide, Bleistift, Tusch u. s. f. zieht. Zu Anfang desselben steht a zu Ende b. Dieser Strich wird dann für die Linie selbst gehalten und gelesen. Auch pflegt man nicht selten die Linien durch nahe an einander stehende Puncte zu bezeichnen, welche dann punctirte Linien heißen.

§. 12.

Man unterscheidet dreierlei Linien: gerade, Fig. 1; krumme, Fig. 2; und gemischte, d. i. gerade und krumme, Fig. 3.

§. 13.

Gerade Linien sind alle von einerlei Art, sie unterscheiden sich blos durch die Größe von einander. Gleiche gerade Linien decken sich ganz, ungleiche nur zum Theile, wenn man ihre Anfangspuncte auf einander legt, und ihre Endespuncte auf einander stellt oder zu stellen trachtet. Legt man Fig. 29 den Anfangspunct der geraden Linie ab, in den Anfangspunct der Linie cd, so daß der Punct a in c, und der Punct b in die Linie cd fällt, so wird er den Endespunct d nicht treffen, sondern einen andern Punct e gemein mit der Linie cd haben, woraus man ersieht, daß die leztere Linie um das Stück ed größer sey, als die Linie ab.

§. 14.

Man übe sich im Lesen der Linien, indem man sich wohl zu merken hat, daß der Anfangspunct den Namen eines Buchstaben, und der Endespunct den Namen eines andern Buchstaben erhält, wenn nicht besondere Umstände mehrere Buchstaben erfordern.

§. 15.

Zur Uebung im Linienlesen mögen dienen Fig. 1, wo die gerade Linie ab, Fig. 4, wo die geraden Linien ab, ac, bd, cd, Fig. 5 u. s. f.

§. 16.

Es ist aus dem Gesagten ersichtlich, daß sich von einer Linie ein, einer andern Linie gleiches Stück abnehmen, abmessen, oder wie man sich auszudrücken pflegt, abschneiden läßt. Dazu bedient man sich eines Fadens, eines Zirkels, wodurch das Uebertragen der gegebenen Linie geschieht; so überträgt sich Fig. 29, ab auf cd, und bestimmt den Unterschied der beiden Linien ed. — Daraus erklärt sich, wie gerade Linien von geraden Linien abgezogen werden. Sollte z. B. Fig. 10 von ab, ac abgezogen werden, so sieht Jedermann den Rest cb.

§. 17.

Jede gerade Linie läßt sich von beiden Seiten verlängern, man lege nur an ein Stück der zu verlängernden Seite nahe ein richtiges Lineal an, und ziehe aus diesem Stücke mit dem beliebten abfärbenden Stoffe den Strich oder die Linie fort. Darin liegt das Zusammenzählen oder die Addition der Linien. Es seyn Fig. 32 ad + dc + ce + ed gerade Linien, so ist augenscheinlich ihre Summe gleich der geraden Linie ab. Anfänger mögen sich vorzüglich in der Addition und Subtraction, oder in der der Angabe gemäßen Abkürzung und Verlängerung der geraden Linien üben.

§. 18.

Eine gegebene gerade Linie verdoppeln, verdrei=, ver=vier=, ver n fachen heißt nichts anders, als eine gerade Linie 2, 3, 4, nmal nehmen, oder mit 2, 3, 4, n multipliciren. So sieht man Fig. 47, die Linie ab = der dreifachen al oder ab = 3al, eben so die Linie ag = 3ae, die bk = 3ah. Mittelst eines genauen in Schuh und Zoll eingetheilten Maßstabes übe sich der Anfänger in der Geometrie, in der Anwendung des Gesagten; — messe gerade Linien oder Entfernungen, Längen, Breiten oder Höhen von Gegenständen in gerader Richtung, nehme z. B. das Zweifache, Dreifache, nfache des gefundenen Maßes, so werden seine Begriffe von dem Puncte und der Linie von selbst klar werden, denn man wird sich überzeugen, daß die Länge eines Weges durch eine geometrische Linie richtig angegeben wird. Niemand denkt sich bei dieser Angabe eine Breite des Weges, sondern blos eine Entfernung zweier Puncte oder Gegenstände, die da für Puncte angesehen werden. Trägt man diese Messungen dann mittelst der geraden Striche oder Linien zu Papier, nimmt man eine bestimmte Linie als eine Einheit an, und mißt die auf dem Papiere gezogenen damit, so erhält man dieser Einheit gemäße Linien oder Längen. Bedeutet z. B. Fig. 50 ac eine Klafter im gemäßen oder verjüngtem Maße, so enthält bc 6 Klafter in eben selben Maße, eben so würde bc 6 Schuh nach dem verjüngtem Maße geben, wenn ac einen Schuh mißt. Diese und noch mehrere Uebungen, die hier nicht angegeben werden können, werden Jedem leicht fallen, und das fernere Fortschreiten in der Geometrie erleichtern.

§. 19.

Das nämliche Verfahren soll in der Theilung der Linien statt finden. Man suche die Hälfte, ein Drittel, ein Viertel, ein ntel einer Linie mittelst einer Schnur, eines

Zirkels, oder sonst eines Maßstabes, so werden Jedem die in der Folge vorzukommenden Theilungsmethoden wichtig scheinen. Man wird leicht finden, daß Fig. 48 ab $= \frac{1}{5}$ ad, ai $= \frac{1}{5}$ ab, Fig. 66 ad $= \frac{1}{3}$ ab, Fig. 67, ad $= \frac{1}{4}$ ab sey, anderer Beispiele und Uebungen nicht zu gedenken, die Jedermann selbst mit Vergnügen und großen Nutzen vornehmen möge.

§. 20.

Wenn man sagt, eine gerade Linie ist jene, deren kleinsten Theile die nämliche Richtung haben, so wird man jene, deren jeder Theil eine andere Richtung hat, ungerade oder krumme Linien heißen. Gerade Linien gibt es nur einerlei Art, krumme Linien aber gibt es von unzähligen Arten. Hier sollen nur die Eigenschaften und Verzeichnungen der anwendbarsten im gemeinen Leben vorkommen.

§. 21.

Es sey, Fig. 5, c ein Punct, ac eine gerade Linie, und es bewege sich ac um den Punct c so, daß a immer die nämliche Entfernung von c behält, und eine Spur seiner Bewegung zurückläßt, bis es in den Ort zurückgekehrt ist, so ist diese Spur in der Richtung einer Kreislinie, oder die Kreislinie (die Peripherie) selbst. Der Punct heißt der Mittelpunct, die gerade ac der Halbmesser der Kreislinie; eben so werden cb, cd, ce, cf gleich bei erstem Anblicke für Halbmesser erkläret, und daraus wird gefolgert: jede gerade Linie, welche den Mittelpunct der Kreislinie mit einem Puncte derselben verbindet, heißt ein Halbmesser. Man sieht auch zugleich, daß die Halbmesser der nämlichen Kreislinie unzählige seyn können, welche aber alle unter einander gleich sind; so ist ac $=$ bc $=$ dc $=$ ec $=$ fc, daher ist es hinlänglich, nur einen zu kennen; es ist auch sehr leicht einzusehen, daß gleiche Halbmesser gleiche Kreisl inien oder Peripherien, ungleiche Halbmesser ungleiche, und zwar größere, größere und kleinere Halbmesser kleinere Peripherien erzeugen, oder wie man sich gewöhnlich auszudrücken pflegt, beschreiben.

§. 22.

Sind die beiden Puncte, Fig. 6, a und b in der Kreislinie, und c in ihrem Mittelpunct, so ist die gerade Linie ab, welche dieselben verbindet, und zugleich durch den Mittelpunct geht, der Durchmesser der Kreislinie ahdgbfa.

Eine gerade Linie hingegen, welche zwei Puncte der Kreislinie zwar verbindet, aber nicht durch den Mittelpunct gezogen oder gestrichen ist, heißt eine Sehne, so ist, Fig. 6, hg, Fig. 7, ae und gf eine Sehne. — Sehnen sind demnach gerade Linien, welche Puncte der Kreislinie verbinden, ohne durch den Mittelpunct derselben zu gehen.

Betrachtet man aber auch den Durchmesser als eine Sehne, so sieht man nach mehreren Versuchen, in der nämlichen Kreislinie Sehnen zu ziehen, oder zu zeichnen, daß der Durchmesser die größte Sehne seyn muß, oder es ist in nämlicher Kreislinie keine Sehne dem Durchmesser gleich. Auch wird man gewahr, daß jede Sehne größer sey, je näher sie dem Mittelpuncte zu liege. Fig. 7 liegt gf näher am Mittelpuncte, als die Sehne ae, und man sieht, daß gf > ae sey.

§. 23.

Es kann dem Aufmerksamen nicht entgehen, daß die Sehnen die Kreislinien bald in größere, bald in kleinere Stücke theilen, man sagt sonst von der Kreislinie Stücke abschneiden. Diese abgetheilten oder abgeschnittenen Stücke heißt man Bögen, welche den abschneidenden Sehnen zugehören. Jeder Sehne gehören zwei Bögen zu. So entsprechen der Sehne hg, Fig. 6, die Stücke oder Bögen der

Kreislinie hdg und gblah, die sichtbar ungleich sind. Nur dem Durchmesser entsprechen zwei gleiche Stücke oder Bögen der Kreislinie, die man Halbkreislinien oder Halbkreisperipherien nennt; denn wären diese nicht gleich, so müßte es in der nämlichen Kreislinie ungleiche Durchmesser geben, nachdem aber alle Halbmesser in der nämlichen Kreislinie (§. 21) gleich, der Durchmesser zweien Halbmessern Fig. 7, $ac + cb = ab$ ist, so liegt die Theilung der Kreislinie durch den Durchmesser in zwei gleiche Hälften oder Halbkreislinien offenbar vor den Augen.

§. 24.

Theilt eine kleinere Sehne als der Durchmesser die Kreislinie, so kann nur der kleinere Bogen als gespannt betrachtet werden. Kreisbögen sind also Stücke von der Kreislinie, die bald größer, bald kleiner sind.

Man erwäge wohl, daß ein Kreisbogen nur einer bestimmten Kreislinie, diese einem bestimmten Halbmesser zugehöre.

§. 25.

Um genauer die Größe der Stücke oder Bögen einer Kreislinie angeben zu können, ist man übereingekommen, jede Kreislinie, sie mag größer oder kleiner seyn, in 360 Theile (o) einzutheilen, welche Theile dann Grade (Schritte, Stufen) heißen. Jeder Grad wird wieder in 60 kleinere Theile eingetheilet, die Minuten (Stufchen) und jede Minute erhält dann 60 Theile, welche Secunden heißen. In Büchern findet man für Grad, Minuten, Secunden, die Bezeichnung o, 1, 11. Demnach ist es klar, daß die halbe Kreislinie 180°, das Viertel oder auch der Quadrat 90° u. s. f. habe. Der Anfänger berechne ferner zur Uebung das Drittel, Sechstel, Achtel, Neuntel, Zehntel u. s. f. der Kreislinie in Graden.

§. 26.

Dabei ist vorzüglich zu beherzigen, daß jede Kreislinie 360° habe, welche der Größe nach einander nicht gleich seyn können, wenn die Kreislinien ungleichen Halb- oder Durchmesser angehören. Eine größere Kreislinie hat demnach größere Grade, eine kleinere, kleinere. Der Quadrat jeder Kreislinie enthält 90°, aber der der größeren Kreislinie zugehörige, ist auch größer, als der kleineren angehörige. Um dieses noch genauer einzusehen, denke man sich zwei verschiedene Kreislinien in gerade Linien abgewickelt, und in gleich viele Theile getheilt, so sieht man gewöhnlich leichter ein, daß die größere, größere, und die kleinere, kleinere Theile geben wird.

§. 27.

Jede Kreislinie kann mit einer geraden Linie gleichgesetzt werden. Untersucht man wie vielmal der Durchmesser der Kreislinie in der dieser gleichen geraden enthalten ist, so ergibt es sich, daß der Durchmesser der Kreislinie in der ihr gleichen geraden beiläufig $3\frac{1}{7}$ oder $\frac{314}{100}$ enthalten sey. Daher läßt sich, wenn der Durchmesser gegeben ist, die Länge des in Graden gegebenen Bogens der Kreislinie durch eine wirkliche Messung, oder durch die Berechnung bestimmen. — Es sey z. B. der Durchmesser einer Kreislinie gleich $17\frac{1}{2}$ Fuß, so beträgt die Kreislinie $3\frac{1}{7}$ mal $17\frac{1}{2}$ Fuß, oder 55 Fuß in die Länge. Theilt man 55 Fuß durch 360, so gibt der Quotient die Länge eines Grades, gleich 1 Zoll, 10 Linien. Die Auflösung ähnlicher Aufgaben soll durch eine fleißige Uebung gewiß ganz leicht werden. Daher nehme man dem Durchmesser einer Kreislinie an, gleich 1, 2, 3, 4, n, oder man setze die Größe der Kreislinie als bekannt an, oder man nehme einen Grad der Kreislinie als gegeben an, berechne nachdem die Größe der Kreislinie, indem man die Größe des Grades mit 360 multipliciret, zu der gegebenen Kreislinie den Durchmesser sucht, indem man die Proportion ansetzt: wie sich 22 : 7 verhält, eben so verhält sich die Länge der Kreislinie zur Länge des ihr zugehörigen Durchmessers, z. B.: Es sey die Größe eines Grades einer Kreislinie 11 Zoll, man multiplicire 11 mit 360, so gibt dieß zum Producte 3960, welches mit 7 multiplicirt 27720 macht, 27720 getheilt durch 22, gibt zum Quotus 105 Zoll = 8 Fuß, 9 Zoll (8′ + 9″) als den Durchmesser einer Kreislinie, deren ein Grad 11 Zoll mißt.

Dergleichen Uebungen nehme jeder Anfänger so lange vor, bis ihm der Begriff von der Kreislinie, dessen Durchmesser und dessen Verhältnisses zur selben ganz klar und deutlich werde, und die Grad-Eintheilung einleuchte.

§. 28.

Eine gerade Linie, welche wie immer verlängert, nur einen Punct mit der Kreislinie gemein hat, heißt deren Tangente oder Berührungslinie; hat sie einen, verlängert zwei Puncte mit der Kreislinie gemein, und erstreckt sich selbe über die Kreislinie hinaus, so heißt sie deren Secante oder Schneidende. Fig. 6 zeigt ik eine Tangente, welche den Punct b mit der Kreislinie gemein hat. Eben so sind be, ae, Fig. 58 Tangenten; ce eine Secante. Fig. 57 cd, Fig. 59 cb stellen Secanten oder schneidende Linien vor.

§. 29.

Haben zwei oder mehrere Kreislinien den nämlichen Mittelpunct, so heißt man sie concentrische Kreislinien. Man sieht leicht ein, daß solche Kreislinien, wenn ihre Halbmesser nicht gleich sind, nie sich treffen, bedecken, durchkreuzen, oder wie man zu sagen pflegt, schneiden. Fig. 30 stellt drei concentrische Kreislinien vor, deren Halbmesser cd, cb, ca sind.

§. 30.

§. 30.

Begegnen sich zwei Kreislinien von verschiedenen Mittelpuncten, und treffen sie irgendwo zusammen, so nennt man den Ort, wo dieses Zusammentreffen statt hat, den Durchschnittspunct; die sich treffenden Stücke der Kreislinie, Durchschnittsbögen. Dergleichen Durchschnittspuncte und Durchschnittsbögen zeigt Fig. 55 in h, f, g, e, die Durchschnittsbögen sind hf und ge. Fig. 60 stellt zwei Kreislinien vor, die sich von außen, und Fig. 61 stellt zwei Kreislinien vor, die sich von innen berühren, so wie in Fig. 62 und 63 drei sich von außen berührende Kreislinien zu sehen sind.

Von andern krummen Linien folgt später.

II. Abschnitt.

Von der Lage, Verbindung und Benennung mehrerer geraden Linien, wenn man selbe zugleich in Betrachtung zieht und vergleicht.

§. 31.

Zwei oder mehrere gerade Linien können in der nämlichen Ebene, ohne sich zu treffen, oder zu schneiden, zwar unzählige Lagen gegen einander haben, man pflegt aber eigentlich nur dreierlei Lagen anzugeben.

Zwei oder mehrere in der nämlichen Ebene gelegene gerade Linien sind entweder parallel, convergent (zusammengehend, zusammenfahrend), oder divergent (auseinandergehend). Parallel nennt man jene gerade Linien, die wie immer verlängert, niemals zusammenstoßen würden. So sind z. B. Fig. 40 ab und gh parallele oder gleichlaufende Linien, Fig. 41 ab und ch, Fig. 42 ab und dh sind ebenfalls parallel. Fig. 14 stellt ef und gh an den Enden e und g convergente, an den Enden f und h divergente gerade Linien vor.

§. 32.

Werden zwei divergente Linien an den convergenten Enden so weit verlängert, daß sie zusammen kommen, so entsteht in dem Zusammentreffungspuncte ein Winkel, welcher desto größer ist, je divergenter die Linien an den entgegengesetzten Enden sind. Der Punct des Zusammentreffens heißt der Scheitelpunct, und die zusammentreffenden geraden Linien bekommen den Namen Schenkel. Oder man denke sich aus einem Puncte zwei gerade Linien auseinandergehend, gezogen, so entsteht dadurch ebenfalls ein Winkel. So sieht man Fig. 8 aus den divergenten geraden Linien ba und bc, welche in dem Puncte b in der Richtung ab und cb verlängert zusammenkommen, einen Winkel entstehen, oder was einerlei ist, die geraden ba und bc aus dem Puncte b divergent gezogen, den Winkel bei b bilden dessen Scheitelpunct b, und dessen Schenkel ab und cb, oder ba und bc sind.

§. 33.

Man bezeichnet und lieset die Winkel gewöhnlich auf dreierlei Art. Entweder bezeichnet man blos den Scheitelpunct mit einem Buchstaben, welcher zugleich den Winkel bezeichnet. Man schreibt zwischen die Schenkel einen Buchstaben, oder man bezeichnet und lieset den Winkel mit drei Buchstaben, wo aber immer der am Scheitelpunct stehende, die mittlere Stelle einnehmen muß.

Eine Uebung im Bezeichnen und Lesen der Winkel gewähren die Fig. 8, wo der Winkel b oder abc, Fig. 9, wo zwei Winkel den nämlichen Scheitelpunct haben, daher mit einem einzigen Buchstaben nicht mit Bestimmtheit angezeigt werden können, deswegen sie die Winkel abc und cbd, oder mit den innerhalb der Schenkel stehenden Buchstaben, die Winkel o und x heißen. Fig. 10, 11, 13

u. s. f. sollen die Uebungen im Winkelbezeichnen und Winkellesen beleben.

§. 34.

Betrachtet man nur oberflächlich die Divergenz der Schenkel eines Winkels, so ergibt sich daraus sehr leicht die Bemerkung, daß diese Divergenz oder das Auseinanderfahren der Schenkel sehr mannigfaltig seyn müsse, und unzählige Arten von Winkeln darbietet. Unter allen diesen Arten pflegt man aber nur dreierlei Arten im gemeinen Leben zu beachten und anzugeben, worunter der rechte Winkel die beliebteste Aufnahme und die größte Auszeichnung wegen seiner mannigfaltigen practischen Leistungen genießt, dem die spitzigen und stumpfen Winkel, wenn nur möglich, nachstehen müssen.

§. 35.

Wenn eine gerade Linie auf einer andern geraden so steht, daß sie mit ihr zwei Winkel bildet, so nennt man diese Winkel Nebenwinkel; so sind Fig. 10, die Winkel acd und bcd, oder die Winkel o und x zwei Nebenwinkel, weil die Schenkel ac und cb eine gerade Linie ab sind, auf welcher, und außer welcher die gerade cd, welche den Schenkel zu beiden Winkeln gibt, in c in Verbindung steht.

Sind die beiden auf diese Art entstandenen Nebenwinkel gleich, so heißt die Linie, welche für zwei Schenkel steht, oder nach derer Weglassung blos eine gerade Linie ohne Winkel bleiben würde, eine senkrechte Linie auf die andere gerade Linie, welche die äußern Schenkel bildet. In Fig. 11, ist demnach dc senkrecht auf ab. Die Winkel acd und bcd heißen rechte Winkel. Man sieht, daß der Winkei acf größer, und ace kleiner, als der rechte acd ist.

Ein Winkel, der größer ist, als ein rechter, heißt ein stumpfer Winkel, ein Winkel, der kleiner ist, als ein rechter, heißt ein spitziger Winkel. Es ist leicht einzusehen, daß die rechten Winkel alle gleich sind; nicht so verhält es sich mit den stumpfen und spitzigen Winkeln, deren es von unbestimmbarer Anzahl geben könne.

Man betrachte mit Aufmerksamkeit die Fig. 12, 19, 20, 21, 32, 33, 34, 35, 36 u. s. f., so wird man einen deutlichen Begriff von dem rechten Winkel erlangen. Ein stumpfer und spitziger Winkel ist leicht von einem rechten und untereinander zu unterscheiden.

Dieß mag nur von der Gesichtsübung in der Schätzung der Winkel gelten, die wahre geometrische Bestimmung wird gelegenheitlich gelehrt werden.

§. 36.

Betrachtet man den Scheitelpunct eines Winkels als den Mittelpunct eines Kreises und denkt sich mit einer beliebigen Länge des Schenkels, als einen Halbmesser den Kreis beschrieben, so wird man leicht gewahr, daß ein Stück oder ein Bogen des Kreises zwischen die beiden Schenkel falle, und desto größer sey, je mehr die Schenkel divergiren, oder je größer der Winkel sey. Dieser zwischen den Schenkeln liegende Bogen heißt das Maß des Winkels, oder auch der dem Winkel entsprechende Bogen. So ist Fig. 5, ae das Maß des spitzigen Winkels acc, der Bogen abf das Maß des stumpfen Winkels acf. Fig. 12, ist ad das Maß des rechten Winkels acd, eben so ist der Bogen db das Maß des rechten Winkels bcd.

Aus eben dieser Fig. 12, ist es ersichtlich, daß ad oder bd der vierte Theil der ganzen Kreislinie sey, und ein rechter Winkel einen Quadranten der Kreislinie zu seinem Maße habe. (§. 25.) Deswegen pflegt man auch zu sagen, ein rechter Winkel ist $= 90^\circ$, oder besser zu reden, ein rechter Winkel ist jener, dem ein Bogen von 90°, ein stumpfer Winkel ist jener, dem ein größerer Bogen als 90°, und ein spitziger jener, dem ein kleinerer Bogen als von 90° entspricht. Ein wißbegieriger Anfänger wird wegen der nähern Kenntniß der Winkel die angeschlossenen Tafeln mit einer erwünschten Aufmerksamkeit durchmustern, und seine diesem Gegenstande geschenkte Mühe in der Folge reichlich belohnet sehen.

§. 37.

Aus dem Angeführten erhellet, daß die Winkel einer Vergrößerung oder Verkleinerung fähig sind. So läßt sich z. B. Fig. 9, der Winkel abc um den Winkel cbd vergrößern, woraus der Winkel abd entstehet. So bestehet der Winkel acf, Fig. 11, aus den Winkeln ace + ecd + dcf, welche zusammen addirt ihn zur Summe geben. Der Winkel a, Fig. 28, besteht aus den Winkeln eab + bac + cad. Nimmt man Fig. 11 von dem stumpfen Winkel acf den Winkel dcf weg, so bleibt der rechte Winkel acd. Nimmt man von acd den spitzigen Winkel dce ab, so erhält man den Winkel ace. Es läßt sich daher der Winkel ace so ansehen, als wenn er aus dem Winkel acf durch die Wegnahme der beiden Winkel dcf und dce, oder des Winkels ecf, der den beiden dcf und ecf gleich ist, entstanden wäre.

§. 38.

Auf eine ähnliche Weise wird man die Winkel vergrößert finden, wenn man sie verdoppelt, verdreifachet, ver n fachet. Fig. 11, gibt ace verdoppelt acd, verdreifachet acf.

Die Theilung der Winkel hat ebenfalls Statt. Fig. 11, ist der Winkel acd durch die gerade ce in zwei gleiche Theile getheilet, der Winkel acf durch die geraden cd und ce in drei gleiche Winkeltheile ace, ecd und dcf zerlegt worden.

Wendet man die Addition, Subtraction, Multiplication und Division auf die Winkelgrößen an, so ergeben sich die mannigfaltigsten Uebungen daraus, die zur eigenen Vervollkommnung der Anfänger anstellen soll. Hier sind nur einige als Muster angezeigt worden.

Wenn man zugleich die Bögen als Maßen der Winkel auf die nämliche Art nach den Regeln der vier sogenannten Rechnungs-Species behandelt, so bereitet man sich gründlich für den Unterricht in der Geometrie vor, denn die geraden und krummen Linien, die Bögen und die Winkel muß man als das Alphabet zur Lesung der geometrischen Wahrheiten betrachten. So wenig als Jemand einen Druck oder eine Schrift zu lesen im Stande ist, der das Alphabet nicht kennt, eben so wenig wird man in der Geometrie Fortschritte machen, wenn man die Lehre von den Linien, Bögen und Winkeln leichtsinnig als unbedeutend flüchtig übergeht.

§. 39.

Ein Paar leicht einzusehende Wahrheiten von den Winkeln mögen diesen Abschnitt beschließen.

Was Nebenwinkel sind, ist aus §. 35 bekannt. Hier ist nur zu zeigen, daß zwei Nebenwinkel immer zwei rechten Winkeln gleich sind. Es seyen die zwei Nebenwinkel ace und ecb, Fig. 11, so sind sie zusammengenommen, zwei rechten Winkeln gleich. Es sey acd ein rechter Winkel, so ist auch dcb ein rechter §. 35, also acd und dcb zwei rechten Winkeln gleich. Den Winkel acd bildet der spitzige Nebenwinkel ace sammt dem Antheile ecd des stumpfen Winkels ecb, der andere Antheil des stumpfen Winkels gibt gerade einen rechten Winkel dcb, hiemit geben alle drei Winkel ace, ecd, dcb, welche zusammengenommen der Größe nach den Nebenwinkeln ace und ecb gleich sind, zwei rechte Winkel. Der Winkel ace heißt deswegen auch die Ergänzung auf zwei rechte, oder auch die Ergänzung auf den rechten Winkel acd.

§. 40.

Es seyen Fig. 13, die Nebenwinkel acd und deb. Verlängere man de unter die Linie ab bis c, so sieht man, daß auch jenseits der Linie ab zwei Nebenwinkel aec und bec entstehen. aec und aed sind in Ansehung der geraden ae, bec und bed sind in Ansehung der geraden bc ebenfalls Nebenwinkel. Man hat also hier vier Paar Nebenwinkel em, mn, no, oe. Diejenigen unter diesen vier Winkeln, welche keine Nebenwinkel seyn können, heißt man Scheitelwinkel; so sind o und m, e und n Scheitelwinkel. Der nämliche Winkel muß eine gleiche Ergänzung auf zwei rechte haben. Betrachtet man den Winkel e als einen Nebenwinkel des Winkels o, und zugleich als einen Nebenwinkel des Winkels m, so ist es klar, daß o und m gleich seyn müssen, weil sie den nämlichen Winkel e auf zwei rechte ergänzen.

Oder in Bögen und Graden. Es sey e = 110°, so sieht Jedermann, daß m und o gleich seyn müssen, wenn m und o 110 Grade auf zwei rechte oder 180 ergänzen sollte, denn 110 sollte mit m 180, und 110 sollte auch mit o, 180 geben. Das nämliche läßt sich aber auch von e und n zeigen, daß sie gleich sind; m und o aber sind, wie e und n Scheitelwinkel. Es gilt also die Wahrheit, die Scheitelwinkel sind immer gleich.

Es ist aus dem bereits Gesagten leicht erklärbar, daß alle Winkel über einer geraden zwei rechten, alle Winkel über und unter einer geraden, oder alle Winkel um einen Punct gleich vier rechten Winkeln seyn müssen. Zur Versinnlichung mögen die Fig. 5, 11, 12, 13 dienen.

III. Abschnitt.

Von den geometrischen Figuren oder von den Flächen.

§. 41.

Die äußersten Gränzen eines Körpers heißt man, wie

§. 6 gesagt wurde, Flächen. So unterscheidet man an einem Gebäude oder an einem Zimmer gewöhnlich sechs Flächen; an einem Blatte Papier ist man gewöhnlich nur auf zwei Flächen aufmerksam, die man beschreibt oder bedrucket.

Diese Flächen sind entweder so beschaffen, daß man zwei Puncte oder Stellen beliebig annehmen, und von einem zum andern dieser Puncte eine gerade Linie ziehen kann oder nicht. Im ersten Falle nennt man die Flächen ebene Flächen, im zweiten Falle, wo man durch zwei beliebig angenommene Puncte keine gerade Linie ziehen kann, heißt man die Flächen krumme Flächen; z. B. die Fläche einer Kugel, eines Cylinders Seitenflächen u. s. f.

§. 42.

Die ebenen Flächen oder die Ebenen haben mannigfaltige Gestalten, die man geometrische Figuren nennt. Geometrische Figuren sind demnach von einer oder von mehreren krummen oder geraden Linien begränzte Ebenen, oder begränzte krumme Flächen. Ist die Ebene von lauter geraden Linien begränzt oder eingeschlossen, so nennt man sie eine geradlinigte Figur, ist sie von einer krummen Linie begränzt, so heißt sie eine krummlinigte Figur.

§. 43.

Die geraden Linien oder die krummen, welche die Ebene begränzen, zusammen in eine gerade vereinigt genommen, nennt man den Umfang oder Perimeter der Figur; beim Kreise heißt diese Gränze Kreislinie, Umfang, Peripherie, Circumferenz.

Die geradlinigten Figuren oder Ebenen werden nach der Anzahl der Ecke oder Linien, die sie begränzen, benannt. Diese Linien bekommen in den Figuren den Namen Seiten. So hat man Dreiecke, Vierecke, Vielecke, wenn die Figur mehr als vier Seiten hat, z. B. Fünf-, Sechs-, Siebenecke u. s. f.

IV. Abschnitt.

Von den Dreiecken.

§. 44.

Wird eine Figur von drei Linien (Seiten) begränzt, so heißt sie ein Dreieck. In Ansehung der Seiten gibt es gleichseitige Dreiecke, die drei Seiten gleich haben, Fig. 16; gleichschenkeligte, die zwei gleiche Seiten haben, Fig. 17; und ungleichseitige, die keine gleiche Seiten haben, Fig. 18.

In Absicht auf die Winkel ist das Dreieck entweder ein rechtwinklichtes, in welchem ein rechter Winkel ist, Fig. 19, ein spitzwinkelichtes Dreieck, in welchem drei spitzige Winkel vorkommen, Fig. 16, ein stumpfwinkelichtes Dreieck, in welchem ein stumpfer Winkel vorkommt.

Man sieht, daß in jedem Dreiecke einem Winkel eine Seite gegenüber liege, welche diejenige ist, nach derer Weglassung blos der Winkel vom Dreiecke übrig bliebe. So steht z. B. in Fig. 16 dem Winkel acb die Seite ab gegenüber, denn läßt man die Seite ab weg, so bleibt blos der Winkel acb von dem Dreiecke übrig.

Man frage sich hiebei, welche Seite steht dem Winkel bac, dem Winkel abc, Fig. 16, 17, 18, 19 gegenüber, oder umgekehrt: welcher Winkel liegt der Seite ab, ac, bc gegenüber u. s. f. durch alle Dreiecks-Figuren, denn diese Uebung wird gewöhnlich bei Anfängern vernachläßiget.

Man merke sich, daß in einem rechtwinkelichten Dreiecke, die dem rechten Winkel gegenüber liegende Seite die Hypothenuse, Fig. 19 ab, die Seiten aber, welche mit ihr die spitzigen Winkel bilden, ab und bc die Catheten heißen. Der Gegensatz der Seiten und Winkel führt zu mancherlei wichtigen geometrischen Wahrheiten.

An jedem Dreiecke sind zu beobachten: die Winkel, die Seiten oder der Perimeter oder Umfang und die Fläche selbst. Lassen sich Dreiecke so übereinander legen, daß ihre

Perimeter gänzlich in einander fallen, und sich decken, so sind solche Dreiecke congruente Dreiecke, und ihre Winkel und Seiten, die bei dieser Deckung zusammentreffen, vollkommen gleich. So wäre ein Dreieck, welches sich auf das Dreieck abc, Fig. 18, so legen ließe, daß eine Seite die ab, die andere die ac, und die dritte die bc deckte, mit ihm congruent, die übereinander liegenden Seiten gleich und die diesem entgegenstehenden Winkel gleich.

Die Congruenz wird gemeiniglich unter diesen Umständen bewiesen: zwei Dreiecke sind congruent, wenn zwei Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel, wenn die eine Seite mit den anliegenden Winkeln, und wenn die drei Seiten des einen Dreieckes gleich sind zwei Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel, einer Seite mit den anliegenden Winkeln oder den drei Seiten des andern Dreieckes.

Um diese drei Sätze leichter zu begreifen, soll man vorzüglich aufmerken, was der eingeschlossene Winkel, was die anliegenden Winkel sind. Fig. 16, ist abc der von den Seiten ab und bc, acb der von den Seiten ac und bc eingeschlossene Winkel, die Winkel b und c sind der Seite bc anliegende Winkel. Man wiederhole diese Uebung durch alle Fig. 16, 17, 18, 19.

§. 45.

Lassen sich Dreiecks-Figuren nicht so über einander legen, daß sich ihre Perimeter vollkommen deckten, so sind sie nicht congruent ineinanderfallend; ungeachtet dessen können sie gleiche Flächen haben, welche Dreiecke dann gleiche Dreiecke heißen; man unterscheide sorgfältig die Congruenz von der Gleichheit der Dreiecke, denn die erste führt zur Gleichheit der Winkel und Seiten, die zweite setzt blos die Gleichheit der Fläche außer Zweifel. Die Lehre von der Congruenz liegt zwar nicht im Plane dieses Unterrichtes, aber doch mag für Anfänger das Gesagte nicht ohne Nutzen seyn.

V. Abschnitt.

Von den vierseitigen Figuren.

§. 46.

Eine Figur, welche vier Seiten oder Ecke hat, nennt man eine vierseitige oder viereckigte Figur. Die vierseitigen Figuren sind entweder Parallelograme oder reguläre, Trapeze oder irreguläre vierseitige Figuren. Die Vierecke stellen die Figuren 20, 21, 22, 23, 24, 25 vor. Man bemerkt hier sehr leicht, daß in den vierseitigen geometrischen Figuren von keinem Gegensatze der Seiten und Winkel, aber wohl von dem Gegensatze der Seiten und Seiten, der Winkel und Winkel die Rede seyn kann.

Man bezeichnet gewöhnlich jede vierseitige Figur mit vier Buchstaben, die nach der Ordnung der Winkel hingeschrieben werden, oder mit zwei entgegengesetzt stehenden Buchstaben. So ist, Fig. 20, abdc, oder ad oder bc, Fig. 25, abcd oder ad oder bc, eine vierseitige Figur. Die Seiten der vierseitigen Figur werden mit zwei Buchstaben, und die Winkel mit einem angegeben. So kommen in der Figur 20, die Seiten ab, ac, cd, db, und die Winkel a, b, c, d vor.

Auf gleiche Weise zergliedere die übrigen vierseitigen Figuren. Die Seiten ab und cd, ac und bd heißen entgegengesetzte Seiten. Eben so nennt man die Winkel a und d, b und c entgegengesetzte Winkel.

Zieht man von einem Winkel in dem entgegengesetzten Winkel des Viereckes eine gerade Linie, so heißt diese die Querlinie oder Diagonale; dergleichen Querlinien oder Diagonalen sind, Fig. 20 und 22 die punctirten Linien ad und bc.

§. 47.

Ein Parallelogram ist eine vierseitige Figur, deren entgegengesetzte zwei und zwei Seiten parallel sind. Es gibt viererlei Parallelograme, das Quadrat, das verlängerte Rechteck, die Raute oder Rhombus, die verlängerte Raute oder Rhomboides.

§. 48.

Ein Quadrat ist ein Parallelogram, dessen alle Seiten gleich und die Winkel rechte Winkel sind, Fig. 20. Ist die Seite des Quadrates eine Klafter, ein Schuh, ein Zoll, eine Linie u. s. w., so nennt man ein solches Quadrat eine Quadratklafter, einen Quadratschuh u. s. f., von welchen Maßen der Anfänger durch wirkliche Abmessungen in einer ebenen Fläche richtige und genaue Anschauungen sich verschaffen soll, weil die Messung der Flächen nach Quadratklaftern, Quadratschuhen u. s. f. berechnet wird.

§. 49.

Ein verlängertes Rechteck hat vier rechte Winkel, aber nur die entgegengesetzten Seiten gleich. Die längere Seite pflegt man die Länge, die kürzere die Breite des Rechteckes zu nennen. Fig. 21, abdc stellt das Rechteck, ab die Länge, ac die Breite vor.

§. 50.

Ein Rhombus ist ein Parallelogram, dessen alle vier Seiten gleich, und die Winkel schiefe Winkel sind. (Schiefe Winkel heißen alle, die nicht rechte Winkel sind.) Im Rhombus sind die entgegenliegenden Winkel immer gleich, Fig. 22.

§. 51.

Ein Rhomboides ist ein Parallelogram, dessen einander entgegenstehende Seiten gleich und die Winkel schiefe Winkel, aber die gegenüber liegenden immer gleich sind, Fig. 23.

§. 52.

Ein Trapez ist eine vierseitige Figur, in welcher zwei gegenüber stehende Seiten parallel sind, und ein Trapezoides ist eine vierseitige Figur, wo keine parallele Seiten vorkommen. Fig. 24, stellt ein Trapez, Fig. 25, ein Trapezoid vor.

§. 53.

Figuren, welche mehr als vier Seiten haben, heißen, wie bereits gesagt, Vielecke. Diese sind regelmäßig, wenn sie alle Seiten und Winkel gleich haben, sonst unregelmäßige oder irreguläre Vielecke. In Fig. 82, sieht man ein regelmäßiges Fünfeck, in Fig. 83, ein regelmäßiges Sechseck, in 84 ein Siebeneck, in 85 ein Achteck, in 86 ein Neuneck, in 87 ein regelmäßiges Zehneck abgebildet.

Zieht man in einem Vielecke aus einem Winkel in die andern gerade Linien, so heißen diese geraden Linien, sowie bei den Vierecken Querlinien oder Diagonalen, welche, wie leicht ersichtlich ist, das Vieleck in eben so viele Dreiecke theilen, als das Vieleck Seiten hat, weniger zwei. Das Viereck in zwei, das Fünfeck in drei, das Sechseck in vier Dreiecke, also immer in zwei Dreiecke weniger, als das Vieleck Seiten hat.

§. 54.

Möge jeder Anfänger sich über die vorgelegten geometrischen Gegenstände, über die erklärten Linien, Winkel, Figuren und ihrer Eigenschaften richtige Kenntnisse verschaffen, denn diese sind sowohl zu den ersten geometrischen Constructionen und Aufgaben, als auch zu den Lehrsätzen der theoretischen Geometrie höchst nothwendig; ohne sie ist es unmöglich, in der Geometrie etwas Gründliches zu erlernen. Die Linien, die Winkel und die Figuren geben das eigentliche Alphabet und Einmaleins der Geometrie ab.

Vielleicht würde mancher Jüngling in der Geometrie erwünschtere Fortschritte gemacht haben, wenn er diese Elemente mehrerer Aufmerksamkeit gewürdiget hätte. Sollte nicht immer dem theoretischen Unterrichte in der Geometrie, wo man die Constructionen zu den Beweisen für Lehrsätze und geometrische Aufgaben zugleich entnimmt, eine kleine Vorbereitung in rein-geometrischen Auflösungen ohne analytische Untermengung vorangeschickt werden? Gewiß würde dann der Unterricht in der Geometrie gedeihlicher ausfallen, denn durch diese geometrischen Auflösungen würde man in Stand gesetzt seyn, sich richtige Begriffe von den geometrischen Linien, Winkeln und Figuren eigen zu machen, und ihren Gebrauch sorgfältiger zu behandeln, wo sonst der Anfänger in die mißliche Lage geräth, sich nicht auszukennen, ob er mit der Figur oder mit den eigentlichen Größen, Eigenschaften, zu thun hat. In solchen geometrischen Auflösungen würde er z. B. die Wichtigkeit des Parallelismus, der Congruenz der Dreiecke einsehen lernen; er würde sich, so zu sagen, practisch überzeugen, daß es nicht einerlei oder gleichgültig sey, ob man den Zug einer Linie von dem oder jenem Puncte anfange, sondern daß gewöhnlich der Anfang des Zuges gegeben und bestimmt ist.

VI. Abschnitt.

Nöthige Benehmungsregeln beim Zeichnen der geometrischen Figuren.

§. 55.

In einer geometrischen Zeichnung soll alles, was in ihr vorkömmt, langsam und reinlich gezeichnet und ausgeführet werden. Die Linien müssen durchaus gleich stark gezogen, und bei den punctirten Linien müssen die Puncte nicht zu stark, und so viel als möglich gleich groß und in gleichen Entfernungen von einander abstehen, oder gezeichnet getuft werden. Auch muß man die Buchstaben an den Linien, Winkeln und Figuren mit lateinischer Schrift recht zierlich, nicht zu groß und nicht zu klein, und wenn nicht besondere Umstände, z. B. Ersparung an Zeichnungen es erfordern, in alphabetischer Ordnung so schreiben, daß man aus der Ordnung der Buchstaben die natürliche Reihe der zur Zeichnung nöthigen Züge entnehmen kann, so daß immer der erste Zug bei a anfängt, von da zu b, von b zu c u. s. f. gezeichnet und gearbeitet werde.

§. 56.

Bei der Zeichnung geometrischer Figuren merke man sich folgende Vorsichtsregeln:

1. Die Instrumente, deren man sich bedient, sollen nur zu den bestimmten Arbeiten oder Zwecken gebraucht, und so viel möglich reinlich erhalten werden.
2. Den Zirkel führe man mit einigen Fingern aufrecht, und so leicht, als man kann, und hüthe sich ja, nicht auf ihn zu drücken, damit das Papier, worauf gezeichnet wird, nicht mit Löchern von Zirkelstichen durchstochen werde.
3. Diesem einigermaßen zu begegnen, so bediene man sich eines Zeichenbretes von hartem Holze, worauf das Papier ohne weitere Unterlage gelegt oder gespannt wird.
4. Die Lineale und hölzerne rechtwinkelichte Maße, Fig. 37, das hölzerne rechtwinkelichte Dreieck und das sogenannte Winkelmaß müssen, wenn sich bei dem Gebrauche etwa Tusch oder Tinte angehängt hätte, jedesmal auf der Stelle wieder gereiniget werden, damit sie nicht, wenn sie trocken werden, am Lineale eine Unebenheit verursachen. Der messingenen Lineale und Winkelmaße soll man sich auf dem Papier ja nicht be-

dienen, weil sie dasselbe beschmutzen, und eigentlich nur für Tischler und Zimmerleute auf Holz taugen.

5. Die Reißfedern sollen ebenfalls nach dem Gebrauche auf der Stelle wieder sauber gereiniget werden, damit sie nicht rosten und unbrauchbar werden.

6. Erhalte die Bleistifte immer so spitzig als möglich, die Hände und Finger sehr reinlich.

7. Es ist sehr nützlich, daß man lerne, wenn ein Instrument durch den Gebrauch stumpf geworden ist, selbes selbst wieder in brauchbaren Stand zu stellen, wozu ein feiner Schleifstein dienen wird.

8. Federn aller Art muß man sich selbst zum Gebrauche zu bereiten wissen.

9. Die Linien, welche an einander gezogen werden, und sich nicht schneiden sollen, müssen mit ihren Gränzen in einen einzigen Punct fallen.

§. 57.

Zur Uebung in den Anfangsgründen der Zeichenkunst und der Geometrie, so wie zur Vorbildung der zum Beweise theoretisch-geometrischer Wahrheiten nothwendigen geometrischen Constructionen sollen hier einige am gewöhnlichsten vorkommende geometrische Aufgaben aufgelöset werden. Diese Auflösungen werden den Anfänger, weil sie sehr einfach und faßlich sind, zum Studium der Geometrie aneifern, dem Handwerker bei dem Zeichenunterrichte und bei seinen Arbeiten mancherlei Anwendungen gewähren, und Jedermann eine genaue Kenntniß der geometrischen Benennungen und einen richtigen Gebrauch der Zeicheninstrumente lehren.

VII. Abschnitt.

Auflösungen geometrischer Aufgaben, mit einigen Bemerkungen.

*Die Auflösungen werden ohne Beweise gegeben, die

man

man in jeden Geometriebuche findet, weil es eigentlich nur die Auflösungen der geometrischen Aufgaben sind, die einen practischen Nutzen gewähren, und hier blos für Handwerker, Künstler und Anfänger im Zeichnen geschrieben wird.

I. Aufgabe.

§. 58.

Von einem gegebenen Puncte a zu einem andern b eine gerade Linie zu ziehen. Fig. 1.

Auflösung.

Man lege das Lineal an die gegebenen Puncte a und b genau an, und ziehe an der Schärfe desselben mit der Reißfeder, Bleistift oder einer gewöhnlichen Feder die zwei Puncte a und b zusammen. Es versteht sich von selbst, daß, wenn die Linie gerade seyn sollte, das Lineal vollkommen gerade seyn muß, daß die Reißfeder gut eingerichtet und die gewöhnliche Feder fein gespitzt seyn müsse; denn ob man gleich keine mathematische Linie zeichnen kann, so muß man sich doch in der Ausübung derselben so viel als möglich zu nähern suchen.

§. 59.

Sollte eine gegebene gerade Linie verlängert werden, so setze man, wie 58 gesagt, das Lineal an zwei gegen das zu verlängernde Ende liegende Puncte an, und ziehe die Linie, so scharf als möglich in der zu verlängernden fort.

II. Aufgabe.

§. 60.

Eine gegebene Linie ab auf eine größere cd zu tragen, oder ein Stück von cd abzuschneiden, welches der Linie ab gleich sey. Fig. 29.

Auflösung.

Man fasse die gegebene Linie ab mit dem Zirkel, und trage sie aus dem gegebenen Puncte c gegen d, und da, wo die andere Zirkelspitze auf der Linie cd hintrifft, mache man einen Punct e, so ist ce so groß als ab, oder ab ist congruent oder sich deckend mit ce.

III. Aufgabe.

§. 61.

Mit einer gegebenen geraden Linie ab um einen gegebenen Punct c eine Kreislinie zu beschreiben. Fig. 30.

Auflösung.

Man fasse die gegebene Linie ab mit dem Zirkel, und setze den einen Fuß desselben in den gegebenen Punct c, fahre mit dem Zirkel um den Punct c, so wird die andere Zirkelspitze einen Kreis beschreiben. In Ermanglung eines großen Zirkels kann man in den gegebenen Punct c einen Stift einschlagen, eine Schnur, die eine Schleife hat, wodurch der Stift geht, um denselben herum führen, so beschreibt das andere Ende die verlangte Kreislinie. So machen es die Handwerksleute, wenn sie große Kreise zu beschreiben haben; der nämlichen Methode bedient man sich auch bei Garten-Anlagen, auf dem Felde u. s. w., wo man große Rundungen zu beschreiben und zu machen hat. Von der Kreislinie siehe §. 21 bis 31.

IV. Aufgabe.

§. 62.

Eine gegebene gerade Linie ab so weit zu verlängern, als man will. Fig. 31.

Auflösung.

1. Man beschreibe mit einem beliebigen Halbmesser etwa

mit ac einen Kreisbogen dce, und mache den Bogen cd = dem Bogen ce.

2. Aus den Puncten d und e beschreibe man mit einem willkührlichen Halbmesser die Durchschnittsbögen in f.
3. Zieht man endlich von b zu dem Durchschnittspuncte f eine gerade Linie bf, so ist die gegebene gerade Linie verlängert.

Von den senkrechten oder perpendiculären Linien.

V. Aufgabe.

§. 63.

Aus einem gegebenen Puncte c auf einer geraden ab eine senkrechte Linie zu errichten. Fig. 32.

Auflösung.

1. Man nehme auf ab den Punct d beliebig an, und mache ce gleich cd.
2. Aus d und e beschreibe man mit einem willkührlichen Halbmesser die kleinen Durchschnittsbögen bei f.
3. Eine gerade Linie von f nach dem gegebenen Puncte c gezogen, ist die verlangte senkrechte Linie.

Verlangt man die senkrechte Linie unterhalb ab zu ziehen, so darf man nur aus den Puncten d und e die kleinen Bögen unterwärts beschreiben, und von c nach f eine gerade Linie ziehen, so ist sie unterwärts der geraden Linie ab senkrecht.

VI. Aufgabe.

§. 64.

Auf einer geraden Linie ab sind zwei Puncte c und d gegeben, man soll auf ab oder unterhalb ab eine senkrechte Linie ziehen. Fig. 33.

Auflösung.

1. Man beschreibe mit einerlei Halbmessern aus c und d die Bögen in f und F, eben so beschreibe man mit einem größeren Halbmesser aus c und d die Bögen in g und G.
2. Wenn man nun von g nach f eine gerade Linie zieht, und bis nach e verlängert, so ist sie auf ab senkrecht.
3. Zieht man endlich Ge durch f, so ist sie auf ab unterwärts senkrecht.

VII. Aufgabe.

§. 65.

An dem Endepunct a einer gegebenen geraden Linie eine senkrechte Linie zu errichten.

Auflösung. Erste Art. Fig. 34.

1. Aus a beschreibe mit einem beliebigen Halbmesser ac einen Bogen cdf, und trage den Halbmesser ac aus c nach d, und aus d nach f.
2. Aus d und f mache mit einerlei Halbmessern, oder mit einerlei Oeffnung des Zirkels die Bögen in e.
3. Zieht man endlich vom Durchschnitte e nach dem Puncte a eine gerade Linie ea, so ist sie am Ende der Linie ab senkrecht.

Zweite Art. Fig. 35.

1. Ueber ba nehme man einen Punct etwa in c an, und beschreibe mit dem Halbmesser ac um c einen Kreis (III. Aufgabe) dieser wird durch den Punct a gehen, und die Linie ab in d schneiden.
2. Von d nach c ziehe man eine gerade Linie dc, welche in der Verlängerung den Kreis in e schneiden wird.
3. Zieht man endlich von a nach dem Puncte e die gerade Linie ae, so ist sie am Ende der Linie ba senkrecht.

Dritte Art. Fig. 36.

1. Man nehme den Punct d auf ab willkührlich, und beschreibe mit dem Halbmesser a und d Durchschnittsbögen in c.
2. Von d nach c ziehe man eine gerade Linie dc, und verlängere sie unbegränzt fort.
3. Trage man dc aus c nach e, (II. Aufgabe) daß ce = cd werde.
4. Zieht man endlich von dem Puncte e nach a eine gerade Linie ae, so ist sie am Ende a der ab senkrecht.
5. Wenn man sowohl in der ersten, zweiten und dritten Art die Puncte e und c unterhalb der geraden Linie ab bestimmt, so ergeben sich die senkrechten Linien unterhalb der geraden Linie ab.

Die Richtigkeit dieser Auflösungen, so wie der meisten folgenden wird in der rein theoretisch-elementarischen Mathematik streng erwiesen.

VIII. Aufgabe.

§. 66.

Mit dem sogenannten Winkelhaken oder Winkelmaß, oder mit dem rechtwinkelichten Dreiecke eine senkrechte Linie zu errichten. Fig. 37.

Auflösung.

1. Man lege die Seite ca genau an die gegebene Linie cf, so daß die Rechtwinkelspitze genau an den gegebenen Punct a anliege.
2. Hält man in dieser Lage das Instrument mit zwei Fingern fest, so kann man an der andern Seite eine Linie ziehen, welche senkrecht seyn wird.

Diese Auflösung ist nur practisch richtig, wenn das Instrument, d. i. der Winkelhaken richtig verfertiget ist, obschon es die Handwerksleute und Mechaniker selten in einem vollkommenen Zustande liefern. Man soll sich, wenn Genauigkeit in der Zeichnung erforderlich ist, dessen nicht, sondern in der Errichtung der senkrechten Linien der Auflösungen in Aufgaben V., VI., VII., bedienen, in allen Fällen wird die senkrechte Linie mit dem Lineal und Zirkel am richtigsten construirt.

IX. Aufgabe.

§. 67.

Von einem außerhalb einer geraden Linie ab gegebenen Punct c eine senkrechte oder perpendiculäre Linie zu fällen. Fig. 38.

Auflösung.

1. Man nehme auf der andern Seite von ab einen Punct beliebig, etwa in e an, und fasse die Weite ce mit dem Zirkel, und beschreibe damit als einen Halbmesser einen Bogen fg, dieser wird die gegebene Linie ab in den Puncten f und g schneiden.
2. Aus den Puncten f und g beschreibe man mit einem willkührlichen Halbmesser die Bögen in h.
3. Legt man endlich ein Lineal in c und h an, und zieht die cd, so ist sie auf ab senkrecht.

Eine andere Art. Fig. 39.

1. Aus einem Puncte b beschreibe man unter der Linie ab mit dem Halbmesser cb einen kleinen Bogen.
2. Aus einem willkührlich in ab angenommenen Puncte, etwa in d beschreibe unterhalb ab mit dem Halbmesser cd einen Bogen, dieser wird den ersten in e schneiden.
3. Wird an c und e ein Lineal angelegt, und die Linie ef gezogen, so steht sie auf ab senkrecht.
4. Daß man mit dem rechtwinkelichten Dreiecke und mit dem Winkelhaken senkrechte Linien fällen kann, versteht sich von selbst. Man lege eine Cathete des rech-

ten Winkels an die gerade Linie, und schiebe sie so lange gegen den gegebenen Punct, bis die andere Cathete in denselben kommt, z. B. in c, und ziehe nach ihr die gerade Linie, so ist sie senkrecht.

Man übe sich im Zeichnen und Aufreißen der senkrechten Linien oder der rechten Winkel, weil von selben im gemeinen Leben häufiger Gebrauch gemacht wird. Die Zusammensetzung der Arbeiten des Schreiners oder Tischlers, des Zimmermannes, des Steinhauers, des Schlossers u. s. f. ist hauptsächlich darauf gegründet.

X. Aufgabe. (Parallellinien zu ziehen.)

§. 68.

Diese Aufgabe kann auf viererlei Arten aufgelöset werden.

a. Es ist eine gerade Linie ab gegeben, man soll durch den gegebenen Punct c eine mit ihr parallele ziehen. Fig. 40.

1. Man fälle von dem gegebenen Puncte c auf ab eine senkrechte Linie nach IX. Aufgabe.
2. Aus einem willkührlich angenommenen Puncte e errichte man eine senkrechte ef nach der V. Aufgabe, und mache ef = cd.
3. Man ziehe von c nach f eine gerade Linie und verlängere sie vor- und rückwärts, so wird gh parallel mit ab seyn.

b. Es sey der gegebene Punct c und ab die gegebene gerade Linie. Fig. 41.

1. Man ziehe von dem gegebenen Puncte c eine schiefe Linie cd und beschreibe mit cd aus d einen Bogen ce.
2. Mit eben diesem Halbmesser beschreibe man aus einem in ab willkührlich angenommenen Puncte f einen unbegränzten Bogen gh.
3. Nehme man die Weite des Bogens ec und trage sie

aus g nach h nach II. Aufgabe, so daß der Bogen gh = ec ist.

4. Man ziehe von h nach c eine gerade Linie hc, so ist sie mit ab parallel.

c. Es sey der gegebene Punct in c und ab die gegebene gerade Linie. Fig. 42.

1. In den gegebenen Punct c setze man den Zirkel und öffne ihn bis e, so, daß wenn man mit dieser Oeffnung einen Bogen beschreibt, derselbe die Linie ab nur berühre.

2. Mit eben dieser Oeffnung beschreibe man aus einem willkührlichen Puncte f bis g einen Bogen.

3. Man lege das Lineal an den gegebenen Punct c und an die äußerste Gränze des Bogens g genau an, so kann man eine Linie dh ziehen, welche mit ab parallel seyn wird.

d. Es liege der gegebene Punct, durch welchen eine parallele Linie zu ab gezogen werden soll, in c. Fig. 43.

1. Aus c ziehe man eine schiefe Linie cf.

2. Aus f beschreibe man mit dem Halbmesser fg den Bogen gh; mit eben diesen Halbmesser beschreibe man aus c einen Bogen ik. Den Bogen gh trage man aus k nach i, und ziehe durch c und i die gerade Linie de, so ist sie mit der gegebenen Linie ab parallel.

e. Eine parallele Linie mittelst eines Lineals und eines rechtwinkelichten Dreieckes zu ziehen. Fig. 44.

ab sey die gegebene Linie, c der gegebene Punct, durch welchem eine parallele zu ab gezogen werden soll.

1. Man lege das hölzerne rechtwinkelichte Dreieck fgk mit einer seiner Cathete fk an die gegebene Linie ab, und an die Hypothenuse gk das Lineal de. Man halte in der Nähe des Punctes c das Lineal mit einigen Fingern fest, und schiebe das Dreieck an dem Lineal hinauf, bis solches mit der Cathete fk den Punct c in der

Lage f, k, g erreicht, halte in dieser Lage das Dreieck fest, und ziehe in der Richtung k, f die gerade Linie, so ist sie mit der ab parallel.

XI. Aufgabe.

§. 69.

Eine gerade Linie in zwei gleiche Theile zu theilen, oder zu halbiren. Fig. 45.

1. Mit einem willkührlichen Halbmesser, der aber doch größer ist, als die Hälfte der zu halbirenden Linie ab, beschreibe man aus den Endpuncten a und b sowohl über als unter der Linie ab Durchschnittsbögen in c und d.
2. Ziehe man durch die Durchschnittspuncte c und d eine gerade Linie, so schneidet sie die ab in dem Punct e in zwei gleiche Theile ae und be.

Wäre die Linie ab so groß, daß man mit dem Zirkelinstrumente die Hälfte nicht auffassen könnte, so nehme man, Fig. 32, von a nach d ein Stück ab, und trage solches von b nach e, so daß ad = be, beschreibe mit einem beliebigen Halbmesser z. B. mit de aus den Puncten d und e die durchschneidenden Bögen f und f, zieht man endlich eine gerade Linie von f nach f, so wird sie die ab in c schneiden, und ac = cb machen.

XII. Aufgabe.

§. 70.

Eine gegebene Linie ab in drei gleiche Theile zu theilen. Fig. 46.

a. 1. Man ziehe eine Linie de, und trage darauf drei gleiche Theile, doch also, daß diese drei Theile zusammengenommen größer sind, als die gegebene Linie ab.
2. Mit der Linie de beschreibe man als mit einem Halb-

messer die Durchschnittsbögen in c, und ziehe cd und ce.

3. Fasse man die gegebene Linie ab mit dem Zirkel, und trage sie aus c nach f und g, und ziehe von den Puncten f und g eine gerade Linie fg, welche so groß seyn wird, als die gegebene gerade Linie ab.

4. Zieht man endlich in die Theilungspuncte h und i die geraden Linien ch und ci, so wird fg von ihnen geschnitten, und in k und l in verlangte gleiche Theile getheilet.

Auf diese Art läßt sich jede Linie in so viele verlangte Theile theilen als man will.

b. Es sey die Linie ab gegeben, man verlangt sie in drei gleiche Theile zu theilen. Fig. 47.

1. Man ziehe aus a unter einem spitzigen Winkel eine gerade Linie ab, und aus b ziehe man die bd parallel mit ac.

2. Auf ac trage man von a gegen c drei willkührliche aber gleiche Theile ae, ef, fg, eben diese Theile trage man auch aus b gegen d, daß bh, hi, ik gleich sind.

3. Zieht man endlich von b nach g, von h nach f, von i nach e, von k nach a gerade Linien, so werden sie die ab in den Puncten l und m schneiden und zugleich in die verlangten Theile theilen.

c. Man verlangt ab in fünf gleiche Theile theilen. Fig. 48.

1. Man ziehe unter einem beliebigen Winkel eine gerade Linie ac aus dem Puncte a, und trage darauf von a aus fünf gleiche Theile ah, hg, gf, fe, ed.

2. Von dem Theilungspuncte d ziehe man nach b eine gerade Linie db, und mit ihr aus den übrigen Theilungspuncten e, f, g, h die Parallellinien em, fl, gk, hi, welche die gegebene Linie ab in den Puncten m, l, k, i schneiden, und in fünf gleiche Theile theilen.

XIII. Aufgabe.

§. 71.

Eine Linie ab in drei Theile zu theilen, daß der erste Theil noch einmal so groß sey, als der zweite, und der zweite Theil noch einmal so groß sey, als der dritte. Fig. 49.

1. Man ziehe aus a unter einem beliebigen Winkel die gerade Linie ac, und trage von a nach f ein beliebiges Stück af.
2. Dieses Stück nehme man zweimal und trage solches aus f nach e.
3. Nehme man die Weite fe doppelt und trage sie von e nach d.
4. Man ziehe von d nach b eine gerade Linie bd, und mit ihr aus den Puncten e und f die Parallellinien eh und fg, welche die gegebene Linie ab in den Puncten h und g schneiden, und in den verlangten Verhältnissen theilen.

§. 72.

Man sieht, daß sich jede gerade Linie in beliebige verhältnißmäßige oder gleiche Theile theilen läßt. Der Anfänger übe sich in der Theilung und im Parallelziehen der Linien, denn diese zwei Auflösungen: die Theilung und der Parallelismus sind die fruchtbarsten, nicht nur in der theoretischen sondern hauptsächlich in der practischen Meßkunst werden die meisten Bestimmungen mittelst der Parallellinien gemacht. Aus dem Gesagten erhellet von selbst das Verfahren bei der Anlegung einer Allee, eines Weges, eines Gartens, wie die Reihen, oder die Seiten, die Leisten parallel angelegt werden sollen.

XIV. Aufgabe.

§. 73.

Einen verjüngten Maßstab zu zeichnen. Fig. 50 und 51.

Wenn man einen Maßstab, z. B. eine Klafter, einen Schuh u. s. f. womit man Linien auf dem Felde mißt, so klein zeichnet, daß man die Linien auf dem Papier damit ausmessen kann, so nennt man einen solchen kleinen Maßstab, einen verjüngten Maßstab. Die Eintheilung der Längenmaße in Klafter, Schuh, Zoll u. s. f. ist bekannt, man hat daher verjüngte Klafter, verjüngte Schuh, verjüngte Zoll u. s. f. Siehe §. 18.

1. Auf eine gerade Linie ab, **Fig. 50**, trage man eine beliebige Anzahl gleicher Theile 01, 12, 23, 34 u. s. f., und jeder dieser Theile bedeute eine Klafter, so kann man damit eine jede Linie nach Klaftern ausmessen; bedeutet er einen Fuß, so kann man damit jede Linie nach Fußen angeben u. s. f. Theilt man die 0 10 in zehn oder sechs Theile, so kann man Zehntel oder Sechstel von den Klaftern, oder im zweiten Falle von den Schuhen messen. Daß jede Eintheilung möglich sey, ist einleuchtend; so würde die Eintheilung der Klafter in sechs Theile verjüngte Fuße, des Fußes in zwölf Theile verjüngte Zolle geben.

Es sey, **Fig. 51**, eine andere Vorrichtung zu einem verjüngten Maßstabe, deren Gebrauch unten erkläret wird.

XV. Aufgabe. (Winkel zu zeichnen.)

§. 74.

An einen gegebenen Punct a einer geraden Linie einen Winkel zu setzen, der einen gegebenen Winkel c gleich ist. **Fig. 52.**

1. Aus der Spitze des gegebenen Winkels c beschreibe man einen Bogen hi, mit einem willkührlichen Halbmesser ci, mit eben diesem Halbmesser beschreibe man auch aus dem gegebenen Puncte a einen Bogen gx.
2. Fasse man die Größe des Bogens hi, und trage sie aus g nach f auf den Bogen gx.

3. Zieht man von a nach dem Puncte f eine gerade Linie ae, so ist der Winkel bac = dem Winkel c.

XVI. Aufgabe.

§. 75.

Einen gegebenen Winkel zu halbiren oder in zwei gleiche Theile zu theilen.

Es sey der gegebene Winkel abc. Fig. 53.

1. Mit einem beliebigen Halbmesser bd beschreibe man aus der Spitze b einen Bogen, der die Schenkel des Winkels in d und e schneide.
2. Aus den Puncten d und e beschreibe man mit einem beliebigen Halbmesser df gleich ef die Durchschnittsbögen in f.
3. Verbinde den Scheitelpunct des Winkels durch eine gerade Linie mit f, so wird die Linie bf den Winkel abc in zwei gleiche Winkel x und y theilen oder den Winkel abc halbiren.

Einige auf die Kreislinie Bezug habende Aufgaben und Auflösungen.

XVII. Aufgabe.

§. 76.

Durch drei gegebene Puncte a, b, d, welche nicht in einer geraden Linie liegen, einen Kreis zu beschreiben. Fig. 54.

1. Man verbinde die drei Puncte durch die geraden Linien ab und bd.
2. Beide Linien halbire man nach der XI. Aufgabe in f und e, und errichte aus diesen Puncten senkrechte Linien fc und ec, welche sich in c schneiden.
3. Beschreibe man aus dem Mittelpuncte c mit dem Halbmesser cb eine Kreislinie, so wird sie durch die Puncte a, b, d gehen.

Fig. 55. Es seyen die gegebenen Puncte a, b, d.

1. Mit einerlei willkührlichen Halbmessern beschreibe man aus den Puncten a und b Kreislinien, die sich in f und h schneiden; eben so beschreibe man aus den Puncten b und d Kreise, welche sich in g und e schneiden.
2. Durch die Puncte h und f, wie auch g und e ziehe man gerade Linien hf und ge, diese werden sich in der Verlängerung in einem Puncte c schneiden; oder man lege Lineale an h und f, an g und e, so bestimmen diese den Punct c.
3. Wenn man endlich aus dem Punct c mit dem Halbmesser ca, cd oder cb eine Kreislinie beschreibet, so geht sie durch die drei Puncte a, b, d.

XVIII. Aufgabe.

§. 77.

Den Mittelpunct eines Kreises zu finden. Fig. 56.

Man ziehe in der gegebenen Kreislinie die Sehne ab, halbire selbe in d, errichte in d eine senkrechte Linie, welche bis zur Peripherie von beiden Seiten verlängert, einen Durchmesser der gegebenen Kreislinie gibt. Es sey fg, welche Linie halbirt wird, wo der Halbirungspunct zugleich der Mittelpunct der gegebenen Kreislinie ist.

Oder man nehme in der gegebenen Kreislinie, Fig. 54, drei Puncte a, b, d beliebig an, und ziehe sie mit geraden Linien ab und bd zusammen, so sind sie Sehnen der Kreislinie; wenn man nun die Sehnen ab und bd halbirt, und in den Halbirungspuncten f und e senkrechte Linien errichtet, so werden sie sich schneiden, und im Durchschnittspuncte c den Mittelpunct der Kreislinie bestimmen.

Eben so zeigt Fig. 55 an, wie man den Mittelpunct einer Kreislinie bestimmt, wenn man in ihr drei Puncte a, b, d annimmt, und die vorgezeichneten Durchschnittsbögen ausführt.

XIX. Aufgabe.

§. 78.

Zu einem gegebenen Bogen abd, Fig. 54, den Mittelpunct der Kreislinie zu finden, damit man die ganze Kreislinie vollenden könne.

1. Man ziehe in dem gegebenen Bogen zwei Sehnen ab und bd, halbire dieselben in e und f, und errichte aus ihren Halbirungspuncten e und f senkrechte Linien, die sich in c schneiden, und den Mittelpunct der Kreislinie angeben, von welcher der Bogen abd ein Stück ist.

Tangenten an eine gegebene Kreislinie zu ziehen.

XX. Aufgabe.

§. 79.

Durch einen in der Kreislinie liegenden Punct e eine Tangente zu ziehen. Fig. 57.

1. Aus dem Mittelpuncte ziehe man eine gerade Linie durch den gegebenen Punct e und mache ed gleich ec.
2. Aus den Puncten c und d beschreibe man mit willkührlichen Halbmesser die kleinen Bögen in a und b.
3. Zieht man die gerade Linie von a nach b, so geht sie durch den Punct e, und ist die Tangente des Kreises.

XXI. Aufgabe.

§. 80.

Durch einen außerhalb der Kreislinie liegenden Punct eine Tangente an die Kreislinie zu ziehen. Fig. 58.

1. Von dem gegebenen Puncte e ziehe man zu dem Mittelpuncte der Kreislinie c eine gerade Linie ec, mache ec = cd.
2. Aus dem Puncte d beschreibe man mit dem Halbmes-

ser cd einen Kreisbogen, welcher die Kreislinie in f und g schneiden wird.

3. Vereinige die Puncte f und g durch gerade Linien, und verlängere sie nach Belieben, so sind die geraden ae und be Tangenten der gegebenen Kreislinie.

XXII. Aufgabe.

§. 81.

An eine Kreislinie ist eine Tangente ab gezogen, man soll den Berührungspunct e finden. Fig. 59.

1. Von dem Puncte b der Tangente ab ziehe man zu dem Mittelpuncte der Kreislinie c eine gerade Linie bc, halbire sie in d.
2. Man beschreibe aus dem Mittelpuncte d mit dem Halbmesser dc einen Kreisbogen, welcher die gegebene Kreislinie in dem Berührungspuncte e schneidet.

Von der Berührung der Kreislinien.

§. 82.

Man sagt, zwei Kreislinien berühren sich, wenn sie so zusammentreffen, daß sie nur einen einzigen Punct gemeinschaftlich haben.

XXIII. Aufgabe. (Fig. 60.)

§. 83.

Es ist die Kreislinie a, in derselben der Punct d gegeben, man soll eine andere Kreislinie, deren Halbmesser gf ist, so ziehen, daß sie die Kreislinie a in d berühre.

Erster Fall, wenn sich die Kreislinien von aussen berühren.

1. Man ziehe von dem Mittelpuncte c der Kreislinie a nach dem gegebenen Puncte d eine unbegränzte gerade Linie ch.

2. Man

2. Man trage gf aus d nach e, und mache de = gf.
3. Beschreibe man aus dem Mittelpuncte e mit dem Halbmesser de die Kreislinie b, so wird sie die Kreislinie a in d von außen berühren.

Zweiter Fall. Wenn sich die Kreislinien von innen berühren sollen. Fig. 61.

1. Man ziehe von dem gegebenen Puncte d in dem Mittelpunct c der gegebenen Kreislinie a eine gerade Linie dc.
2. Trage man den gegebenen Halbmesser gf von d nach e, und beschreibe aus e mit dem Halbmesser ed eine Kreislinie b, so wird solche die Kreislinie a in dem gegebenen Puncte d berühren.

XXIV. Aufgabe.

§. 84.

Drei Kreislinien zu beschreiben, welche einander berühren, wenn die Halbmesser dieser Kreislinien gleich sind. Fig. 62.

1. Nach der vorgehenden Aufgabe beschreibe man die Kreislinie h und i, daß sie einander in f berühren.
2. Ihre Mittelpuncte a und b vereinige man durch die gerade ab, und beschreibe aus a und b mit dem Halbmesser ab Durchschnittsbögen in c.
3. Ziehe man die geraden Linien ca, cb und mit dem Halbmesser cd um den Mittelpunct c eine Kreislinie k, so sind die Kreislinien h, i, k einander gleich, und berühren einander in den Puncten d, e, f.

Sind die Halbmesser der drei zu beschreibenden Kreislinien ungleich, und die Kreislinien sollten sich in den Puncten l, m, n berühren. Fig. 63.

1. Man ziehe eine unbegränzte Linie dg, und mache die Linie de = den Linien a + b zusammen genommen, und df = b + c.

2. Man beschreibe mit den Halbmessern a und b zwei Kreislinien, die sich in n berühren.
3. Beschreibe man mit dc aus h einen kleinen Bogen in k, eben so beschreibe man aus i mit df einen kleinen Bogen, welcher den ersten in k schneiden wird, und ziehe noch die geraden Linien kh und ki.
4. Beschreibe man endlich mit km oder kl um k eine Kreislinie, so wird sie die zwei andern in den Puncten l und m berühren, folglich berühren alle drei Kreislinien einander.

Einige Aufgaben, die einfachsten Schnecken- oder Spiral-Linien zu beschreiben.

XXV. Aufgabe.

§. 85.

Eine Schnecken-Linie zu zeichnen. Fig. 64.

1. Man ziehe eine gerade Linie hi, zu beiden Seiten unbegränzt.
2. Auf dieser Linie nehme man ab willkührlich, und beschreibe damit als Halbmesser aus a die halbe Kreislinie BaG.
3. Nehme man bg als Halbmesser, und beschreibe aus b die halbe Kreislinie gBc.
4. Mit dem Halbmesser ac beschreibe man aus a die halbe Kreislinie cCd, und aus b mit bd die halbe Kreislinie dEe u. s. w., alsdann hat man eine Schnecken-Linie mit lauter halben Kreislinien gezeichnet, deren Mittelpuncte a und b sind.

Fig. 65, erkläret eine andere Art, eine Schnecken-Linie zu beschreiben.

1. Man ziehe eine unbegränzte gerade Linie df, und beschreibe aus einem Puncte A mit einem beliebigen Halbmesser ab eine Kreislinie aDbE.

2. Den Durchmesser dieser Kreislinie theile man in vier gleiche Theile aB, BA, AC, Cb.
3. Aus dem Mittelpuncte B beschreibe man mit Bb die halbe Kreislinie bfg; aus C mit dem Halbmesser Cg die halbe Kreislinie gGc; aus a mit dem Halbmesser ac die Kreislinie cHd, und endlich aus dem Puncte b mit dem Halbmesser bd das Stück Kreislinie dIe, so ist die Schnecken-Linie fertig.
4. Will man die Schnecken-Linie größer und mit mehreren Wendungen machen, so theile man den Durchmesser ab des Auges in mehrere z. B. in 6, 8, 10 Theile.
5. Eine mehr verwickelte Schnecken-Linie, siehe Anleitung zur bürgerlichen Baukunst für die deutschen Schulen in den k. k. österr. Staaten. Seite 149. Fig. 70 und 71.

Von den elipsförmigen krummen Linien, oval- oder eyförmigen Linien und Elipsen.

XXVI. Aufgabe.

§. 86.

Eine elipsförmige Linie aus lauter Bögen einer Kreislinie zusammen zu setzen, und auf eine gegebene ab zu beschreiben. Fig. 66.

1. Man theile die gegebene gerade Linie in drei gleiche Theile, und beschreibe aus den Theilungspuncten d und c die Kreislinien ahgceia und bfgdekb mit den Halbmessern cb oder ad, welche sich in den Puncten g und e schneiden werden.
2. Aus den Durchschnittspuncten e und g ziehe man durch die Mittelpuncte d und c die geraden Linien eh, ef, gi, gk.
3. Beschreibe man aus e mit dem Halbmesser ef den Bogen fh, und aus g mit dem Halbmesser gi den Bogen ik, so ist die verlangte elipsförmige Linie beschrieben.

Fig. 67, zeigt eine andere Art, eine elipsförmige Linie zu beschreiben.

1. Auf einer unbegränzten Linie ab beschreibe man um den Punct c eine Kreislinie mit einem beliebigen Halbmesser cd.
2. Mit eben diesen Halbmessern beschreibe man aus den Puncten d und e zwei Kreislinien.
3. Aus dem Puncte c errichte man eine senkrechte Linie, welche die mittlere Kreislinie in den Puncten g und f schneidet.
4. Aus den Puncten g und f ziehe man durch die Mittelpuncte d und e gerade Linien gk, gl, fi und fh.
5. Beschreibe man aus g und f mit den Halbmessern gl und fh die Bögen lk und hi, welche sich mit den beschriebenen äußern Kreislinien in den Puncten h, i, k, l, vereinigen, und zusammen eine elipsförmige Linie formiren.

§. 87.

Diese zwei Arten krummer Linien sind bei den Handwerksleuten die gewöhnlichsten, sind aber keine wirklichen Elipsen, deswegen mögen sie zum Unterschiede der Elipse elipsförmige Linien genannt werden.

XXVII. Aufgabe.

§. 88.

Auf eine gegebene Linie eine Elipse zu schreiben. Fig. 68.

1. Man mache ad = bc, und schlage in die Puncte d und c zwei kleine Nadeln ein.
2. Nehme man einen Faden, welcher so lang als die gegebene Linie ab ist, und befestige seine Enden an die Nadeln d und c.
3. Nehme man einen Bleistift h, und bringe ihn innerhalb des Fadens, und spanne ihn mit dem Faden et-

was stark an; fährt man mit dem Bleistift also um den Faden herum, so bekömmt man eine Elipse.

§. 89.

Wird die gegebene Linie ab in e halbirt, so ist der Punct e der Mittelpunct der Elipse. Die Linie ab wird die große Achse, und die durch den Mittelpunct der Elipse zur großen Achse senkrechte fg die kleine Achse der Elipse genannt. Die Puncte d und c, welche gleich weit vom Mittelpuncte e abstehen, heißen die Brennpuncte der Elipse.

XXVIII. Aufgabe.

§. 90.

Eine eyförmige oder Ovallinie zu beschreiben. Fig. 69.

1. Mit einem beliebigen Halbmesser cb, beschreibe man um den Mittelpunct c eine Kreislinie aebd, und durch ihren Mittelpunct c ziehe man die ed senkrecht auf dem Durchmesser ab.
2. Aus den Puncten a und b ziehe man durch d die geraden Linien bx und ay.
3. Aus den Puncten a und b beschreibe man mit dem Durchmesser ab die Bögen von b bis g, und von a bis f.
4. Eben so beschreibe man mit dem Halbmesser dg aus d den Bogen ghf, so ist die Linie eahb die verlangte eyförmige oder Ovallinie.

§. 91.

Die Parabel, Hyperbel, Radlinie, Kettenlinie u. s. w. sind bei den Zimmerleuten, Schreinern, Maurern, Steinhauern und andern Handwerkern nicht gebräuchlich, deswegen unterläßt man die Zeichnung dieser krummen Linien, und verweiset auf die construirende Geometrie von G. A. Fischer, Leipzig, 1825, von Seite 89, bis Seite 114.

Von der Verzeichnung der Dreiecke.

§. 92.

Um ein Dreieck verzeichnen zu können, so muß immer bekannt oder gegeben seyn, entweder

1. alle drei Seiten;
2. oder zwei Seiten und die eingeschlossenen Winkel, oder
3. eine Seite mit den anliegenden Winkeln.

XXIX. Aufgabe.

§. 93.

Ein gleichseitiges Dreieck zu zeichnen, dessen eine Seite ab bekannt oder gegeben ist. Fig. 70.

Weil im gleichseitigen Dreiecke alle drei Seiten gleich sind, so sind daher durch die eine alle drei gegeben.

1. Man ziehe daher eine gerade Linie cd, welche der gegebenen ab gleich ist.
2. Mit der gegebenen ab oder mit der gleichen cd, als Halbmesser beschreibe man aus c und d kleine Bögen in e.
3. Vereiniget man e durch gerade Linien mit c und d, so erhält man ein gleichseitiges Dreieck ced.

XXX. Aufgabe.

§. 94.

Ein gleichschenkelichtes Dreieck zu zeichnen, wovon zwei ungleiche Seiten gegeben sind. Fig. 71.

Nach §. 44 ist ein gleichschenkelichtes Dreieck jenes, in welchen zwei Seiten gleich sind, demnach sind durch die ungleichen Seiten alle drei Seiten des Dreieckes gegeben. Man ziehe daher

1. eine gerade der kleinen Seite b gleiche cd, mit der

größern Linie a beschreibe man als Halbmesser aus den Puncten c und d in e Durchschnittsbögen.

2. Verbindet man den Punct e durch gerade Linien mit c und d, so ist das gleichschenkelichte Dreieck ecd fertig.

XXXI. Aufgabe.

§. 95.

Aus drei gegebenen ungleichen geraden Linien, von welchen immer zwei zusammen genommen größer als die dritte seyn müssen, ein ungleichseitiges Dreieck zu zeichnen. Fig. 72.

Es seyen die gegebenen ungleichen geraden Linien a, b, c.

1. Man ziehe eine gerade Linie de und mache sie der gegebenen c gleich.
2. Aus d beschreibe man mit der Linie b und aus e mit der gegebenen geraden a zwei kleine Bögen in f.
3. Verbindet man die Puncte d und e durch gerade Linien mit f, so ist das ungleichseitige verlangte Dreieck dfe verzeichnet.

XXXII. Aufgabe.

§. 96.

Es sind zwei Seiten a und b nebst dem Winkel DAC gegeben, man soll ein Dreieck zeichnen. Fig. 73.

1. Man ziehe eine gerade der gegebenen a gleiche Linie de.
2. Mit einem willkührlichen Halbmesser beschreibe man aus dem Scheitelpuncte des gegebenen Winkels DAC den Bogen DC, und mit dem nämlichen Halbmesser aus d den Bogen AB.
3. Trage man die Länge des Bogens DC von A nach B und ziehe von d nach B eine unbegränzte Linie df, mache df gleich der gegebenen b, und ziehe die fe, so ist das verlangte Dreieck dfe verzeichnet.

XXXIII. Aufgabe.

§. 97.

Aus einer gegebenen Seite a und zwei gegebenen Winkeln e und f ein Dreieck zu zeichnen. Fig. 74.

1. Man mache bc gleich der gegebenen geraden Linie a, und beschreibe mit beliebigem Halbmesser aus den Scheitelpuncten der Winkel e und f die Bögen AB, CD, und mit eben diesem Halbmesser aus den Puncten B und c die Bögen EF und GH.
2. Trage die Länge des Bogens AB und EF, und die Länge des Bogens CD nach GH, mache EF gleich AB, und GH gleich CD.
3. Ziehe man von b nach dem Puncte F und von c nach dem Puncte H gerade Linien, verlängere selbe, bis sie zusammen treffen, oder sich in d schneiden, so erhält man das verlangte Dreieck bdc.

XXXIV. Aufgabe.

§. 98.

Aus zwei gegebenen Seiten ein rechtwinkelichtes Dreieck zu verzeichnen. Fig. 75.

Es seyen gegeben die Seiten a und b.

1. Man mache cd gleich a und errichte in c eine senkrechte Linie auf die gerade cd, mache ce gleich der gegebenen Linie b, und ziehe die gerade Linie de, so ist cde ein rechtwinkelichtes Dreieck.

Von der Verzeichnung der regelmäßigen vierseitigen Figuren oder der Parallelograme.

XXXV. Aufgabe.

§. 99.

Auf eine gegebene Seite ein Quadrat zu verzeichnen. Fig. 76.

Die gegebene gerade Linie oder Seite sey ab.

1. Man errichte aus a und b senkrechte Linien, mache ac und bd = ab, und ziehe von c nach d eine gerade Linie, so ist abcd ein Quadrat.

XXXVI. Aufgabe.

§. 100.

Aus zwei gegebenen Seiten a und b ein verlängertes Rechteck zu zeichnen. Fig. 77.

1. Man mache die gerade Linie cd gleich der gegebenen b, und errichte aus c und d senkrechte Linien cf und df.
2. Mache man de und cf gleich der gegebenen a, und ziehe von f nach e die gerade Linie fe, so ist das Rechteck gezeichnet.

XXXVII. Aufgabe.

§. 101.

Aus der gegebenen Linie a und dem gegebenen spitzigen Winkel b eine Raute oder Rhombus zu zeichnen. Fig. 78.

1. Man mache cd gleich a, und den Winkel c gleich dem gegebenen Winkel b.
2. Aus dem Puncte c ziehe man durch den Punct d eine gerade Linie, und mit ihr aus d die gerade de parallel.
3. Macht man endlich fc und de gleich der gegebenen Linie a, und zieht von f nach e eine gerade Linie, so ist cdef oder ce ein Rhombus oder eine Raute.

XXXVIII. Aufgabe.

§. 102.

Aus zwei gegebenen Seiten und einem schiefen Winkel ein Rhomboides zu zeichnen. Fig. 79.

Es seyen gegeben a und b und der Winkel c.

1. Man mache die Linie de gleich der Linie a, und an

e setze man einen Winkel, der dem gegebenen Winkel c gleich ist.

2. Ziehe man von e nach D eine gerade Linie ef, und aus d die dg mit ef parallel.
3. Wenn man endlich ef und dg gleich der gegebenen Linie b macht, die Puncte f und g durch eine gerade Linie verbindet, so erhält man das Rhomboides defg oder ge oder df.

Von der Verzeichnung der irregulären vierseitigen Figuren oder der Trapezen.

XXXIX. Aufgabe.

§. 103.

Aus drei gegebenen Seiten a, b, c, und einem schiefen Winkel d ein parallel Trapez zu verzeichnen. Fig. 80.

1. Man mache die gerade Linie eh gleich der gegebenen geraden a, und setze an e einen Winkel, welcher dem gegebenen Winkel d gleich ist.
2. Die Linie ef, welche man von e durch den Punct a gezogen hat, mache man gleich der gegebenen geraden Linie b.
3. Ziehe man durch den Punct f, nach X. Aufgabe mit eh die parallele gerade fg, die man gleich der Linie c machet, so wird die Fig. efgh ein parallel Trapez, wenn man noch die Puncte g und h verbindet.

XXXX. Aufgabe.

§. 104.

Aus vier gegebenen Seiten a, b, c, d, wovon immer drei zusammen genommen, größer sind, als die vierte, nebst einem gegebenen Winkel i ein Trapezium zu zeichnen. Fig. 81.

1. Man mache ef = a, und setze an e den gegebenen Winkel i.

2. Man ziehe durch a die Linie ch, und mache sie gleich der Linie b.
3. Aus den Puncten h und f beschreibe man mit der Linie c und d die kleinen Durchschnittsbögen in g.
4. Zieht man die Linie hg und fg, so hat man aus den gegebenen Stücken das verlangte Trapezium.

Von dem Verzeichnen der Vielecke oder Polygone.

XXXXI. Aufgabe.

§. 105.

Aus der gegebenen Seite a ein reguläres Fünfeck zu verzeichnen. Fig. 82.

1. Man ziehe eine unbegränzte gerade Linie br, und mache darauf bc gleich der gegebenen geraden Linie a, errichte aus c ein unbegränztes Perpendikel ci, und mache ch = bc.
2. Man theile die gerade Linie bc in zwei gleiche Theile in k, und beschreibe mit dem Halbmesser kh den Bogen hg, welcher die Linie br in g schneiden wird.
3. Mit dem Halbmesser bg beschreibe man aus den Puncten b und c kleine Durchschnittsbögen in e.
4. Mit der gegebenen Linie a beschreibe man aus den Puncten b und c und aus dem Puncte e die Durchschnittsbögen in f und d.
5. Verbindet man die Puncte b, f, e, d, c und b mit den geraden Linien bf, fe, ed, dc, cb, so ist die Figur ein regelmäßiges Fünfeck.

XXXXII. Aufgabe.

§. 106.

Mit der gegebenen geraden a ein regelmäßiges Sechseck zu beschreiben. Fig. 83.

1. Mit der gegebenen Linie a beschreibe man um einen willkührlich angenommenen Punct c eine Kreislinie, und trage die gerade in derselben sechsmal herum, so ergeben sich die Puncte b, d, e, f, g, h.
2. Verbindet man diese Puncte mit geraden Linien bd, de, ef, fg, gh, hb, so hat man ein regelmäßiges Sechseck.

XXXXIII. Aufgabe.

§. 107.

Ein regelmäßiges Siebeneck auf eine gegebene Seite a zu beschreiben. Fig. 84.

1. Man setze auf eine gerade Linie bc, die etwas größer als die gegebene a ist, ein gleichseitiges Dreieck bfc, und aus der Spitze f fälle man das Perpendikel oder die senkrechte fh, auf welches man die gegebene Linie a aus f nach g trägt.
2. Durch den Punct g ziehe man mit bc eine Parallellinie de.
3. Mit de beschreibe eine Kreislinie aus einem Mittelpuncte c, so wird sich die gegebene Linie a in derselben siebenmal herumtragen lassen.

Zieht man endlich die gefundenen Puncte k, l, m, n, o, p, q, r, durch gerade Linien zusammen, so ist das Siebeneck gezeichnet.

XXXXIV. Aufgabe.

§. 108.

Ein regelmäßiges Achteck auf eine gegebene Linie ab zu beschreiben. Fig. 85.

1. Man halbire ab in d, und errichte aus d eine unbegränzte senkrechte dm.
2. Die Hälfte von der Linie ab, ad trage man aus d

nach e, und nehme die eb, trage sie aus e nach c, und beschreibe um c als den Mittelpunct mit dem Halbmesser cb eine Kreislinie, so wird sich die gegebene Linie ab in demselben achtmal herum tragen lassen, und die Puncte b, i, g, h, f, k, l, a bestimmen.

3. Verbindet man diese Puncte durch gerade Linien, so ist das verlangte Rechteck fertig.

XXXXV. Aufgabe.

§. 109.

Auf eine gegebene gerade Linie ab ein regelmäßiges Neuneck zu beschreiben. Fig. 86.

1. Man setze auf die gegebene gerade ab ein gleichseitiges Dreieck nach der XXIX. Aufgabe.
2. Man theile die Linie ab bei n in zwei gleiche Theile, und errichte aus n ein unbegränztes Perpendikel nh, welches durch den Punct d gehen muß.
3. Trage man an aus d nach c, und beschreibe mit dem Halbmesser cb um c eine Kreislinie, in welcher sich alsdann die Linie ab wird neunmal herumtragen lassen. Die gefundenen Puncte b, e, f, g, h, i, k, l, a, mit geraden Linien verbunden, geben das verlangte Neuneck.

XXXXVI. Aufgabe.

§. 110.

Auf eine gegebene Linie ab ein regelmäßiges Zehneck zu beschreiben. Fig. 87.

1. Man verlängere ab unbegränzt nach f, und halbire ab in p; auch trage man ab auf die in b senkrechte gerade br von b nach d, und beschreibe aus p mit der Weite dp einen Bogen, welcher die verlängerte af in e schneiden wird.

2. Beschreibe man mit ac aus a und b Bögen, so ergibt sich der Punct c, und wenn man um diesen Punct c mit dem Halbmesser ca eine Kreislinie beschreibt, so läßt sich die gegebene Linie ab zehnmal in derselben herumtragen.
3. Verbindet man endlich die Puncte g, h, i, k, l, m, n, o, a mit geraden Linien, so ist das verlangte Zeheneck gezeichnet.

XXXXVII. Aufgabe.

§. 111.

In ein gegebenes Dreieck eine Kreislinie zu beschreiben, das heißt, so zu zeichnen, daß die Seiten des gegebenen Dreieckes Berührungslinien der zu beschreibenden Kreislinie sind.

Es sey das gegebene Dreieck abc. Fig. 88.

1. Man halbire die Winkel bei b und c durch die Linien bd, cd, die sich in Puncte d schneiden.
2. Aus dem Puncte d fälle auf bc eine senkrechte Linie de.
3. Mit de beschreibe man um d eine Kreislinie, so wird sie jede Seite des Dreieckes berühren.

XXXXVIII. Aufgabe.

§. 112.

In ein gegebenes Quadrat eine Kreislinie zu beschreiben. Fig. 89.

1. Man halbire ad in e, und ba in f, und ziehe aus e mit ab, und aus f mit ad die Linie eh und fk parallel, sie werden sich in g schneiden.
2. Beschreibt man mit dem Halbmesser ge um g eine Kreislinie, so wird sie die Seiten des Quadrats berühren.

XXXXIX. Aufgabe.

§. 113.

Zu zwei gegebenen Linien die mittlere geometrische Proportionale zu finden. Fig. 90.

Es seyen die gegebenen Linien a und b.

1. Man ziehe eine gerade Linie ch unbegränzt, und trage aus c nach d die gerade Linie a, so daß cd = a, und de mache man gleich b der andern Linie.
2. Aus dem Puncte d errichte eine senkrechte; halbire die ganze ce in f, und beschreibe mit dem Halbmesser fe die halbe Kreislinie cge, so wird die senkrechte in g geschnitten, und dg die verlangte proportionale Linie seyn. Es wird sich nämlich verhalten a : dg = dg : b.

XXXXX. Aufgabe.

§. 114.

Zu drei gegebenen Linien a, b, c die vierte geometrische proportionale Linie zu finden. Fig. 91.

1. Man ziehe unter einem beliebigen Winkel zwei unbegränzte Linien di und dk, man mache de = a, df = b, und fg = c.
2. Ziehe man von f nach e eine gerade Linie, und mit ihr aus dem Puncte g die gh parallel, alsdann ist der Abschnitt eh die vierte geometrische Proportionallinie. Es wird sich verhalten a : b = ch : c.

XXXXXI. Aufgabe.

§. 115.

Einen zehntheiligen verjüngten Maßstab zu beschreiben, oder zu verfertigen. Fig. 50.

1. Auf eine gerade Linie ab trage man eine beliebige Anzahl gleicher Theile 10 0, 0 1, 1 2, 2 3 u. s. w. und jeder von diesen Theilen bedeute einen Schuh, so kann man damit eine jede gerade Linie nach Schuhen oder Fußen ausmessen; damit man aber auch die Zolle abnehmen könne, so theile man einen Theil wie 10 0 in zehn oder zwölf gleiche Theile, nachdem man den zehn- oder zwölftheiligen Maßstab zu haben wün-

schet. So hat man auf diesem Maßstabe auch die Zolle, und durch diese Eintheilung des Theiles 10 0 in zehn oder zwölf gleiche Theile, ist die ganze Linie ab in 60 oder 72 gleiche Theile getheilet worden. Der weitere Gebrauch wird mündlich gelehrt.

2. Wenn man nach diesem Maßstabe eine gerade Linie 2 Fuß, 5 Zoll lang haben will, so darf man nur den Zirkel in 2 einsetzen, und gegen a bis 5 öffnen, so ist die Oeffnung des Zirkels 2 Fuß, 5 Zoll, welche man bequem auf eine andere gerade Linie tragen kann.

3. Weil dieser Maßstab zu kleineren Theilen, z. B. Linien und Puncten noch nicht vollständig genug ist, so gibt man ihm eine andere Einrichtung. **Fig. 51.**

4. Man lasse die Linie ab eingetheilt, wie bei dem vorigen Maßstabe, und errichte aus a eine senkrechte ac, und trage darauf zehn oder zwölf gleiche Theile.

5. Aus diesen Theilpuncten ziehe man mit ab die Parallellinien 1, 2, 3, 4 u. s. f.

6. Zieht man endlich die gerade Linie qc und mit ihr aus den übrigen Theilungspuncten die schiefen Parallelen von 8, 7, 6, 5 u. s. f. bis 0, so ist der verjüngte Maßstab, auf welchem man nicht nur die Fuße, sondern auch Zolle und Linien darauf abnehmen kann, fertig.

Diese Art ist die einfachste von verjüngten Maßstäben, woraus Anfänger eigentlich lernen sollen, was ein verjüngter Maßstab sey.

Zweiter Theil.

I. Abschnitt.

Die berechnende Geometrie.

§. 116.

Diese lehrt den Umfang und den Flächeninhalt eines Dreieckes, eines Viereckes, eines Vieleckes, einer Kreislinie oder Kreises zu berechnen, wenn gewisse Ausdehnungen an selben gemessen oder gegeben wurden.

I. Aufgabe.

§. 117.

Den Umfang eines gleichseitigen Dreieckes zu finden.

Ist eine Seite gegeben, nimm sie dreimal, so erhältst den Umfang eines gleichseitigen Dreieckes, z. B. Es sey Fig. 16, die Seite ab nach dem verjüngten Maßstabe gleich 5 Fuß, oder 5 Zoll, so ist der Umfang des gleichseitigen Dreieckes abc = 15 Fuß, oder 15 Zoll in die Länge.

II. Aufgabe.

Den Umfang eines gleichschenkelichten Dreieckes zu berechnen, wenn zwei ungleiche Seiten in selben bemessen oder gemessen sind. Es sey Fig. 17, ab im verjüngten Maßstabe gleich 5 Fuß, die Grundlinie bc gleich 3 Fuß, so ist der Umfang des gleichschenkelichten Dreieckes ab + ac + bc = 5 + 5 + 3 = 13.

III. Aufgabe.

Der Umfang eines ungleichseitigen Dreieckes kann nur berechnet werden, wenn alle drei Seiten desselben gegeben oder gemessen sind. Fig. 18.

IV. Aufgabe.

Den Umfang eines Viereckes zu berechnen.

1. Ist das Viereck gleichseitig, so nehme man die gegebene Seite viermal. Fig. 20 und Fig. 22.
2. Ist das Viereck ein Rechteck oder ein Rhomboides, so messe man die zwei ungleichen Seiten, addire ihre Längen, und nehme die Summe doppelt. Fig. 21 und Fig. 23.
3. Ist das Viereck ein Trapezium oder Trapezoides, so messe jede Seite besonders, und addire ihre Maßen, so gibt die Summe den Umfang. Fig. 24 und Fig. 25.

V. Aufgabe.

Den Umfang eines Vieleckes oder Polygons zu finden.

1. Ist das Polygon regelmäßig, so messe man eine Seite, und multiplicire die gefundene Länge mit der Anzahl der Seiten des gegebenen Polygons, so gibt das Product den Umfang des Vieleckes.

Zur Uebung messe und berechne man die Umfänge der Vielecke. Fig. 26, 82, 83, 84, 85, 86, 87 u. dgl.

2. In einem unregelmäßigen Vielecke müssen alle Seiten, wenn nicht gleiche vorkommen sollten, gemessen, und die gefundenen Längen derselben zu einander addirt werden, wenn man den Umfang desselben erhalten will, denn die Summe aus allen Längen der Seiten gibt den Umfang des unregelmäßigen Polygons.

VI. Aufgabe.

Den Umfang eines Kreises, oder die Länge einer Kreislinie, deren Durchmesser oder Halbmesser gegeben oder gemessen ist, zu berechnen.

Es ist bereits §. 27 gesagt, daß sich der Durchmesser des Kreises zur Peripherie oder Kreislinie beinahe verhalte, wie 7 zu 22, oder 100 zu 314.

Man multiplicire daher die Länge des gegebenen Durchmessers mit 22, und dividire dieses Product mit 7, oder man multiplicire die Länge des gegebenen Durchmessers mit 314, und dividire dieses Product mit 100, so gibt der gefundene Quotient die Länge des Kreisumfanges oder der Kreislinie in Klaftern, Schuhen, Zollen, Linien u. s. f. an, nachdem der Durchmesser in Klaftern, Schuhen, Zollen, Linien u. s. f. gemessen worden ist. Zu Beispielen messe man den Durchmesser einiger kreisrunden Flächen, eines Hutes, eines Tisches, eines Cylinders ꝛc.

II. Abschnitt.

Den Flächeninhalt aller regelmäßigen und unregelmäßigen Vielecke zu berechnen, soll dieser Abschnitt lehren.

§. 118.

Zum Flächenmaße hat man ein Quadrat gewählet, dessen Seite eine Meile, eine Klafter, einen Fuß, einen Zoll, eine Linie oder einen Punct in der Länge hat; daher hat man Quadratmeilen, Quadratklaftern, Quadratschuhe, Quadratzolle, Quadratlinien, Quadratpuncte. Man erwäge wohl, daß eine Quadratklafter 36 Quadratschuhe, ein Quadratschuh 144 Quadratzolle, ein Quadratzoll 144 Quadratlinien, eine Quadratlinie 144 Quadratpuncte enthält, und übe sich sorgfältig in diesen Angaben. Man zeichne sich Quadrate, in denen man die zwei anliegenden Seiten in 6 und 12 gleiche Theile theilt, aus den Theilungspuncten ziehe man zu den getheilten Seiten parallele Linien, so erhält man die Zahlen 36, 144 u. s. f.

§. 119.

In jeder Figur oder Fläche nimmt man zwei Längenausdehnungen gewahr, die eine nennt man ausschließlich die Länge, und gewöhnlich die größere, die andere die Breite, die kleinere. In der Berechnung der Flächen bedient man sich gewöhnlich statt der Länge des Ausdruckes: Grundlinie, statt der Breite des Ausdruckes: Höhe.

Als Grundlinie kann jede Seite der Figur angenommen werden, von deren Lage dann die Bestimmung der Höhe abhängt. So ist Fig. 16 in dem Dreiecke abc die senkrechte aus dem Scheitelpuncte a auf die Seite bc die Höhe oder Breite des Dreieckes, und bc die Länge oder die Grundlinie. In einem Dreieck ist also die Höhe eine senkrechte, welche von einem Scheitelpuncte eines Winkels auf die, und bis zu der diesem Winkel gegenüber liegenden Seite (Grundlinie) gezogen wird. So sind Fig. 17 und 18 bd und ad die Höhen der Dreiecke, die Seite ac und die verlängerte bc die Grundlinien der Dreiecke. In dem rechtwinkelichten Dreiecke Fig. 19, ist ab die Höhe, wenn man die Cathete bc als Grundlinie annimmt.

Eine kleine Uebung in der Ziehung der Höhen in den gezeichneten Dreiecken nach willkührlich zu Grundlinien angenommenen Seiten wird über die Ausdrücke von Höhe und Grundlinie lichte Begriffe verbreiten, die sich jeder Anfänger, wenn er die Berechnung der Flächen leicht verstehen will, eigen machen soll. Eben solche Uebungen stelle ein jeder Anfänger mit den vierseitigen Figuren an; es wird Jedermann leicht einsehen, daß in einem Quadrate die Grundlinie und Höhe gleich sind, daß in einem länglichten Rectangel oder rechtwinkelichten Vierecke die Länge die Grundlinie, und die Breite die Höhe seyn müsse. So ist Fig. 20, die Grundlinie cd = der Höhe ac; Fig. 21, cd die Grundlinie und ac die Höhe. In den schiefwinkelichten Vierecken bestimmt die senkrechte, welche zwischen zwei parallelen Seiten liegt, die Höhe, wenn eine von den parallelen Seiten als Grundlinie angenommen wird. ac Fig. 21 und 23 zeigt die Höhe der da gezeichneten Parallelograme. Zeichne mehrere ähnliche Parallelograme.

§. 120.

Jeder wird leicht einsehen, daß das schiefwinkelichte Parallelogram, acdb Fig. 22 oder 23, dem rechtwinkelichten aelb dem Flächeninhalte nach, gleich seyn müsse, denn die Congruenz oder Deckungsgleichheit der Dreiecke ace und bdf springt von selbst in die Augen. Man kann die nämliche Verwandlung mit jedem ähnlichen schiefwinkelichten Dreiecke vornehmen.

§. 121.

Eben so wird sich Jedermann leicht überzeugen, daß jedes Parallelogram durch die Diagonale in zwei sich gänzlich deckende oder congruente Dreiecke getheilt, zerlegt oder geschnitten wird. Zur besseren Einsicht mache man sich Parallelograme von Papier, Holz oder andern leicht trennbaren Materien, so wird man nach der gezogenen Diagonallinie immer zwei congruente Dreiecke erhalten. Wer sieht nicht, daß in der 20sten Figur das Dreieck acd mit dem Dreiecke abd, in der 22sten Figur das Dreieck acb mit dem Dreiecke acd congruent ist. Eine vielfältige Uebung in dieser Betrachtung wird nicht nur vergnügen, sondern sehr viel nützen.

§. 122.

Zu jedem Dreiecke läßt sich durch die Zeichnung ein Dreieck anbringen, welches mit dem vorigen zusammen genommen, entweder ein recht- oder ein schiefwinkelichtes Parallelogram bildet. So geben Fig. 19, die zu bc parallele ad, und die zu ab parallele, cd mit dem vorigen Dreiecke abc und dem neuen acd ein rechtwinkelichtes, und Fig. 16 ein schiefwinkelichtes Parallelogram.

Es läßt sich demnach jedes Dreieck so ansehen, als wenn es die Hälfte eines recht- oder schiefwinkelichten Parallelograms wäre. Jede vielseitige Figur läßt sich durch Ziehung der Diagonallinien in Dreiecke zerfällen, und man wird gleich nach einem zweiten oder dritten Versuche finden, daß man immer um zwei Dreiecke weniger erhalte, als das Vieleck Seiten hat. Siehe die Fig. 26, 27, 28. Nimmt man aber innerhalb des Vieleckes einen beliebigen oder einen bestimmten Punct an, und zieht von diesen zu den Scheitelpuncten des Vieleckes gerade Linien, so zerfällt das Vieleck in so viele Dreiecke, als das Vieleck Seiten hat, und zwar ein regelmäßiges Vieleck, von dessen Mittelpuncte zu den Scheitelpuncten gerade Linien gezogen werden, in eben so viele gleiche und congruente Dreiecke.

Zur Uebung können die Fig. 82 bis 87 dienen, in denen man sich die besagten geraden Linien von den Mittelpuncten gezogen, denkt, oder wirklich zieht.

§. 123.

Hat man sich in dem, was in den letzten Paragraphen gesagt worden ist, fleißig geübet, so ist man in Stand gesetzt, folgende Aufgaben ohne Beschwerlichkeit zu lösen.

Ehe man zur wirklichen Berechnung schreitet, wird es sehr nützlich seyn, mit einigen wirklichen Abmessungen sich zu beschäftigen; dazu gibt es in jedem Zimmer Gegenstände genug. Man messe z. B. die Länge und Breite eines Tisches, einer Tafel, einer Bank, des Bodens oder anderer regelmäßiger vierseitigen Figuren mit einem zwölf- oder zehntheiligen Maßstabe, schreibe diese gefundenen Längen in Klaftern, Schuh, Zoll u. s. w. auf, denke sich nach der Länge, Streifen oder Riemen, welche einen Zoll, Schuh oder Klafter breit sind, so wird Jedermann, der in das im 118. §. Gesagte sich eingeübet hat, auf den Wink finden, daß diese Streifen so viele Quadratklaftern, Schuh, Zoll u. s. w. dem Flächeninhalte nach in sich fassen, als die Länge des Streifens oder Riemens Klafter, Schuh und Zolle enthält. Wohlgemerkt, die Länge sey in Zollen gegeben, so müßte auch die Breite eines solchen Riemens einen Zoll betragen; die Länge sey in Schuhen gemessen, so müßte die Breite ebenfalls einen Schuh betragen, u. s. w. Ist die Anzahl der Quadratklaftern, Quadratschuhe, Quadratzolle eines solchen Streifens gefunden, so braucht man nur zu untersuchen, wie viele solche Streifen sich in der Breite des Tisches, der Tafel u. s. f. finden oder annehmen lassen, so gibt eine einfache Multiplication der Anzahl der in dem ersten Streifen gefundenen Quadratklaftern, Quadratschuhe, Quadratzolle mit der Anzahl der gefundenen oder angenommenen Streifen oder Riemen das Product, welches die Zahl der gesammten Quadratklaftern, Quadratschuhe, Quadratzolle enthält. Zieht man überdieß noch in der Tafel oder auf dem Tische durch die Theilungspuncte der Klaftern, Schuhe, Zolle, parallele Linien zu der Länge und Breite dieser Gegenstände, so erhält man den erfreulichen Anblick der gesammten Quadrate, die abgezählet werden.

Nach dieser Uebung und Betrachtung wird sich von selbst die Regel zur Lösung der ersten Aufgabe ergeben.

I. Aufgabe.

Den Flächeninhalt eines rechtwinkelichten Parallelograms zu berechnen.

a. Man messe im wirklichen oder verjüngten Maßstabe die Grundlinie und die Höhe des Parallelograms.

b. Schreibe diese in Zahlen an, und bringe sie auf einerlei Benennung.

c. Multiplicire diese Zahlen mit einander, so ergibt sich aus dem Producte die Anzahl der Quadratklaftern, Quadratschuhe, Quadratzolle.

d. Bringe die Quadratzolle auf Quadratschuhe, die Quadratschuhe auf Quadratklaftern nach §. 118.

e. Es sey Fig. 21, die Grundlinie des Rechteckes cd im verjüngten Maßstabe = 8°, und die Höhe ac in eben diesem Maße = 3°, so erhält man zum Flächeninhalte 24□°. Man mache drei gleiche Theile in der Höhe und ziehe durch die Theilungspuncte parallele Linien zu der Grundlinie, und eben so aus acht Theilungspuncten der Grundlinie parallele Linien zu der Höhe, so ergeben sich 24 sichtbare Quadrate. Bei dergleichen Uebungen verweilt man niemals zu lange, weil es hier vorzüglich darum zu thun ist, um einen richtigen Begriff von dem Flächenmaße zu erwecken, woran sich so leicht ein Anfänger täuscht. Man kann sich hier zugleich überzeugen, wie weit das Verhältniß der Flächen von dem einfachen Verhältnisse der bloßen Längenausdehnung abweicht. Zu diesem Behufe zeichne man mehrere Quadrate von der Seite 1, 2, 3, 4, 5 u. s. f. Klafter, Schuh oder Zoll nach verjüngtem Maßstabe, an die Tafel oder auf ein Papier, und vergleiche sie zu einander, so wird man das sogenannte Flächen- oder quadratische Verhältniß sichtlich in den Zahlen 1, 4, 9, 16, 25 u. s. f. darstellen.

Auch bei dieser Betrachtung wird man nicht zu lange verweilen; sie fordert von jedem Anfänger viel Fleiß um desto mehr, wenn er noch in den Knabenjahren, ungewohnt an abstracte Vorstellungen das Flächenmaß zu lernen angehalten wird; auch hängt von der eben berührten Berechnungsweise die Auflösung aller folgenden Aufgaben ab.

II. Aufgabe.

§. 124.

Den Flächeninhalt eines schiefwinkelichten Parallelograms zu berechnen.

Es ist oben §. 120 gesagt worden, daß sich für je des schief winkelichte Parallelogram ein rechtwinkelichtes von gleichen Flächenmaße finden läßt; man suche dieses, und berechne es, so wie in der I. Aufgabe gezeigt worden, so hat man den Flächeninhalt des schiefwinkelichten Parallelograms, dessen Grundlinie und Höhe der Grundlinie und Höhe des rechtwinkelichten gleich ist. Auch ist die Wahrheit einleuchtend, daß Parallelograme, welche gleiche Grundlinien und Höhen haben, dem Flächeninhalte nach einander ganz gleich seyn müssen, denn gleiche Factoren geben immer gleiche Producte.

III. Aufgabe.

§. 125.

Den Flächeninhalt eines Dreieckes zu berechnen, wenn dessen Grundlinie und Höhe gegeben oder gemessen ist.

a, Man betrachte das Dreieck als die Hälfte eines Parallelograms, mit welchem es eine gleiche Grundlinie und eine gleiche Höhe hat.

b. Berechne das Parallelogram.

c. Nehme die Hälfte des berechneten Flächeninhaltes, so hat man den Flächeninhalt des Dreieckes.

Ist z. B. der Flächeninhalt des Dreieckes abc Fig. 16, dessen Grundlinie bc und dessen Höhe ad ist, zu berechnen, so berechne man den Flächeninhalt des Parallelograms abcd, indem man die Grundlinie bc mit der Höhe ad multipliciret, oder bc $\times$ ad, davon die Hälfte $\frac{bc \times ad}{2}$ gibt den Flächeninhalt des Dreieckes abc.

Nachdem es aber bekannt ist, daß man immer das nämliche Product erhält, wenn man das Product zweier Factoren durch die Zahl zwei theilt, oder wenn man mit der Hälfte des einen Factors den andern multiplicirt, so ergeben sich für die Berechnung des Flächeninhaltes eines Dreieckes nachfolgende drei Regeln, deren Grund aus dem eben Erwähnten einleuchtet.

Man erhält den Flächeninhalt eines Dreieckes, wenn man die Grundlinie desselben mit der Höhe multipliciret, und das halbe Product nimmt; oder wenn man die halbe Grundlinie mit der Höhe, oder die halbe Höhe mit der Grundlinie multipliciret, z. B. Es sey die Grundlinie eines Dreieckes 24°, die Höhe desselben 8°, so gibt $\frac{24 \times 8}{2} = 12 \times 8 = 24 \times 4 = 96\square°$, lies: 96 Quadratklafter.

Es versteht sich von selbst, daß man sich hierüber nicht bald zu viel geübet hat, und auch von Dreiecken gelte das, was von Parallelogramen gesagt worden ist: Dreiecke, welche gleiche Höhen und Grundlinien haben, müssen auch gleiche Flächeninhalte enthalten.

§. 126.

Den Flächeninhalt eines Vieleckes zu berechnen.

a. Man theile das gegebene Vieleck in Dreiecke.

b. Suche von jedem Dreieck die Grundlinie und die Höhe.

c. Berechne den Flächeninhalt jedes Dreieckes insbesondere nach §. 125.

d. Zähle alle diese gefundenen Dreiecksflächen zusammen, so gibt die Summe den Flächeninhalt des Polygons oder Vieleckes.

Ist das Vieleck regelmäßig, so betrachte man dasselbe, zerlege es durch vom Mittelpuncte der um das Vieleck beschriebenen Kreislinie zu den Scheitelpuncten gezogene gerade Linien in congruente Dreiecke, trage diese in Gedanken oder in der That an eine gerade Linie so auf, daß die Seiten des

Vieleckes zugleich Seiten der Dreiecke an dieser geraden Linie zu liegen kommen, und dem ganzen Umfange des Vieleckes gleich sind. Errichte man dann so viele gleichschenkelichte Dreiecke, als das Vieleck Seiten hat, an der gegebenen geraden Linie, zieht durch die Scheitelpuncte dieser Dreiecke eine zu der gegebenen geraden Parallele, so ergibt sich ein Flächenraum, der dem doppelten Flächenraume des Vieleckes gleich ist; zieht man in einem dieser Dreiecke die Höhe, so ist sie zugleich die Höhe des Vieleckes. Man wird also den Flächeninhalt eines regelmäßigen Polygons kürzer finden, wenn man den Umfang desselben als die Grundlinie eines Dreieckes, und die Höhe desselben als die Höhe dieses nämlichen Dreieckes ansieht, und das Dreieck berechnet. Daher gelten zur Berechnung eines regelmäßigen Polygons folgende Regeln:

a. Man suche den Umfang des gegebenen regelmäßigen Polygons.

b. Man suche die Höhe desselben, wenn man von dessen Mittelpuncte auf eine Seite desselben eine senkrechte zieht.

c. Man multiplicire den Umfang mit der Höhe, und nehme das halbe Product, oder man multiplicire den halben Umfang mit der Höhe, oder die halbe Höhe mit dem Umfange, so erhält man den Flächeninhalt des gegebenen Polygons.

Zur Uebung nehme die Polygone, Fig. 85 und Fig. 86, wo die Seiten und die Höhen cd und cn sichtbar sind, und siehe über das Gesagte die Fig. 92 und 93. In der 92. Fig. erblickt man ein regelmäßiges Sechseck, welches vom Mittelpuncte aus in sechs gleiche congruente Dreiecke getheilt erscheint, die auf die gerade ab übertragen, die Hälfte des Parallelograms acdb geben; in Fig. 93 sind die Dreiecke ach, hce, ecf, fcg u. s. f. einander gleich, weil sie eine gleiche Grundlinie und die nämliche Höhe ca haben, also das Dreieck acb gleich der Summe aller Dreiecke, folglich auch dem Flächeninhalte des Vieleckes. Die oft erwähnte Aufmunterung zur schriftlichen und zeichnerischen Uebung ist auch hier nicht am unrechten Orte.

§. 127.

Den Flächeninhalt eines Kreises zu berechnen, dessen Durchmesser gegeben ist.

Denkt man sich eine Kreislinie als den Umfang eines Vieleckes von sehr vielen, sehr kleinen Seiten, so erhellen für die Kreisfläche folgende Berechnungsregeln.

a. Man suche die Peripherie des gegebenen Kreises nach dem bekannten Verhältniß des Durchmessers zur Peripherie, wie 7 : 22, oder 1 : 3, 14, oder 100:314, §. 27.

b. Betrachte die gefundene Peripherie als die Grundlinie eines Dreieckes.

c. Den Halbmesser des Kreises nehme man als die Höhe dieses Dreieckes an.

d. Berechne mit diesen Elementen ein Dreieck, so hat man den Flächeninhalt des Kreises. Siehe hierüber den §. 125, 126, Fig. 92, 93 und 94, wo ac der Halbmesser, ab die dem Umfange des Kreises gleiche Grundlinie des der Kreisfläche gleichen Dreieckes abc ist. Es sey 8″ der Durchmesser eines Kreises, so ist 3, 14 X 8 = 25, 12 die Peripherie des Kreises; 25, 12 X 2 = 50, 24□″ der Flächeninhalt der Kreisfläche, deren Durchmesser 8″ beträgt.

Der sich diese Berechnungsmethoden eigen gemacht hat, wird ohne Anstand jede Fläche berechnen können; aus diesen Berechnungen leitet man auch sehr leicht die Berechnung der Oberflächen der in der Stereometrie vorzutragenden Körper.

Dritter Theil.

Die Stereometrie.

Begriffe von Körpern und ihrer Entstehung.

§. 128.

Erklärung.

Ein körperlicher Winkel entsteht, wenn mehr als zwei ebene Winkel mit ihren Scheiteln so zusammen stoßen, daß immer zwei und zwei von ihnen einen gemeinschaftlichen Schenkel haben.

Dieser Theil wird mit Hinsicht auf körperliche Figuren, nicht mit Hinsicht auf Zeichnungen gegeben, weil durch eine Menge Zeichnungen der Vorstellung noch immer wenig geholfen wird, und jeder wohl eingerichteten Schule ohnedieß mit körperlichen Figuren aus Holz oder Papier abgeholfen werden muß.

§. 129.

Erklärung.

Die Grundfläche des Körpers heißt jene Fläche, worauf man sich den Körper als ruhend vorstellt; die auf dem Umfange der Grundfläche stehenden Flächen heißen Seitenflächen, die senkrechte, welche von irgend einem höchsten Puncte im Körper auf die Grundfläche herabgelassen werden kann, heißt dessen Höhe.

§. 130.

Ebene Körper sind in ebene, unebene in unebene Flächen eingeschlossen.

§. 131.

Ein in lauter gleiche Flächen eingeschlossener Körper heißt regelmäßig, sonst unregelmäßig oder irregulär.

§. 132.

Zu den regulären Körpern rechnet man die Tetraëdron, Octoëdron, Icosaëdron, Hexaëdron oder Würfel, und Dodecaëdron.

Ein Tetraëdron ist ein von vier gleichen und gleichseitigen Dreiecksflächen eingeschlossener Raum. Fig. 95.

Ein Octoëdron ist ein von acht gleichen und gleichseitigen Dreiecksflächen eingeschlossener Raum. Fig. 96.

Ein Icosaëdron ist ein von 20 gleichen und gleichseitigen Dreiecksflächen eingeschlossener Raum. Fig. 97.

Ein Würfel ist ein von sechs gleichen Quadratflächen eingeschlossener Raum. Fig. 98.

Ein Dodecaëdron ist ein von zwölf gleichen gleichseitigen Fünfecksflächen eingeschlossener Raum. Fig. 99.

§. 133.

Prismen oderEcksäulen sind Körper, welche entstehen, wenn man sich eine Drei=, Vier= oder Fünfecksfläche u. s. w. nach einer geraden parallel zu bewegen, vorstellt. Ist die Linie, nach welcher sich das Vieleck bewegen soll, senkrecht zur Vielecksfläche, so ist das Prisma senkrecht, widrigens schief. Fig. 100. Fig. 107, ist ein Parallelopipedum.

§. 134.

Bewegt sich auf die nämliche Art eine Kreisfläche, so erhält man einen senkrechten oder schiefen Cylinder. Fig. 106.

§. 135.

Bewegt sich eine Vielecks= oder Kreisfläche nach der 133. gesagten Richtung so, daß sie immer abnimmt, und nur ähnliche Flächen zurückläßt, die endlich in eine Spitze oder einen Punct übergehen, so entsteht im ersten Falle eine Pyramide (Spitzsäule), Fig. 101, und im zweiten Falle ein Kegel, Fig. 102, welche entweder senkrecht oder schief sind, je nachdem die gerade von der Spitze zum Mittelpuncte der Grundfläche gezogene entweder senkrecht oder schief auf sie ist. Fig. 103, stellt eine abgestutzte Pyramide, und Fig. 104 einen abgestutzten Kegel vor.

§. 136.

Die Seitenflächen der Prismen sind entweder schief= oder rechtwinkelichte Parallelograme, und so viele an der Zahl, als das zur Grundfläche angenommene Vieleck Seiten hat; von dieser Anzahl der Seiten heißen auch die Prismen drei=, vier=, fünf=, vielseitige Prismen.

§. 137.

Die Seitenflächen der Pyramiden sind Dreiecksflächen, und die Pyramide drei=, vier=, fünf=, vielseitig, nachdem die Grundfläche ein Drei=, Vier=, Vieleck u. s. f. ist.

§. 138.

Die Seitenfläche eines Cylinders ist uneben, und bei einem senkrechten Cylinder einem Parallelograme gleich, dessen Grundlinie die Peripherie der Grundfläche, und die Höhe der Länge oder Höhe des Cylinders ist, welches man leicht gewahret, wenn man einen Cylinder nach der Fläche eines Papiers so lange rollt, bis er seine Umdrehung vollendet hat.

§. 139.

Die Seitenfläche eines senkrechten Kegels erhält man, wenn man den Kegel nach der Seite legt, und denselben eine Umwälzung machen läßt, es wird sich dadurch zeigen, daß die Seitenfläche eines senkrechten Kegels ein Ausschnitt eines Kreises ist, dessen Halbmesser der Seite, und die Größe des Kreisbogens dem Umfange der Grundfläche, des Kegels gleich ist.

§. 140.

Hat man mit einigen körperlichen Figuren oder Vorstellungen aus Holz, Papier oder Blech versehen, die Oberflächen der regelmäßigen Körpergestalten betrachtet, so wird man ohne Mühe den gesammten Flächeninhalt derselben im Quadratmaße angeben können, wenn man die Seitenflächen und die Grundflächen der Körper einzeln, oder nach Umständen mehrere zusammen, berechnet, und den gefundenen Flächeninhalt, zu dem Flächeninhalte der Grundflächen zählt, und sich merkt, daß man die Oberfläche einer Kugel nach geometrischen Gründen findet, wenn man die größte Kreisfläche (die man aus dem Durchmesser der Kugel findet), mit vier multipliciret.

§. 141.

Anmerkung.

Für einen Anhang und zur Uebung im Erkennen und Benennen der verschiedenen üblichen Körpergestalten möge dieß genügen; Jedermann wird dadurch Gelegenheit verschafft, viel Mehreres durch die Betrachtung der körperlichen Gestalten eines Tetraëders, Octoëders, Icosaëders, Dodecaëders, eines Würfels oder der sogenannten platonischen Körper, durch das Ansehen einer Eck- oder Spitzsäule, eines Cylinders und Kegels in Hinsicht der Körperwinkel, der Seiten,

der

der Seitenflächen, der Grundflächen und ihrer Lagen zu einander selbst beobachten zu können. Man versetze sich nur beim Anblicke dergleichen stereometrischen Figuren in die Lage eines aufmerksamen fleißigen fragenden Beobachters.

§. 142.

Das stereometrische oder Körpermaß ist dasjenige Maß, womit man die Größe der Körper nach allen drei Ausdehnungen, in die Länge, Breite und Höhe zugleich angibt, und ausdrückt. Es ist leicht einzusehen, daß hiezu der Würfel am schicklichsten zu verwenden ist. Ein Würfel, dessen Seite eine Klafter, ein Schuh, ein Zoll, eine Linie wäre, heißt dann eine Cubicklafter, ein Cubicschuh, ein Cubiczoll, eine Cubiclinie u. s. f. durchs Ansehen eines Cubicschuhes, eines Cubiczolles, einer Cubiclinie, und durchs Ausstecken einer Cubicklafter im Freien oder in einem Zimmer wird das Interesse für die Cubicmaßen bei den Anfängern vorzüglich gewecket, und richtige Begriffe von denselben erzeuget.

Man wird die Körperbemessung am deutlichsten erklären, wenn man mit den Anfängern oder zur Selbstübung selbst das erste beste Parallelopipedum, z. B. eine Tischplatte, eine Bank oder den leeren Raum eines Zimmers mit einem Maßstabe ausmißt, anfänglich die Länge und Breite in Zollen angibt, beurtheilet oder berechnet, wie viele Quadratzolle die Tischplatte u. s. f. messe, man wird gleich sehen, wenn die Tischplatte einen Zoll hoch ist, daß selbe eben so viele Kubiczolle enthalte; wer findet nicht die Regel, daß man die Grundfläche eines Parallelopipedums oder vierkantigen Körpers mit der Höhe multipliciren müsse, um den gesammten Körperinhalt zu erhalten. Noch leichter aber wird die Betrachtung und Berechnung, wenn man sich lauter Würfel abmißt, und selbe auf besagte Art berechnet. Man wird durch diese unerläßlichen Uebungen bald finden, daß eine Cubicklafter 216 Cubicschuh, ein Cubicschuh 1728 Cubiczoll, und ein Cubiczoll 1728 Cubiclinien enthalte; man erhält so die Reductions- und Auflösungszahlen der Cubiclinien auf Cubiczolle u. s. f. und umgekehrt der Cubicklafter auf Cubiczolle u. s. f.

Nach diesen vielfältig wiederholten und allgemeinen Uebungen, welche die Seele der stereometrischen Berechnungen ausmachen, und in denen es eigentlich erhellet, was man unter der Cubiczahl und Cubicwurzel versteht, können folgende Berechnungsmethoden nun geschichtlich angeführet werden, wovon aber die Gründe beim aufmerksamen Betrachten der stereometrischen Figuren nicht schwer aufzufinden sind.

I. Aufgabe.

§. 143.

Den Körperinhalt eines jeden durchaus gleich dicken Körpers zu berechnen, oder anzugeben, wie viel Cubicfuß ein solcher Körper in sich enthält.

1. Man berechne seine Grundfläche, und gebe sie in einer Zahl an.
2. Messe seine Höhe, und gebe sie ebenfalls in einer Zahl an.
3. Multiplicire die erste Zahl durch die zweite, so erhält man ein Product, dessen Zahl angibt, wie viel Cubicklafter, Cubicschuhe u. s. f. der durchaus gleichdicke Körper enthält.

Auf diese Art findet man sehr leicht den Körperinhalt eines Würfels, Parallelopipedums oder rechtwinkelichten Vierkantes, eines senkrechten Prisma, (oder Eckfäule) und eines Cylinders.

§. 144.

Von den durchaus gleichdicken Körpern unterscheidet man die zugespitzten, wozu insbesondere die Pyramiden oder Spitzsäulen, und die Kegel gezählet werden.

Die Berechnung der Pyramiden und Kegel gründet sich auf den stereometrischen Satz: Jede Pyramide ist der dritte Theil eines Prisma von gleicher Grundfläche und Höhe, und jeder Kegel ist der dritte Theil eines Cylinders von gleichen Ausmessungen.

II. Aufgabe.

Den Körperinhalt eines zugespitzten Körpers zu bestimmen.

1. Man berechne die Grundfläche in Zahlen.
2. Messe die Höhe und gebe sie in Zahlen.
3. Multiplicire die erste Zahl mit der zweiten.
4. Nehme man 1/3 des Productes, so ist dieses die Zahl, welche den Körperinhalt der Pyramide oder des Kegels in Cubicklaftern, Schuhen u. s. f. angibt.

III. Aufgabe.

Den Körperinhalt einer Kugel zu berechnen. Fig. 105.

1. Man berechne die Oberfläche der Kugel, (die größte Kreisfläche der Kugel viermal genommen.)
2. Man multiplicire diese mit 1/3 Halbmesser oder 1/6 Durchmesser der Kugel, so gibt dieses Product den Körperinhalt der Kugel.

IV. Aufgabe.

Den Körperinhalt eines jeden unregelmäßigen Körpers zu bestimmen.

1. Man verwandle, wenn es thunlich ist, selben in lauter regelmäßige Körper.
2. Berechne diese.
3. Addire die einzelnen Körperinhalte zusammen, so erhält man den gesammten Körperinhalt.
4. Ist der in Ansehung der Größe zu untersuchende Körper klein und im Wasser unauflößlich, so läßt sich sein Körperinhalt bestimmen:

a. wenn man ein regelmäßiges, cylindrisches oder prismatisches Gefäß zum Theile mit Wasser füllt;

b. den Körper ganz ins Wasser versenkt;

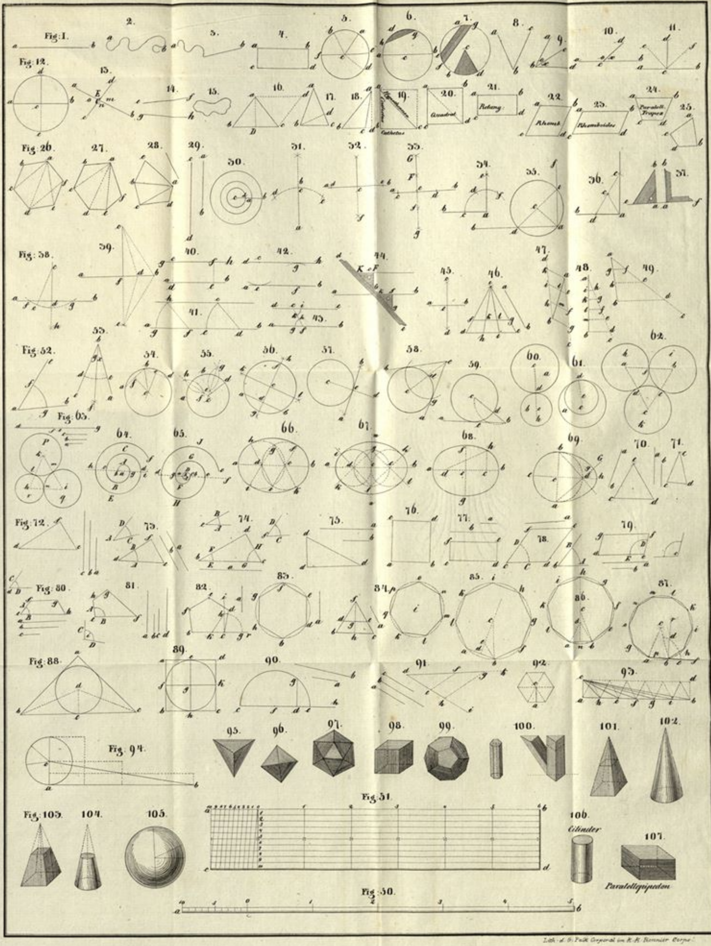
c. das gestiegene Wasser dem Körperinhalte nach bestimmt, so ist es klar, daß das verdrängte Wasser dem Körperinhalte nach dem verdrängenden Körper gleich ist;

d. ist der zu berechnende, kleine unregelmäßige Körper im Wasser auflößlich, so bedient man sich zu diesem Behufe des feinen Sandes, der Hirse oder anderer feinen pulverichten Stoffe.

Es lag außer dem Plane dieses Werkchens, etwas von der Stereometrie zu sprechen, allein dieß glaubte man wegen der im gemeinen Leben häufig vorkommenden Körpernamen und cubischen Maßen gesagt haben zu müssen; alles, was hier aus der Stereometrie vorkömmt, möge nur dazu dienen, dem Anfänger zur Lesung und zum Studium einer ausführlicheren stereometrischen Abhandlung zu reizen und zu ermuntern.

Schlußanmerkung.

Hat Jemand diese Elemente der Geometrie mit Aufmerksamkeit durchgelesen, durchstudiret und durchgearbeitet, so wird er sich zum nützlichen Studium der räsonnirenden Elementar-Geometrie den Weg nicht nur gebahnet, sondern sicher sehr erleichtert haben; ohne große Anstrengung wird er mit göttlichem Beistande die neuen Beweisarten verstehen, erlernen und vervollständigen.



Lith. d. G. Falk Corporal im K.K. Bombardier Corps