Schallmayer

Geometrische Anschauungslehre

für

Unter-Gymnasien.

Von

Dr. Franz Ritter von Močnik.

II. Abtheilung.

Mit 108 in den Text gedruckten Holzschnitten.

Achte, mit Rücksicht auf die metrischen Maße umgearbeitete Auflage.

Wien.

Druck und Verlag von Carl Gerold's Sohn.

1873.

Inhalt.

Erster Abschnitt.

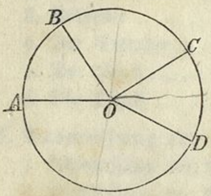
Von den krummen Linien.

Zweiter Abschnitt.

Die Stereometrie.

§. 2. Es seien die Centriwinkel AOB und COD (Fig. 2) einander gleich. Legt man den Kreisausschnitt COD so über den Ausschnitt AOB, daß die Centriwinkel COD und AOB genau übereinander fallen, so kommen, da die Schenkel dieser Winkel gleich sind, auch die Puncte C und D auf die Puncte A und B, und der Bogen CD über den Bogen AB zu liegen; die beiden Kreisausschnitte decken sich daher vollkommen. Daraus folgt:

Fig. 2.



a) *Zu gleichen Centriwinkeln gehören in demselben Kreise gleiche Bogen und gleiche Ausschnitte.*

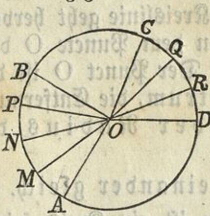
Auf dieselbe Art kann man auch die folgenden zwei Sätze leicht einsehen:

b) *Zu gleichen Bogen gehören in demselben Kreise gleiche Centriwinkel und gleiche Ausschnitte.*

c) *Zu gleichen Ausschnitten gehören in demselben Kreise gleiche Centriwinkel und gleiche Bogen.*

§. 3. Wenn (Fig. 3) die Winkel AOM, MON, NOP, POB, COQ, QOR, ROD einander gleich sind, so müssen auch die Bogen AM, MN, NP, PB, CQ, QR, RD, und eben so auch die zu diesen Bogen gehörigen Kreisausschnitte gleich sein.

Fig. 3.



Es ist daher nicht nur der Winkel AOM in dem Winkel AOB 4mal, und in COD 3mal enthalten, sondern es kommt ebenso der Bogen AM in AB 4mal, in CD 3mal vor; und es ist auch der Kreisausschnitt AOM in dem Ausschnitte AOB 4mal, in COD 3mal enthalten, so daß folgende Verhältnisse stattfinden:

Winkel	$AOB : COD = 4 : 3$,
Bogen	$AB : CD = 4 : 3$,
Ausschnitt	$AOB : COD = 4 : 3$.

Daraus folgt:

Zwei Bogen, wie auch zwei Ausschnitte desselben Kreises verhalten sich gerade so wie die ihnen entsprechenden Centriwinkel.

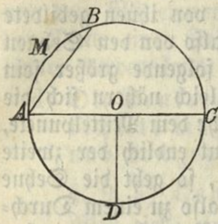
2. Sehnen, Kreisabschnitte und Peripheriewinkel.

§. 4. Eine Gerade AB (Fig. 4), welche zwei Puncte der Kreislinie verbindet, heißt eine *Sehne* des Kreises.

Ziehe in einem Kreise eine Sehne, welche einer gegebenen Strecke gleich ist.

Eine Sehne AC, welche durch den Mittelpunct des Kreises geht, wird ein *Durchmesser* oder *Diameter* desselben genannt. Jeder

Fig. 4.



Durchmesser ist doppelt so groß als ein Halbmesser; daraus folgt: Alle Durchmesser eines Kreises sind einander gleich.

Wie wird über einer gegebenen Strecke als Durchmesser ein Kreis beschrieben?

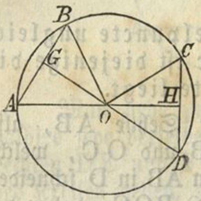
Ein Theil ABMA der Kreisfläche, welcher von einer Sehne und dem dazu gehörigen Bogen begrenzt wird, heißt ein Kreisabschnitt oder Segment.

Jeder Durchmesser theilt die Peripherie und die Kreisfläche in zwei gleiche Theile. Jeder der beiden gleichen Theile ACB und ACD, in welche der Kreis durch einen Durchmesser AC getheilt wird, heißt ein Halbkreis. Die Hälfte ADO eines Halbkreises heißt ein Viertelkreis oder Quadrant.

Jede Sehne, welche kein Durchmesser ist, theilt die Peripherie und die Kreisfläche in zwei ungleiche Theile, und zwar ist jener der größere, in welchem der Mittelpunct liegt.

§. 5. Es seien die Sehnen AB und CD (Fig. 5) einander gleich. Die Dreiecke ABO und CDO sind unter dieser Voraussetzung congruent, und es müssen daher auch die gleichliegenden Winkel AOB und COD, folglich auch die Bogen AB und CD gleich sein.

Fig. 5.



a) Zu gleichen Sehnen gehören in demselben Kreise gleiche Centriwinkel und gleiche Bogen (vorausgesetzt, daß die Centriwinkel hohl, und die Bogen kleiner als die halbe Peripherie sind).

Unter derselben Voraussetzung läßt sich auf gleiche Weise zeigen:

b) Zu gleichen Centriwinkeln oder zu gleichen Bogen gehören in demselben Kreise gleiche Sehnen.

§. 6. Es sei die Sehne AB = CD (Fig. 5); dann sind die Dreiecke ABO und CDO congruent, daher müssen auch ihre gleichliegenden Höhen OG und OH gleich sein; diese Höhen stellen aber die Entfernungen der gleichen Sehnen AB und CD vom Mittelpuncte vor.

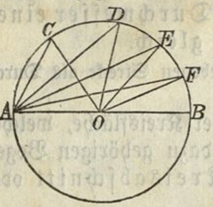
Man kann daraus folgern:

a) Gleiche Sehnen eines Kreises sind vom Mittelpuncte gleich weit entfernt.

b) Sehnen eines Kreises, welche vom Mittelpuncte gleich weit entfernt sind, sind einander gleich.

§. 7. Drehet sich von dem festen Halbmesser OA (Fig. 6) um den Punct O ein zweiter Halbmesser so hinweg, daß er nach und nach in die Lagen OC, OD, OE... kommt; so werden die Endpuncte

Fig. 6.



dieser beiden Halbmesser um so mehr von einander abstehen, je größer der von ihnen gebildete Centriwinkel wird; es wird also von den Sehnen AC, AD, AE, ... jede folgende größer sein als die vorhergehende. Zugleich nähern sich die einzelnen Sehnen um so mehr dem Mittelpuncte, je größer sie werden. Kommt endlich der zweite Halbmesser in die Lage OB, so geht die Sehne durch den Mittelpunct, wird also zu einem Durchmesser und erreicht ihre größte Länge. Aus dieser Betrachtung ergeben sich folgende Sätze:

a) Der Durchmesser ist größer als jede andere Sehne.

b) Von zwei ungleichen Sehnen eines Kreises ist diejenige die größere, welche einem größern Centriwinkel oder Bogen entspricht (vorausgesetzt, daß der Centriwinkel ein hohler, und der Bogen kleiner als die halbe Peripherie ist).

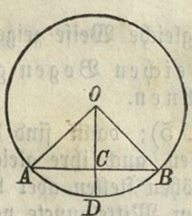
Die Sehnen wachsen übrigens nicht in gleichem Verhältnisse wie die Centriwinkel. So ist die Sehne des doppelten Winkels wohl größer, aber nicht doppelt so groß als die Sehne des einfachen Winkels.

c) Ungleiche Sehnen eines Kreises sind vom Mittelpuncte ungleich weit entfernt, und zwar hat die größere Sehne die kleinere Enfernung.

d) Sehnen eines Kreises, die vom Mittelpuncte ungleich weit abstehen, sind ungleich, und zwar ist diejenige die größere, welche näher am Mittelpuncte liegt.

§. 8. Es sei C (Fig. 7) die Mitte der Sehne AB, also AC = BC. Zieht man die Geraden OA, OB und OC, welche

Fig. 7.



letztere verlängert den Bogen AB in D schneidet, so ist das Dreieck AOC ≅ BOC; daher der Winkel ACO = BCO (OC ⊥ AB) und AOC = BOC. Daraus folgt:

a) Eine gerade Linie, welche den Mittelpunct eines Kreises mit der Mitte einer Sehne verbindet, steht auf der Sehne senkrecht, und halbirt den zugehörigen Centriwinkel, so wie den zugehörigen Bogen.

Auf gleiche Art kann man nachweisen:

b) Eine Gerade, welche einen Centriwinkel halbirt, halbirt auch den zugehörigen Bogen, die zugehörige Sehne, und steht auf dieser senkrecht.

c) Eine Gerade, welche vom Mittelpuncte eines Kreises auf eine Sehne senkrecht gefällt wird, halbirt diese Sehne, den zugehörigen Centriwinkel und den zugehörigen Bogen.

Da die gerade Verbindungslinie zwischen der Mitte einer Sehne und dem Mittelpuncte des Kreises auf jener Sehne senkrecht steht, in der Mitte einer Sehne aber auf diese nur eine einzige Senkrechte errichtet werden kann, so folgt ferner:

d) Die Senkrechte, welche man in der Mitte einer Sehne errichtet, muß durch den Mittelpunct des Kreises gehen, und den zugehörigen Centriwinkel und Bogen halbiren.

§. 9. a) Den Mittelpunct eines Kreises zu finden.

Man ziehe eine beliebige Sehne AB (Fig. 8), halbire dieselbe, und errichte darauf im Halbirungspuncte C eine Senkrechte, so geht dieselbe durch den Mittelpunct des Kreises, und ist daher, wenn man sie auf beiden Seiten bis an den Umfang verlängert, ein Durchmesser des Kreises. Wird nun dieser Durchmesser DE in O halbirt, so ist O der gesuchte Mittelpunct.

b) Den Mittelpunct eines Kreisbogens zu finden.

Fig. 8.

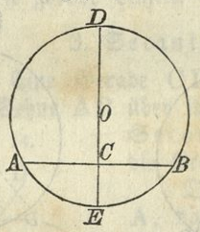
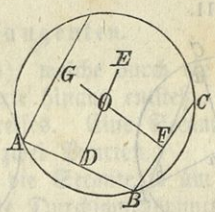


Fig. 9.



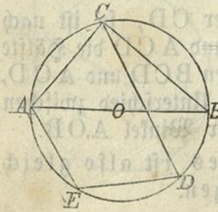
Man ziehe zwei zusammenstoßende Sehnen AB und AC (Fig. 9), halbire jede derselben und errichte auf dieselben in den Mitten die Senkrechten DE und FG. Da nun beide Senkrechte durch den Mittelpunct des Kreises gehen, so muß dieser in ihrem Durchschnittspuncte O liegen.

c) Durch drei Puncte A, B, C (Fig. 9), welche nicht in einer geraden Linie liegen, einen Kreis zu beschreiben.

Man ziehe zwischen den gegebenen Puncten die Geraden AB und BC, und betrachte diese als Sehnen des zu beschreibenden Kreises, dann läßt sich der Mittelpunct O desselben nach dem unter b) angegebenen Verfahren bestimmen; der Halbmesser dieses Kreises ist OA, OB oder OC.

Durch drei nicht in einer geraden Linie liegende Puncte ist ein Kreis vollkommen bestimmt.

Fig. 10.



§. 10. Ein Winkel ACD (Fig. 10), dessen Scheitel in der Peripherie eines Kreises liegt, und dessen Schenkel Sehnen desselben sind, heißt ein Peripheriewinkel.

Sowohl von den Centri- als von den Peripheriewinkeln sagt man: sie stehen auf dem Bogen, welcher zwischen ihren Schenkeln liegt.

1. Nenne alle Peripheriewinkel in der Figur 10.
2. Auf welchem Bogen steht ein jeder dieser Winkel?

Ein Peripheriewinkel ACB, welcher auf dem Halbkreise aufsteht, dessen Schenkel also durch die Endpuncte eines Durchmessers gehen, heißt ein Winkel im Halbkreise.

Liegen die Schenkel eines Peripheriewinkels in einem Kreisabschnitte, welcher größer oder kleiner als der Halbkreis ist, so heißt derselbe bezüglich ein Winkel im größeren oder kleineren Kreisabschnitte; ACD ist ein Winkel im größeren, AED ein Winkel im kleineren Kreisabschnitte.

§. 11. Wenn ein Centri- und ein Peripheriewinkel auf demselben Bogen aufstehen, so kann

a) der Scheitel des Centriwinkels auf einem Schenkel des Peripheriewinkels liegen (Fig. 11),
b) oder der Scheitel des Centriwinkels liegt innerhalb der Schenkel des Peripheriewinkels (Fig. 12),
c) oder er liegt außerhalb des Peripheriewinkels (Fig. 13).

Fig. 11.

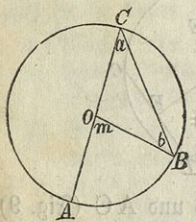


Fig. 12.

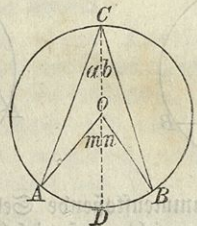
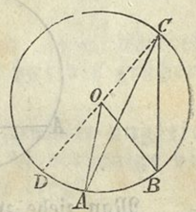


Fig. 13.



In jedem dieser drei Fälle findet zwischen der Größe des Peripheriewinkels und des Centriwinkels dasselbe Verhältniß statt.

a) Der Winkel m (Fig. 11) ist ein Außenwinkel des Dreieckes BOC, und daher gleich der Summe der beiden innern ihm nicht anliegenden Winkel a und b; aber a und b sind als Winkel an der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreieckes einander gleich, folglich jeder von ihnen die Hälfte des Winkels m; also ist a $= \frac{1}{2}$ m.
b) Der zweite Fall (Fig. 12) läßt sich auf den ersten zurückführen. Zieht man nämlich den Durchmesser CD, so ist a die Hälfte von m, b die Hälfte von n; daher auch die Summe von a und b, d. i. der Winkel ACB halb so groß als die Summe von m und n, d. i. halb so groß als der Winkel AOB.
c) Zieht man ebenso in Fig. 13 den Durchmesser CD, so ist nach a) der Winkel BCD die Hälfte von BOD, und ACD die Hälfte von AOD, folglich auch der Unterschied zwischen BCD und ACD, d. i. der Winkel ACB halb so groß als der Unterschied zwischen BOD und AOD, d. i. halb so groß als der Winkel AOB.

Jeder Peripheriewinkel eines Kreises ist also gleich dem halben Centriwinkel auf gleichem Bogen.

§. 12. Aus dem vorhergehenden Satze folgt:

a) Peripheriewinkel, welche auf demselben Bogen aufstehen, sind einander gleich; weil jeder von ihnen die Hälfte eines und desselben Centriwinkels ist.

b) Jeder Winkel im Halbkreise ist ein rechter; denn der entsprechende Centriwinkel ist ein gestreckter, und die Hälfte davon ein rechter Winkel.

c) Ein Winkel im größeren Kreisabschnitte ist ein spitzer.

d) Ein Winkel im kleineren Kreisabschnitte ist ein stumpfer.

e) Die Summe der Winkel im größeren und im kleineren Abschnitte über derselben Sehne ist gleich zwei Rechten.

Versinnliche die hier angeführten fünf Sätze durch entsprechende Zeichnungen.

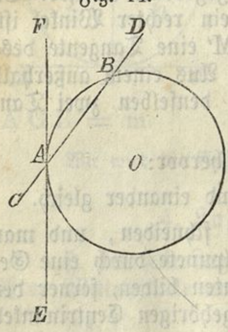
Ueber einer gegebenen Geraden als Hypotenuse ein rechtwinkliges Dreieck zu beschreiben.

Man beschreibe über der gegebenen Geraden als Durchmesser einen Kreis, und ziehe von den Endpuncten der Geraden zu irgend einem Puncte der Peripherie gerade Linien.

3. Secanten und Tangenten.

§. 13. Eine Gerade CD (Fig. 14), welche durch die Verlängerung einer Sehne AB über ihre Endpuncte hinaus entsteht, heißt eine Secante des Kreises. Eine Secante schneidet die Kreislinie in zwei Puncten.

Fig. 14.

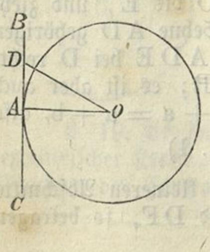


Drehet man die Secante so um den Punct A, daß der zweite Durchschnittspunct B immer näher gegen A rückt, bis er endlich mit diesem zusammenfällt, so geht die Secante in die Gerade EF über, welche mit der Kreislinie nur in dem Puncte A zusammentrifft.

Eine Gerade EF, welche mit der Kreislinie einen einzigen Punct gemeinschaftlich hat, so daß alle anderen Puncte derselben außerhalb der Kreislinie liegen, heißt eine Berührungslinie oder Tangente des Kreises.

1. Wie viele Puncte können eine Gerade und eine Kreislinie gemeinschaftlich haben?
2. Welche verschiedene Lagen kann eine Gerade zur Kreislinie haben?

Fig. 15.



§. 14. Soll die Gerade BC (Fig. 15) den Kreis im Puncte A berühren, so müssen alle Puncte derselben, A ausgenommen, außerhalb des Kreises liegen. Zieht man daher von O aus zu irgend einem Puncte D eine Gerade, so muß diese länger sein als der Halbmesser des Kreises, somit länger als AO; es muß also AO die kürzeste Gerade sein, welche von O aus zu der Geraden gezogen werden kann, folglich ist $AO \perp BC$ oder $BC \perp AO$; d. h.:

Die Tangente eines Kreises steht auf dem zum Berührungspuncte gezogenen Halbmesser senkrecht.

§. 15. a) Durch einen in der Peripherie eines Kreises liegenden Punct A (Fig. 15) eine Tangente an diesen Kreis zu ziehen.

Man ziehe den Halbmesser AO, und errichte in A die BC ⊥ AO, so ist BC die verlangte Tangente.

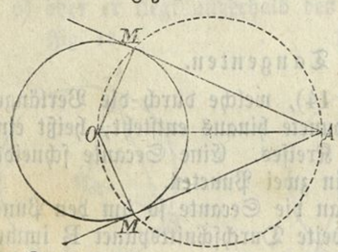
Folgt unmittelbar aus §. 14.

b) Aus einem gegebenen Mittelpuncte einen Kreis zu beschreiben, welcher eine gegebene Gerade berührt.

c) An einen gegebenen Kreis eine Tangente zu ziehen, welche mit einer gegebenen Geraden parallel ist.

d) Von einem außerhalb des Kreises liegenden Puncte A (Fig. 16) eine Tangente an diesen Kreis zu ziehen.

Fig. 16.



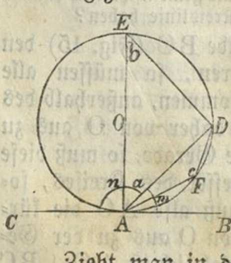
Man ziehe die Gerade AO und beschreibe über derselben als Durchmesser einen Kreis, welcher den gegebenen in M und M' schneidet. Der Winkel AMO ist als Winkel im Halbkreise ein rechter, daher AM eine Tangente des gegebenen Kreises. Da auch AM'O ein rechter Winkel ist, so ist auch AM' eine Tangente desselben Kreises. Aus einem außerhalb des Kreises liegenden Puncte lassen sich also an denselben zwei Tangenten ziehen.

Aus der Lösung dieser Aufgabe geht ferner hervor:

1. Die beiden Tangenten AM und AM' sind einander gleich.

2. Wenn sich zwei Tangenten eines Kreises schneiden, und man verbindet ihren Durchschnittspunct mit dem Mittelpuncte durch eine Gerade, so halbiert diese den Winkel, den die Tangenten bilden, ferner den von ihnen abgeschnittenen Bogen, so wie den zugehörigen Centriwinkel.

Fig. 17.



§. 16. Zieht man (Fig. 17) den Halbmesser OA und errichtet in A die BC ⊥ OA, so ist BC eine Tangente des Kreises. Zieht man die Sehne AD, verlängert AO bis E, und zieht DE, so ist in dem zur Sehne AD gehörigen größeren Abschnitte das △ ADE bei D rechtwinklig, daher $a + b = R$; es ist aber auch $m + a = R$; folglich $m + a = a + b$, also

$$m = b \ldots 1)$$

Zieht man in dem zur Sehne AD gehörigen kleineren Abschnitte zu einem beliebigen Puncte F die Geraden AF und DF, so betragen die Winkel c und b als Winkel in dem größeren und kleineren Abschnitte über derselben Sehne AD zusammen zwei Rechte (§. 12, e), also $c + b = 2R$; es ist aber auch $n + m = 2R$; folglich $n + m = c + b$. Da nun $m = b$ ist, so ist auch

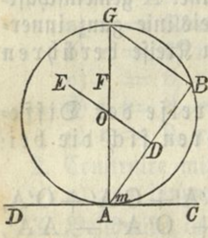
$$n = c \;\ldots\; 2)$$

Daraus folgt:

Zieht man durch einen Punct der Kreislinie eine Tangente und eine Sehne, so ist 1. der von der Tangente und Sehne gebildete spitze Winkel gleich dem Winkel im größeren Kreisabschnitte, und 2. der von der Tangente und Sehne gebildete stumpfe Winkel gleich dem Winkel im kleineren Kreisabschnitte.

§. 17. Ueber einer gegebenen Geraden AB (Fig. 18) als Sehne einen Kreisabschnitt zu beschreiben, in welchem alle Peripheriewinkel einem gegebenen Winkel m gleich sind.

Fig. 18.



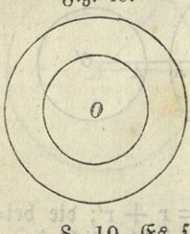
Man trage auf dem einen Schenkel des Winkels m vom Scheitel A aus die gegebene Gerade AB auf, halbire sie in D, und ziehe $DE \perp AB$ und $AF \perp CD$, so ist der Durchschnittspunct C der Senkrechten DE und AF der Mittelpunct und OA der Halbmesser des Kreises, in dessen größerem Abschnitte AGB jeder Peripheriewinkel, z. B. AGB, dem gegebenen Winkel m gleich ist. Denn AC ist eine Tangente und AB eine Sehne dieses Kreises, daher $AGB = m$.

Wie wird die Auflösung lauten, wenn der gegebene Winkel ein stumpfer ist?

4. Lage der Kreise gegen einander.

§. 18. Die Lage zweier Kreise gegen einander hängt von der Lage ihrer Mittelpuncte und von der Größe ihrer Halbmesser ab.

Fig. 19.



Zwei Kreise, welche denselben Mittelpunct O haben (Fig. 19), heißen concentrisch; die zwischen ihren Peripherien liegende ebene Fläche wird ein Kreisring genannt.

Zwei Kreise, welche verschiedene Mittelpuncte haben (Fig. 20—24), heißen excentrisch; die gerade Verbindungslinie OO′ ihrer Mittelpuncte nennt man die Centrallinie derselben.

§. 19. Es seien $OA = r$ und $O'A' = r'$ die Halbmesser zweier excentrischer Kreise; man untersuche die Lage, welche diese Kreise bei dem Wachsen der Centrallinie $OO' = c$ gegen einander annehmen.

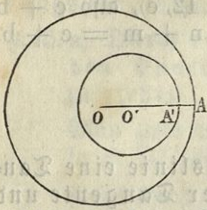


Fig. 20.

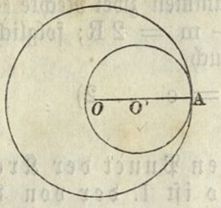


Fig. 21.

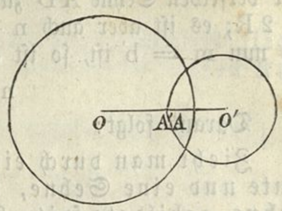


Fig. 22.

a) In Fig. 20 ist $OO' = OA - O'A$, oder $OO' = OA - O'A' - AA'$, also $c < r - r'$; die beiden Kreislinien haben keinen Punct gemeinschaftlich, und es liegt die eine ganz innerhalb der andern.

Wenn also die Centrallinie zweier Kreise kleiner als die Differenz ihrer Halbmesser ist, so liegt der kleinere Kreis ganz innerhalb des größeren.

b) In Fig. 21 ist $OO' = OA - O'A$, also $c = r - r'$; die beiden Kreislinien haben in diesem Falle nur einen Punct A gemeinschaftlich, während jeder andere Punct der einen Kreislinie ganz innerhalb der andern liegt. Man sagt da: die beiden Kreise berühren sich von innen.

Wenn also die Centrallinie zweier Kreise der Differenz ihrer Halbmesser gleich ist, so berühren sich die beiden Kreise von innen.

c) In Fig. 22 ist $OO' = OA + O'A = OA - O'A' + O'A' + O'A$, ferner auch $OO' = OA + O'A = OA + O'A' - AA'$, also $c > r - r'$ und $c < r + r'$; die beiden Kreislinien durchschneiden sich in zwei Puncten B und C.

Wenn also die Centrallinie zweier Kreise größer als die Differenz, und zugleich kleiner als die Summe ihrer Halbmesser ist, so durchschneiden sich die beiden Kreise.

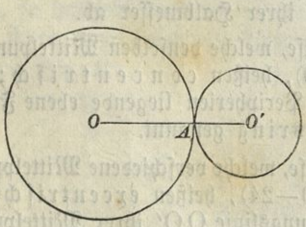


Fig. 23.

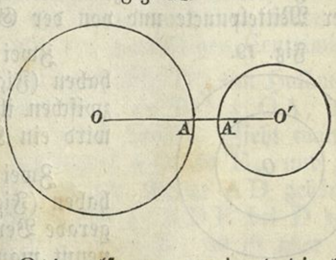


Fig. 24.

d) In Fig. 23 ist $OO' = OA + O'A$, also $c = r + r'$; die beiden Kreislinien haben den einzigen Punct A gemeinschaftlich, jeder andere Punct des einen Kreises liegt ganz außerhalb des anderen. Man sagt in diesem Falle: die zwei Kreise berühren sich von außen.

Wenn also die Centrallinie zweier Kreise der Summe ihrer Halbmesser gleich ist, so berühren sich die beiden Kreise von außen.

e) In Fig. 24 ist $OO' = OA + O'A' + AA'$, also $c > r + r'$; die beiden Kreise haben keinen Punct gemeinschaftlich, sondern es liegt jeder Punct der einen Kreislinie außerhalb der andern Kreislinie.

Wenn also die Centrallinie zweier Kreise größer als die Summe ihrer Halbmesser ist, so liegen die beiden Kreise außerhalb einander.

1. Wie viele Puncte können zwei Kreislinien gemeinschaftlich haben?
2. Welche verschiedene Lagen können zwei Kreise gegen einander haben?
3. In welchen Lagen können die Halbmesser der beiden Kreise einander gleich sein?

§. 20. Aufgaben.

1. Es seien r und r' die Längen der Halbmesser und c die Länge der Centrallinie zweier Kreise; welche Lagen gegen einander haben die beiden Kreise für folgende Werthe dieser Größen?

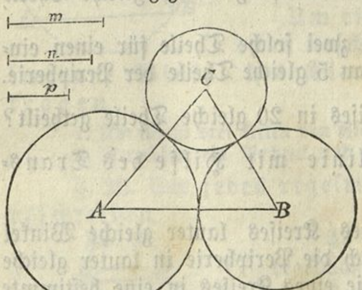
a) $r = 5,\ r' = 3,\ c = 8$;	f) $r = 6,\ r' = 6,\ c = 8$;
b) $r = 7,\ r' = 4,\ c = 2$;	g) $r = 10,\ r' = 3,\ c = 7$;
c) $r = 6,\ r' = 2,\ c = 10$;	h) $r = 5,\ r' = 5,\ c = 10$;
d) $r = 8,\ r' = 3,\ c = 6$;	i) $r = 12,\ r' = 7,\ c = 9$;
e) $r = 9,\ r' = 5,\ c = 4$;	k) $r = 9,\ r' = 2,\ c = 5$.

2. Construire mit den Halbmessern 7^{cm} und 5^{cm} zwei Kreise, die sich a) von innen, b) von außen berühren.

3. Beschreibe in einen gegebenen Kreis zwei gleiche Kreise so, daß sie denselben von innen und sich selbst von außen berühren.

4. Mit den Halbmessern m, n, p (Fig. 25) drei Kreise zu beschreiben, welche sich gegenseitig von außen berühren.

Fig. 25.



Man verzeichne mit den Seiten $AB = m + n$, $AC = m + p$ und $BC = n + p$ ein Dreieck ABC, beschreibe aus A mit dem Halbmesser m, aus B mit n, und aus C mit p Kreise, so werden diese die verlangte Eigenschaft haben.

Wie wird die Auflösung geschehen, wenn alle drei Kreise gleiche Halbmesser haben?

5. Theilung der Kreislinie.

§. 21. Geometrische Theilungen.

1. Einen Bogen zu halbiren.

Man halbirt den zugehörigen Centriwinkel.

2. Die Peripherie eines Kreises in zwei gleiche Theile zu theilen.

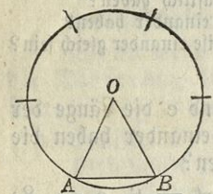
Man zieht einen Durchmesser.

Wird jede Hälfte der Peripherie halbirt, so ist dadurch der Umfang in 4 gleiche Theile getheilt.

Wie wird der Kreisumfang in 8, 16, 32 gleiche Theile getheilt?

3. Die Peripherie eines Kreises in sechs gleiche Theile zu theilen.

Fig. 26.



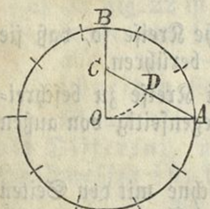
Man trage den Halbmesser AO (Fig. 26) in der Peripherie herum, so wird diese in 6 gleiche Theile getheilt. — Denn das Dreieck ABO ist nach der Construction gleichseitig, es hat also der Winkel AOB 60^0, folglich auch der Bogen AB 60^0; dieser ist also der sechste Theil der Peripherie.

Wenn man zwei solche Bogen für einen einzigen betrachtet, so ist die Kreislinie in 3 gleiche Theile getheilt.

Wie wird der Kreisumfang in 12, 24 gleiche Theile getheilt.

4. Die Peripherie eines Kreises in zehn gleiche Theile zu theilen.

Fig. 27.



Man ziehe (Fig. 27) zwei aufeinander senkrechte Halbmesser OA und OB, halbire OB in C, ziehe die Gerade CA und schneide davon CD = OC ab. Faßt man nun mit dem Cirkel die Gerade AD, so läßt sich dieselbe genau zehnmal im Kreise herumtragen, wodurch der Umfang in 10 gleiche Theile getheilt wird.

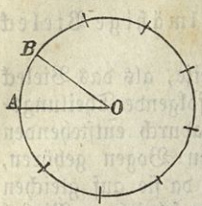
Nimmt man zwei solche Theile für einen einzigen, so erhält man 5 gleiche Theile der Peripherie.

Wie wird der Umfang eines Kreises in 20 gleiche Theile getheilt?

§. 22. Theilung der Kreislinie mit Hilfe des Transporteurs.

Wenn um den Mittelpunct eines Kreises lauter gleiche Winkel liegen, so wird durch ihre Schenkel auch die Peripherie in lauter gleiche Theile getheilt. Um daher die Peripherie eines Kreises in eine bestimmte Anzahl gleicher Theile zu theilen, darf man nur eben so viele gleiche Winkel um den Mittelpunct herum verzeichnen. Die Größe eines solchen Winkels findet man, wenn man die Summe aller Centriwinkel, nämlich 360^0, durch die Zahl der gleichen Winkel dividirt. Man braucht dann nur einen Centriwinkel in dieser Größe wirklich zu verzeichnen, und den durch seine Schenkel abgeschnittenen Bogen im Kreise herumzutragen.

Fig. 28.



Um z. B. die Peripherie (Fig. 28) in 9 gleiche Theile zu theilen, erhält man für einen Centriwinkel die Größe von $360^0 : 9 = 40^0$; man verzeichne also den Winkel AOB $= 40^0$, und trage den Bogen AB im Kreise herum.

Man theile nach diesem Verfahren den Umfang eines Kreises in 3, 5, 8, 16 gleiche Theile.

6. Geradlinige Figuren im Kreise.

§. 23. Ein Vieleck, dessen alle Eckpuncte in der Peripherie eines Kreises liegen, dessen Seiten also Sehnen des Kreises sind, heißt **dem Kreise eingeschrieben**, und der Kreis heißt **um das Vieleck beschrieben**. Ein dem Kreise eingeschriebenes Vieleck wird auch ein **Sehnenvieleck** genannt.

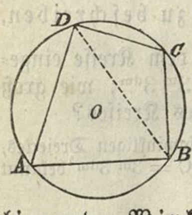
§. 24. Da die drei Eckpuncte eines Dreieckes nicht in einer geraden Linie liegen, so läßt sich durch dieselben immer ein bestimmter Kreis beschreiben. Daraus folgt:

Um jedes Dreieck läßt sich ein Kreis beschreiben:

Verzeichne ein beliebiges Dreieck und beschreibe um dasselbe einen Kreis (§. 9, c).

§. 25. **In jedem Sehnenvierecke ist die Summe von je zwei gegenüberliegenden Winkeln zwei Rechten gleich.**

Fig. 29.



Zieht man in dem Vierecke ABCD (Fig. 29) die Diagonale BD, so sind BAD und BCD die Winkel im kleineren und größeren Kreisabschnitte über derselben Sehne BD; also ist BAD + BCD = 2 R. Eben so läßt sich zeigen, daß ABC + ADC = 2 R ist.

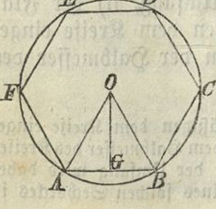
Daraus folgt:

Um ein Viereck läßt sich ein Kreis nur dann beschreiben, wenn je zwei gegenüberliegende Winkel des Viereckes zusammen zwei Rechte betragen.

1. Um welche drei Arten von Vierecken kann stets ein Kreis beschrieben werden?
2. Verzeichne ein Rechteck und beschreibe um dasselbe einen Kreis.

§. 26. **Um jedes regelmäßige Vieleck läßt sich ein Kreis beschreiben.**

Fig. 30.



Es sei das Vieleck ABCDEF (Fig. 30) regelmäßig. Halbirt man zwei Vieleckswinkel A und B, so ist der Durchschnittspunct O der beiden Halbirungslinien der Mittelpunct des Vieleckes und steht von allen Eckpuncten gleich weit ab. Beschreibt man daher aus O mit dem Halbmesser OA einen Kreis, so muß dieser durch alle Eckpuncte des Vieleckes gehen, und ist somit um das Vieleck beschrieben.

Wie wird um ein regelmäßiges Vieleck ein Kreis beschrieben?

§. 27. **Einem Kreise läßt sich jedes regelmäßige Vieleck einschreiben.**

Theilt man die Kreislinie in so viele gleiche Theile, als das Vieleck Seiten haben soll, und verbindet je zwei auf einander folgende Theilungspuncte durch eine Sehne, so sind die Seiten des dadurch entstehenden Vieleckes als Sehnen des Kreises, welche zu gleichen Bogen gehören, einander gleich; eben so sind die Vieleckswinkel gleich, da sie auf gleichen Bogen aufstehen. Das verzeichnete dem Kreise eingeschriebene Vieleck ist also gleichseitig und gleichwinklig, somit regelmäßig.

Wie wird einem Kreise ein regelmäßiges Vieleck von bestimmter Seitenanzahl eingeschrieben?

§. 28. **In den Kreis ein gleichseitiges Dreieck ABC (Fig. 31) zu beschreiben.**

Fig. 31.

Es sei eine Seite AB des gleichseitigen dem Kreise eingeschriebenen Dreieckes $= 8^{cm}$; wie groß ist a) die Höhe CD, b) der Flächeninhalt dieses Dreieckes?

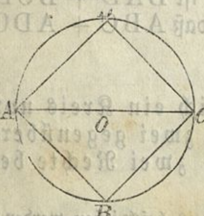
a) CD ist eine Kathete des rechtwinkligen Dreieckes ADC, worin die Hypotenuse $AC = 8^{cm}$ und die zweite Kathete $AD = 4^{cm}$ ist. Man hat daher

$CD = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{64 - 16} = \sqrt{48} = 6 \cdot 93^{cm}$.

b) Flächeninhalt $= \frac{AB \times CD}{2} = \frac{8 \times 6 \cdot 93}{2} = 27 \cdot 72^{\square cm}$.

§. 29. **In den Kreis ein Quadrat (Fig. 32) zu beschreiben.**

Fig. 32.



1. Es sei die Seite AB des dem Kreise eingeschriebenen Quadrates $= 3^m\ 3^{dm}$; wie groß ist der Durchmesser AC des Kreises?

AC bildet die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes, dessen Katheten $AB = 3^m\ 3^{dm}$ und $BC = 3^m\ 3^{dm}$ bekannt sind. Man hat also

$3^m\ 3^{dm} = 33^{dm}\quad 33^2 = 1089$

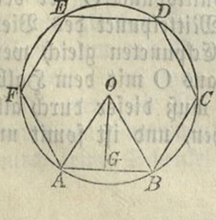
$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\ 1089$

$AC = \sqrt{2178} = 466 \cdot 7^{dm} = 4^m\ 667^{mm}$.

2. Beschreibe ein Quadrat mit der Seite $2^{dm}\ 5^{cm}$, und berechne den Halbmesser des um dieses Quadrat beschriebenen Kreises.

§. 30. **In den Kreis ein regelmäßiges Sechseck (Fig. 33) zu beschreiben.**

Fig. 33.



Wie groß ist a) der Umfang, b) der Flächeninhalt eines regelmäßigen dem Kreise eingeschriebenen Sechseckes, wenn der Halbmesser des Kreises $AO = 1^{dm}$ ist?

a) Die Seite eines regelmäßigen dem Kreise eingeschriebenen Sechseckes ist dem Halbmesser des Kreises gleich, also hier $= 1^{dm}$; der Umfang wird daher 6^{dm} sein. Der Umfang eines solchen Sechseckes ist somit 6mal so groß als der Halbmesser, oder 3mal so groß als der Durchmesser des umschriebenen Kreises.

b) Der Flächeninhalt ist gleich dem halben Umfange multipliciert mit der Senkrechten OG, welche vom Mittelpuncte auf eine Seite AB gefällt wird. OG ist nun eine Kathete des Dreieckes AGO, worin die Hypotenuse $AO = 1^{dm}$, und die andere Kathete $AG = \frac{1}{2}^{dm} = 0{\cdot}5^{dm}$ ist. Man hat also

$$OG = \sqrt{1^2 - 0{\cdot}5^2} = \sqrt{1 - 0{\cdot}25} = \sqrt{0{\cdot}75} = 0{\cdot}866^{dm},$$

$$\text{Flächeninhalt} = 3 \times 0{\cdot}866 = 2{\cdot}598\square^{dm}.$$

§. 31. **Aus der Seite eines eingeschriebenen regelmäßigen Vieleckes läßt sich auch die Seite des eingeschriebenen regelmäßigen Vieleckes von doppelter Seitenzahl bestimmen.**

Ist AB (Fig. 34) die Seite irgend eines regelmäßigen dem Kreise eingeschriebenen Vieleckes, und man fällt darauf von O die Senkrechte OC, welche verlängert die Kreislinie in D schneidet, so ist AD die Seite eines eingeschriebenen regelmäßigen Vieleckes, welches doppelt so viele Seiten als das frühere hat.

Fig. 34.

Sind nun AB und AO bekannt, so kann man aus dem rechtwinkligen Dreiecke ACO zunächst CO berechnen; subtrahirt man dann CO von DO, so hat man CD; endlich findet man aus dem rechtwinkligen Dreiecke ACD, worin AC und CD bekannt sind, auch die gesuchte Seite AD.

1. Für einen Kreis vom Halbmesser $AO = DO = 1^m$ ist die Seite AB des eingeschriebenen regelmäßigen Sechseckes $= 1^m$; wie groß ist die Seite AD des demselben Kreise eingeschriebenen regelmäßigen Zwölfeckes?

   Da $AC = \frac{1}{2}^m = 0{\cdot}5^m$ ist, so hat man

   $$CO = \sqrt{AO^2 - AC^2} = \sqrt{1^2 - 0{\cdot}5^2} = 0{\cdot}8660254^m$$
   $$CD = DO - CO = 1 - 0{\cdot}8660254 = 0{\cdot}1339746^m$$

und

   $$AD = \sqrt{AC^2 + CD^2} = \sqrt{0{\cdot}5^2 + 0{\cdot}1339746^2} = 0{\cdot}51763818^m.$$

   Der Umfang dieses Zwölfeckes ist:

   $$0{\cdot}51763818^m \times 12 = 6{\cdot}211658^m.$$

2. Berechne die Seite und den Umfang des eingeschriebenen regelmäßigen 24eckes für den Halbmesser 1.

3. Der Halbmesser eines Kreises sei $15^m\ 2^{dm}$; wie groß ist a) der Umfang, b) der Flächeninhalt des diesem Kreise eingeschriebenen Achteckes?

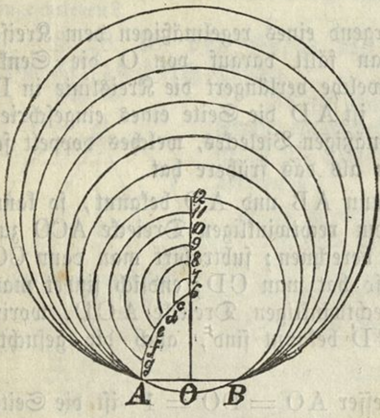
§. 32. **Ueber einer gegebenen Geraden ein regelmäßiges Vieleck zu beschreiben.**

a) Bei der Lösung dieser Aufgabe kommt es nur darauf an, die Größe des Kreises zu finden, welchem das verlangte Vieleck eingeschrieben erscheint. Zu diesem Ende berechne man zuerst die Größe eines Vieleckswinkels, ziehe eine Gerade, welche der gegebenen Seite gleich ist, und trage in jedem Endpuncte den halben Vieleckswinkel auf. Aus dem Durchschnittspuncte der beiden neuen Schenkel beschreibe man nun durch die Endpuncte der Geraden einen Kreis, und trage darin die gegebene Seite herum.

Verzeichne über einer Geraden von 1^{dm} Länge ein regelmäßiges a) Fünfeck, b) Sechseck, c) Achteck, d) Zehneck, e) Zwölfeck.

b) Sollen über einer gegebenen Geraden regelmäßige Sechs-, Sieben-, ... Zwölfecke construirt werden, so läßt sich dieses auf folgende mechanische Weise ausführen:

Fig. 35.



Ist AB (Fig. 35) die gegebene Gerade, so errichte man im Halbirungspuncte O eine Senkrechte, beschreibe aus B mit dem Halbmesser AB den Bogen A 6, und theile denselben zuerst in 2, und jede Hälfte noch in 3 gleiche Theile; sodann ziehe man aus dem Puncte 6 als Mittelpunct die Kreisbogen c 7, d 8, e 9 u. s. w. In dem Kreise, dessen Mittelpunct 6 und dessen Halbmesser A 6 ist, läßt sich nun AB 6mal herumtragen; in dem Kreise, dessen Mittelpunct 7 und der Halbmesser A 7 ist, kann AB 7mal aufgetragen werden; u. s. w.

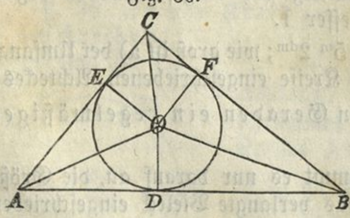
7. Geradlinige Figuren um den Kreis.

§. 33. Ein Vieleck, dessen Seiten Tangenten des Kreises sind, heißt dem Kreise umschrieben, und der Kreis heißt in das Vieleck beschrieben. Ein dem Kreise umschriebenes Vieleck wird auch ein Tangentenvieleck genannt.

§. 34. In jedes Dreieck läßt sich ein Kreis beschreiben.

Halbirt man (Fig. 36) die Winkel A und B, und zieht aus dem Durchschnittspunct O der Halbirungslinien die Gerade OD senkrecht auf AB, so ist der aus O mit dem Halbmesser OD verzeichnete Kreis dem Dreiecke eingeschrieben. Denn zieht man die Gerade OC, ferner auf AC und BC die Senkrechten OE und OF, so ist $\triangle$ AOD $\cong$ AOE und $\triangle$ BOD $\cong$ BOF, daher OD = OE und OD = OF. Die Puncte D, E und F sind also von O gleich weit entfernt, und es berührt der aus O mit OD

Fig. 36.

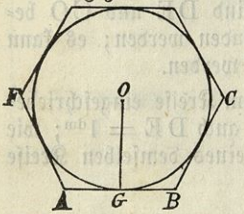


beschriebene Kreis die Seiten des Dreieckes ABC; er ist somit diesem Dreiecke eingeschrieben.

§. 35. **In jedes regelmäßige Vieleck kann ein Kreis eingeschrieben werden.**

Um in das regelmäßige Vieleck ABCDEF (Fig. 37) einen Kreis zu beschreiben, sucht man den Mittelpunct O des Vieleckes, zieht OG ⊥ AB, und beschreibt aus O mit dem Halbmesser OG einen Kreis. Da der Punct O von allen Seiten gleich weit absteht, so wird jener Kreis auch durch die Endpuncte der übrigen von O auf die Seiten gefällten Senkrechten gehen, und da die Seiten Tangenten zu diesem Kreise sind, so ist dieser in das Vieleck beschrieben.

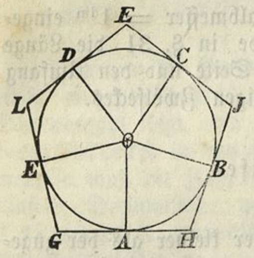
Fig. 37.



§. 36. **Einem Kreise läßt sich jedes regelmäßige Vieleck umschreiben.**

Theilt man (Fig. 38) den Kreisumfang in so viele gleiche Theile, als das Vieleck Seiten haben soll, und errichtet in den Theilungspuncten A, B, C,... auf die zu denselben gezogenen Halbmesser Senkrechte, so erhält man dadurch ein dem Kreise umschriebenes Vieleck GHJK .. von der verlangten Seitenzahl. Daß dieses Vieleck regelmäßig ist, also gleiche Winkel und gleiche Seiten hat, läßt sich aus der Congruenz der Vierecke AOBH, BOCJ, CODE, ... leicht ableiten.

Fig. 38.

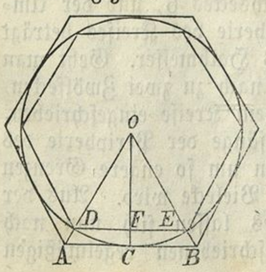


Beschreibe um einen gegebenen Kreis

a) ein gleichseitiges Dreieck;
b) ein Quadrat;
c) ein regelmäßiges Fünfeck;
d) ein regelmäßiges Sechseck;
e) ein regelmäßiges Achteck;
f) ein regelmäßiges Zehneck.

§. 37. **Aus der Seite eines in den Kreis beschriebenen regelmäßigen Vieleckes kann auch die Seite des umschriebenen regelmäßigen Vieleckes von gleicher Seitenanzahl berechnet werden.**

Fig. 39.



Es sei AB (Fig. 39) die Seite eines dem Kreise umschriebenen regelmäßigen Vieleckes. Zieht man die Geraden AO und BO, welche die Kreislinie in D und E schneiden, und verbindet diese Puncte durch die Sehne

DE, so ist diese die Seite eines eingeschriebenen regelmäßigen Vieleckes, das eben so viele Seiten hat, als das umschriebene, dessen Seite AB ist.

Kennt man nun DE und DO = CO, so kann man leicht auch AB bestimmen. Die Seiten AB und DE sind parallel, weil sie beide auf CO senkrecht sind, daher ist $\triangle$ ABO $\sim$ DEO, und es müssen sich die Grundlinien dieser Dreiecke so verhalten wie ihre Höhen, also AB : DE = CO : FO. Von diesen Größen sind DE und CO bekannt, FO kann aus dem Dreiecke DFO gefunden werden; es kann also mittelst jener Proportion auch AB berechnet werden.

1. Stellt DE die Seite eines regelmäßigen dem Kreise eingeschriebenen Sechseckes vor, so ist für DO = 1^{dm} auch DE = 1^{dm}; wie groß ist die Seite, wie groß der Umfang eines demselben Kreise umschriebenen Sechseckes?

Man hat

$$FO = \sqrt{DO^2 - DF^2} = 0\cdot8660254^{dm}, \text{ daher}$$
$$AB : 1 = 1 : 0\cdot8660254,$$

woraus AB = $1\cdot1547005^{dm}$ als die Seite des umschriebenen regelmäßigen Sechseckes folgt; der Umfang desselben ist $1\cdot1547005^{dm} \times 6 = 6\cdot928203^{dm}$.

2. Für die Seite des einem Kreise vom Halbmesser = 1^{dm} eingeschriebenen regelmäßigen Zwölfeckes wurde in §. 31 die Länge $0\cdot517638^{dm}$ gefunden; man berechne die Seite und den Umfang des diesem Kreise umschriebenen regelmäßigen Zwölfeckes.

8. Ausmessung des Kreises.

a) Länge des Kreisumfanges.

§. 38. Die Sehne eines Kreises ist immer kleiner als der zugehörige Bogen; dagegen sind die Tangentenstücke, welche bei einem dem Kreise umschriebenen Vielecke einen Bogen umfassen, zusammen genommen stets größer als dieser Bogen. Wenn man daher einem Kreise ein regelmäßiges Vieleck einschreibt, und ein zweites regelmäßiges Vieleck von gleicher Seitenanzahl umschreibt, so ist der Umfang des eingeschriebenen Vieleckes kleiner, jener des umschriebenen größer als die Peripherie des Kreises; beide Umfänge bilden also Grenzen, zwischen denen die Peripherie des Kreises eingeschlossen ist. Für den Halbmesser 1 beträgt der Umfang des eingeschriebenen Sechseckes 6, und der Umfang des umschriebenen 6·938203; die Peripherie des Kreises beträgt daher mehr als 6, aber weniger als 6·928203 Halbmesser. Geht man durch Verdopplung der Seitenanzahl nach und nach zu zwei Zwölfecken, zu zwei 24ecken u. s. w. über, deren eines dem Kreise eingeschrieben, das andere umschrieben ist, so werden ihre Umfänge der Peripherie des Kreises immer näher kommen, und dieselbe in um so engere Grenzen einschließen, je größer die Seitenanzahl der Vielecke wird. Aus der Seite des eingeschriebenen regelmäßigen 6eckes lassen sich nun nach §. 31 nach und nach die Seiten des eingeschriebenen regelmäßigen

12eckes, 24eckes, 48eckes..., und aus diesen nach §. 37 die Seiten des umschriebenen regelmäßigen 12eckes, 24eckes, 48eckes,..., finden. Werden sodann aus den Seiten die Umfänge berechnet, so erhält man, wenn die Rechnung bis zur sechsten Decimalstelle fortgeführt wird, folgende Resultate:

	Umfang des	
	eingeschriebenen	umschriebenen
6eckes	6·000000	6·928203
12 „	6·211658	6·430782
24 „	6·265257	6·319320
48 „	6·278700	6·292172
96 „	6·282066	6·285430
192 „	6·282905	6·283746
384 „	6·283115	6·283325
768 „	6·283168	6·283220
1536 „	6·283181	6·283194
3072 „	6·283183	6·283187

Da nun die Peripherie des Kreises immer zwischen den Umfängen eines eingeschriebenen und eines umschriebenen Vieleckes von gleicher Seitenanzahl liegt, und die Umfänge des eingeschriebenen und umschriebenen 3072eckes in den fünf ersten Decimalen mit einander übereinstimmen, so muß die Zahl 6·28318 auch die Peripherie des Kreises bis zur fünften Decimalstelle genau darstellen. Es ist also der Kreisumfang 6·28318mal so groß als der Halbmesser, oder 3·14159mal so groß als der Durchmesser.

Die Zahl 3·14159, welche das Verhältniß der Peripherie zum Durchmesser ausdrückt, wird gewöhnlich die **Ludolphische Zahl** genannt, und mit dem Buchstaben π bezeichnet; also $\pi = 3 \cdot 14159$.

Bei Rechnungen, welche keine große Genauigkeit erfordern, setzt man $\pi = 3\frac{1}{7} = 3 \cdot 14$; bei genaueren Rechnungen muß man auch mehr Decimalstellen berücksichtigen. Der Bruch $\frac{355}{113} = 3 \cdot 141593$ bestimmt π auf 6 Decimalen genau. Auf 10 Decimalen genau ist

$$\pi = 3 \cdot 1415926535.$$

§. 39. Drückt man durch r, d und p bezüglich die Maßzahlen des Halbmessers, des Durchmessers und der Peripherie eines Kreises aus, so ergibt sich aus dem Vorhergehenden:

1. $p = d\pi$, 2. $p = 2r\pi$; d. h.

die Maßzahl der Peripherie eines Kreises ist gleich dem Producte aus der auf dieselbe Längeneinheit bezogenen Maßzahl des Durchmessers oder doppelten Halbmessers und der Ludolphischen Zahl; oder kürzer

a) Die Peripherie eines Kreises ist gleich dem Producte aus dem Durchmesser oder doppelten Halbmesser und der Ludolphischen Zahl.

Ferner folgt

3. $d = \frac{p}{\pi}$ 4. $r = \frac{p}{2\pi}$; d. h.

b) Der Durchmesser eines Kreises ist gleich der Peripherie, dividirt durch die Ludolphische Zahl.

c) Der Halbmesser eines Kreises ist gleich der Peripherie, dividirt durch die doppelte Ludolphische Zahl.

Ist z. B. der Halbmesser eines Kreises $r = 4^m$, so ist der Durchmesser $d = 8^m$, und die Peripherie

$$p = 8 \times 3{\cdot}14 = 25{\cdot}12^m = 25^m\ 12^{cm}.$$

Ist umgekehrt $p = 20^{dm}$ gegeben, so erhält man

$$d = 20 : 3\tfrac{1}{7} = 6\tfrac{4}{11}{}^{dm} \text{ und } r = 3\tfrac{2}{11}{}^{dm}.$$

Sind R und r die Halbmesser, D und d die Durchmesser, P und p die Peripherien zweier Kreise, so ist

$P = D\pi$ und $p = d\pi$, daher $P : p = D : d = R : r$; d. h.

d) Die Peripherien zweier Kreise verhalten sich so zu einander, wie ihre Durchmesser oder wie ihre Halbmesser.

§. 40. Ein Bogen kann im Bogenmaße durch Grade, Minuten und Secunden, oder im Längenmaße durch die Längeneinheit gemessen werden.

Um einen Kreisbogen, der im Bogenmaße gegeben ist, im Längenmaße zu bestimmen, wendet man den aus §. 3 hervorgehenden Satz an:

Die Länge eines Bogens verhält sich zu der Peripherie, wie der entsprechende Centriwinkel zu 360°.

Z. B. Man bestimme die Länge eines Bogens von 45°, wenn der Halbmesser 5^m beträgt.

Peripherie $= 10 \times 3{\cdot}14 = 31{\cdot}4^m$,

daher Bogenlänge: $31{\cdot}4^m = 45^0 : 360^0$,

woraus Bogenlänge $= 3{\cdot}9^m$.

Nach demselben Satze kann man auch umgekehrt aus dem Längenmaße eines Bogens das Bogenmaß desselben finden.

Z. B. Ein Kreisbogen ist 4^{dm} und die Peripherie, zu der er gehört, 20^{dm} lang; wie viel Grade faßt der Kreisbogen?

$$4 : 20 = x^0 : 360^0, \text{ woraus } x = 72^0.$$

b) Flächeninhalt des Kreises.

§. 41. Da die Fläche eines Kreises stets größer als die Fläche des eingeschriebenen und kleiner als die Fläche des umschriebenen regelmäßigen Vieleckes von gleicher Seitenanzahl ist, diese letzteren Flächen aber bei fortgesetzter Verdopplung der Seitenzahl sich immer mehr dem Flächeninhalt des Kreises nähern, so könnte man den letzteren auf ähnliche Art, wie die Peripherie, durch die Berechnung regelmäßiger Vielecke bestimmen. Einfacher gelangt man jedoch durch folgende Betrachtung zum Ziele:

Je mehrere Seiten ein dem Kreise eingeschriebenes regelmäßiges Vieleck hat, desto kleiner werden die Seiten und desto näher liegen sie an der Peripherie; um so kleiner wird also auch der Unterschied zwischen der Fläche des Vieleckes und der Kreisfläche. Denkt man sich nun die Seitenanzahl eines solchen Vieleckes ohne Ende vergrößert, so geht endlich das regelmäßige Vieleck in den Kreis selbst über. Ein Kreis kann demnach als ein regelmäßiges Vieleck von unendlich vielen und unendlich kleinen Seiten betrachtet werden. Da nun der Flächeninhalt eines regelmäßigen Vieleckes dem Producte aus dem Umfange und der halben Senkrechten, welche man vom Mittelpuncte auf eine Seite fällt, gleich ist, diese Senkrechte aber beim Kreise als Halbmesser erscheint, so folgt:

a) **Der Flächeninhalt eines Kreises ist gleich dem Producte aus dem Umfange und dem halben Halbmesser, oder dem vierten Theile des Durchmessers.**

Sind r, d, p und f bezüglich die Maßzahlen des Halbmessers, des Durchmessers, der Peripherie und Flächeninhaltes eines Kreises, so hat man

$$1.\ f = p \cdot \frac{r}{2}, \qquad 2.\ f = p \cdot \frac{d}{4}.$$

Ist z. B. der Halbmesser $r = 8^{dm}$, so ist $p = 16 \times 3 \cdot 14 = 50 \cdot 24^{dm}$ und $f = 50 \cdot 24 \times 4 = 200 \cdot 96 \square^{dm}$.

Wie groß ist der Flächeninhalt eines Kreises, dessen Peripherie 44^{cm} beträgt?

$44^{cm} : 3\frac{1}{7} = 14^{cm}$ Durchmesser, 6

$44 \times \frac{14}{4} = 154 \square^{cm}$ Flächeninhalt. 12×3

Aus $f = p\,\frac{r}{2}$ folgt auch wegen $p = 2\,r\,\pi$ 36

$$f = 2\,r\,\pi \cdot \frac{r}{2};\ \text{oder}\ f = r^2\,\pi;\ \text{d. h.}$$

b) **Der Flächeninhalt eines Kreises ist gleich dem Producte aus dem Quadrate des Halbmessers und der Ludolphischen Zahl.**

Ist der Halbmesser z. B. 5^m, so hat man

$$f = 5^2 \times 3 \cdot 1416 = 25 \times 3 \cdot 1416 = 78 \cdot 54 \square^m.$$

Wenn umgekehrt aus dem Flächeninhalte eines Kreises der Halbmesser gefunden werden soll, so darf man nur den Flächeninhalt durch die Ludolphische Zahl dividiren; der Quotient ist das Quadrat des Halbmessers. Zieht man daraus die Quadratwurzel, so erhält man den Halbmesser selbst. Es ist also

$$r = \sqrt{\frac{f}{\pi}};\ \text{d. h.}$$

c) **Der Halbmesser eines Kreises ist gleich der Quadratwurzel aus dem Quotienten des Flächeninhaltes durch die Ludolphische Zahl.**

Wie groß ist z. B. der Halbmesser eines Kreises, dessen Flächeninhalt 20□dm beträgt?

$20 : 3{\cdot}14 = 6{\cdot}37 \qquad \sqrt{6{\cdot}37} = 2{\cdot}52^{dm}$ Halbmesser.

Wenn R und r die Halbmesser, F und f die Flächen zweier Kreise vorstellen, so ist

$$F = R^2\pi \text{ und } f = r^2\pi,$$

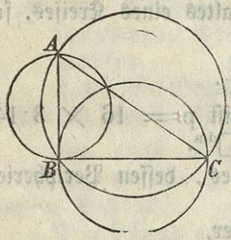
daher $\qquad F : f = R^2 : r^2$; d. h.

d) Die Flächeninhalte zweier Kreise verhalten sich so zu einander wie die Quadrate ihrer Halbmesser, oder auch wie die Quadrate ihrer Durchmesser.

Ein Kreis mit einem 2mal, 3mal, 4mal so großen Halbmesser hat daher einen 4-, 9-, 16mal so großen Flächeninhalt als ein Kreis mit dem einfachen Halbmesser.

§. 42. Ist ABC (Fig. 40) ein in B rechtwinkliges Dreieck und beschreibt man über den drei Seiten als Durchmesser Kreise, so ist nach

Fig. 40.



dem Pythagoräischen Lehrsatze

$$AC^2 = AB^2 + BC^2,$$

daher auch, wenn man beide Ausdrücke mit der Ludolphischen Zahl multiplicirt,

$$AC^2.\pi = AB^2.\pi + BC^2.\pi.$$

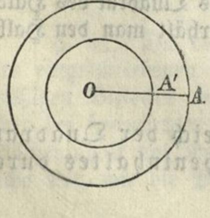
Diese drei Größen bedeuten nun nach der Reihe die Flächen der über der Hypotenuse und über den beiden Katheten beschriebenen Kreise. Es ist also der Flächeninhalt des über der Hypotenuse beschriebenen Kreises gleich der Summe aus den Flächeninhalten der beiden über den Katheten beschriebenen Kreise.

1. Beschreibe einen Kreis, welcher der Summe zweier gegebener Kreise gleich ist.
2. Beschreibe einen Kreis, welcher der Differenz zweier gegebener Kreise gleich ist.

§. 43. Den Inhalt eines Kreisringes zu finden.

Man subtrahire den Inhalt des kleineren der beiden concentrischen Kreise von dem Inhalte des größeren; oder kürzer: man subtrahire das Quadrat des kleineren Halbmessers von dem Quadrate des größeren, und multiplicire die Differenz mit der Ludolphischen Zahl.

Fig. 41.



Sind OA = R und OA′ = r (Fig. 41) die Halbmesser der beiden concentrischen Kreise, und f der Flächeninhalt des Kreisringes, so hat man

$$f = (R^2 - r^2)\,\pi.$$

Es sei z. B. $R = 5^{dm}$ und $r = 3^{dm}$.

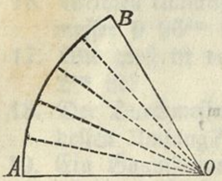
Man hat

$$R^2 = 25$$
$$r^2 = 9$$
$$f = 16 \times 3 \cdot 14$$
$$= 50 \cdot 24 \square^{dm}.$$

§. 44. Den Flächeninhalt eines Kreisausschnittes zu finden.

Denkt man sich in dem Kreisausschnitte AOB (Fig. 42) unzählig viele Halbmesser gezogen, so kann man die dadurch entstehenden sehr kleinen Ausschnitte als Dreiecke ansehen, deren Grundlinien zusammen den zu dem Kreisausschnitte gehörenden Bogen AB geben, und deren gemeinschaftliche Höhe der Halbmesser ist. Um nun die Fläche des Kreisausschnittes zu erhalten, wird man alle Dreiecksflächen berechnen und addiren; man wird also zuerst die Grundlinien dieser Dreiecke addiren, und ihre Summe, d. i. die Bogenlänge AB mit der halben gemeinschaftlichen Höhe, d. i. mit dem halben Halbmesser multipliciren. Daraus folgt:

Fig. 42.



Der Flächeninhalt eines Kreisausschnittes ist gleich dem Producte aus der Länge seines Bogens und dem halben Halbmesser.

Ist z. B. der Halbmesser $= 7^{cm}$, und enthält der Bogen AB 35^0, so hat man, wenn man den Kreisumfang durch p, die Länge des Bogens AB durch b, und die Fläche des Ausschnittes durch s bezeichnet

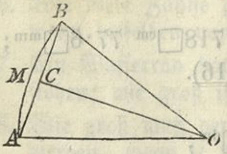
$$p = 14 \times 3\tfrac{1}{7} = 44^{cm};$$
$$b : 44 = 35^0 : 360^0, \text{ daher } b = \tfrac{77}{18}^{cm};$$
$$s = \tfrac{77}{18} \times \tfrac{7}{2} = 14\tfrac{35}{36} \square^{cm}.$$

Auf dieselbe Art, wie hier der Satz über den Inhalt eines Kreisausschnittes entwickelt wurde, hätte auch der §. 40, a) entwickelte Satz über den Flächeninhalt eines Kreises begründet werden können.

§. 45. Den Inhalt eines Kreisabschnittes zu finden.

Wenn man zu den Endpuncten der Sehne AB (Fig. 43), welche dem Kreisabschnitte ABM entspricht, Halbmesser zieht, so enthält man den Kreisausschnitt AOB, welcher aus jenem Kreisabschnitte und aus dem Dreiecke AOB zusammengesetzt ist. Berechnet man nun den Inhalt des Ausschnittes, und subtrahirt von demselben den Inhalt des Dreieckes, so gibt die Differenz den Flächeninhalt des Kreisausschnittes.

Fig. 43.



Es sei z. B. der Halbmesser $AO = 1^m$, der Bogen AB enthalte 40^0, und die zugehörige Sehne AB betrage $0 \cdot 684^m$; man suche die Fläche des Segmentes ABM.

Für den Ausschnitt AOB findet man zunächst die Bogenlänge AB $= 0·698^{m}$; daher der Flächeninhalt des Ausschnittes

$$= 0·698 \times 0·5 = 0·349\square^{m}.$$

In dem Dreiecke AOB ist die Höhe $OC = \sqrt{AO^2 - AC^2} = 0·939^{m}$ somit der Flächeninhalt

$$= 0·342 \times 0·939 = 0·3211\square^{m}.$$

Der Inhalt des Kreisabschnittes ABM ist daher

$$0·349 - 0·3211 = 0·0279\square^{m}.$$

c) Aufgaben über die Kreismessung.

§. 46. 1. Der Durchmesser eines Kreises ist
a) 3^{m}, b) $2\frac{1}{2}^{m}$, c) $0·56^{m}$, d) $5^{dm}\ 4^{cm}\ 8^{mm}$;
wie groß ist der Umfang? ($\pi = 3\frac{1}{7}$).

2. Der Halbmesser eines Kreises ist
a) $3·7^{m}$, b) $7^{dm}\ 1^{cm}$, c) $1^{m}\ 6^{dm}\ 5^{cm}$, d) $1·205^{m}$;
wie groß ist der Umfang? ($\pi = 3·14$).

3. Der Umfang eines Kreises beträgt
a) 5^{m}, b) 27^{dm}, c) $339·292^{cm}$, d) $2506·99^{mm}$;
wie groß ist der Durchmesser? ($\pi = 3·1416$).

4. Suche den Halbmesser zu den Kreisen, deren Peripherie beträgt:
a) 44^{dm}, b) $18·2^{cm}$, c) $1^{m}\ 5^{dm}\ 3^{cm}$. ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

5. Berechne den Flächeninhalt eines Kreises, dessen Halbmesser beträgt:
a) 4^{m}, b) $2·92^{m}$, c) $3^{dm}\ 28^{mm}$. ($\pi = 3·14$.)

6. Der Durchmesser eines Kreises ist
a) $3·75^{m}$, b) $21·02^{dm}$, c) $1^{m}\ 5^{cm}$, d) $259·3^{mm}$;
wie groß ist m) der Umfang, n) der Flächeninhalt? ($\pi = 3·14$).

7. Der Umfang eines Kreises ist
a) $17·97^{dm}$, b) $5^{m}\ 8^{dm}\ 75^{mm}$, c) $219\frac{1}{2}^{mm}$;
wie groß ist m) der Halbmesser, n) der Flächeninhalt? ($\pi = \frac{355}{113}$).

8. Suche den Halbmesser eines Kreises, dessen Inhalt beträgt:
a) $25\square^{m}$, b) $804·25\square^{dm}$, c) $8\square^{m}\ 67\square^{dm}\ 8\square^{cm}$. ($\pi = 3·14$.)

9. Der Flächeninhalt eines Kreises ist
a) $13\square^{m}$, b) $260576·31\square^{cm}$, c) $25\square^{m}\ 718\square^{cm}\ 77·6\square^{mm}$;
wie groß ist der Durchmesser? ($\pi = 3·1416$).

10. Der Flächeninhalt eines Kreises ist
a) $10\square^{dm}$, b) $9\square^{m}\ 33\square^{dm}$, c) $16·744\square^{dm}$;
wie groß ist m) der Halbmesser, n) der Umfang? ($\pi = 3·14$).

11. Wie lang ist ein Bogen von 20 Grad, wenn der Durchmesser des Kreises $5^{dm}\ 4^{cm}$ beträgt?

12. Der Halbmesser eines Kreises ist 2^{m}; wie lang ist ein Bogen von a) 30^{0}, b) 125^{0}, c) $75^{0}\ 30'$?
13. Ein Kreisbogen von 48^{0} hat $4^{dm}\ 26^{mm}$ Länge; wie groß ist der Halbmesser?
14. Der Bogen eines Kreises von $22 \cdot 5^{cm}$ Durchmesser ist 29^{cm} lang; wie viele Grade umspannt der Bogen?
15. Der Halbmesser eines Kreises ist 8^{dm}; wie viele Grade enthält der Centriwinkel, welcher zu einem Bogen von a) 5^{dm}, b) $7 \cdot 5^{dm}$, c) $2^{dm}\ 28^{mm}$ Länge gehört?
16. Welchen Umfang hat das Zifferblatt einer Thurmuhr, dessen Durchmesser $0 \cdot 96^{dm}$ beträgt?
17. Wie groß ist der Umfang eines Haspels, dessen Durchmesser 4^{dm} 2^{cm} ist?
18. Der Durchmesser eines österr. Guldenstückes ist 29^{mm}; wie groß ist dessen Umfang?
19. Ein Baumstamm hat an seinem dicken Ende $7^{dm}\ 2^{cm}$ im Umfange; wie groß ist der Durchmesser?
20. Ein Schwungrad soll 6^{m} Peripherie erhalten; wie groß muß sein Halbmesser gemacht werden?
21. Der Umfang am Boden eines Fasses ist $4^{m}\ 1^{dm}$, am Spund 4^{m} 4^{dm}; wie groß sind die beiden Durchmesser?
22. Man rechnet einen Grad des Erdäquators zu 15 geographischen Meilen; wie groß ist der Halbmesser des Aequators (Erdhalbmesser)? ($\pi = 3 \cdot 14159$.)
23. Ein Erdglobus hat 42^{cm} im Durchmesser; wie lang ist daran ein Grad des Aequators?
24. Die Stadt Graz hat eine geographische Breite von $47^{0}\ 4'$; wie viel Kilometer ist sie vom Aequator entfernt, wenn man den Meridian als einen Kreis von $6371 \cdot 56$ Kilometer Halbmesser annimmt?
25. Ein Grad des Parallelkreises unserer Erde, welcher durch Triest geht, hat $77 \cdot 961$, des Parallelkreises durch Wien $74 \cdot 314$, des Parallelkreises durch Prag $71 \cdot 554$ Kilometer Länge; wie groß ist der Halbmesser eines jeden dieser drei Parallelkreise?

---

26. Wie viele Zähne gehen auf ein Rad von $1^{m}\ 975^{mm}$ Durchmesser, wenn dieselben von Mitte zu Mitte $118 \cdot 5^{mm}$ entfernt sein sollen?
27. Ein Wasserrad hat 24 Schaufeln, welche $3 \cdot 5^{dm}$ von einander abstehen; wie groß ist der Durchmesser des Rades?
28. Wie groß muß der Halbmesser zu einem runden Tische genommen werden, wenn 8 Personen daran sitzen sollen, und man auf jede $7^{dm}\ 2^{cm}$ vom Umfange rechnet?
29. Wie viele Bäume kann man um einen kreisrunden Teich von 87^{m} Durchmesser pflanzen, wenn jeder 4^{m} vom andern entfernt sein soll?

30. Ein Fußgeher braucht, um den Umfang eines kreisrunden Teiches abzuschreiten, 10 Minuten, wenn er in jeder Secunde $1^m\ 2^{dm}$ zurücklegt; welchen Durchmesser hat dieser Teich?
31. Ein Locomotivrad hat $1^m\ 2^{dm}$ Durchmesser; wie vielmal muß es sich auf einem Schienenwege von 1 Kilometer umdrehen?
32. Eine Kugel von 92^{mm} Durchmesser drehte sich auf einer Kegelbahn 36mal herum; wie lang ist die Kegelbahn? ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)
33. Um einen runden Block, welcher 32^{cm} im Halbmesser hat, soll ein Seil 18mal umgewickelt werden; wie lang muß man das Seil nehmen?
34. Der Durchmesser der Winde bei einem Brunnen ist $2^{dm}\ 5^{cm}$; wie tief ist der Brunnen, wenn das Seil, welches bis auf den Boden reicht, 15mal um die Winde geht?
35. Das Vorderrad eines Wagens hat $1 \cdot 2^m$, das Hinterrad $1 \cdot 7^m$ im Durchmesser; wie viele Umläufe macht jenes mehr als dieses auf eine Entfernung von 4 Kilometer?
36. Ein Teller hat $2 \cdot 5^{dm}$ Durchmesser; welchen Flächenraum auf dem Tische nimmt derselbe ein?
37. Ein Tischler soll einen runden Tisch von $1\,\square^m$ Fläche verfertigen; wie groß muß er den Halbmesser dazu nehmen?
38. Ein Achtguldenstück hat 21^{mm}, ein Vierguldenstück 19^{mm} im Durchmesser; wie groß ist die Bildfläche einer jeden dieser Goldmünzen?
39. Wie groß ist der Druck der Luft auf eine Kreisfläche von $1 \cdot 2^m$, wenn der Luftdruck auf $1\,\square^{cm}$ $1 \cdot 033$ Kilogramm beträgt?
40. Ein Stab von Fichtenholz, welcher $1\,\square^{cm}$ im Querschnitte hat, zerreißt bei einer Belastung von 746 Kilogramme; welches Gewicht ist zum Zerreißen einer fichtenen Walze von 105^{mm} Durchmesser erforderlich?
41. Der Umfang eines Baumstammes an der Schnittfläche ist $2^m\ 3^{dm}$; wie groß ist die Schnittfläche?
42. Wie groß ist der innere und der äußere Umfang eines eisernen Ringes, welcher $2 \cdot 6^{cm}$ stark und im Lichten 3^{dm} weit ist?
43. Ein kreisrunder See soll mit einem Zaune eingefaßt werden, der ringsum $1^m\ 6^{dm}$ vom Ufer abstehen soll; wie groß wird der Umfang des Zaunes sein, wenn der Durchmesser des Sees 158^m beträgt?
44. Ein kreisrunder Thurm hat in seinem Innern einen Umfang von $25 \cdot 2^m$, von außen einen Umfang von 35^m; wie dick ist das Gemäuer?
45. Die Halbmesser zweier concentrischer Kreise sind
a) $R = 6^m$, $r = 4^m$; b) $R = 3^m\ 5^{dm}$, $r = 2^m\ 8^{dm}$;
wie groß ist die Fläche des Kreisringes?
46. Die Peripherien zweier concentrischer Kreise sind 137^{cm} und 152^{cm}, wie groß ist der zwischen ihnen enthaltene Kreisring?

47. Wie groß ist der längere Halbmesser eines Kreisringes, welcher $86 \cdot 24 \square^{dm}$ mißt, und dessen kürzerer Halbmesser $4 \cdot 2^{dm}$ lang ist?
48. Der Durchmesser eines Kreises ist 1^{m}; wie groß ist der concentrisch ausgeschnittene Kreis, wenn der Ring 1^{dm} 7^{cm} breit ist?
49. Um einen kreisrunden Grasplatz, welcher 18^{m} 4^{dm} im Umfange hat, geht ein Weg von 4^{dm} Breite; welche Fläche nimmt dieser Weg ein?
50. Ein Dorf hat einen kreisrunden Teich von 6^{m} 3^{dm} Durchmesser; da derselbe für das Dorf zu klein ist, beschließt man ihn zu vergrößern, so daß der Durchmesser 8^{m} 4^{dm} betragen soll; um wie viel wird dadurch die Fläche des Teiches größer werden?

---

51. Der Halbmesser eines Kreises beträgt 5^{dm} 8^{cm}; wie groß muß der Durchmesser eines andern Kreises genommen werden, wenn dieser $2\frac{1}{2}$mal so groß sein soll?
52. Der Durchmesser eines Kreises ist 315^{mm}; wie groß ist der Durchmesser eines andern Kreises, dessen Fläche sich zu der Fläche des ersteren Kreises wie 3 zu 4 verhält?
53. Die Halbmesser zweier Kreise sind 2^{dm} 4^{cm} und 3^{dm} 2^{cm}; wie groß ist der Durchmesser eines Kreises, welcher der Summe jener beiden Kreise gleich ist?
54. Die Peripherie eines Kreises ist $27 \cdot 35^{cm}$, die eines andern Kreises $12 \cdot 78^{cm}$; wie groß ist die Peripherie eines Kreises, dessen Fläche der Differenz jener beiden Kreise gleich ist?
55. Von zwei Kreisen sind a) die Halbmesser 5^{m} und 4^{m}, b) die Durchmesser 2^{m} 8^{dm} und 2^{m} 3^{dm}, c) die Umfänge $57 \cdot 2^{cm}$ und $93 \cdot 25^{cm}$; man will in jedem Falle einen Kreis erhalten, welcher der Summe der zwei gegebenen Kreise gleich sein soll, und es ist im ersten Falle der Halbmesser, im zweiten der Durchmesser, im dritten der Umfang des neuen Kreises zu bestimmen.
56. Ein Kreis hat mit einem Quadrate, welches 4^{cm} zur Seite hat, gleichen Umfang; wie verhalten sich ihre Flächen?
57. Wie groß ist die Seite des einem Kreise eingeschriebenen Quadrates, wenn a) der Umfang des Kreises $14 \cdot 13^{dm}$, b) der Flächeninhalt des Kreises $452 \cdot 16 \square^{dm}$ beträgt?
58. Aus einem Baumstamm, dessen geringster Umfang $1 \cdot 24^{m}$ beträgt, soll ein Balken von der größten quadratischen Querschnittsfläche gehauen werden; wie groß wird die Dicke desselben sein?
59. Wie groß ist der Inhalt eines Kreisausschnittes, dessen Halbmesser $3 \cdot 24^{dm}$ und dessen Bogenlänge $4 \cdot 5^{dm}$ ist?
60. Die Peripherie eines Kreises beträgt 249^{mm}; wie groß ist der Inhalt eines Ausschnittes, dessen Centriwinkel 75^{0} beträgt?
61. Wie viel Grade umfaßt der Bogen eines Kreisausschnittes von $11 \cdot 82743 \square^{dm}$ Inhalt, wenn der Halbmesser 5^{dm} ist? ($\pi = 3 \cdot 14159$.)
62. Wie groß ist der Inhalt eines Kreisausschnittes, in welchem sowohl der Halbmesser als die Sehne 3^{dm} 4^{cm} beträgt?

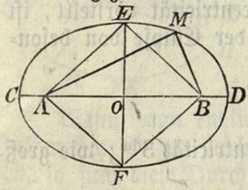
63. Die Fläche eines Kreisringes ist 254·34 $\square^{dm}$, der äußere Umfang 94·2^{dm}; wie groß sind die Halbmesser der beiden concentrischen Kreise?
64. Wie breit muß der Raum um einen kreisrunden Schauplatz, dessen innerer Durchmesser 9^{m} ist, angenommen werden, damit darin 500 Personen sitzen können, wenn man auf jede Person 75 $\square^{dm}$ rechnet?
65. Ein Tischler schneidet von einer hölzernen Kreisscheibe von 1·2^{m} Umfang ringsherum 0·5^{dm} ab; wie groß ist a) der Umfang, b) der Flächeninhalt der noch übrig bleibenden Scheibe?
66. Ein kreisrundes Wasserbecken (Bassin) hat im Umfange 42 Steine, deren jeder an der innern Seite 3^{dm} lang ist; wie lang muß ein Balken sein, damit er genau über die Mitte des Bassins reiche und auf jeder Seite noch 3^{dm} hervorrage?
67. Ein Schwungrad von 12^{m} Umfang macht in einer Minute 40 Umläufe; welche Geschwindigkeit hat ein Punct seiner Peripherie, d. h. wie viel Meter legt er in 1 Secunde zurück?
68. Welchen Durchmesser muß ein Rad haben, wenn es während 1 Minute 72 Umläufe machen, und ein Punct der Peripherie 21^{m} Geschwindigkeit haben soll?
69. Wie viel Umläufe muß ein Mühlstein von 1^{m} Durchmesser in 1 Minute machen, damit ein Punct seiner Peripherie eine Geschwindigkeit von 8^{m} erlange?
70. In eine kreisrunde Büchse von 2·8^{cm} Durchmesser gehen 100 Zündhölzchen; wie viel Zündhölzchen von derselben Dicke gehen in eine Büchse, deren Durchmesser 4^{cm} beträgt?
71. Vom Mittelpuncte eines quadratförmigen Blattes Papier, dessen Seitenlänge 2·8^{dm} beträgt, beschreibt man mit 1·2^{dm} Halbmesser einen Kreis; wie groß ist die Fläche des Papiers, welche außerhalb des Kreises liegt?
72. An einem Wagen hat jedes Vorderrad 1·2^{m}, jedes Hinterrad 1·6^{m} im Durchmesser; bei einer Fahrt macht jedes Vorderrad 2500 Umläufe mehr als jedes Hinterrad; wie lang war der zurückgelegte Weg?
73. Ein kreisrunder und ein quadratförmiger Teich haben gleichen Umfang, nämlich 60^{m}, beide sind von einem 2^{m} breiten Grasrande umgeben; welche Grasfläche ist die kleinere, und wie groß ist der Unterschied zwischen beiden?
74. Auf einer Zielscheibe sind eine weiße und vier schwarze Ringflächen; der weiße Ring ist 32^{cm}, jeder schwarze 5^{cm} breit; die Mitte der Scheibe bildet ein Kreis von 1^{dm} Durchmesser. Wie groß ist a) die ganze Zielscheibe, b) die mittlere Kreisfläche, c) jeder Kreisring?
75. Der Halbmesser eines Kreises beträgt 35^{cm}; um wie viel sind Umfang und Inhalt dieses Kreises bezüglich größer als Umfang und Inhalt a) des eingeschriebenen Quadrates, b) des eingeschrie-

benen regelmäßigen Sechseckes? — um wie viel sind sie kleiner als Umfang und Inhalt c) des umschriebenen Quadrates, d) des umschriebenen regelmäßigen Sechseckes?

II. Die Ellipse.

§. 47. Man befestige in den Puncten A und B (Fig. 44) Stifte und lege um dieselben einen an den Enden zusammengebundenen Faden.

Fig. 44.



Spannt man sodann den Faden mittelst eines Zeichenstiftes M, und führt diesen um die Puncte A und B so herum, daß der Faden immer straff gespannt bleibt, so beschreibt der Zeichenstift während dieser Bewegung eine in sich selbst zurückkehrende krumme Linie, welche **Ellipse** heißt.

Die gegeben Puncte A und B nennt man die **Brennpuncte**, den Halbirungspunct O ihrer Verbindungslinie AB den **Mittelpunct**, und die Entfernung $OA = OB$ des Mittelpunctes von jedem Brennpuncte die **Excentricität** der Ellipse.

Je kleiner die Excentricität ist, je näher an einander also die beiden Brennpuncte liegen, desto mehr nähert sich die Ellipse der Kreislinie.

Die Geraden AM und BM, welche von den beiden Brennpuncten zu irgend einem Puncte M der Ellipse gezogen werden, heißen die **Leitstrahlen** dieses Punctes.

Die Gerade CD, welche durch die Brennpuncte geht und auf beiden Seiten von der Ellipse begrenzt wird, nennt man die **große Axe**, und ihre Endpuncte C und D die **Scheitel** der Ellipse.

Aus der Erklärung der Ellipse geht hervor, daß sich die Längen der beiden Fadenstücke AM und BM, d. i. der beiden Leitstrahlen von Punct zu Punct verändern, indem der eine Leitstrahl zunimmt, während der andere kleiner wird, daß jedoch **die Summe der beiden Leitstrahlen eines jeden Punctes der Ellipse stets dieselbe ist.** Es ist daher $AC + BC = AD + BD$ oder $2AC + AB = 2BD + AB$, mithin $2AC = 2BD$, also $AC = BD$; d. h. **die Scheitel der Ellipse sind von den beiden Brennpuncten derselben gleich weit entfernt.**

Wegen $OA = OB$ und $AC = BD$ ist auch $OA + AC = OB + BD$, oder $OC = OD$; d. h. **der Mittelpunct der Ellipse ist zugleich der Halbirungspunct der großen Axe derselben.**

Da $AM + BM = AC + BC$ und $BC = AD$, so ist auch $AM + BM = AC + AD$, oder $AM + BM = CD$; d. h. **die Summe der Leitstrahlen eines jeden Punctes der Ellipse ist der großen Axe derselben gleich.**

Die Gerade EF, welche im Mittelpuncte der Ellipse auf die große Axe senkrecht steht und auf beiden Seiten von der Ellipse begrenzt wird, heißt die **kleine Axe** der Ellipse.

Da $\triangle AOE \cong BOE$, so ist $AE = BE$, und weil $AE + BE = CD$, so ist $AE = BE = \frac{1}{2}CD$; d. h. der Leitstrahl, welcher zu einem Endpuncte der kleinen Axe der Ellipse gezogen wird, ist der halben großen Axe derselben gleich.

Da ferner $\triangle\ AOE \cong AOF$, so ist $OE = OF$; d. h. der Mittelpunct der Ellipse ist zugleich der Halbirungspunct der kleinen Axe derselben.

Das rechtwinklige Dreieck AOE, worin AE die halbe große Axe, OE die halbe kleine Axe und OA die Excentricität vorstellt, ist sowohl für Berechnungen als für Constructionen der Ellipse von besonderer Wichtigkeit.

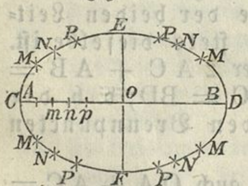
Aufgaben.

1. Die kleine Axe der Ellipse sei 1^m, die Excentricität 3^{dm}; wie groß ist die halbe große Axe?
2. Die Excentricität einer Ellipse ist $0 \cdot 34^m$, die große Axe $1 \cdot 3^m$; wie groß ist die kleine Axe?
3. Ein Gärtner hat eine Ellipse zu construiren, deren Axen 58^{dm} und 45^{dm} betragen; wie weit muß er die Brennpuncte von einander nehmen?
4. Die Bahn unserer Erde um die Sonne ist eine Ellipse, deren halbe große Axe 20657700, und deren kleine Axe 20655100 geographische Meilen beträgt; wie groß ist die Excentricität der Erdbahn?

§. 48. Eine Ellipse zu construiren, wenn die große Axe und die Excentricität derselben gegeben sind.

Es sei CD (Fig. 45) die gegebene große Axe und O ihr Halbirungspunct. Macht man $OA = OB$ gleich der gegebenen Excentricität, so sind A und B die Brennpuncte. Beschreibt man mit der halben großen Axe CO als Halbmesser aus A und B Kreisbogen, so geben ihre Durchschnitte E und F die beiden Endpuncte der kleinen Axe.

Fig. 45.

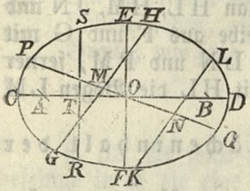


Nimmt man ferner zwischen A und O einen beliebigen Punct m an, beschreibt aus jedem Brennpuncte mit dem Halbmesser Cm nach oben und unten Bogen, sodann eben so mit dem Halbmesser Dm, so sind die vier Durchschnittspuncte M Puncte der Ellipse, da für jeden der eine Leitstrahl der Geraden Cm, der andere der Geraden Dm gleich ist, also beide zusammen $Cm + Dm$, d. i. die große Axe CD zur Summe geben. Eben so kann man mittelst des Punctes n die vier Puncte N, mittelst des Punctes p die vier Puncte P, und sofort beliebig viele Puncte der Ellipse bestimmen. Verbindet man diese Puncte durch eine stetig gekrümmte Linie, so erhält man die verlangte Ellipse, und zwar um so genauer, je mehrere Puncte derselben bestimmt wurden.

§. 49. **Eine Ellipse ist gegeben; man bestimme in derselben den Mittelpunct, die beiden Axen und die Brennpuncte.**

Man zieht (Fig. 46) in willkürlicher Richtung zwei parallele Sehnen GH und KL, ferner durch ihre Halbirungspuncte M und N die Sehne PQ und halbirt diese in O. Der Punct O ist der Mittelpunct der Ellipse.

Fig. 46.



Beschreibt man aus O einen Kreisbogen, welcher die Ellipse in R und S schneidet, halbirt die Sehne RS in T, und zieht durch T und O die Sehne CD, so ist diese die große Axe der Ellipse, und die in O auf CD errichtete Senkrechte EF die kleine Axe.

Wenn man endlich aus E mit der halben großen Axe CO als Halbmesser Bogen beschreibt, welche die große Axe in A und B schneiden, so sind diese Durchschnittspuncte die beiden Brennpuncte der Ellipse.

§. 50. **Durch Zusammensetzung mehrerer Kreisbogen eine der Ellipse ähnliche krumme Linie zu verzeichnen.**

a) Wenn die große Axe gegeben ist.

1. Man theile (Fig. 47) die große Axe AD in drei gleiche Theile AB = BC = CD, und beschreibe mit dem Halbmesser BC aus B und C Kreise, welche sich in E und F durchschneiden. Durch diese Puncte und die beiden Mittelpuncte zieht man nun die vier Geraden EG, EH, FJ und FK, und beschreibt aus E und F mit EG als Halbmesser die Bogen GH und JK.

Fig. 47.

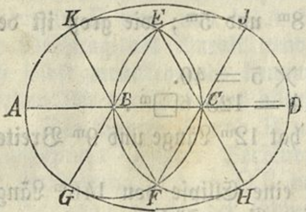
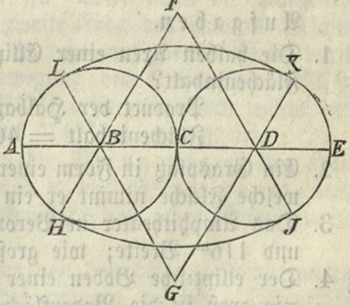


Fig. 48.

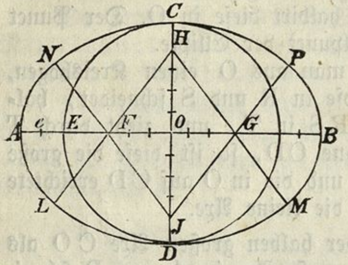


2. Man theile (Fig. 48) die große Axe AE in vier gleiche Theile, und beschreibe aus B und D mit dem Halbmesser BC zwei Kreise, die sich in C berühren. Sodann errichte man über BD zwei gleichseitige Dreiecke BDF und BDG, deren nicht gemeinschaftliche Seiten verlängert die früheren Kreise in den Puncten H, J, K und L schneiden. Nun werden noch aus den Puncten F und G mit FH als Halbmesser die Bogen HJ und KL beschrieben.

b) Wenn beide Axen gegeben sind.

Man lege (Fig. 49) die beiden Axen A B und C D in ihren Halbirungspuncten senkrecht an einander, beschreibe mit O D aus O

Fig. 49.



einen Kreis, halbiere AE in e, und trage a e 3mal von O bis F und G, und 4mal von O bis H und J auf. Sodann ziehe man H L, H M, J N und J P, und beschreibe aus F und G mit A F die Bogen L N und P M, ferner aus H und J mit H L die Bogen L M und N P.

§. 51. Flächeninhalt der Ellipse.

Beschreibt man über der großen Axe einer Ellipse einen Kreis, und einen zweiten über der kleinen Axe, so ist der Flächeninhalt der Ellipse kleiner als der Inhalt des erstern, und größer als der Inhalt des zweiten Kreises. Ein Kreis mit der halben großen Axe als Halbmesser ist also für die Darstellung des Flächeninhaltes der Ellipse zu groß, ein Kreis mit der halben kleinen Axe als Halbmesser dagegen zu klein. Man hat nun gefunden, daß die Ellipse genau so viel Flächenraum einschließt als ein Kreis, dessen Halbmesser die mittlere Proportionale zwischen den beiden halben Axen der Ellipse ist. Heißt r ein solcher Halbmesser, a die halbe große und b die halbe kleine Axe der Ellipse, so ist $a : r = r : b$, also $r^2 = a\,b$. Der Flächeninhalt dieses Kreises ist nun $r^2 \pi$; daher ist auch der Flächeninhalt der Ellipse $r^2 \pi$, oder $a\,b\,\pi$, d. h. der Flächeninhalt einer Ellipse ist gleich dem Producte der beiden halben Axen multiplicirt mit der Ludolphischen Zahl.

Aufgaben.

1. Die halben Axen einer Ellipse sind 8^m und 5^m; wie groß ist der Flächeninhalt?

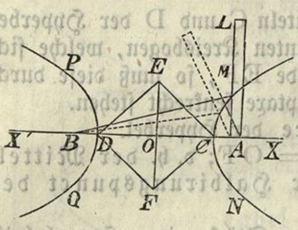
   Product der Halbaxen $= 8 \times 5 = 40$.
   Flächeninhalt $= 40 \times 3\cdot14 = 125\cdot6 \square^m$.
2. Ein Grasplatz in Form einer Ellipse hat 12^m Länge und 9^m Breite; welche Fläche nimmt er ein?
3. Das Amphitheater in Verona bildet eine Ellipse von 146^m Länge und 116^m Breite; wie groß ist dessen Grundfläche?
4. Der elliptische Boden einer Wanne ist $1^m\ 5^{dm}$ lang und 8^{dm} breit; wie groß ist die Bodenfläche?
5. Die Excentricität einer Ellipse ist $1^m\ 7^{dm}$, die große Axe $5^m\ 7^{dm}$; wie lang ist a) die kleine Axe, b) der Inhalt?
6. Wie groß ist der Inhalt einer Ellipse, deren kleine Axe $5\cdot6^m$ ist, und deren Brennpuncte $3\cdot2^m$ von einander abstehen?
7. Ein Teich, welcher die Form einer Ellipse hat, soll in einen kreisrunden verwandelt werden, der denselben Flächenraum einnimmt; wie groß muß der Durchmesser werden, wenn die Axen der Ellipse $23^m\ 4^{dm}$ und $18^m\ 5^{dm}$ sind?

8. Wie lang ist die große Axe einer Ellipse, wenn ihr Inhalt $49 \cdot 455 \square^m$, ihre kleine Axe 7^m ist?
9. Eine Ellipse soll $10 \square^m$ fassen, und zur großen Axe 4^m haben; a) wie groß wird ihre kleine Axe, b) wie weit werden ihre Brennpuncte von einander entfernt sein?
10. Ein elliptisches Blumenbeet soll 6^m lang werden und eben so viel Inhalt haben, als ein rechtwinkliges von $4 \cdot 1^m$ Länge und $3 \cdot 4^m$ Breite; wie lang muß die kleine Axe des elliptischen Beetes werden?

III. Die Hyperbel.

§. 52. Es seien (Fig. 50) die Puncte A und B gegeben. Man befestige in A die eine Kantenecke eines Lineals AL, so daß es um diesen Punct gedreht werden kann. Sodann nehme man einen Faden, welcher länger als AL ist, und befestige das eine Ende desselben in L, das andere in B. Dreht man nun das Lineal um die Kantenecke A, und führt dabei im Innern des Fadens einen Zeichenstift M so an der Kante LA herab, daß dabei der Faden stets gespannt bleibt, so beschreibt der Stift ein Stück einer nicht geschlossenen krummen Linie, welche Hyperbel heißt. Wendet man, wenn der Stift in C angelangt ist, das Lineal AL nach unten, und setzt daselbst das eben beschriebene Verfahren fort, so erhält man den untern Theil CN der Hyperbel, welcher mit dem obern Theile CM congruent ist. Wird dann die Kantenecke des Lineals in B angebracht, und das zweite Ende des Fadens, welches früher in B war, nun in A befestiget, so kann auf gleiche Weise durch die Drehung des Lineals und die Bewegung des Stiftes die nicht in sich selbst zurückkehrende krumme Linie PDQ erzeugt werden, welche den zweiten Ast der Hyperbel bildet und mit MCN congruent ist.

Fig. 50.



Die Puncte A und B nennt man die Brennpuncte, den Halbirungspunct O ihrer Verbindungslinie AB den Mittelpunct, und die Entfernung $OA = OB$ des Mittelpunctes von jedem Brennpuncte die Excentricität der Hyperbel.

Die Geraden AM und BM, welche von den beiden Brennpuncten zu irgend einem Puncte M der Hyperbel gezogen werden, heißen die Leitstrahlen dieses Punctes.

Die Gerade CD, welche durch die Brennpuncte geht, und auf beiden Seiten von der Hyperbel begrenzt wird, nennt man die Hauptaxe, und ihre Endpuncte C und D die Scheitel der Hyperbel.

Aus der Erklärung der Hyperbel geht hervor, daß zwar jedem andern Puncte auch andere Leitstrahlen entsprechen, daß jedoch $BM + LM$ oder $BM + AL - AM$ für jeden Punct der Länge des ganzen Fadens gleich bleibt, daß somit, weil AL unveränderlich ist, auch die Differenz

BM — AM, d. i. die Differenz der beiden Leitstrahlen eines jeden Punctes der Hyperbel stets dieselbe ist. Es ist daher AD — BD = BC — AC, also auch AD + AC = BC + BD, oder CD + 2AC = CD + 2BD, mithin 2AC = 2BD, daher AC = BD; d. h. die Scheitel der Hyperbel sind von den beiden Brennpuncten gleich weit entfernt.

Wegen OA = OB und AC = BD, ist auch OA — AC = OB — BD, oder OC = OD; d. h. der Mittelpunct der Hyperbel ist zugleich der Halbirungspunct der Hauptaxe derselben.

Da BM — AM = AD — BD und BD = AC, so ist auch BM — AM = AD — AC = CD; d. h. die Differenz der Leitstrahlen eines jeden Punctes der Hyperbel ist der Hauptaxe gleich.

Beschreibt man aus den beiden Scheiteln C und D der Hyperbel mit der Excentricität OA nach oben und unten Kreisbogen, welche sich in E und F schneiden, und zieht die Gerade EF, so muß diese durch den Mittelpunct O gehen und auf der Hauptaxe senkrecht stehen.

Die Gerade EF heißt die Nebenaxe der Hyperbel.

Da $\triangle$ COE $\cong$ COF, so ist OE = OF; d. h. der Mittelpunct der Hyperbel ist zugleich der Halbirungspunct der Nebenaxe derselben.

Für die Berechnung der bestimmenden Stücke einer Hyperbel ist das rechtwinklige Dreieck COE, worin OC die halbe Hauptaxe, OE die halbe Nebenaxe und CE die Excentricität vorstellt, von besonderer Wichtigkeit.

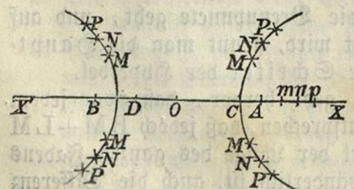
Aufgaben.

1. Die Hauptaxe einer Hyperbel ist $0 \cdot 4^{m}$, die Nebenaxe $0 \cdot 5^{m}$; wie groß ist die Excentricität?
2. Die Excentricität einer Hyperbel ist $5 \cdot 12^{dm}$, die Hauptaxe $3 \cdot 85^{dm}$; wie groß ist die Nebenaxe?
3. Die Excentricität einer Hyperbel ist $3^{dm}\ 9^{cm}$, die Nebenaxe $2^{dm}\ 2^{cm}$; wie groß ist die Hauptaxe?

§. 53. Eine Hyperbel zu construiren, wenn die Hauptaxe und die Excentricität derselben gegeben sind.

Es sei CD (Fig. 51) die gegebene Hauptaxe und O ihr Halbirungspunct. Verlängert man CD und macht OA = OB gleich der gegebenen Excentricität, so sind A und B die Brennpuncte der Hyperbel. Man nehme nun in der Geraden AX einen beliebigen Punct m an, beschreibe aus A und B mit Dm nach oben und unten Kreisbogen, sodann eben so mit Cm, so sind die vier Durchschnittspuncte M sämmtlich Puncte der Hyperbel, da für jeden derselben der eine Leitstrahl der

Fig. 51.

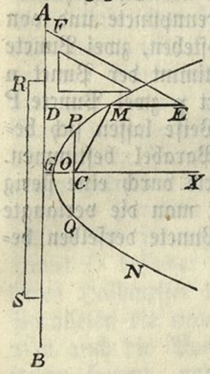


Geraden Dm, der andere der Geraden Cm, daher ihre Differenz Dm — Cm der Axe CD gleich ist. Auf gleiche Weise kann man mittelst des Punctes n die vier Puncte N, aus p die vier Puncte P, und so fort beliebig viele Puncte der Hyperbel bestimmen. Verbindet man diese Puncte durch eine stetig gekrümmte Linie, so erhält man die verlangte Hyperbel, und zwar um so genauer, je mehrere Puncte derselben bestimmt wurden.

IV. Die Parabel.

§. 54. Es sei die Gerade AC (Fig. 52) und außerhalb derselben ein Punct C gegeben.

Fig. 52.



Nimmt man ein rechtwinkliges Dreieck DEF und einen Faden von der Länge der Kathete DE, dessen ein Ende in E, das andere in C befestiget wird, läßt dann das Winkelbrett mit der Kathete DF längs eines an die AB angelegten Lineals RS fortgleiten; so beschreibt ein Zeichenstift M, welchen man längs der Kathete DE so fortbewegt, daß der Faden immer gespannt bleibt, ein Stück einer nicht geschlossenen krummen Linie, welche Parabel heißt. Wendet man, wenn der Stift in C angelangt ist, das Dreieck DEF so um, daß die Kathete DF in die Richtung GB kommt, und verfährt dann wie früher, so erhält man den unteren Ast ON der Parabel, welcher mit dem oberen OM congruent ist.

Die Gerade AB heißt die Leitlinie, der Punct C der Brennpunct der Parabel.

Die Gerade OX, welche durch den Brennpunct geht und auf der Leitlinie senkrecht steht, heißt die Axe, und der Punct O, in welchem diese von der Parabel geschnitten wird, der Scheitel der Parabel.

Die Gerade CM, welche von dem Brennpuncte zu irgend einem Puncte der Parabel gezogen wird, heißt der Leitstrahl dieses Punctes.

Aus der Erklärung der Parabel geht hervor, daß die Fadenlänge CM stets dem abgewickelten Stücke DM der Kathete DE gleich ist. Daraus folgt:

1. Jeder Punct einer Parabel ist von dem Brennpuncte und von der Leitlinie gleich weit entfernt.
2. Der Scheitel einer Parabel ist von dem Brennpuncte und von der Leitlinie derselben gleich weit entfernt.

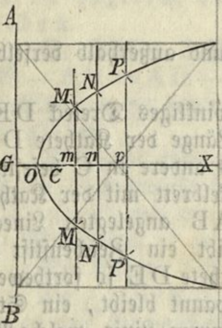
Die Gerade PQ, welche im Brennpuncte der Parabel auf die Axe senkrecht steht, heißt der Parameter der Parabel.

Da P ein Punct der Parabel ist, so ist seine Entfernung CP vom Brennpuncte der Entfernung von der Leitlinie, d. i. der Geraden CG gleich, also CG = CP; d. h. die Entfernung des Brennpunctes einer Parabel von der Leitlinie ist dem halben Parameter derselben gleich.

§. 55. Eine Parabel zu construiren, wenn die Leitlinie und der Brennpunct derselben gegeben sind.

Es sei (Fig. 53) AB die gegebene Leitlinie und C der gegebene Brennpunct. Zieht man CG ⊥ AB, so ist der Halbirungspunct O dieser Senkrechten der Scheitel, und die über C hinaus verlängerte Gerade OX die Axe der Parabel.

Fig. 53.



Errichtet man nun in einem beliebigen Puncte m der Axe auf diese eine Senkrechte und durchschneidet sie aus C mit Bogen, deren Halbmesser Gm ist, so sind die Durchschnittspuncte M, da sie vom Brennpuncte und von der Leitlinie gleich weit abstehen, zwei Puncte der Parabel. Eben so bestimmt der Punct n zwei Puncte N, der Punct p zwei Puncte P der Parabel. Auf diese Weise lassen sich beliebig viele Puncte der Parabel bestimmen. Verbindet man diese Puncte durch eine stetig gekrümmte Linie, so erhält man die verlangte Parabel, und zwar um so genauer, je mehrere Puncte derselben bestimmt wurden.

V. Verschiedene krumme Linien.

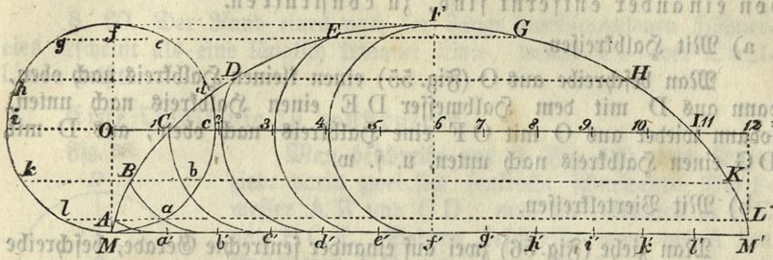
1. Die Cycloide.

§. 56. Wenn sich ein Kreis auf einer geraden Linie in derselben Ebene fortwälzt, so beschreibt dabei jeder Punct des Kreisumfanges eine krumme Linie, welche Cycloide oder Radlinie heißt, weil ein Punct in dem Umfange eines fortgewälzten Rades eine ähnliche Linie beschreibt. Die gegebene gerade Linie heißt die Grundlinie, der sich fortwälzende Kreis der Erzeugungskreis, und der Punct, welcher die Cycloide beschreibt, der beschreibende Punct der Cycloide.

Eine Cycloide zu construiren.

Es sei (Fig. 54) der aus O mit dem Halbmesser OM beschriebene Kreis der Erzeugungskreis und M der beschreibende Punct. Man ziehe durch M an den gegebenen Kreis eine Tangente MM', welche mit der Peripherie jenes Kreises gleiche Länge hat und die Grundlinie der Cycloide wird, theile den Umfang des Erzeugungskreises von M aus in beliebig viele, z. B. in zwölf gleiche Theile, und in eben so viele gleiche Theile auch die Grundlinie. Wird nun der Erzeugungskreis auf der Grundlinie fortgewälzt, so werden die Theilungspuncte a, b, c, . . . der Peripherie nach und nach mit den entsprechenden Theilungspuncten a', b', c' . . . der Grundlinie zusammen fallen; der Mittelpunct O wird während dieser Bewegung in einer zur Grundlinie parallelen Geraden

Fig. 54.



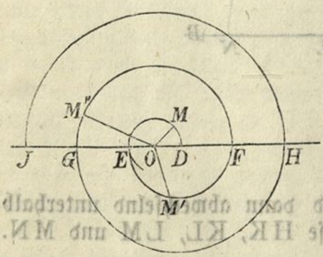
fortrücken und beziehungsweise in 1, 2, 3, ... eintreffen, wenn diese Puncte eben so weit von einander abstehen, als die Theilungspuncte der Grundlinie. Hat sich der Erzeugungskreis so weit vorwärts bewegt, daß der Punct a mit a' zusammenfällt, so wird sich indessen der Punct M so weit von der Grundlinie erhoben haben, daß er in eine durch a zur M'M parallele Gerade fallen wird; der Mittelpunct O aber wird bis zum Punct 1 vorgerückt sein; man erhält daher die neue Lage A des beschreibenden Punctes M, wenn man aus 1 mit dem Halbmesser des Erzeugungskreises den Bogen a'A beschreibt, welcher die durch a zur MM' gezogene Parallele in A schneidet. Fällt b mit b' zusammen, so erhebt sich M bis zu der durch b mit MM' gezogenen Parallelen, und der Punct O befindet sich in 2; beschreibt man daher aus 2 mit dem früheren Halbmesser den Bogen b'B, so gibt der Durchschnitt B mit jener Parallelen die neue Lage des Punctes M. Auf ähnliche Weise findet man auch die Puncte C, D, E, ..., in welche M nach und nach zu stehen kommt, und welche durch eine stetige Linie verbunden die Cycloide geben.

Es ist von selbst einleuchtend, daß der Punct M, nachdem er in M' angelangt sein wird, bei fortgesetzter Wälzung des Kreises eine neue Cycloide beschreiben wird, die mit der frühern congruent ist.

2. Die Spirallinie.

§. 57. Wenn sich eine Gerade OH (Fig. 55) von unbestimmter Länge um den Punct O herumdreht, und während der Drehung zugleich ein Punct M auf dieser Linie immer weiter fortrückt, so beschreibt dieser Punct eine mit immer größeren Windungen fortschreitende krumme Linie, welche Spiral- oder Schneckenlinie heißt.

Fig. 55.



Je zwei auf einander folgende Windungen können dabei entweder gleiche oder immer größere Entfernungen von einander haben.

§. 58. Eine Spirallinie, deren Windungen gleich weit von einander entfernt sind, zu construiren.

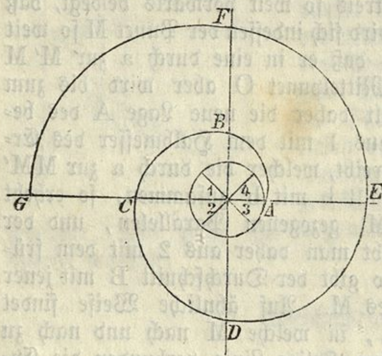
a) Mit Halbkreisen.

Man beschreibe aus O (Fig. 55) einen kleinen Halbkreis nach oben, dann aus D mit dem Halbmesser DE einen Halbkreis nach unten, sodann wieder aus O mit OF eine Halbkreis nach oben, aus D mit DG einen Halbkreis nach unten, u. s. w.

b) Mit Viertelkreisen.

Man ziehe (Fig. 56) zwei auf einander senkrechte Gerade, beschreibe aus ihrem Durchschnittspuncte einen kleinen Kreis und halbire dann die Quadranten durch zwei sich senkrecht schneidende Durchmesser, deren jeden man in vier gleiche Theile theilt. Beschreibt man nun aus 1 den Bogen AB, dann aus 2 den Bogen BC, aus 3 und 4 die Bogen CD und DE u. s. w., so erhält man die verlangte Spirale.

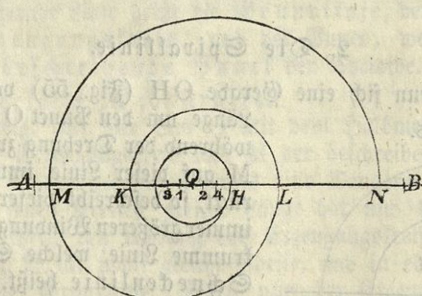
Fig. 56.



§. 59. Eine Spirallinie, in welcher die auf einander folgenden Windungen eine immer größere Entfernung von einander haben, zu construiren.

Man trage auf einer Geraden AB (Fig. 57) von einem Puncte O aus zu beiden Seiten mehrere, z. B. drei gleiche Theile auf, be-

Fig. 57.



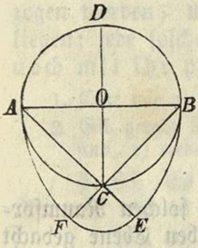
schreibe aus O mit OH einen Kreis, und dann abwechselnd unterhalb und oberhalb aus 1, 2, 3, 4 die Halbkreise HK, KL, LM und MN.

3. Die Ovallinie.

§. 60. Der Rand eines nach der Länge durchschnittenen Hühnereies erscheint als eine länglich krumme Linie, welche Ei- oder Ovallinie heißt.

Eine Ovallinie zu construiren.

Fig. 58.



Man beschreibe aus O (Fig. 58) einen Kreis, ziehe darin zwei sich senkrecht schneidende Durchmesser A B und C D, und die Geraden A C E und B C F. Sodann beschreibe man aus A den Kreisbogen BE, aus B den Kreisbogen AF, und aus C den Kreisbogen EF.

Zweiter Abschnitt.

Die Stereometrie.

§. 61. Die Stereometrie ist die Lehre von solchen Raumformen, deren Puncte und Linien nicht alle auf derselben Ebene gedacht werden können. Solche Raumformen entstehen, wenn man z. B. von einem Puncte außerhalb einer Ebene zu dieser verschiedene gerade Linien zieht, oder wenn man sich zwei Ebenen gegen einander gestellt denkt; solche Raumgrößen sind alle Körper, da dieselben, wenn man sie auf irgend einer Ebene liegend denkt, nicht mit allen ihren Grenzen in diese Ebene fallen, sondern noch einen Raum außerhalb derselben einnehmen

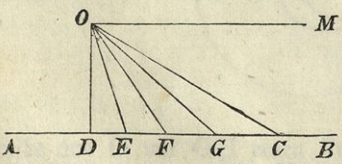
Da bei der Darstellung der stereometrischen Raumformen auf einer Ebene die Linien und Winkel meistens nicht in ihrer wahren Größe und Lage verzeichnet werden können, so müssen hier die Anfänger vor Allem durch oftmalige Betrachtung solcher Zeichnungen und durch geeignete Versinnlichungsmittel ihre Vorstellungskraft so weit üben und schärfen, daß sie im Stande werden, aus der Zeichnung sogleich die wirkliche Lage und Größe der Linien und Winkel zu ersehen. Zur Versinnlichung der geraden Linie dient ein Draht, ein dünnes Stäbchen oder ein gespannter Faden; die Anschauung der Ebene kann durch ein Stück Pappendeckel, durch ein ebenes Brettchen, durch die Schultafel, den Fußboden oder eine Wand; die Anschauung der Körper endlich durch Modelle aus Holz, Pappe oder Draht vermittelt werden.

I. Gerade Linien und Ebenen im Raume.

1. Lage der Geraden gegen einander.

§. 62. Wenn man durch einen Punct O (Fig. 59) des Raumes und eine gegebene Gerade AB eine Ebene legt, und in dieser um

Fig. 59.



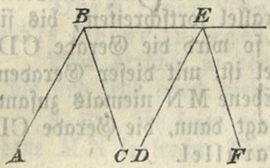
den Punct O herum eine unbegrenzte Gerade OC dreht, so wird diese in jeder neuen Lage die gegebene Gerade AB in einem andern Puncte durchschneiden. Das Stück der sich drehenden Geraden zwischen O und der Geraden AB wird bald größer bald kleiner werden. Am kürzesten wird die Senkrechte OD, jede Schiefe OE, OF, ... aber wird um so länger und trifft die AB in einer um so größern Entfernung von D, je größer der Winkel ist, den sie mit der Senkrechten bildet. Kommt endlich die unbegrenzte Gerade während ihrer Umdrehung in die Lage OM, wo der Winkel DOM ein rechter ist, so wird sie die Gerade AB gar nicht mehr treffen, sondern mit ihr in gleicher Richtung fortlaufen, d. i. OM wird mit AB parallel sein.

Durch den Punct O können auch unzählig viele gerade Linien gezogen werden, welche nicht in der durch O und AB gelegenen Ebene liegen; jede solche Gerade wird weder die Gerade AB schneiden, noch mit ihr parallel sein.

1. Eine wie vielfache Lage können zwei Gerade im Raume gegen einander haben?
2. Gib gerade Linien im Schulzimmer an, welche a) sich schneiden, b) parallel sind, c) weder parallel sind noch sich schneiden.

§. 63. Es seien ABC und DEF (Fig. 60) zwei Winkel im Raume, und es sei AB || DE und BC || EF. Denkt man sich den Winkel ABC so fortbewegt, daß der Scheitel B in der Geraden BE fortrückt, und die Schenkel in jeder neuen Lage mit der ursprünglichen parallel bleiben, so wird, wenn B in dem Puncte E anlangt, nothwendig der Schenkel AB mit DE und BC mit EF zusammenfallen, und daher ABC den Winkel DEF vollkommen decken.

Fig. 60.



Der in der ebenen Geometrie abgeleitete Satz:

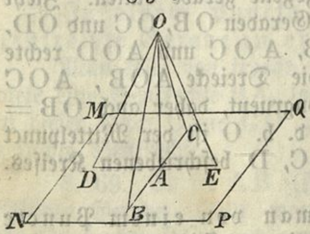
Winkel, deren Schenkel nach derselben Seite parallel liegen, sind einander gleich,

hat daher auch für Winkel im Raume seine Richtigkeit.

2. Lage der Geraden gegen eine Ebene.

§. 64. Es sei MNPQ (Fig. 61) irgend eine Ebene und O ein Punct außerhalb dieser Ebene. Von dem Puncte O können auf die Ebene MP unzählig viele, längere und kürzere gerade Linien gezogen werden, deren jede diese Ebene in einem Puncte schneidet, den man den Fußpunct der Linie nennt. Es sei unter diesen Linien OA die kürzeste. Zieht man durch ihren Fußpunct A in der gegebenen Ebene beliebige gerade Linien BC, DE, so muß dann OA zugleich auch die kürzeste Linie sein, welche von O zu jeder dieser Geraden gezogen werden kann, d. h. OA muß auf allen diesen Geraden senkrecht stehen. Man nennt darum die Gerade OA auf der Ebene MP selbst senkrecht, während jede andere von O aus gezogene Gerade, als OB, OC,.. , auf jener Ebene schief aufsteht.

Fig. 61.



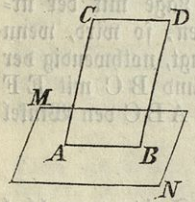
Eine Gerade steht demnach auf einer Ebene senkrecht, wenn sie auf allen Geraden, welche durch ihren Fußpunct in dieser Ebene gezogen werden, senkrecht ist.

In der vorangehenden Figur muß man sich sowohl unter dem Winkel OAB als auch unter dem Winkel OAC einen rechten vorstellen, wiewohl der erstere als ein stumpfer, der letztere als ein spitzer Winkel erscheint. Um diese Zeichnung besser aufzufassen und überhaupt die Vorstellungskraft zu üben, versinnliche man die Ebene MNPQ durch ein Brettchen, ziehe darauf die Geraden BC und DE, stelle ferner die Senkrechte AO durch einen hölzernen Stift und die schiefen Geraden BO, CO, DO, EO durch gespannte Fäden dar, und bringe dieses Modell in eine solche Stellung gegen das Auge, daß die Winkel daran in der nämlichen Größe erscheinen, wie sie in der Zeichnung vorkommen.

Da die Senkrechte die kürzeste Linie ist, die man von einem Puncte zu einer Ebene ziehen kann, so drückt dieselbe den Abstand des Punctes von der Ebene aus.

§. 65. Es stelle MN (Fig. 62) eine Ebene, AB eine in dieser Ebene liegende, und AC eine aus dieser Ebene heraustretende gerade Linie vor. Läßt man nun die AB aus der Ebene heraus längs der AC parallel fortschreiten, bis sie in die Lage CD kommt; so wird die Gerade CD, da sie mit der AB parallel ist, mit dieser Geraden, und daher auch mit der Ebene MN niemals zusammentreffen können. Man sagt dann, die Gerade CD sei mit der Ebene MN parallel.

Fig. 62.

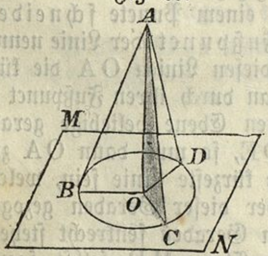


Eine Gerade ist daher mit einer Ebene parallel, wenn sie mit einer in dieser Ebene befindlichen Geraden parallel ist.

1. Eine wie vielfache Lage kann eine gerade Linie gegen eine Ebene haben?
2. Gib gerade Linien im Schulzimmer an, welche a) gegen eine Ebene geneigt sind, b) mit einer Ebene parallel laufen.
3. Wie kann durch einen Punct außerhalb einer Ebene zu dieser eine parallele Gerade gezogen werden?

§. 66. Es sei die Gerade AO (Fig. 63) auf der Ebene MN senkrecht; ferner seien AB, AC und AD drei gleich lange zu der Ebene MN schief gezogene gerade Linien. Zieht man nun die Geraden OB, OC und OD, so sind AOB, AOC und AOD rechte Winkel und die Dreiecke AOB, AOC und AOD congruent, daher auch OB = OC = OD, d. h. O ist der Mittelpunct des durch B, C, D beschriebenen Kreises. Daraus folgt:

Fig. 63.



Wenn man von einem Puncte außerhalb einer Ebene zu dieser eine Senkrechte, und zugleich drei gleich lange schiefe gerade Linien zieht, so fällt der Fußpunct der Senkrechten in den Mittelpunct des Kreises,

welcher durch die drei Fußpuncte der schiefen Geraden beschrieben wird.

Auf eine Ebene von einem außerhalb derselben liegenden Puncte eine senkrechte Gerade zu fällen.

Man ziehe von dem gegebenen Puncte zu der Ebene (mittelst einer gespannten Schnur) drei gleich lange gerade Linien, und suche den Mittelpunct des Kreises, welcher durch ihre Fußpuncte geht; die Gerade, welche diesen Mittelpunct mit dem gegebenen Puncte verbindet, ist die gesuchte Senkrechte.

§. 67. Die nähere Betrachtung der vorhergehenden Figur führt noch zu folgendem Ergebnisse:

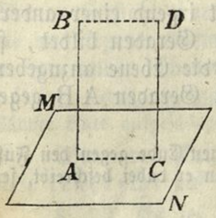
Wenn der Winkel AOB ein rechter ist und man dreht die Gerade OB so um den Punct O herum, daß sie in jeder Lage auf der AO senkrecht bleibt, so beschreibt diese während dieser Drehung eine Ebene, welche auf der AO im Puncte O senkrecht steht. Eine solche Ebene ist schon durch zwei Lagen der sich drehenden Geraden, z. B. durch die auf AO senkrechten Geraden OB und OC, vollkommen bestimmt.

Durch einen Punct einer Geraden auf diese eine senkrechte Ebene zu legen.

Man errichte in dem gegebenen Puncte auf die Gerade zwei Senkrechte und lege durch diese eine Ebene.

§. 68. Es seien die Geraden AB und CD (Fig. 64) auf der Ebene MN senkrecht. Wenn nun die AB längs der AC parallel fortschreitet, so wird während dieser Bewegung die Lage der AB gegen die Ebene nicht geändert; es steht daher AB in jeder Lage auf der Ebene senkrecht, und fällt daher, wenn der Punct A in C angelangt, mit der Senkrechten CD zusammen; mithin ist CD || AB. Daraus folgt:

Fig. 64.



a) Stehen auf einer Ebene zwei Gerade senkrecht, so sind sie parallel.

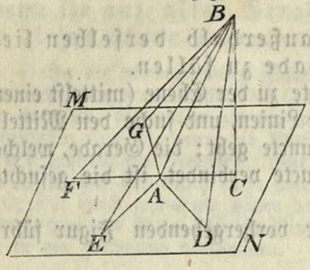
b) Ist eine Gerade auf einer Ebene senkrecht, so steht auch jede mit ihr parallele Gerade auf derselben Ebene senkrecht.

In einem Puncte C einer Ebene MN auf diese eine senkrechte Gerade zu errichten.

Man fälle von irgend einem Puncte B außerhalb der Ebene auf diese eine Senkrechte BA, lege durch C und BA eine Ebene, und ziehe in dieser durch C die CD parallel mit AB; die Gerade CD ist die gesuchte Senkrechte.

§. 69. Es sei AB (Fig. 65) eine auf der Ebene MN schief stehende Gerade. Fällt man von ihrem Endpuncte B auf die Ebene die Senkrechte BC, und verbindet die Fußpuncte A und C durch eine Gerade AC, so ist diese die Projection der schiefen Geraden AB auf die Ebene MN. Die Projection einer Geraden ist immer kleiner als die Gerade selbst.

Fig. 65.



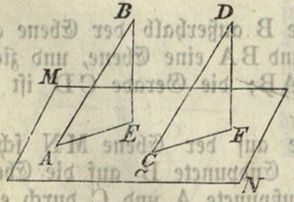
Um die Winkel mit einander zu vergleichen, welche eine schiefe Gerade AB mit andern durch ihren Fußpunct in der Ebene MN gezogenen geraden Linien bildet, drehe man die Projectionslinie AC innerhalb dieser Ebene um den Punct A, etwa bis AD. Zieht man die Gerade BD, so ist diese länger als die Senkrechte BC; die beiden Winkel BAD und BAC haben demnach gleiche Schenkel, aber ungleiche Schenkelweite, daher sind sie ungleich, und zwar ist der Winkel BAD, bei welchem die Endpuncte der Schenkel weiter von einander abstehen, größer als der Winkel BAC. Wird die Linie AC noch weiter bis AE gedreht, so wird die Gerade BE > BD; es ist also die Schenkelweite des Winkels BAE größer als jene des Winkels BAD, während beide Winkel gleich lange Schenkel haben, daher der Winkel BAE > BAD. So nimmt bei fortgesetzter Drehung der Linie AC auch der Winkel, welchen diese Linie mit der schiefen Geraden AB bildet, allmälig zu, bis er nach einer halben Umdrehung seine höchste Größe erreicht hat, worauf er dann bei weiterer Drehung wieder allmälig abnimmt, bis endlich die AC in die ursprüngliche Lage gekommen ist, und daselbst mit der AB den kleinsten Winkel bildet.

Da der Winkel, den eine Gerade mit ihrer Projection in einer Ebene bildet, kleiner ist als der Winkel, den sie mit irgend einer andern in derselben Ebene durch den Fußpunct gezogenen Geraden bildet, so dient er dazu, die Neigung der Geraden gegen die Ebene anzugeben. BAC heißt der Neigungswinkel der schiefen Geraden AB gegen die Ebene MN.

Wenn man einen Stab in schiefer Lage mit dem einen Ende gegen den Fußboden hält, und ihn dann fallen läßt, so ist der Winkel, den er dabei beschreibt, sein Neigungswinkel gegen den Fußboden.

§. 70. Es seien (Fig. 66) AB und CD zwei paralle gerade Linien, welche auf der Ebene MN schief stehen. Fällt man von B und D auf diese Ebene die Senkrechten BE und DF, und zieht die Geraden AE und CF, so sind BAE und DCF die Neigungswinkel der beiden schiefen Geraden gegen die Ebene. Da nun in den Dreiecken ADE und CDF die Winkel E und F als rechte, und die Winkel B und D wegen ihrer parallelen Schenkel gleich sind, so müssen auch die dritten Winkel BAE und DCF gleich sein. Daraus folgt:

Fig. 66.

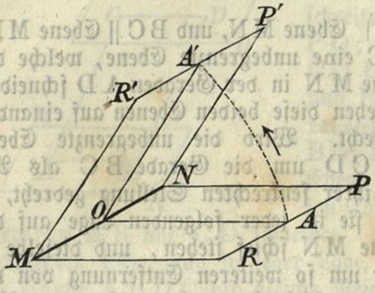


Zwei parallele gerade Linien sind gegen dieselbe Ebene gleich geneigt.

3. Lage der Ebenen gegen einander.

§. 71. Wird die halbbegrenzte Ebene MNPR (Fig. 67) um ihre Grundlinie MN gedreht, bis sie in die Stellung MN′P′R′ kommt, so weichen die Ebenen MNPR und MNP′R′ in ihren Stellungen um so mehr von einander ab, je größer die Drehung ist. Die Abweichung der Stellungen zweier Ebenen, die sich in einer Geraden schneiden, nennt man, zur Unterscheidung von den Linienwinkeln, einen **Flächenwinkel** oder **Keil**; die beiden Ebenen heißen die **Schenkelflächen** oder **Seiten**, die gerade Durchschnittslinie die **Scheitellinie** oder **Kante** des Keils.

Fig. 67.



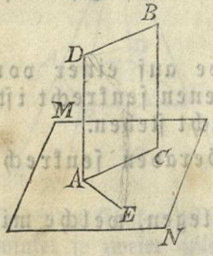
Die Größe eines Flächenwinkels wird durch einen Linienwinkel gemessen. Ist nämlich die Gerade OA auf MN senkrecht, so beschreibt dieselbe während der Drehung der Schenkelfläche MNPR, bis diese in die Stellung MNP′R′ kommt, einen Linienwinkel AOA′, welcher sich für jede Lage des Punctes O in der Durchschnittslinie MN gleich bleibt und daher die Größe der Drehung der Schenkelfläche unzweideutig bestimmt. Dieser Winkel AOA′ heißt der **Neigungswinkel** der beiden Ebenen MNPR und MNP′R′. Unter dem **Neigungswinkel** zweier Ebenen versteht man also den Winkel, welchen zwei gerade Linien bilden, die aus irgend einem Puncte der Durchschnittslinie senkrecht auf dieselbe in den beiden Ebenen gezogen werden.

Der Neigungswinkel zweier Ebenen kann durch die oberen oder die unteren Ränder eines aufgeschlagenen Buches anschaulich gemacht werden.

Wenn der Neigungswinkel zweier Ebenen ein rechter ist, so stehen diese **senkrecht** auf einander; sonst **schief**.

§. 72. Es sei (Fig. 68) AD $\perp$ Ebene MN, und man lege durch AD eine Ebene ACBD, welche die Ebene MN in der Geraden AC schneidet. Um die gegenseitige Lage dieser beiden Ebenen zu ermitteln, wird man ihren Neigungswinkel suchen, d. i. in einem Puncte der Durchschnittslinie AC auf dieselbe zwei Senkrechte errichten, deren jede in eine der beiden Ebenen hineinfällt. Auf AC steht nun im Puncte A bereits die AD in der Ebene ACBD senkrecht; errichtet man darauf noch in der Ebene MN die Senkrechte AE, so ist DAE der Neigungswinkel der zwei Ebenen ACBD und MN. Dieser Winkel ist aber ein rechter, weil AD auf der Ebene MN, folglich auch auf der Geraden AE senkrecht ist; die Ebene ACBD steht somit senkrecht auf der Ebene MN.

Fig. 68.

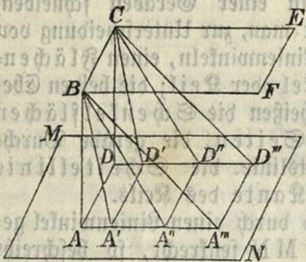


Wenn daher eine Gerade auf einer Ebene senkrecht ist, so muß auch jede dadurch gelegte Ebene auf jener Ebene senkrecht stehen.

Wie kann durch einen Punct eine Ebene gelegt werden, welche auf einer gegebenen Ebene senkrecht steht?

§. 73. Es sei (Fig. 69) AB $\perp$ Ebene MN, und BC $\parallel$ Ebene MN. Legt man durch den Winkel ABC eine unbegrenzte Ebene, welche die Ebene MN in der Geraden AD schneidet, so stehen diese beiden Ebenen auf einander senkrecht. Wird die unbegrenzte Ebene ABCD um die Gerade BC als Axe aus ihrer senkrechten Stellung gedreht, so wird sie in jeder folgenden Lage auf der Ebene MN schief stehen, und dieselbe in einer um so weiteren Entfernung von der AD durchschneiden, je größer der Neigungswinkel wird, den sie mit der senkrechten Ebene ABCD bildet. Kommt endlich die unbegrenzte Ebene während ihrer Drehung in die Lage BCEF, wo der Neigungswinkel ABF, welchen sie mit der Ebene ABCD bildet, ein rechter wird, so wird sie die Ebene MN gar nicht mehr schneiden, sondern mit ihr parallel sein.

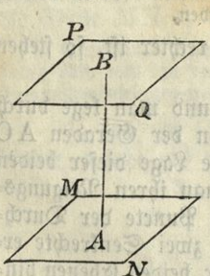
Fig. 69.



Zwei Ebenen sind parallel, wenn sie beliebig erweitert einander nie schneiden.

1. Eine wie vielfache Lage können zwei Ebenen gegen einander haben?
2. Nenne Ebenen im Schulzimmer, die a) sich schneiden, b) parallel sind?

Fig. 70.



§. 74. Es sei (Fig. 70) die Gerade AB $\perp$ Ebene MN. Wird die Ebene MN, während der Punct A längs der AB fortrückt, parallel fortbewegt, bis der Punct A in B, und die Ebene MN in die Lage PQ kommt; so wird die Ebene PQ mit der MN parallel sein, und die Gerade AB, da sie ihre Lage gegen die bewegte Ebene nicht ändert, auch auf der Ebene PQ senkrecht stehen.

Daraus folgt:

a) Wenn eine Gerade auf einer von zwei parallelen Ebenen senkrecht ist, so muß sie auch auf der andern senkrecht stehen.

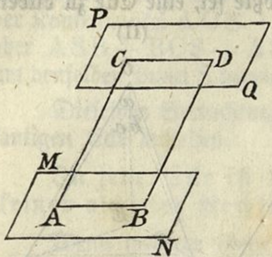
b) Wenn zwei Ebenen auf derselben Geraden senkrecht stehen, so müssen sie parallel sein.

Durch einen Punct B eine Ebene zu legen, welche mit einer gegebenen Ebene MN parallel ist.

Man fälle von B auf die Ebene MN die senkrechte Gerade BA, und lege durch B eine auf AB senkrechte Ebene (§. 66).

§. 75. Es sei (Fig. 71) AB irgend eine Gerade in der Ebene MN, und AC eine aus dieser Ebene heraustretende gerade Linie. Läßt man, während sich der Punct A in der AC fortbewegt, die Ebene MN und die darin befindliche Gerade AB parallel fortschreiten, bis die Ebene MN in die Lage PQ, und die Gerade AB in die Lage CD kommt, so beschreiben die Puncte A und B während dieser Bewegung die parallelen und gleich großen Linien AC und BD; die Gerade AB aber beschreibt eine Ebene ABDC, welche die beiden parallelen Ebenen MN und PQ in den parallelen Geraden AB und CD schneidet. Die Ebene MN hat während ihrer parallelen Bewegung in jeder Lage, also auch in der Lage PQ, gegen die Ebene ABDC die gleiche Neigung.

Fig. 71.



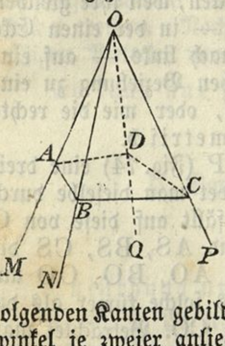
Man hat daher folgende Sätze:

a) Parallele Gerade zwischen parallelen Ebenen sind einander gleich.
b) Wenn zwei parallele Ebenen von einer dritten geschnitten werden, so sind Durchschnittslinien parallel.
c) Zwei parallele Ebenen sind gegen dieselbe dritte Ebene gleich geneigt.
d) Steht von zwei parallelen Ebenen die eine auf einer dritten Ebene senkrecht, so steht auch die andere auf derselben senkrecht.

4. Körperliche Ecken.

§. 76. Wird eine halbbegrenzte Gerade OM (Fig. 72) um ihren Grenzpunct O so bewegt, daß sie nach und nach durch alle Umfangspuncte des Vieleckes ABCDE geht, so beschreibt sie die nach einer Seite unbegrenzten Ebenen MON, NOP, POQ..., welche alle sich in dem gemeinschaftlichen Puncte O durchschneiden. Der zwischen diesen Ebenen liegende, nach einer Seite unbegrenzte Raum wird eine körperliche Ecke oder blos Ecke genannt.

Fig. 72.

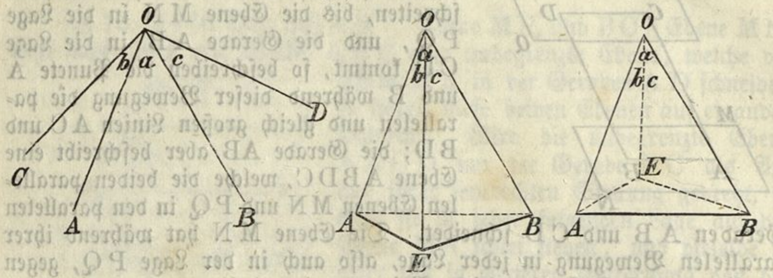


Den gemeinschaftlichen Durchschnittspunct O nennt man die Spitze oder den Scheitel, die Durchschnittslinien OM, ON, OP.... je zweier Ebenen die Kanten, die ebenen Winkel MON, NOP..., die von je zwei auf einander folgenden Kanten gebildet werden, die Kantenwinkel, und die Neigungswinkel je zweier anliegender Ebenen die Flächenwinkel der Ecke.

Zur Entstehung einer Ecke sind wenigstens drei Ebenen erforderlich. Die Anzahl der Kanten ist immer gleich der Anzahl der Ebenen, welche in einer Ecke zusammentreffen. Man unterscheidet nach der Anzahl der Kanten dreikantige, vierkantige... Ecken.

§. 77. Um aus drei gegebenen Linienwinkeln AOB = a, AOC = b und BOD = c (Fig. 73), von denen a der größte sei, eine Ecke zu bilden,

Fig. 73. (I) (II)

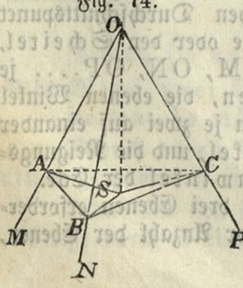


wird man die Ebenen AOC und BOD um die Geraden OA und OB auf derselben Seite der Ebene AOB so lange gegen einander drehen, bis die Geraden OC und OD in einander fallen. Würden diese Geraden gar nicht, oder würden sie in der Ebene AOB zusammenfallen, so entstünde keine Ecke. Damit eine Ecke entstehe, müssen die Geraden OC und OD außerhalb der Ebene AOB in der Geraden OE zusammenfallen, was nur möglich ist, wenn $b + c > a$ ist. Es ist aber dann, da a der größte unter den gegebenen Winkeln ist, auch $a + b > c$ und $a + c > b$. Daraus folgt:

In jeder dreikantigen Ecke ist die Summe je zweier Kantenwinkel größer als der dritte.

Zusatz. Die Drehung der Ebenen AOC und BOD um die Geraden OA und OB kann auf zweierlei Art geschehen, entweder auf der vorderen Seite der Ebene AOB (Fig. I), oder auf der hinteren (Fig. II). Die zwei Ecken, die dadurch entstehen, haben nach der Ordnung gleiche Kantenwinkel und gleiche Flächenwinkel, und dennoch können sie nicht so in einander gelegt werden, daß sie sich decken, weil ihre gleichen Bestandtheile im entgegengesetzten Sinne — in der einen Ecke von links nach rechts, in der andern von rechts nach links — auf einander folgen. Die beiden Ecken stehen in derselben Beziehung zu einander, wie ein Gegenstand zu seinem Spiegelbild, oder wie die rechte Hand zur linken. Zwei solche Ecken heißen symmetrisch.

Fig. 74.



§. 78. Es sei OMNP (Fig. 74) eine dreikantige Ecke. Durchschneidet man dieselbe durch die Ebene ABC, und fällt auf diese von O die Senkrechte OS, so sind AS, BS, CS die Projectionen der Geraden AO, BO, CO auf der Ebene ABC, und als solche kürzer als die schiefen Geraden AO, BO, CO. Betrachtet man nun die Winkel AOB und ASB, so haben diese die gleiche Schenkelweite AB, aber die Schenkel AO und BO sind länger als jene AS und BS.

Wenn aber zwei Winkel bei gleicher Schenkelweite ungleiche Schenkel haben, so ist derjenige von ihnen der kleinere, dessen Schenkel länger sind; es ist somit der Winkel $AOB < ASB$. Aus gleichem Grunde ist auch $BOC < BSC$ und $AOC < ASC$. Es ist also die Summe der Kantenwinkel $AOB + BOC + AOC < ASB + BSC + ASC$; aber $ASB + BCS + ASC = 4R$, weil diese Winkel in einer Ebene um denselben Punct S herumliegen; daher $AOB + BOC + AOC < 4R$.

Dieselben Betrachtungen lassen sich auch an einer vier- oder mehrkantigen Ecke anstellen.

In jeder Ecke ist daher die Summe aller Kantenwinkel kleiner als vier Rechte.

Wenn mehrere ebene Winkel zusammen 360^0 oder mehr als 360^0 betragen, so können sie keine körperliche Ecke bilden.

§. 79. Besonders merkwürdig sind die regelmäßigen Ecken, d. i. solche Ecken, an denen jeder Kantenwinkel dem Winkel eines regelmäßigen Vieleckes von bestimmter Seitenanzahl gleich ist.

Der Winkel eines gleichseitigen Dreieckes ist 60^0. Drei solche Winkel geben 180^0, und bilden daher eine Ecke; vier solche Winkel betragen 240^0, und geben ebenfalls eine Ecke; so auch fünf solche Winkel, deren Summe 300^0 ist. Sechs solche Winkel sind gleich 360^0; aus sechs oder noch mehreren derlei Winkeln kann daher keine Ecke gebildet werden. Wie viele regelmäßige Ecken sind demnach aus den Winkeln eines gleichseitigen Dreiecks möglich?

Der Winkel eines Quadrates ist 90^0. Drei derselben geben 270^0 zur Summe, und bilden eine Ecke; vier solche Winkel betragen schon 360^0.

In einem regelmäßigen Fünfecke ist jeder Winkel 108^0. Drei solche Winkel betragen 324^0, und geben eine Ecke; vier solche Winkel geben schon 432^0.

Der Winkel eines regelmäßigen Sechseckes ist 120^0. Da schon drei derselben 360^0 betragen, so kann von solchen Winkeln keine Ecke gebildet werden. Noch weniger ist dieses mit den Winkeln eines regelmäßigen Vieleckes von mehr als 6 Seiten möglich. Daraus folgt:

Es kann nur fünf regelmäßige Ecken geben.

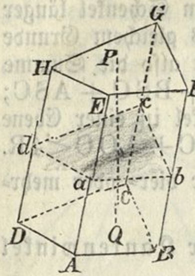
II. Von den verschiedenen Körperformen.

1. Prismen.

Entstehung und Erklärungen.

§. 80. a) Es sei ABCD (Fig. 75) irgend ein Vieleck, und AE eine aus der Ebene dieses Vieleckes heraustretende gerade Linie. Wenn sich diese Gerade parallel fortbewegt, während der Punct A nach und

Fig. 75.



nach durch alle Puncte in dem Umfange des gegebenen Vieleckes fortrückt, so beschreibt dabei sowohl der Punct E als auch jeder andere Punct a der sich bewegenden Geraden AE den Umfang eines mit ABCD parallelen und congruenten Vieleckes; die Gerade AE selbst aber beschreibt die Parallelogramme ABFE, BCGF... Wird nun durch den Umfang EFGH eine Ebene gelegt, so erhält man einen Körper ABCDEFGH, welcher von zwei congruenten und parallel gestellten Vielecken, und von so vielen Parallelogrammen begrenzt wird, als eines der Vielecke Seiten hat. Ein solcher Körper heißt ein **Prisma** (Ecksäule).

b) Ein Prisma kann man sich auch dadurch entstanden denken, daß sich ein Vieleck ABCD längs der Geraden AE so fortbewegt, daß alle seine Lagen parallel sind.

Hält man z. B. ein Stück Papier parallel zu einer Hinterfläche gegen die Sonne, so wird der auf der Hinterfläche abgebildete Schatten mit der vorgehaltenen Papierfläche congruent, und der zwischen diesen beiden Flächen enthaltene unbeleuchtete Raum wird ein Prisma sein.

Suche verschiedene Gegenstände auf, welche die Form eines Prisma haben.

§. 81. Die beiden congruenten und parallelen Vielecke ABCD und EFGH heißen die **Grundflächen**, die durch ihre Seiten gehenden Parallelogramme die **Seitenflächen** des Prisma.

Die Durchschnittslinie je zweier Grenzebenen wird eine **Kante** genannt. Die Durchschnittslinien je zweier auf einander folgenden Seitenflächen, wie AE, BF..., nennt man insbesondere die **Seitenkanten**.

Alle Seitenkanten eines Prisma sind unter einander gleich und parallel.

Eine Senkrechte PQ von einer Grundfläche auf die andere heißt die **Höhe** des Prisma.

Diese und alle folgenden Erklärungen sind an geeigneten Modellen zur klaren Anschauung zu bringen. Es sind dabei an jedem eckigen Körper die Grundflächen, die Seitenflächen und die Kanten nach ihrer Anzahl, Lage und Größe, und überdies die Ecken in Betrachtung zu ziehen.

Arten der Prismen.

§. 82. Nach der **Anzahl der Seitenkanten** unterscheidet man **dreiseitige**, **vierseitige** und **mehrseitige** Prismen.

Mit Rücksicht auf die **Lage der Seitenkanten gegen die Grundfläche** heißt ein Prisma **senkrecht** (gerade) oder **schief**, je nachdem die Seitenkanten auf der Grundfläche senkrecht oder schief aufliegen.

In einem senkrechten Prisma sind die Seitenflächen Rechtecke, und jede Seitenkante ist der Höhe des Prisma gleich.

Fig. 76 zeigt ein senkrechtes fünfseitiges, Fig. 77 ein schiefes dreiseitiges Prisma.

Fig. 76.

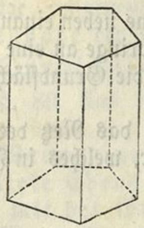


Fig. 77.

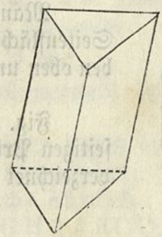
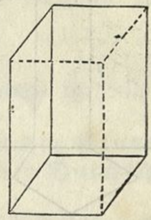


Fig. 78.



§. 83. Ein Prisma, dessen Grundflächen Parallelogramme sind, heißt ein Parallelepiped (Fig. 78). Dasselbe kann, wie jedes andere Prisma, senkrecht oder schief sein. Ein Parallelepiped wird von sechs Parallelogrammen eingeschlossen.

Ein senkrechtes Prisma, dessen Grundflächen Rechtecke sind, heißt ein rechtwinkliges Parallelepiped. Es wird von sechs Rechtecken eingeschlossen.

Ein rechtwinkliges Parallelepiped, dessen Kanten gleich sind, heißt ein Würfel oder Cubus. Es wird von sechs Quadraten begrenzt.

Durchschnitt und Netz eines Prisma.

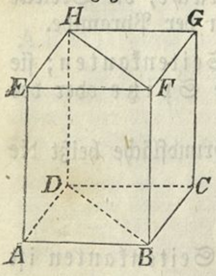
§. 84. Aus der Entstehungsweise des Prisma (§. 80, b) geht hervor:

Wenn ein Prisma durch eine mit der Grundfläche parallele Ebene geschnitten wird, so ist die Durchschnittsfigur mit der Grundfläche congruent.

In was für Körper zerfällt dadurch das geschnittene Prisma?

Wenn man durch zwei gegenüberstehende Kanten BF und DH (Fig. 79) eines Prisma eine Ebene legt, so ist der Durchschnitt BFHD ein Parallelogramm, und heißt ein Diagonalschnitt des Prisma.

Fig. 79.

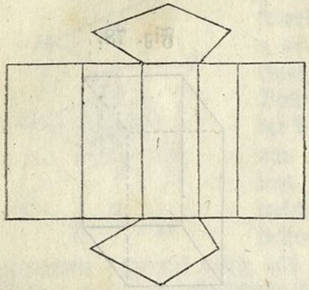


Wie sind die dreiseitigen Prismen beschaffen, in welche ein Parallelepiped durch den Diagonalschnitt getheilt wird?

§. 85. Wenn man die Grenzflächen eines Körpers in einer Ebene zusammenhängend darstellt, so daß sie ausgeschnitten und gehörig zusammengefügt jenen Körper geben, so heißt eine solche Zeichnung das Netz eines Körpers.

Die Netze der Körper sind besonders bei der Verfertigung der Modelle von Wichtigkeit, und es wird Anfängern gerathen, nicht nur solche Netze zu entwerfen, sondern mittelst derselben auch die Körper selbst zusammen zu setzen.

Fig. 80.



Das Netz eines Prisma zu construiren.

Man verzeichne neben einander die Seitenflächen und bringe an eine derselben oben und unten die Grundflächen an.

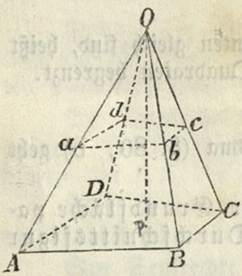
Fig. 80 stellt das Netz des fünfseitigen Prisma vor, welches in Fig. 76 verzeichnet wurde.

2. Pyramiden.

Entstehung und Erklärungen.

§. 86. a) Wenn sich eine Gerade AO (Fig. 81) so fortbewegt, daß sie während ihrer Bewegung durch die auf einander folgenden Umfangspuncte des Vieleckes ABCD und stets auch durch den außerhalb der Ebene dieses Vieleckes gelegenen Punct O geht, so beschreibt dieselbe während dieser Bewegung die Dreiecke AOB, BOC, COD..., die alle in dem Puncte O zusammenstoßen, und mit dem gegebenen Vielecke ABCD einen Körper einschließen, welcher eine Pyramide (Spitzsäule) genannt wird.

Fig. 81.



b) Man kann sich eine Pyramide auch dadurch entstanden denken, daß sich ein Vieleck ABCD längs der Geraden AO mit sich selbst parallel bewegt, und während dieser Bewegung sich ähnlich bleibend gleichförmig abnimmt, bis es endlich in einem Puncte O verschwindet.

Gib verschiedene Gegenstände an, welche die Form einer Pyramide haben.

§. 87. Das Vieleck ABCD ist die Grundfläche, die Dreiecke AOB, BOC, COD..., sind die Seitenflächen der Pyramide.

Die Geraden AO, BO, CO, ... heißen Seitenkanten; sie laufen in dem Puncte O zusammen, welcher die Spitze oder der Scheitel der Pyramide genannt wird.

Eine Senkrechte OP von der Spitze auf die Grundfläche heißt die Höhe der Pyramide.

Arten der Pyramiden.

§. 88. Mit Rücksicht auf die Anzahl der Seitenkanten ist eine Pyramide drei-, vier- oder mehrseitig.

Ist die Grundfläche einer Pyramide ein regelmäßiges Vieleck, und fällt der Fußpunct der Höhe in den Mittelpunct der Grundfläche, so heißt die Pyramide eine senkrechte (gerade), sonst eine schiefe.

Die Seitenflächen einer senkrechten Pyramide sind lauter gleichschenklige congruente Dreiecke. Die Höhe eines derselben heißt die Seitenhöhe der senkrechten Pyramide.

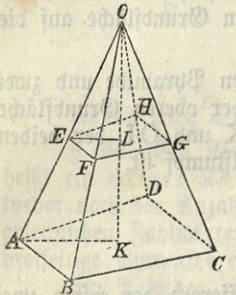
Durchschnitte und Netze.

§. 89. Aus der Entstehungsweise der Pyramide (§. 86, b) geht hervor:

Wenn eine Pyramide durch eine mit der Grundfläche parallele Ebene geschnitten wird, so ist die Durchschnittsfigur mit der Grundfläche ähnlich.

Wenn (Fig. 82) EFGH || ABCD, so ist EFGH ∼ ABCD.

Fig. 82.



Um das Verhältnis zwischen der Grund- und der Durchschnittsfläche zu bestimmen, fälle man von O auf die Grundfläche die Senkrechte OK, welche auch auf der Durchschnittsebene EFGH senkrecht stehen muß, und lege durch den Winkel AOK eine Ebene, welche die Grundfläche und die mit ihr parallele Durchschnittsfläche in den parallelen Geraden AK und EL schneidet. Die Flächen der ähnlichen Vielecke ABCD und EFGH verhalten sich wie die Quadrate von zwei gleichliegenden Seiten AB und EF. Da sich aber wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke ABO und EFO die Geraden AB und EF so verhalten wie AO und EO, und diese wieder wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke AKO und ELO den Geraden KO und LO proportionirt sind; so müssen sich die Flächen ABCD und EFGH auch so verhalten wie die Quadrate von KO und LO.

Daraus folgt:

Die Grundfläche einer Pyramide und die ihr parallele Durchschnittsfläche verhalten sich so zu einander, wie die Quadrate ihrer Entfernungen von der Spitze.

Wenn z. B. OK 2mal so groß ist als OL, so wird die Fläche ABCD 4mal so groß sein als EFGH.

Ist O ein leuchtender Punct, welcher einmal die Fläche ABCD, und ein anderes Mal die Fläche EFGH beleuchtet, so werden auf beide Flächen die nämliche Menge von Lichtstrahlen auffallen; da nun die Stärke der Erleuchtung einer Fläche von der Dichte der auf dieser Fläche anlangenden Lichtstrahlen abhängt und da sich bei ABCD dieselben Lichtstrahlen auf einer 4mal größeren Fläche ausbreiten, so wird diese Fläche 4mal schwächer erleuchtet sein als die Fläche EFGH. Ueberhaupt wird eine Fläche unter sonst gleichen Umständen 4mal, 9mal, 16mal schwächer beleuchtet, wenn man ihre Entfernung von dem leuchtenden Punct auf das 2-, 3-, 4fache der ursprünglichen Entfernung vergrößert.

§. 90. Durch einen mit der Grundfläche parallelen Durchschnitt wird die Pyramide in zwei Körper getheilt, eine kleine Pyramide OEFGH, welche der geschnittenen ähnlich ist, und einen zwischen zwei parallelen Ebenen enthaltenen Körper ABCDEFGH, welcher eine abgekürzte Pyramide oder ein Pyramidalstumpf heißt. Ist die geschnittene Pyramide senkrecht, so wird auch der Pyramidalstumpf ein senkrechter genannt.

Ein Pyramidalstumpf ist die Differenz zweier Pyramiden, deren Grundflächen die untere und obere Fläche der abgekürzten Pyramide sind, und deren gemeinschaftliche Spitze in dem Durchschnitte der verlängerten Seitenkanten des Stumpfes liegt.

Man kann sich eine abgekürzte Pyramide deutlich versinnlichen, wenn man z. B. ein Stück Papier gegen ein Kerzenlicht so hält, daß der Schatten auf eine mit diesem Blatte parallele Wand auffällt; der zwischen beiden parallelen ungleichen Flächen enthaltene nicht beleuchtete Raum ist ein Pyramidalstumpf.

Unter der Höhe eines Pyramidalstumpfes versteht man die Senkrechte LK, welche von einem Puncte der einen Grundfläche auf die andere gefällt wird.

§. 91. Wenn die Höhe LK einer abgekürzten Pyramide und zwei parallele Seiten AB und EF der unteren und der oberen Grundfläche bekannt sind, so lassen sich daraus die Höhen OK und OL der beiden Pyramiden finden, deren Differenz der Pyramidalstumpf ist.

Da $OK : OL = OA : OE$, und
$AB : EF = OA : OE$, ist auch

$$OK : OL = AB : EF.$$

Da sich nun in jeder Proportion die Differenz der ersten zwei Glieder zur Differenz der letzten zwei Glieder verhält wie das erste Glied zum dritten, oder wie das zweite zum vierten, so hat man

$$(OK - OL) : (AB - EF) = OK : AB,$$
$$(OK - OL) : (AB - EF) = OL : EF;$$

oder wegen $OK - OL = KL$

$$KL : (AB - EF) = OK : AB,$$
$$KL : (AB - EF) = OL : EF;$$

mithin

$$OK = \frac{KL}{AB - EF} \times AB \text{ und } OL = \frac{KL}{AB - EF} \times EF; \text{ d. h.:}$$

Dividirt man die Höhe des Pyramidalstumpfes durch die Differenz zweier paralleler Kanten der beiden Grundflächen und multiplicirt den Quotienten mit der größeren oder mit der kleineren jener Kanten, so gibt das Product bezüglich die Höhe der größeren oder kleineren der beiden Pyramiden, deren Differenz der Pyramidalstumpf ist.

Sind z. B. 6^{dm} und 4^{dm} zwei parallele Kanten der beiden Grundflächen, und 5^{dm} die Höhe des Pyramidalstumpfes, so ist

die Höhe der größeren Pyr. $= \frac{5}{2} \times 6 = 15^{dm}$,
" " " kleineren " $= \frac{5}{2} \times 4 = 10^{dm}$.

§. 92. Das Netz einer Pyramide zu construiren.

Man verzeichne die Seitendreiecke neben einander so, daß sie die Spitze gemeinschaftlich haben, lege dann unter eines dieser Dreiecke die Grundfläche an.

Fig. 83.

Um insbesondere das Netz einer senkrechten Pyramide zu construiren, beschreibe man (Fig. 83) mit einer Seitenkante aus O einen Kreisbogen, ziehe darin die Sehnen $AB = BC = CD$ gleich der Seite der Grundfläche und zeichne dann unter BC die Grundfläche BCE.

Construire das Netz

a) einer senkrechten fünfseitigen Pyramide,
b) eines senkrechten vierseitigen Pyramidalstumpfes.

3. Polyeder.

Arten und Eigenschaften.

§. 93. Ein Körper, welcher von lauter Ebenen begrenzt wird, heißt ein eckiger Körper oder ein Polyeder. Man benennt die Polyeder nach der Anzahl ihrer Grenzflächen, und zwar häufig mit den griechischen Zahlwörtern. Jedes Parallelepiped ist ein sechsflächiges, jede dreiseitige Pyramide ein vierflächiges Polyeder.

Ein Polyeder, welches von lauter congruenten und regelmäßigen Vielecken, von denen in jeder Ecke gleich viel zusammenstoßen, eingeschlossen ist, heißt regelmäßig, z. B. ein Würfel. Ein regelmäßiges Polyeder hat daher auch lauter regelmäßige Ecken.

Merkwürdig ist die Beziehung zwischen der Anzahl der Kanten, der Grenzflächen und der Ecken eines Polyeders.

Drückt man die Anzahl der Kanten durch k, die Anzahl der Grenzflächen durch f, und die Anzahl der Ecken durch e aus, und betrachtet zunächst ein vierseitiges Prisma. Dieses hat 4 Seitenkanten, und an den beiden Grundflächen 8 Kanten, zusammen 12 Kanten, somit $k = 12$; ferner ist die Anzahl der Grenzflächen $f = 6$, und die Anzahl der Ecken $e = 8$, daher $f + e = 14$. Es ist somit die Anzahl der Kanten um 2 kleiner als die Anzahl der Flächen und der Ecken zusammengenommen.

Betrachtet man eine 5seitige Pyramide, so hat man an derselben $k = 10$, $f = 6$, $e = 6$, daher $f + e = 12$; und somit wieder die Anzahl der Kanten um 2 kleiner als die Summe aus der Anzahl der Flächen und Ecken.

Da diese Beziehung stattfindet, was auch immer für ein eckiger Körper in Betrachtung gezogen wird, so folgt:

In jedem Polyeder ist die Anzahl der Kanten um 2 kleiner als die Anzahl der Grenzflächen und Ecken zusammengenommen.

Regelmäßige Polyeder.

§. 94. Da es nur fünf regelmäßige Ecken gibt (§. 79), so kann es auch nur fünf regelmäßige Polyeder geben.

Diese sind:

1. Das Tetraeder (Fig. 84); es wird von 4 gleichseitigen Dreiecken begrenzt, deren je drei eine Ecke bilden; es hat 4 solche Ecken und 6 Kanten.
2. Das Oktaeder (Fig. 85), welches von 8 gleichseitigen Dreiecken begrenzt wird, von denen je vier eine Ecke bilden; es hat 6 Ecken und 12 Kanten.

Fig. 84.

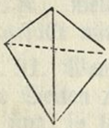


Fig. 85.

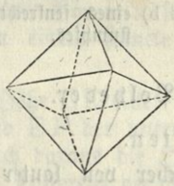
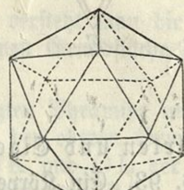


Fig. 86.



3. Das Ikosaeder (Fig. 86); es wird von 20 gleichseitigen Dreiecken begrenzt, hat 12 fünfseitige Ecken und 30 Kanten.
4. Das Hexaeder (Würfel, Cubus); es wird von 6 Quadraten begrenzt, deren je drei in einer Ecke zusammenstoßen, hat 8 solche Ecken und 12 Kanten (Fig. 87).

Fig. 87.

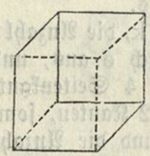
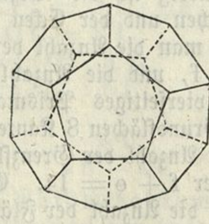


Fig. 88.



5. Das Dodekaeder (Fig. 88), welches von 12 regelmäßigen Fünfecken begrenzt wird; es hat 20 dreiseitige Ecken und 30 Kanten.

Netze der regelmäßigen Polyeder.

§. 95. 1. Um das Netz eines Tetraeders zu erhalten, verzeichne man (Fig. 89) ein gleichseitiges Dreieck, dessen Seite doppelt so groß ist als die gegebene Kante des Tetraeders, halbire jede Seite, und ziehe durch die Halbirungspuncte gerade Linien.

Fig. 89.

Fig. 90.

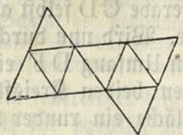
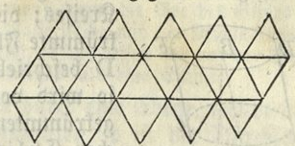


Fig. 91.



2. Das *Netz eines Octaeders* erhält man, wenn man (Fig. 90) für die gegebene Kante zuerst das Netz eines Tetraeders construirt, und dann an dieses ein zweites ganz gleiches Tetraedernetz so verzeichnet, daß beide Netze eine Seite gemeinschaftlich haben.

3. Das *Netz eines Ikosaeders* wird erhalten, wenn man (Fig. 91) auf einer Geraden die gegebene Kante 5mal aufträgt, über den einzelnen Theilen nach oben und unten gleichseitige Dreiecke construirt, dann alle Scheitel auf einer Seite durch eine Gerade verbindet, und längs derselben, nachdem sie verlängert wird, wieder gleichseitige Dreiecke verzeichnet, so daß ihrer auf jeder Seite 5 erscheinen.

4. Um das *Netz des Hexaeders* oder Würfels zu erhalten, verzeichnet man (Fig. 92) mit der Seite eines Würfels 4 Quadrate zwischen zwei parallelen Geraden neben einander, und überdies noch zwei Quadrate an den entgegengesetzten Seiten eines jener ersteren Quadrate.

Fig. 92.

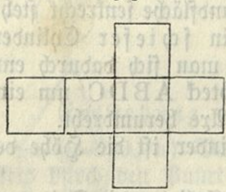
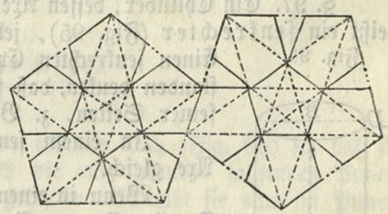


Fig. 93.



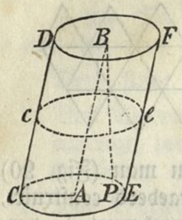
5. Das *Netz des Dodekaeders* erhält man, wenn man (Fig. 93) über der gegebenen Kante ein regelmäßiges Fünfeck beschreibt, über den Seiten desselben wieder regelmäßige Fünfecke construirt, wobei man sich mit Vortheil der Verlängerung der Diagonalen bedient, und an dieses Netz ein zweites ihm vollkommen gleiches so verzeichnet, daß beide Netze eine gemeinschaftliche Seite haben.

4. Der Cylinder.

Entstehung und Arten.

§. 96. a) Wenn sich eine Gerade CD (Fig. 94) mit sich selbst parallel fortbewegt, so daß sie dabei durch alle Umfangspuncte des aus A mit dem Halbmesser AC beschriebenen Kreises geht, so beschreibt dabei der Punct D, so wie jeder andere Punct c der Geraden CD den

Fig. 94.



Umfang eines mit dem gegebenen parallelen und gleichen Kreises; die Gerade CD selbst aber beschreibt eine gekrümmte Fläche. Wird nun durch den von dem Puncte D beschriebenen Umfang DF eine Kreisfläche gelegt, so wird von den beiden Kreisflächen und von jener gekrümmten Fläche ein runder Körper begrenzt, welcher **Cylinder** (Rundsäule) heißt.

Die beiden Kreise sind die **Grundflächen**, die gekrümmte Seitenfläche heißt die **Mantelfläche** des Cylinders.

Die Gerade AB, welche die Mittelpuncte der beiden Kreisflächen verbindet, wird die **Axe** des Cylinders genannt.

Die sich bewegende Gerade CD ist in jeder ihrer Lagen der Axe gleich und parallel, und heißt eine **Seite** des Cylinders.

Der Abstand BP der beiden Grundflächen des Cylinders heißt die **Höhe** desselben.

b) Man kann sich einen Cylinder auch dadurch entstanden denken, daß sich eine Kreisfläche mit sich selbst parallel so fortbewegt, daß dabei der Mittelpunct A längs der Geraden AB fortrückt.

Da man sich den Kreis als ein regelmäßiges Vieleck von unendlich vielen Seiten vorstellt, so kann man auch sagen:

Ein Cylinder ist ein Prisma, dessen Grundflächen regelmäßige Vielecke von unendlich vielen Seiten sind.

Welche Gegenstände haben die Form eines Cylinders?

§. 97. Ein Cylinder, dessen Axe auf der Grundfläche senkrecht steht, heißt ein **senkrechter** (Fig. 95), jeder andere ein **schiefer** Cylinder.

Fig. 95.

Einen senkrechten Cylinder kann man sich dadurch entstanden denken, daß sich ein Rechteck ABDC um eine seiner Seiten, z. B. AB, als Axe herumdreht.

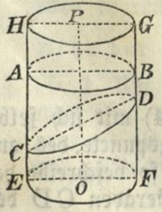
In einem senkrechten Cylinder ist die Höhe der Axe gleich.

Wenn in einem senkrechten Cylinder die Seite dem Durchmesser der Grundfläche gleich ist, so heißt der Cylinder **gleichseitig**.

Durchschnittsfiguren und Netz.

§. 98. Aus der Entstehungsweise des Cylinders (§. 96) geht hervor:

Fig. 96.



Wenn ein Cylinder durch eine mit der Grundfläche parallele Ebene geschnitten wird, so ist der Durchschnitt ein Kreis, welcher mit der Grundfläche gleichen Halbmesser hat; z. B. die Durchschnittsfigur AB (Fig. 96).

Wird ein Cylinder durch eine Ebene, welche nicht parallel mit der Grundfläche, also auch nicht senkrecht auf die Axe ist, geschnitten, so ist die Durchschnittsfigur CD eine **Ellipse**.

Man kann diese beiden Schnitte mit einem cylindrischen Trinkglase, das man etwa zur Hälfte mit Wasser füllt, anschaulich machen; wenn die Axe des Glases vertical steht, so wird der Schnitt der horizontalen Wasserfläche mit der Mantelfläche des Glases ein Kreis sein; wird aber das Glas geneigt, so daß dessen Axe auf der Wasseroberfläche schief steht, so erscheint die Durchschnittsfigur als eine Ellipse.

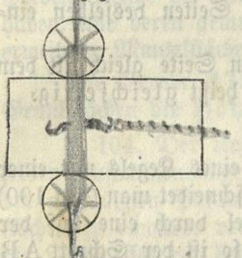
Wird endlich ein senkrechter Cylinder durch eine Ebene, welche durch die Axe geht oder mit ihr parallel ist, geschnitten, so ist der Durchschnitt ein **Rechteck**; z. B. EFGH.

§. 99. Denkt man sich einen senkrechten Cylinder auf einer Ebene so aufliegend, daß er diese mit einer Seite berührt, und dreht denselben durch eine rollende Bewegung so lange herum, bis jene Seite wieder die Ebene berührt, so stellt sich dadurch die Mantelfläche als ein Rechteck dar, dessen Grundlinie der Umfang der kreisförmigen Grundfläche, und dessen Höhe die Höhe des Cylinders ist.

Man kann sich davon auch überzeugen, wenn man die Mantelfläche mit Papier umgibt, und dieses dann auf eine Ebene abwickelt.

Das Netz eines senkrechten Cylinders zu construiren.

Fig. 97.



Man beschreibe (Fig. 97) einen Kreis, ziehe daran eine Tangente so groß als der Umfang, also $3\frac{1}{7}$mal so lang als der Durchmesser jenes Kreises, construire über dieser Tangente ein Rechteck von der Höhe des Cylinders, und bringe an der Gegenseite einen mit dem früheren gleichen Kreis an.

5. Der Kegel.

Entstehung und Arten.

§. 100. a) Bewegt sich eine Gerade OA (Fig. 98) so, daß sie stets durch den Punct O und durch die auf einander folgenden Puncte einer Kreislinie geht, so beschreibt sie eine im Puncte O zusammenlaufende krumme Fläche, die mit der gegebenen Kreisfläche einen runden Körper einschließt, welcher **Kegel** heißt.

Fig. 98.

Der Punct O heißt die **Spitze**, die Kreisfläche ABD die **Grundfläche**, und die gekrümmte Seitenfläche die **Mantelfläche** des Kegels.

Die Mantelfläche des Kegels hat die Eigenschaft, daß sie von jeder durch die Spitze und einen Umfangspunct der Grundfläche gelegte Ebene in einer geraden Linie geschnitten wird; denn jede solche Durchschnittslinie ist eine Lage der sich bewegenden Geraden OA. Man nennt eine solche Durchschnittslinie eine **Seite** des Kegels.

Die Gerade OC, welche die Spitze des Kegels mit dem Mittelpunct der Grundfläche verbindet, heißt die **Axe**, die von der Spitze auf die Grundfläche gefällte Senkrechte OP die **Höhe** des Kegels.

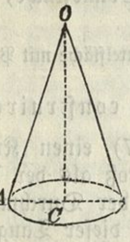
b) Einen Kegel kann man sich auch dadurch entstanden denken, daß sich ein veränderlicher Kreis mit sich selbst parallel so fortbewegt, daß der Mittelpunct C in der Axe CO fortrückt, und dabei der Kreis selbst an Größe stetig abnimmt, bis er im Puncte O verschwindet.

Ein Kegel kann als eine Pyramide angesehen werden, deren Grundfläche ein regelmäßiges Vieleck von unendlich vielen Seiten ist.

Welche Gegenstände haben die Form eines Kegels?

§. 101. Wenn die Axe eines Kegels auf der Grundfläche desselben senkrecht steht, so heißt der Kegel ein senkrechter (gerader) (Fig. 99), sonst ein schiefer. Die Entstehung eines senkrechten Kegels kann auch dadurch versinnlicht werden, daß sich ein rechtwinkliges Dreieck ACO um eine Kathete CO als Axe herumdreht; die andere Kathete AC beschreibt dabei die Grundfläche, die Hypotenuse AO die Mantelfläche des Kegels.

Fig. 99



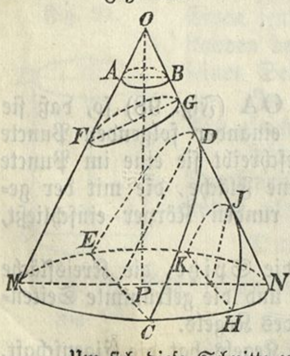
In einem senkrechten Kegel stellt die Axe zugleich die Höhe vor; auch sind alle Seiten desselben einander gleich.

Ein gerader Kegel, dessen Seite gleich ist dem Durchmesser der Grundfläche, heißt gleichseitig.

Durchschnittsfiguren und Netze.

§. 102. Die Beschaffenheit des Schnittes eines Kegels mit einer Ebene hängt von der Lage dieser Ebene ab. Durchschneidet man (Fig. 100) einen senkrechten Kegel durch eine auf der Axe senkrechte Ebene, so ist der Schnitt AB ein Kreis, was auch schon aus der Entstehungsweise des Kegels (§. 100, b) folgt. Steht aber die schneidende Ebene auf der Axe des Kegels schief, so ist die Durchschnittsfigur entweder eine Parabel CDE, oder eine Ellipse FG, oder eine Hyperbel HJK, je nachdem die schneidende Ebene mit der gegenüberstehenden Seite des Kegels parallel ist, oder sich zu ihr hinneigt, oder sich von ihr entfernt. Man nennt darum diese krummen Linien auch Kegelschnittslinien.

Fig. 100.

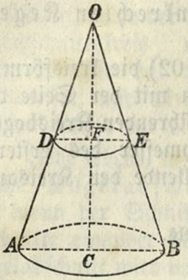


Um sich diese Schnitte zu versinnlichen, fülle man ein kegelförmig zugespitztes Trinkglas etwa bis zur Mitte mit Wasser. Steht die Axe des Glases vertical, so schneidet die horizontale Wasserfläche die Mantelfläche des Glases in einem Kreise; wird das Glas oben geschlossen und so weit geneigt, bis die Wasserfläche mit der Seite des Kegels parallel wird, so ist der Schnitt eine Parabel; neigt man das Glas noch mehr, bis z. B. die Wasserfläche mit der Axe parallel wird, so entsteht eine Hyperbel; in jeder andern Lage ist die Durchschnittsfigur eine Ellipse.

Geht die schneidende Ebene durch die Axe des senkrechten Kegels, so ist der Schnitt MON ein gleichschenkliges Dreieck.

§. 103. Wird ein Kegel durch eine mit der Grundfläche parallele Ebene DE (Fig. 101) geschnitten, so wird derselbe in zwei Körper getheilt, einen kleineren Kegel und einen zwischen zwei parallelen Kreisflächen enthaltenen Körper, welcher ein **abgekürzter Kegel** oder ein **Kegelstumpf** genannt wird. Ist der geschnittene Kegel ein **senkrechter**, so ist es auch der abgekürzte. Einen senkrechten Kegelstumpf kann man sich dadurch entstanden denken, daß sich ein Trapez ACFD, in welchem eine der nicht parallelen Seiten CF auf den beiden parallelen Seiten senkrecht steht, um diese Seite CF als Axe herumdreht; die andere nicht parallele Seite AD beschreibt dabei die Mantelfläche, die beiden parallelen Seiten AC und DF aber beschreiben die Grundflächen des abgekürzten senkrechten Kegels.

Fig. 101.



Ein Kegelstumpf kann als die Differenz zweier Kegel angesehen werden, welche die Grundflächen des Kegelstumpfes zu ihren Grundflächen haben, und deren gemeinschaftliche Spitze der Punct ist, in welchem die erweiterte Mantelfläche des Kegelstumpfes zusammenläuft.

Die Gerade AD heißt eine **Seite**, der Abstand CF der beiden Grundflächen die **Höhe** des abgekürzten Kegels.

§. 104. Der Kegelstumpf steht mit dem Pyramidalstumpf in demselben Zusammenhange, wie der Kegel mit der Pyramide. Wie sich bei der abgekürzten Pyramide zwei gleichliegende Seiten der beiden Grundflächen zu einander verhalten, so verhalten sich beim abgekürzten Kegel die Halbmesser der beiden Kreisflächen.

Wenn daher die Höhe des Kegelstumpfes und die Halbmesser der beiden Grundflächen bekannt sind, so kann man daraus mit Rücksicht auf §. 91 die Höhen der beiden Kegel berechnen, deren Differenz der abgekürzte Kegel ist.

Die Höhe des größeren Kegels findet man, wenn man die Höhe des Stumpfes durch die Differenz der Halbmesser der beiden Kreisflächen dividirt, und den erhaltenen Quotienten mit dem größeren Halbmesser multiplicirt; die Höhe des kleineren Kegels findet man, wenn man jenen Quotienten mit dem kleineren Halbmesser multiplicirt.

Sind z. B. 5^{dm} und 4^{dm} die Halbmesser der beiden Grundflächen, und $3^{dm}\ 5^{cm}$ die Höhe des Kegelstumpfes, so ist

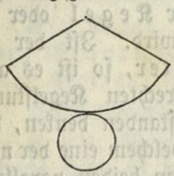
die Höhe des größeren Kegels $= \frac{3{\cdot}5}{5-4} \times 5 = 17{\cdot}5^{dm}$,

" " " kleineren " $= \frac{3{\cdot}5}{5-4} \times 4 = 14^{dm}$.

§. 105. Wenn man sich die Mantelfläche eines senkrechten Kegels in der Richtung einer Seite geschnitten, dann abgewickelt und in eine

Ebene gelegt vorstellt, so bildet dieselbe einen Kreisausschnitt, dessen Bogen dem Umfange der Grundfläche, und dessen Halbmesser der Seite des Kegels gleich ist.

Fig. 102.



Das Netz eines senkrechten Kegels zu construiren.

Man verzeichne (Fig. 102) die kreisförmige Grundfläche, beschreibe dann mit der Seite des Kegels einen jenen Kreis berührenden Kreisbogen, trage auf diesen den Durchmesser des ersteren Kreises $3\frac{1}{7}$mal auf, und vollende den Kreisausschnitt.

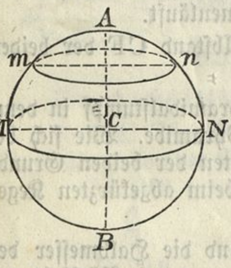
Construire das Netz eines abgekürzten senkrechten Kegels.

6. Die Kugel.

Entstehung und Erklärungen.

§. 106. Wenn man einen Halbkreis A M B (Fig. 103) um den Durchmesser AB als Axe herumdreht, so entsteht nach einer ganzen Umdrehung ein runder Körper, welcher eine Kugel heißt. Die halbe Kreislinie A M B beschreibt während dieser Bewegung die Kugelfläche, und jeder zwischen A und B liegende Punct derselben einen Kreis, dessen Mittelpunct in der Axe AB liegt; diese Kreise sind einander parallel, und um so kleiner, je näher sie an den Puncten A und B, welche die Pole jener Parallelkreise heißen, gelegen sind. Den größten Kreis beschreibt der Halbirungspunct M der halben Kreislinie.

Fig. 103.



Aus der Entstehungsweise der Kugel geht hervor, daß jeder Punct der Kugelfläche von dem Mittelpuncte C des erzeugenden Halbkreises gleich weit absteht; daher heißt dieser Punct der Mittelpunct der Kugel.

Der Abstand A C des Mittelpunctes von irgend einem Puncte der Kugelfläche heißt ein Halbmesser, und jede durch den Mittelpunct gehende und auf beiden Seiten durch die Kugelfläche begrenzte Gerade AB ein Durchmesser der Kugel. Alle Halbmesser der Kugel sind einander gleich; eben so sind auch alle Durchmesser einander gleich.

Denkt man sich an den erzeugenden Halbkreis durch einen Endpunct der Axe eine Tangente gezogen, so beschreibt dieselbe während der Umdrehung eine Ebene, welche mit der entstehenden Kugel einen einzigen Punct gemeinschaftlich hat. Man nennt eine solche Ebene eine Berührungsebene der Kugel, und den Punct, welchen sie mit der Kugel gemein hat, den Berührungspunct. Die Berührungsebene steht auf dem Halbmesser, welcher zum Berührungspuncte gezogen wird, senkrecht.

Welche Gegenstände haben die Gestalt einer Kugel?

Durchschnitt und Netz.

§. 107. Wenn man die Kugel durch eine Ebene durchschneidet, so ist die Durchschnittsfigur ein Kreis, welcher um so größer ist, je näher am Mittelpuncte der Schnitt geführt wird. Am größten wird ein solcher Durchschnittskreis, wenn die schneidende Ebene durch den Mittelpunct geht; derselbe hat mit der Kugel denselben Mittelpunct und denselben Halbmesser, und wird ein größter Kreis der Kugel genannt. Alle größten Kreise der Kugel sind einander gleich.

Jede Ebene, welche die Kugel schneidet, theilt diese in zwei Körper, welche Kugelabschnitte heißen, und im Allgemeinen ungleich sind; nur wenn der Schnitt durch den Mittelpunct geht, sind die beiden Kugelabschnitte einander gleich und werden dann Halbkugeln genannt. Jeder Kugelabschnitt wird von einer Kreisebene und von einem Theile der Kugelfläche, welchen man eine Kugelmütze oder Calotte nennt, begrenzt.

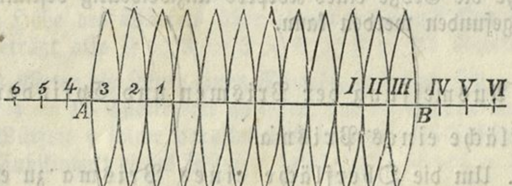
Wenn eine Kugel durch zwei parallele Ebenen geschnitten wird, so sind diese Schnitte zwei Parallelkreise. Die dazwischen befindliche Ringfläche heißt Zone oder Gürtel. Der Bogen Mm in Fig. 103 beschreibt während der Umdrehung des Halbkreises AMB eine Zone.

§. 108. Das Netz einer Kugel zu construiren.

Die Kugelfläche läßt sich nicht, wie die Cylinder- oder die Kegelfläche, auf eine Ebene abwickeln; daher kann für die Kugel auch nur ein angenähertes Netz, und zwar auf folgende Art construirt werden:

Man trage (Fig. 104) auf einer Geraden von A bis B den Durchmesser der Kugel $3\frac{1}{7}$mal auf, theile die Linie AB, welche so lang

Fig. 104.



ist als der Umfang eines größten Kreises der Kugel, in 12 gleiche Theile, und trage auf deren Verlängerungen über A und über B hinaus noch 9 solcher Theile auf. Werden nun mit einem Halbmesser von 10 solchen Theilen aus 1, 2, 3,... und eben so aus I, II, III,... Kreisbogen beschrieben, so schließen dieselben 12 linsenförmige Figuren ein, welche gehörig zusammengebogen ziemlich genau eine Kugelfläche darstellen.

III. Ausmessung der Körper.

§. 109. Unter der Oberfläche versteht man die Summe aller Grenzflächen desselben. Die Summe der Seitenflächen wird insbesondere auch die Seitenoberfläche des Körpers genannt.

Der Raum, welchen die Grenzflächen eines Körpers einschließen, heißt der Cubikinhalt (das Volumen) des Körpers. Um den Cubikinhalt eines Körpers zu bestimmen, nimmt man irgend einen bekannten Körper als Maßeinheit an, und untersucht, wie oft dieser als Einheit angenommene Körper in dem zu bestimmenden enthalten ist. Die Zahl, welche angibt, wie oft der als Maß angenommene Körper in einem gegebenen Körper enthalten ist, heißt die Maßzahl des Cubikinhaltes.

Als Einheit des Körpermaßes nimmt man einen Würfel oder Cubus an, dessen Kante der Längeneinheit gleich ist, und welcher ein Cubikmeter, ein Cubikdecimeter,... heißt, je nachdem die entsprechende Längeneinheit ein Meter, ein Decimeter,... ist.

Diese Körpermaße sind durch entsprechende Modelle zu versinnlichen.

Die Bestimmung des Körperinhaltes besteht nun darin, daß man ausmittelt, wie viel Cubikmeter oder Cubikdecimeter der Körper enthält. Um z. B. den Raum eines Schulzimmers auszumessen, würde man darin ein Cubikmeter so oft neben und über einander legen, als es angeht; bliebe ein Rest, der kleiner als ein Cubikmeter ist, so würde man auf demselben eben so ein Cubikdecimeter so oft auftragen, als es möglich ist; wenn noch ein Rest bliebe, so würde derselbe mit einem Cubikcentimeter gemessen werden. Man würde auf diese Art erfahren, wie viel Cubikmeter, Cubikdecimeter und Cubikcentimeter der Raum des Schulzimmers enthält. Ein solches unmittelbares Ausmessen der Körper wäre übrigens zu weitläufig und in den seltensten Fällen ausführbar; man nimmt daher auch hier, wie bei der Flächenbestimmung, zu einem mittelbaren Verfahren Zuflucht, indem man durch einfache Schlüsse Sätze ableitet, nach denen der Cubikinhalt aus den Maßzahlen der Linien und Flächen, welche die Größe eines Körpers unzweideutig bestimmen, durch Rechnung gefunden werden kann.

1. Ausmessung der Prismen und Cylinder.

Oberfläche eines Prisma.

§. 110. Um die Oberfläche eines Prisma zu erhalten, berechnet man die Seitenflächen als Parallelogramme und addirt dieselben, wodurch man die Seitenoberfläche erhält; zu dieser addirt man noch die doppelte Grundfläche.

Ist das Prisma ein senkrechtes, so läßt sich dessen Seitenoberfläche, wenn man sich dieselbe auf eine Ebene abgewickelt denkt, als ein Rechteck darstellen, dessen Grundlinie dem Umfange der Grundfläche des Prisma, und dessen Höhe der Höhe des Prisma gleich ist.

Daraus folgt:

Die Seitenoberfläche eines senkrechten Prisma ist gleich dem Producte aus dem Umfange der Grundfläche desselben in eine Seitenkante.

Z. B. die Grundfläche eines senkrechten Prisma ist ein Rechteck von 5^m Länge und 3^m Breite, eine Seitenkante beträgt 7^m; wie groß ist die Oberfläche?

Umfang der Grundfläche $= 16^m$ Grundfläche $= 15\square^m$
Seitenkante $= 7^m$
Seitenoberfläche $= 112\square^m$
doppelte Grundfläche $= 30$ „
Oberfläche $= 142\square^m$.

Die Oberfläche eines Würfels ist gleich der 6fachen Fläche eines Grenzquadrates, somit der 6fachen zweiten Potenz einer Kante.

Sind O und o die Maßzahlen der Oberflächen, K und k die Maßzahlen der Kanten zweier Würfel, so ist $O = 6K^2$ und $o = 6k^2$, daher $O : o = K^2 : k^2$; d. h. Oberflächen zweier Würfel verhalten sich so zu einander, wie die zweiten Potenzen ihrer Kanten.

Cubikinhalt eines Prisma.

§. 111. Nimmt man 8 Cubikdecimeter aus Holz oder Pappendeckel, legt 4 derselben so neben einander, daß sie eine Quadratfläche bedecken, und genau über denselben noch die 4 anderen Cubikdecimeter; so erhält man dadurch einen Würfel, dessen Kante 2 Decimeter beträgt. Ein solcher Würfel enthält also einen Cubikdecimeter 8mal in sich; sein Cubikinhalt ist 8 Cubikdecimeter.

Betrachtet man einen Würfel, dessen Kante 3 Decimeter ist, so enthält dessen Grundfläche $3 \times 3 = 9$ Quadratdecimeter. Wie viele Cubikdecimeter lassen sich also auf der Grundfläche neben einander legen? Wie viele solche Parallelschichten von 9 Cubikdecimeter lassen sich nach der ganzen Höhe des Würfels über einander legen? Der Cubikinhalt des Würfels beträgt also $9 \times 3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$ Cubikdecimeter.

Ist 4 Meter die Kante eines Würfels, so lassen sich auf der Grundfläche $4 \times 4 = 16$ Cubikmeter auflegen, und es werden nach der ganzen Höhe des Würfels 4 solche Parallelschichten von je 16 Cubikmeter enthalten sein. Der Cubikinhalt dieses Würfels beträgt also $16 \times 4 = 4 \times 4 \times 4 = 64$ Cubikmeter.

Die Zahl, welche anzeigt, wie oft die Cubikeinheit in einem Würfel enthalten ist, wird also gefunden, indem man die Zahl, welche anzeigt, wie oft die entsprechende Längeneinheit in einer Kante enthalten ist, dreimal als Factor setzt, oder zur dritten Potenz erhebt.

Eine Zahl dreimal als Factor setzen, heißt darum auch, diese Zahl zum Cubus erheben.

Den vorhergehenden Satz pflegt man gewöhnlich kürzer so auszudrücken:

Der Cubikinhalt eines Würfels ist gleich der dritten Potenz einer Kante desselben.

Ist die Maßzahl einer Kante eine mehrnamige Zahl, so wird sie zuerst auf die höchste oder niedrigste Benennung gebracht, und dann erst zum Cubus erhoben.

Drückt man durch c und k bezüglich die Maßzahlen des Cubikinhaltes und der Kante eines Würfels aus, so ist $c = k^3$.

Sind eben so C und K die Maßzahlen des Cubikinhaltes und der Kante eines zweiten Würfels, so ist auch $C = K^3$, daher $C : c = K^3 : k^3$; d. h. die Cubikinhalte zweier Würfel verhalten sich so zu einander, wie die dritten Potenzen ihrer Kanten.

§. 112. Ein Würfel, dessen Kante 10^{dm} beträgt, hat

$$10 \times 10 \times 10 = 1000 \text{ Cub.}^{dm}.$$

Ein solcher Würfel ist nun 1 Cub.^{m}; also ist

$$1 \text{ Cub.}^{m} = 1000 \text{ Cub.}^{dm}.$$

Eben so folgt

$$1 \text{ Cub.}^{dm} = 1000 \text{ Cub.}^{cm},$$
$$1 \text{ Cub.}^{cm} = 1000 \text{ Cub.}^{mm}.$$

1 Cubikdecimeter heißt als Hohlmaß ein Liter; 100 Liter = 1 Hektoliter.

Nach dem bisherigen Körpermaße war

$$1 \text{ Cub.}^{0} = 216 \text{ Cub.}',$$
$$1 \text{ Cub.}' = 1728 \text{ Cub.}'',$$
$$1 \text{ Cub.}'' = 1728 \text{ Cub.}'''.$$

Als Hohlmaß diente der Metzen = 1·9471 Cub.′ und der Eimer à 40 Maß = 1·792 Cub.′.

Verhältniszahlen zwischen den neuen und den früheren Körpermaßen:

1 Cub.^{m}	= 0·146606 Cub.^{0},	1 Cub.^{0}	= 6·820992 Cub.^{m},
	= 31·666950 Cub.′,	1 Cub.′	= 0·031579 Cub.^{m}.
1 Hektoliter	= 1·626365 Metzen,	1 Metzen	= 0·614868 Hektoliter,
	= 1·767129 Eimer,	1 Eimer	= 0·565890 Hektoliter,
1 Liter	= 0·706852 Maß.	1 Maß	= 1·414724 Liter.

§. 113. Wenn umgekehrt aus dem Cubikinhalte eines Würfels die Länge einer Kante gefunden werden soll, so braucht man nur jene Zahl zu suchen, welche dreimal als Factor gesetzt den Cubikinhalt gibt, d. h. man darf nur aus der Maßzahl des gegebenen Cubikinhaltes die Cubikwurzel ausziehen. Es ist also $k = \sqrt[3]{c}$.

Es sei z. B. der Cubikinhalt eines Würfels 314 Cub.^{dm} 432 Cub.^{cm}; wie lang ist eine Kante desselben?

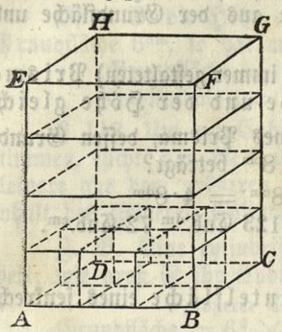
$$314 \text{ Cub.}^{dm}\ 432 \text{ Cub.}^{cm} = 314{\cdot}432 \text{ Cub.}^{dm}$$

$$\sqrt[3]{314{\cdot}432} = 6{\cdot}8^{dm} = 6^{dm}\ 8^{cm}.$$

§. 114. Legt man auf einer Ebene 4 Cubikdecimeter aus Holz oder Pappendeckel neben einander, und auf diese Würfel noch zweimal 4 Cubikdecimeter; so werden die 12 Cubikdecimeter ein rechtwinkliges

Parallelepiped vorstellen, dessen Grundfläche 4 □^{dm} und dessen Höhe 3^{dm} ist. Hat man daher ein rechtwinkliges Parallelepiped von 4 □^{dm} Grundfläche und 3^{dm} Höhe, so ist dessen Cubikinhalt $= 4 \times 3 = 12$ Cub.^{dm}.

Fig. 105.



Es sei nun (Fig. 105) der Körperinhalt eines rechtwinkligen Parallelepipeds zu bestimmen, worin die Länge $AB = 3^m$, die Breite $AD = 2^m$ und die Höhe $AE = 4^m$ ist. Da die Höhe 4^m beträgt, so kann man das Parallelepiped in 4 gleiche Parallelschichten zerlegen, deren jede 1^m hoch ist. Da ferner das Parallelepiped 3^m lang und 2^m breit ist, so läßt sich jede dieser Parallelschichten in $3 \times 2 = 6$ Würfel zerlegen, deren jeder 1 Cub.^{m} ist. Der Cubikinhalt des Parallelepipeds ist also $6 \times 4 = 3 \times 2 \times 4 = 24$ Cub.^{m}.

Suche auf dieselbe Weise den Cubikinhalt eines rechtwinkligen Parallelepipeds, worin

a) die Länge 7^{cm}, die Breite 3^{cm}, die Höhe 6^{cm},
b) die Länge 3^{dm}, die Breite 5^{dm}, die Höhe 2^{dm} ist.

Aus diesen Bestimmungen folgt:

Der Cubikinhalt eines rechtwinkligen Parallelepipeds ist gleich dem Producte aus der Länge, Breite und Höhe, oder, was gleich viel ist, dem Producte aus der Grundfläche und der Höhe.

Z. B. Wie groß ist der Cubikinhalt eines rechtwinkligen Parallelepipedes, worin die Länge $1^m\ 5^{dm}\ 3^{cm}$, die Breite $1^m\ 1^{dm}\ 8^{cm}$ und die Höhe $2^m\ 3^{dm}\ 7^{cm}$ beträgt?

Länge $= 1^m\ 5^{dm}\ 3^{cm} = 1 \cdot 53^m$
Breite $= 1^m\ 1^{dm}\ 8^{cm} = 1 \cdot 18^m$
Höhe $= 2^m\ 3^{dm}\ 7^{cm} = 2 \cdot 37^m$

$1 \cdot 53 \times 1 \cdot 18$
153
1224
$1 \cdot 8054 \times 2 \cdot 37$
36108
54162
126378
$4 \cdot 278798$ Cub.^{m}.

Cubikinhalt = 4 Cub.^{m} 278 Cub.^{dm} 798 Cub.^{cm}.

§. 115. Wird ein Prisma durch eine mit der Grundfläche parallele Ebene geschnitten, so ist der Schnitt in jeder Höhe mit der Grundfläche congruent. Wenn daher zwei Prismen gleiche (wenn auch nicht congruente) Grundflächen haben, so müssen ihnen auch in jeder Höhe gleiche Schnittflächen zukommen; sie nehmen somit, wenn sie auch die nämliche Höhe besitzen, einen gleich großen Raum ein.

Zwei Prismen, welche gleiche Grundfläche und gleiche Höhe haben, sind also einander gleich.

Ein jedes Prisma hat demnach gleichen Cubikinhalt mit einem rechtwinkligen Parallelepiped von gleicher Grundfläche und Höhe. Da nun der Körperinhalt des letzteren dem Producte aus der Grundfläche und der Höhe gleich ist, so folgt:

Der Cubikinhalt eines jeden (wie immer gestalteten) Prisma ist dem Producte aus der Grundfläche und der Höhe gleich.

Z. B. Wie groß ist der Cubikinhalt eines Prisma, dessen Grundfläche $25\square^{dm}\ 64\square^{cm}$ und dessen Höhe $4^{dm}\ 8^{cm}$ beträgt?

$25\square^{dm}\ 64\square^{cm} = 25 \cdot 64\square^{dm}$; $4^{dm}\ 8^{cm} = 4 \cdot 8^{dm}$

$25 \cdot 64 \times 4 \cdot 8 = 123 \cdot 072$ Cub.^{dm} $= 123$ Cub.^{dm} 72 Cub.^{cm}.

Oberfläche eines Cylinders.

§. 116. Für die Bestimmung der Mantelfläche eines senkrechten Cylinders folgt aus §. 99:

Die Mantelfläche eines senkrechten Cylinders ist gleich dem Producte aus dem Umfange der Grundfläche und aus der Höhe des Cylinders.

Um die ganze Oberfläche eines senkrechten Cylinders zu erhalten, addirt man zu der Mantelfläche den doppelten Inhalt der Grundfläche.

Drückt man durch r, h, m und o bezüglich den Halbmesser der Grundfläche, die Höhe, die Mantelfläche und die Oberfläche eines senkrechten Cylinders aus, so ist $2 r \pi$ der Umfang, $r^2 \pi$ der Inhalt der Grundfläche, und daher

$$m = 2 r \pi \times h = 2 r h \pi, \text{ und}$$
$$o = 2 r^2 \pi + 2 r h \pi \text{ oder } o = 2 r \pi (r + h).$$

Im gleichseitigen Cylinder ist $h = 2 r$, daher

$$o = 6 r^2 \pi.$$

Z. B. In einem senkrechten Cylinder ist die Höhe 5^m und der Halbmesser der Grundfläche 2^m; wie groß ist die Oberfläche?

Umfang der Grundfläche $= 4 \times 3 \cdot 14 = 12 \cdot 56^m$
Mantelfläche des Cylinders $= 12 \cdot 56 \times 5 = 62 \cdot 8\square^m$
Grundfläche $= 12 \cdot 56 \times 1 = 12 \cdot 56\square^m$
Doppelte Grundfläche $= 25 \cdot 12\square^m$
Oberfläche $= 87 \cdot 92\square^m$.

Cubikinhalt eines Cylinders.

§. 117. Da ein Cylinder als ein Prisma, dessen Grundflächen regelmäßige Vielecke von unendlich vielen Seiten sind, angesehen werden kann, so folgt aus §. 115:

Der Cubikinhalt eines Cylinders ist gleich dem Producte aus der Grundfläche und der Höhe desselben.

Haben r und h die in §. 116 angegebenen Bedeutungen und bezeichnet c den Cubikinhalt eines Cylinders, so ist $c = r^2 \pi . h$, oder $c = r^2 h \pi$.

Für den gleichseitigen Cylinder ist $h = 2r$, daher $c = 2r^3 \pi$.

Ist z. B. die Höhe eines Cylinders 7^{dm}, und der Halbmesser der Grundfläche 6^{dm}, so hat man

Grundfläche $= 6^2 \times 3 \cdot 1416 = 113 \cdot 0976 \square^{dm}$,
Cubikinhalt $= 113 \cdot 0976 \times 7 = 791 \cdot 68$ Cub.^{dm}.

§. 118. Um den Cubikinhalt einer cylindrischen Röhre zu bestimmen, sucht man die Cubikinhalte der beiden Cylinder, von denen der kleinere aus dem größeren ausgeschnitten ist, und subtrahirt den Cubikinhalt des kleineren Cylinders von jenem des größeren.

Z. B. Eine cylindrische Röhre ist 2^{cm} dick, und im Lichten 8^{cm} weit; wie groß ist ihr Cubikinhalt, wenn die Länge 40^{cm} beträgt?

größerer Cylinder
Grundfläche $= 6^2 \times 3 \cdot 1416 = 113 \cdot 0976 \square^{cm}$
Cubikinhalt $= 113 \cdot 0976 \times 40 = 4523 \cdot 9$ Cub.^{cm}

kleinerer Cylinder
Grundfläche $= 4^2 \times 3 \cdot 1416 = 50 \cdot 2556 \square^{cm}$
Cubikinhalt $= 50 \cdot 2556 \times 40 = 2010 \cdot 2$ Cub.^{cm}

Cubikinhalt der cylindrischen Röhre $= 2513 \cdot 7$ Cub.^{cm}.

§. 119. Eine ähnliche Form, wie der Cylinder, haben die Fässer; nur haben diese nicht überall dieselbe Weite, sie sind in der Mitte am Spunde mehr bauchig, und haben daselbst einen größeren Durchmesser, als am Boden. Um den beiläufigen Inhalt eines Fasses zu finden, berechnet man das Faß als einen Cylinder, dessen Höhe gleich ist der Länge des Fasses, und dessen Grundfläche den dritten Theil der Summe aus dem Bodendurchmesser und aus dem doppelten Durchmesser der Spundfläche zum Durchmesser hat.

Z. B. Wie groß ist der Inhalt eines Fasses von 10^{dm} Länge, wenn der Durchmesser am Boden $4 \cdot 8^{dm}$, und am Spunde $5 \cdot 7^{dm}$ beträgt?

Durchm. am Boden $= 4 \cdot 8^{dm}$
Doppelt. Durchm. am Spunde $= 11 \cdot 4^{dm}$
$16 \cdot 2 : 3$
Durchm. des Cylinders $= 5 \cdot 4^{dm}$
Grundfläche des Cylinders $= 7 \cdot 29 \times 3\frac{1}{7} = 22 \cdot 91 \square^{dm}$
Inhalt des Fasses $= 22 \cdot 91 \times 10 = 229 \cdot 1$ Cub.^{dm}
$= 229 \cdot 1$ Liter.

§. 120. Aufgaben.

1. Die Kante eines Würfels ist a) 7^m, b) $2 \cdot 13^m$, c) 159^{mm}, d) $1^m\ 2^{dm}\ 5^{mm}$; wie groß ist m) die Oberfläche, n) der Cubikinhalt desselben?

2. Suche die Kante eines Würfels, dessen Oberfläche ist: a) 40344 $\square^{cm}$, b) 22 $\square^{m}$ 18 $\square^{dm}$, c) 50 $\square^{dm}$ 80·86 $\square^{cm}$.
3. Suche die Kante eines Würfels, dessen Cubikinhalt ist: a) 29791 Cub.^{cm}, b) 16·003 Cub.^{dm}, c) 1 Cub.^{m} 157 Cub.^{dm} 621 Cub.^{cm}.
4. Die Oberfläche eines Würfels beträgt 30 $\square^{dm}$; wie groß ist der Cubikinhalt?
5. Bestimme die Kante eines Würfels, dessen Inhalt gleich ist der Summe der Inhalte zweier Würfel von 1·2^{dm} und 2·1^{dm} Kantenlängen.
6. Wie groß muß die Kantenlänge einer würfelförmigen Grube sein, welche doppelt so viel Inhalt haben soll als eine andere von 2·4^{m} Kantenlänge?
7. Ein rechtwinkliges Parallelepiped ist: a) 11^{dm} lang, 6^{dm} breit, 9^{dm} hoch; b) 4·2^{dm} lang, 1·5^{dm} breit, 1·2^{dm} hoch; c) 7^{m} 15^{dm} lang, 3^{m} 72^{dm} breit, 2^{m} 18^{dm} hoch; wie groß ist m) die Oberfläche, n) der Inhalt desselben?
8. Wie hoch ist ein rechtwinkliges Parallelepiped, das bei 75^{cm} Länge und 36^{cm} Breite 21600 Cub.^{cm} enthält?
9. In einem Prisma beträgt a) die Grundfläche 15 $\square^{m}$, die Höhe 2^{m} 4^{dm}; b) die Grundfläche 2 $\square^{dm}$ 25 $\square^{cm}$, die Höhe 1^{dm} 2^{cm}; c) die Grundfläche 2·864 $\square^{dm}$, die Höhe 9^{dm} 2^{cm}; wie groß ist der Inhalt des Prisma?
10. Die Grundfläche eines Prisma beträgt 31 $\square^{m}$ 78 $\square^{dm}$, der Cubikinhalt 1 Cub.^{m} 573 Cub.^{dm} 110 Cub.^{cm}; wie groß ist die Höhe?
11. Wie groß ist die Grundfläche eines 4^{dm} 5^{cm} hohen Prisma, welches 124 Cub.^{dm} 20 Cub.^{cm} Inhalt hat.
12. Die Höhe eines senkrechten Prisma beträgt 5^{m}, die Grundfläche desselben ist ein Quadrat mit der Seite 3^{m}; wie groß ist die Oberfläche?
13. Wie groß ist die Oberfläche eines senkrechten Prisma, dessen Grundfläche ein 2·3^{dm} langes und 1·2^{dm} breites Rechteck und dessen Höhe 3·5^{dm} ist?
14. Die Seitenoberfläche eines dreiseitigen senkrechten Prisma ist 17 $\square^{dm}$ 87 $\square^{cm}$; die Seiten der Grundfläche betragen 2^{dm} 2^{cm}, 1^{dm} 4^{cm} und 1^{dm} 1^{cm}; wie groß ist eine Seitenkante des Prisma?
15. Die Grundfläche eines 5^{dm} 2^{cm} hohen Prisma ist ein gleichseitiges Dreieck von 3^{dm} 4^{cm} Seitenlänge; bestimme den Cubikinhalt.
16. Die Grundfläche eines senkrechten Prisma von $2\frac{1}{2}$^{dm} Höhe ist ein regelmäßiges Sechseck von $1\frac{1}{2}$^{dm} Seitenlänge; wie groß ist die Oberfläche?
17. Wie groß ist die Oberfläche eines vierkantigen Blockes von 4^{m} Länge, 6^{dm} Breite und 4^{dm} Dicke?
18. Ein Wasserbehälter ist ein 5^{dm} hohes rechtwinkliges Parallelepiped, das zur Grundfläche ein Rechteck von 7^{dm} Länge und 4^{dm} Breite hat; wie groß ist seine Boden- und Seitenoberfläche?

19. Wie viel kostet die Anfertigung einer Kiste mit Deckel, welche 18^{dm} lang, 15^{dm} breit und 8^{dm} hoch sein soll, wenn für $1\square^{dm}$ 3 kr. gerechnet werden?
20. Das würfelförmige Fußgestell einer Säule hat $1 \cdot 25^{m}$ zur Seite; wie groß ist sein Inhalt?
21. Wie viel Cubikfuß hat eine Mauer, welche 11^{m} 2^{dm} lang, 6^{dm} dick und 3^{m} 2^{dm} hoch ist?
22. Ein Zimmer ist $6 \cdot 8^{m}$ lang, $4 \cdot 6^{m}$ breit und $3 \cdot 2^{m}$ hoch; welchen Raum nimmt dasselbe ein?
23. Eine Kalkgrube ist $2 \cdot 85^{m}$ lang, $1 \cdot 3^{m}$ breit und $1 \cdot 24^{m}$ tief; wie viel Cubikmeter Kalk sind darin, wenn sie bis oben angefüllt ist?
24. Man will eine Grube machen, welche bei einer Länge von 10^{m} und einer Tiefe von 4^{m} 2^{dm} einen Inhalt von 175 Cub.^{m} haben soll; wie breit muß sie werden?
25. Wie viel Cub.^{m} Brennholz betragen $12\square^{m}$, wenn die Scheitlänge 64^{cm} ist?
26. Für eine Schule brauchte man bisher 36 Klafter 32zölliges Holz; wie viel Cub.^{m} sind es?
27. Die innere Kante eines hohlen Würfels mißt $4 \cdot 5^{dm}$, die äußere dagegen $4 \cdot 7^{dm}$; wie viel beträgt die innere, wie viel die äußere Oberfläche?
28. Eine würfelförmige Schachtel, an welcher eine Kante 3^{dm} 2^{cm} lang ist, soll mit buntem Papier überklebt werden; wie viel Bogen sind erforderlich, wenn jeder Bogen 3^{dm} 6^{cm} lang und 3^{dm} 4^{cm} breit ist?
29. Ein prismatisches Gefäß von $9\square^{dm}$ Bodenfläche ist bis zu einer Höhe von 6^{dm} 4^{cm} mit Wasser gefüllt; wie groß ist der Druck auf den Boden, wenn 1 Cub.^{dm} Wasser 1 Kilogramm wiegt?
30. Ein 8^{dm} hohes Prisma, dessen Grundfläche ein Quadrat ist, wiegt 135 Kilogr.; wie groß ist jede Seite der Grundfläche, wenn jedes Cub.^{dm} 2·7 Kilogr. wiegt?
31. Ein Eichenbalken ist $4 \cdot 2^{m}$ lang, $9 \cdot 1^{dm}$ breit und eben so dick; wie hoch kommt derselbe, wenn man 1 Cub.^{m} mit 25 fl. bezahlt?
32. Ein Balken, welcher 8^{m} lang, 5^{dm} breit und 4^{dm} dick ist, kostet $48\frac{3}{4}$ fl.; wie theuer ist damit das Cub.^{m} bezahlt?
33. Ein liegender Balken ist $0 \cdot 5^{m}$ breit und $0 \cdot 6^{m}$ hoch, und hält 2·5 Cub.^{m}; wie theuer ist er, wenn das Current-Meter $6\frac{3}{4}$ fl. kostet?
34. Ein Saal ist 16^{m} lang, $13 \cdot 5^{m}$ breit und $4 \cdot 8^{m}$ hoch; wie groß ist das Gewicht der darin befindlichen Luft, wenn ein Cub.^{m} Luft 1·5 Kilogr. wiegt?
35. Wie viel Cubikfuß Erde müssen ausgegraben werden, um einen Graben zu erhalten, der 63^{m} lang, $1 \cdot 8^{m}$ tief, und oben $2 \cdot 1^{m}$, unten $1 \cdot 7^{m}$ breit ist?
36. Wie viel Cub.' Inhalt hat eine Mauer, welche 28^{m} 5^{dm} lang, 1^{m} hoch, und unten 6^{m} 2^{dm}, oben 5^{m} 6^{dm} dick ist?
37. Eine Mauer, $7 \cdot 2^{m}$ lang, $4 \cdot 3^{m}$ hoch und $6 \cdot 5^{cm}$ dick, wird von Ziegelsteinen aufgeführt, deren jeder 4 Cub.^{dm} hält; wie viel Ziegel-

steine sind erforderlich, wenn für Bruch und Ergänzung 5% gerechnet werden?

38. Ein Ziegelstein von 25^{cm} Länge, 12^{cm} Breite und 5^{cm} Dicke wiegt 1·4 Kilogr.; wie groß ist das Gewicht einer Kahnladung Ziegelsteine, wenn der Kahn durchschnittlich $3·8^{m}$ Breite und 20^{m} Länge hat, und die Steine $1·9^{m}$ hoch geladen werden?

39. Ein Brunnentrog ist $2·3^{m}$ lang, $3·2^{dm}$ breit und $2·4^{dm}$ tief; wie viel Liter Wasser faßt er, da 1 Liter ein Cub.^{dm} ist?

40. Beim Bau einer Eisenbahn wird die aus einem Einschnitt, welcher 165^{m} lang, oben 22^{m} und unten 8^{m} breit, und $6·4^{m}$ tief ist, gewonnene Erdmasse auf ein 25 Ar enthaltendes Grundstück gleichmäßig vertheilt; um wie viel wird letzteres dadurch erhöht?

---

41. In einem senkrechten Cylinder beträgt a) der Halbmesser der Grundfläche 3^{dm}, die Höhe 5^{dm}; b) der Halbmesser der Grundfläche $1·57^{m}$, die Höhe $1·29^{m}$; wie groß ist m) die Mantelfläche, n) der Cubikinhalt des Cylinders? ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

42. Wie groß ist a) die Oberfläche, b) der Inhalt eines senkrechten, $2·12^{m}$ hohen Cylinders, dessen Grundfläche $1·88^{m}$ zum Durchmesser hat? ($\pi = 3·14$.)

43. Berechne die Oberfläche eines senkrechten Cylinders, dessen Höhe $7·5^{dm}$ beträgt und dessen Grundfläche $17·4^{dm}$ zum Umfange hat. ($\pi = 3·14$.)

44. Die Mantelfläche eines senkrechten Cylinders ist $488·4\square^{dm}$, der Halbmesser der Grundfläche 5^{dm}; wie groß ist die Höhe? ($\pi = 3·14$.)

45. Wie groß ist der Halbmesser der Grundfläche eines senkrechten Cylinders von $1·5^{m}$ Höhe, wenn die Mantelfläche $1·1386\square^{m}$ beträgt? ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

46. In einem senkrechten Cylinder beträgt die Oberfläche $28·9665\square^{dm}$, der Umfang der Grundfläche $4·71^{dm}$; wie groß ist die Höhe des Cylinders? ($\pi = 3·14$.)

47. Der Inhalt eines Cylinders ist 37·268 Cub.^{dm}; wie groß ist die Höhe, wenn der Durchmesser der Grundfläche $3·7^{dm}$ beträgt? ($\pi = 3·14$.)

48. Ein 4^{dm} 3^{cm} hoher Cylinder hat 20 Cub.^{dm} Inhalt; wie groß ist der Halbmesser der Grundfläche? ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

49. Wie groß ist a) die Oberfläche, b) der Cubikinhalt eines gleichseitigen Cylinders, dessen Seite $2\frac{5}{12}^{m}$ beträgt? ($\pi = \frac{355}{113}$.)

50. In einem gleichseitigen Cylinder ist der Durchmesser $0·2^{m}$; wie verhält sich die Mantelfläche zur ganzen Oberfläche?

51. Eine Walze hat 6^{dm} Länge und 9^{cm} Dicke; wie groß ist ihre Mantelfläche?

52. Wie viel $\square^{dm}$ Blech braucht man zu einem hohlen Blechcylinder, welcher $3·2^{m}$ lang und 12^{cm} weit werden soll?

53. An einem Gebäude sollen mehrere cylinderförmige Abflußröhren angebracht werden, welche 8^{cm} im Durchmesser und zusammen eine Länge von $4 \cdot 8^{m}$ haben; wie viel $\square^{dm}$ Blech braucht man dazu?
54. Ein cylindrisches Gefäß faßt 35 Liter Wasser; wie viel Wasser faßt ein Gefäß, dessen Ausdehnungen doppelt so groß sind?
55. Wie viel Cub.^{dm} Wasser schafft eine Pumpe bei jedem Hube in die Höhe, wenn der Durchmesser des Stiefels im Lichten 21^{cm} und der Hub $4 \cdot 2^{dm}$ beträgt?
56. Ein Brunnen ist $1 \cdot 4^{m}$ weit; wie viel Cub.^{dm} (Liter) Wasser sind in demselben, wenn das Wasser $5 \cdot 2^{m}$ hoch steht?
57. Ein runder Baumstamm von 2^{m} 3^{dm} Länge und 66^{cm} Dicke wird mit $88\frac{1}{2}$ fl. bezahlt; wie theuer wird das Cub.^{m} gerechnet?
58. Ein Barren Silber hat $0 \cdot 4^{dm}$ im Durchmesser und ist 5^{dm} lang; wie viel ist er werth, wenn 1 Cub.^{dm} Silber 945 fl. kostet?
59. Welches Gewicht hat der in 58. bestimmte Barren, wenn Silber $10\frac{1}{2}$mal so schwer als das Wasser ist und 1 Cub.^{dm} Wasser 1 Kilogr. wiegt?
60. Wie oft wird sich eine Walze um ihre Achse drehen müssen, wenn ein Stück Feld von $200\square^{m}$ ganz überwalzt werden soll und die Walze $1 \cdot 5^{m}$ lang ist und 3^{dm} im Durchmesser hat?
61. Bei einer cylindrischen Röhre, welche 5^{cm} dick ist, beträgt der innere Durchmesser 18^{cm} und die Höhe $2 \cdot 85^{m}$; wie groß ist ihre innere und ihre äußere Mantelfläche?
62. Eine cylindrische Röhre ist 32^{dm} lang und im Innern $1 \cdot 4^{dm}$ weit; welchen Cubikinhalt hat dieselbe, wenn ihre Dicke 5^{cm} beträgt?
63. Ein kupferner Ring hat 64^{cm} äußeren, und 48^{cm} inneren Umfang, seine Höhe ist 4^{cm}; wie groß ist sein Cubikinhalt?
64. Die Höhe eines cylindrischen Thurmes, dessen äußerer Umfang 13^{m} ist, beträgt $7 \cdot 2^{m}$, und die Dicke der Mauer 86^{cm}; wie viel Cub.^{m} Mauerwerk enthält der Thurm?
65. Ein Balken von $5 \cdot 2^{m}$ Länge, 3^{dm} Breite und $2 \cdot 6^{dm}$ Höhe ist nach der Länge cylindrisch ausgehöhlt; wie groß ist sein Inhalt, wenn der Durchmesser der Höhlung 18^{cm} beträgt?
66. Ein Mühlstein hat $1 \cdot 5^{m}$ im Durchmesser und ist 3^{dm} dick; die innere quadratische Oeffnung ist 1^{dm} weit; wie viel Cubikdecimeter Stein enthält derselbe?
67. Welchen Druck erleidet der Boden eines cylindrischen Gefäßes von $3 \cdot 2^{dm}$ Durchmesser bei einem Wasserstande von 1^{m} 2^{dm}?
68. In einen cylindrischen Wasserbehälter von 6^{dm} Durchmesser wird ein Gefäß von 2 Liter Inhalt 15mal geleert; wie hoch wird das Wasser in jenem Behälter stehen?
69. Wie viel Liter hält ein cylindrisches Gefäß von 86^{mm} Durchmesser und $172 \cdot 1^{mm}$ Höhe?
70. Ein cylindrisches Gefäß soll 2 Liter halten; wie hoch muß dasselbe gemacht werden, wenn der Durchmesser im Lichten $108 \cdot 4^{mm}$ betragen soll?

71. Wie viel Liter hält ein cylindrisches Gefäß, das $503 \cdot 1^{mm}$ weit und eben so hoch ist?
72. Ein cylindrisches Gefäß faßt $\frac{1}{2}$ Hektoliter Getreide und ist $399 \cdot 3^{mm}$ hoch; wie groß ist der Durchmesser seiner Grundfläche?
73. Die Länge eines Fasses beträgt $1^{m}\ 3^{dm}$, der Durchmesser am Boden 8^{dm}, der Durchmesser an der Spundfläche 1^{m}; wie viel Liter hält das Faß?
74. Wie viel Liter hält ein Faß von $1 \cdot 08^{m}$ Länge, wenn die Spundtiefe 86^{cm} und die Bodenweite 62^{cm} beträgt?

2. Ausmessung der Pyramiden und Kegel.

Oberfläche einer Pyramide.

§. 121. Um die Oberfläche einer Pyramide zu erhalten, berechnet man die Seitendreiecke und addirt zu ihrer Summe die Grundfläche.

Bei einer senkrechten Pyramide braucht man, um die Seitenoberfläche zu bestimmen, nur ein Seitendreieck zu berechnen, und dessen Flächeninhalt mit der Anzahl der Seitenkanten zu multipliciren.

Z. B. Man bestimme die Oberfläche einer senkrechten Pyramide, deren Seitenkante 11^{dm}, und deren Grundfläche ein Quadrat mit der Seite 8^{dm} ist.

$$
\begin{array}{rcl}
\text{Höhe eines Seitendreieckes} & = & \sqrt{11^2 - 4^2} = \sqrt{105} \\
 & = & 10 \cdot 25^{dm} \\
\text{Grundlinie} \quad " \qquad " & = & 8^{dm} \\
\hline
\text{Fläche} \quad " \qquad " & = & 41\square^{dm} \\
\hline
\text{Seitenoberfläche} & = & 164\square^{dm} \\
\text{Grundfläche} = 8^2 & = & 64\square^{dm} \\
\hline
\text{Oberfläche} & = & 228\square^{dm}
\end{array}
$$

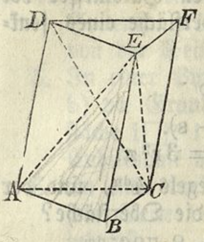
Cubikinhalt einer Pyramide.

§. 122. Wenn zwei gleich hohe Pyramiden auf derselben Ebene aufliegen, und man schneidet sie durch eine mit den Grundflächen parallele Ebene, so sind die Durchschnittsfiguren mit den Grundflächen ähnlich und verhalten sich zu denselben, wie das Quadrat der Entfernung der Durchschnittsebene von der Spitze zu dem Quadrate der gemeinschaftlichen Höhe. Sind nun die Grundflächen der beiden Pyramiden einander gleich, so sind es auch die beiden Durchschnitte. Daraus folgt, daß zwei Pyramiden, welche gleiche Grundfläche und dieselbe Höhe haben, gegen die Spitze zu gleichmäßig abnehmen, daß sie also in jeder Höhe auch eine gleiche Weite haben, und somit gleiche Räume einschließen.

Zwei Pyramiden, welche gleiche Grundfläche und gleiche Höhe haben, sind also einander gleich.

§. 123. Es sei ABCDEF (Fig. 106) ein dreiseitiges Prisma. Durchschneidet man dasselbe durch die Ebene AEC, so zerfällt es in

Fig. 106.



die dreiseitige Pyramide EABC und in die vierseitige EACFD. Durch die Ebene CED wird die letztere wieder in zwei dreiseitige Pyramiden EACD und ECDF zerlegt, so daß das dreiseitige Prisma aus drei dreiseitigen Pyramiden zusammengesetzt erscheint. Es läßt sich nun zeigen, daß diese drei Pyramiden einander gleich sind. Die Pyramiden EACD und ECDF haben nämlich gleiche Grundflächen ACD und CDF, welche in derselben Ebene liegen, und denselben Scheitel E, daher auch dieselbe Höhe; folglich sind sie gleich. In den Pyramiden EACD und EABC kann man die Spitze in C annehmen; die Grundflächen EAB und EAD liegen dann in derselben Ebene und sind einander gleich; die beiden Pyramiden haben demnach auch gleiche Grundfläche und dieselbe Höhe, sind also einander gleich. Es sind somit alle drei Pyramiden unter einander gleich, daher ist *die dreiseitige Pyramide EABC der dritte Theil des Prisma ABCDEF, welches mit der Pyramide gleiche Grundfläche und gleiche Höhe hat.*

Da nun der Cubikinhalt eines Prisma gleich ist dem Producte aus der Grundfläche und der Höhe, so folgt:

Der Cubikinhalt einer dreiseitigen Pyramide ist gleich dem Producte aus der Grundfläche und dem dritten Theile der Höhe.

Da jede *mehrseitige* Pyramide in eine dreiseitige von gleicher Grundfläche und Höhe verwandelt werden kann, so gilt allgemein der Satz:

Der Cubikinhalt einer jeden Pyramide ist gleich dem Producte aus der Grundfläche und dem dritten Theile der Höhe.

Es sei z. B. die Grundfläche einer Pyramide $3\square^{dm}\ 87\square^{cm}$ und die Höhe $5^{dm}\ 9^{cm}$; wie groß ist der Cubikinhalt?

$$3\square^{dm}\ 87\square^{cm} = 3\cdot87^{dm};\ 4^{dm}\ 9^{cm} = 4\cdot9^{dm}$$

$$3\cdot87 \times \frac{4\cdot9}{3} = 6\cdot321 \text{ Cub.}^{dm} = 6 \text{ Cub.}^{dm}\ 321 \text{ Cub.}^{cm}.$$

Oberfläche eines Kegels.

§. 124. Für die Bestimmung der Mantelfläche eines senkrechten Kegels folgt aus §. 105 und §. 44:

Die Mantelfläche eines senkrechten Kegels ist gleich dem Producte aus dem Umfange seiner Grundfläche und der halben Seite.

Um die *ganze Oberfläche* eines senkrechten Kegels zu erhalten addirt man zu der Mantelfläche den Inhalt der Grundfläche.

Drückt man durch r, s, m und o bezüglich den Halbmesser der Grundfläche, die Seite, die Mantelfläche und die Oberfläche eines senkrechten Kegels aus, so ist

$$m = 2 r \pi . \frac{s}{2}, \text{ oder } m = r s \pi, \text{ und}$$

$$o = r^2 \pi + r s \pi, \text{ oder } o = r \pi (r + s).$$

Im gleichseitigen Kegel ist $s = 2 r$, daher $o = 3 r^2 \pi$.

Es sei z. B. die Seite eines senkrechten Kegels 4^{dm}, und der Durchmesser der Grundfläche $2^{dm}\ 8^{m}$; wie groß ist die Oberfläche?

$$\begin{aligned} \text{Umfang der Grundfläche} &= 2 \cdot 8 \times 3 \cdot 1416 = 8 \cdot 7965^{dm} \\ \text{Mantelfläche} &= 8 \cdot 7965 \times 2 \quad = 17 \cdot 593 \square^{dm} \\ \text{Grundfläche} &= 8 \cdot 7965 \times 0 \cdot 7 = \underline{\ \ 6 \cdot 1575 \square^{dm}} \\ \text{Oberfläche} &= 23 \cdot 7505 \square^{dm} \\ &= 23 \square^{dm}\ 75 \square^{cm}\ 5 \square^{mm}. \end{aligned}$$

Cubikinhalt eines Kegels.

§. 125. Da ein Kegel als eine Pyramide, deren Grundfläche ein regelmäßiges Vieleck von unendlich vielen Seiten ist, betrachtet werden kann, so folgt aus §. 123:

Der Cubikinhalt eines Kegels ist gleich dem Producte aus der Grundfläche und dem dritten Theile der Höhe desselben.

Behalten r und s die obigen Bedeutungen, und drücken h und c bezüglich die Höhe und den Cubikinhalt des Kegels aus, so ist

$$c = r^2 \pi . \frac{h}{3}, \text{ oder } c = \frac{r^2 h \pi}{3}.$$

Für den senkrechten Kegel ist $h = \sqrt{s^2 - r^2}$, daher

$$c = \frac{r^2 \pi}{3} \sqrt{s^2 - r^2}.$$

Im gleichseitigen Kegel ist $s = 2 r$, daher

$$c = \frac{r^3 \pi}{3} \sqrt{3}.$$

Ist z. B. der Halbmesser der Grundfläche 7^{cm}, und die Höhe des Kegels 6^{cm}; so hat man

Grundfläche $= 7^2 \times 3 \cdot 14 = 153 \cdot 86 \square^{cm}$

Cubikinhalt des Kegels $= 153 \cdot 86 \times \frac{6}{3} = 307 \cdot 72$ Cub.^{cm}.

§. 126. Aufgaben.

1. Wie groß ist die Seitenoberfläche einer senkrechten fünfseitigen Pyramide, deren Seitenhöhe 9^{dm} beträgt und deren Grundfläche 8^{dm} zur Seite hat?
2. In einer senkrechten Pyramide ist die Grundfläche ein Quadrat von $1^{m}\ 3^{dm}$ Seitenlänge; wie groß ist die Oberfläche der Pyramide, wenn deren Seitenhöhe $1^{m}\ 8^{dm}$ beträgt?
3. In einer senkrechten Pyramide mit quadratischer Grundfläche beträgt die Seitenoberfläche $1 \cdot 036 \square^{m}$, die Seitenhöhe $1 \cdot 48^{m}$; wie groß ist eine Seite der Grundfläche?

4. Man berechne die Oberfläche einer senkrechten Pyramide, deren Seitenkante $10 \cdot 8^{dm}$ und deren Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck von der Seitenlänge $4 \cdot 5^{dm}$ ist.
5. In einer Pyramide ist a) die Grundfläche $17\square^{dm}$, die Höhe 9^{dm}; b) die Grundfläche $3 \cdot 46\square^{m}$, die Höhe $2 \cdot 16^{m}$; c) die Grundfläche $1\square^{m}$ $17\square^{dm}$ $10 \cdot 8\square^{cm}$, die Höhe 3^{m} 8^{dm}; wie groß ist der Cubikinhalt der Pyramide?
6. In einer dreiseitigen Pyramide beträgt die Höhe 5^{m} $48 \cdot 3^{cm}$, und jede Seite der Grundfläche 2^{m} $80 \cdot 4^{cm}$; wie groß ist der Cubikinhalt?
7. Die Grundfläche einer 2^{m} 9^{dm} hohen Pyramide ist ein regelmäßiges Sechseck von 1^{m} 2^{dm} Seitenlänge; man suche den Cubikinhalt.
8. Eine senkrechte Pyramide hat ein Quadrat von 4^{dm} Seitenlänge zur Grundfläche und eine Seitenkante von 1^{dm} 3^{cm}; wie groß ist der Cubikinhalt?
9. In einer Pyramide ist die Grundfläche ein Rechteck von $1 \cdot 1^{m}$ Länge und $0 \cdot 9^{m}$ Breite und der Cubikinhalt $1 \cdot 188$ Cub.^{m}; wie groß ist die Höhe?
10. Der Cubikinhalt einer 7^{dm} 5^{cm} hohen Pyramide mit quadratischer Grundfläche ist 40 Cub.^{dm}; wie groß ist eine Seite der Grundfläche?
11. Das Dach eines Gartenhauses ist eine achtseitige Pyramide, deren Seitenkante 1^{m} 5^{dm} ist und deren Grundfläche 1^{m} zur Seite hat; es soll mit Kupfer eingedeckt werden; wie viel $\square^{m}$ Kupferplatten braucht man dazu?
12. Die Pyramide des Cheops bei Gizeh in Egypten ist nach den neueren Messungen 149^{m} hoch; die Grundfläche ist ein Quadrat von 233^{m} Seitenlänge; wie groß ist ihr Cubikinhalt?
13. Eine vierseite Pyramide, deren quadratische Grundfläche 4^{m} 6^{dm} im Umfange hat, ist 1^{m} 5^{dm} hoch; wie groß ist ihr Gewicht, wenn das Cub.^{dm} $2 \cdot 7$ Kilogr. wiegt?
14. Wie viel wiegt eine dreiseitige, 8^{dm} hohe Pyramide aus Gußeisen, wenn jede Seite der Grundfläche $2 \cdot 8^{dm}$ beträgt, und wenn 1 Cub.^{dm} Gußeisen $7 \cdot 1$ Kilogramm wiegt?
15. Wie hoch kommt eine pyramidale Denksäule aus Granit, deren Höhe $5 \cdot 2^{m}$ beträgt und deren Grundfläche ein Quadrat von $1 \cdot 2^{m}$ Seitenlänge ist, wenn das Cub.^{m} mit 168 fl. 20 kr. bezahlt wird?

---

16. In einem senkrechten Kegel beträgt a) der Halbmesser der Grundfläche $3 \cdot 81^{dm}$, die Seite $5 \cdot 26^{dm}$; b) der Halbmesser der Grundfläche 1^{m} 1^{dm} 9^{cm}, die Seite 2^{m} 2^{dm} 2^{cm}; wie groß ist m) die Mantelfläche, n) die Oberfläche des Kegels? ($\pi = 3 \cdot 14$.)
17. Bestimme die Oberfläche eines senkrechten, $1\frac{1}{4}^{m}$ hohen Kegels, dessen Grundfläche a) 1^{m}, b) $8\frac{3}{4}^{dm}$, c) $5 \cdot 5^{dm}$ zum Durchmesser hat. ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

18. Die Grundfläche eines senkrechten Kegels beträgt $15\square^{dm}$, die Seite 4^{dm}; wie groß ist die Mantelfläche desselben? ($\pi = 3 \cdot 14$.)
19. Die Mantelfläche eines senkrechten Kegels ist $23 \cdot 55\square^{dm}$; der Halbmesser seiner Grundfläche $1^{dm}\ 5^{cm}$; wie groß ist a) die Seitenkante, b) die Höhe des Kegels? ($\pi = 3 \cdot 14$.)
20. Die Mantelfläche eines senkrechten Kegels, dessen Seite 21^{cm} beträgt, ist $20 \cdot 81\square^{cm}$; man suche den Durchmesser der Grundfläche ($\pi = 3 \cdot 14$).
21. In einem Kegel beträgt a) der Durchmesser der Grundfläche 5^{dm}, die Höhe $4^{dm}\ 8^{cm}$; b) der Durchmesser der Grundfläche $2^{dm}\ 3^{cm}$, die Höhe $3^{dm}\ 6^{cm}$; wie groß ist der Cubikinhalt des Kegels? ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)
22. Wie viel Cub.^{m} enthält ein Kegel von $2^{m}\ 9^{dm}$ Höhe, wenn der Halbmesser der Grundfläche 27^{cm} ist?
23. In einem senkrechten Kegel, welcher 4^{m} hoch ist, beträgt der Durchmesser der Basis $2 \cdot 1582^{m}$; wie groß ist a) die Oberfläche, b) der Cubikinhalt des Kegels? ($\pi = 3 \cdot 1416$.)
24. In einem senkrechten Kegel beträgt der Umfang der Grundfläche $25 \cdot 37^{dm}$ und eine Seitenkante $18 \cdot 45^{dm}$; wie groß ist der Cubikinhalt?
25. Wie hoch ist ein Kegel, dessen Inhalt 1 Cub.^{m} $137 \cdot 85$ Cub.^{dm} ist und dessen Grundfläche $8 \cdot 42^{dm}$ im Durchmesser hat?
26. Der Cubikinhalt eines Kegels ist $84 \cdot 78$ Cub.^{dm}, seine Höhe 9^{dm}; wie groß ist der Durchmesser der Grundfläche?
27. Wie groß ist die Oberfläche eines senkrechten Kegels, dessen Inhalt $25 \cdot 7892$ Cub.^{m} ist, und dessen Grundfläche $11 \cdot 346^{m}$ im Umfange hat? ($\pi = 3 \cdot 1416$.)
28. In einem senkrechten Kegel beträgt die Höhe $5^{dm}\ 8^{cm}$, eine Seite $6^{dm}\ 4^{cm}$; wie groß ist der Cubikinhalt?
29. Wie groß ist die Oberfläche eines gleichseitigen Kegels, dessen Seite 5^{dm} ist?
30. Suche den Cubikinhalt eines gleichseitigen Kegels von $2 \cdot 142^{m}$ Seitenlänge. ($\pi = \frac{355}{113}$.)
31. Das kegelförmige Dach eines Thurmes, welches $3 \cdot 8^{m}$ Seitenlänge und unten $3 \cdot 2^{m}$ im Durchmesser hat, soll mit Kupferblech eingedeckt werden; wie viel $\square^{m}$ Blech braucht man dazu?
32. Ein kegelförmiger Trichter hat $2 \cdot 1^{dm}$ Durchmesser und $2 \cdot 8^{dm}$ Seitenlänge; wie viel $\square^{dm}$ Blech ist dazu erforderlich?
33. Ein Hut Zucker hat $5 \cdot 8^{dm}$ Höhe und in der Grundfläche $2 \cdot 6^{dm}$ Durchmesser; wie groß ist sein Inhalt?
34. Eine Tanne, welche einem Kegel gleicht, hat am untern Ende $6 \cdot 2^{dm}$ im Durchmesser und ist 18^{m} hoch; wie viel Cubikinhalt hat sie?
35. Wie viel wiegt ein 2^{dm} hoher Glaskegel, dessen Grundfläche $1 \cdot 8^{dm}$ im Durchmesser hat, wenn 1 Cub.^{dm} Glas $2 \cdot 8$ Kilogr. wiegt?

36. Ein Kegel von Messing, welcher $1{\cdot}62^{dm}$ hoch ist, wiegt $3{\cdot}56076$ Kilogr.; wie groß ist der Halbmesser der Grundfläche, wenn 1 Cub.^{dm} Messing $8{\cdot}4$ Kilogr. wiegt? ($\pi = 3{\cdot}1416$.)

37. Ein kegelförmiger Sandhügel, der $82{\cdot}4^{m}$ Umfang und $9{\cdot}6^{m}$ Höhe hat, wird abgegraben; wie viel Cub.^{m} Sand liefert derselbe, wenn sich der Sand durch das Auflockern um $\frac{1}{5}$ vermehrt?

38. Wie groß muß die Höhe eines Filtrirtrichters von 2^{dm} Durchmesser sein, damit er genau ein Liter halte?

39. Ein aufgeschütteter Kornhaufen hat die Form eines Kegels, dessen Höhe $1{\cdot}7^{m}$ und dessen Umfang am Boden $10{\cdot}5^{m}$ beträgt; wie viel Hektoliter Korn enthält der Haufen?

40. Ein Kegel hat $3{\cdot}2^{m}$ zur Seite und eine Grundfläche von $1{\cdot}2^{m}$ Halbmesser; a) wie viel Meter 85^{cm} breites Zeug ist zu seiner Bekleidung nöthig; b) wie theuer kommt die Bekleidung, wenn 1 Meter Zeug 1 fl. 85 kr. kostet?

3. Ausmessung der abgekürzten Pyramiden und Kegel.

Oberfläche einer abgekürzten Pyramide.

§. 127. Um die Oberfläche einer abgekürzten Pyramide zu erhalten, bestimmt man zuerst die Seitenflächen als Trapeze, und addirt zu ihrer Summe die beiden Grundflächen.

Z. B. Die untere Grundfläche eines Pyramidalstumpfes ist ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite 25^{cm}, die obere Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite 21^{cm}; die Höhen der Seitentrapeze sind 4^{dm}, 38^{cm} und 34^{cm}; wie groß ist die Oberfläche?

$$\text{Trapez I} = \frac{25+21}{2} \times 40 = 920\,\square^{cm}$$
$$\text{„ II} = \frac{25+21}{2} \times 38 = 874\,\square^{cm}$$
$$\text{„ III} = \frac{25+21}{2} \times 34 = 782\,\square^{cm}$$
$$\text{untere Grundfläche} = 270{\cdot}6\,\square^{cm}$$
$$\text{obere „ „} = 190{\cdot}9\,\square^{cm}$$
$$\text{Oberfläche} = 3037{\cdot}5\,\square^{cm}$$

Ist der Pyramidalstumpf senkrecht, so braucht man nur ein Seitentrapez zu bestimmen und dessen Flächeninhalt mit der Zahl der Seitenkanten zu multipliciren; das Product gibt die Seitenoberfläche.

Cubikinhalt einer abgekürzten Pyramide.

§. 128. Um den Cubikinhalt einer abgekürzten Pyramide zu finden, bestimme man die Körperinhalte der beiden Pyramiden, deren Differenz der Pyramidalstumpf ist, und subtrahire den Inhalt der kleineren Pyramide von jenem der größeren.

Z. B. Bei einem Pyramidalstumpfe, dessen Grundflächen Quadrate sind, beträgt eine Seite der untern Grundfläche 2.9^m, eine Seite der obern Grundfläche $2 \cdot 1^m$, die Höhe $2 \cdot 4^m$; wie groß ist der Cubikinhalt?

größere Pyramide

Grundfläche $= 2 \cdot 9^2 = 8 \cdot 41 \square^m$

Höhe $= \frac{2 \cdot 4}{2 \cdot 9 - 2 \cdot 1} \times 2 \cdot 9 = 8 \cdot 7^m$

Cubikinhalt $= 8 \cdot 41 \times \frac{8 \cdot 7}{3} = 24 \cdot 389$ Cub.^{m};

kleinere Pyramide

Grundfläche $= 2 \cdot 1^2 = 4 \cdot 41 \square^m$

Höhe $= \frac{2 \cdot 4}{2 \cdot 9 - 2 \cdot 1} \times 2 \cdot 1 = 6 \cdot 3^m$

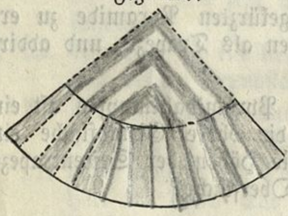
Cubikinhalt $= 4 \cdot 41 \times \frac{6 \cdot 3}{3} = 9 \cdot 261$ Cub.^{m}

Cubikinhalt des Pyramidalstumpfes $= 15 \cdot 128$ Cub.^{m}.

Oberfläche eines abgekürzten Kegels.

§. 129. Denkt man sich (Fig. 107) die Mantelfläche eines senkrechten Kegelstumpfes auf eine Ebene abgewickelt, so erscheint dieselbe als das Stück eines Kreisringes, dessen Bogen den Umfängen der beiden Grundflächen gleich sind, und um die Seite des Kegelstumpfes von einander abstehen. Dieses Ringstück kann nun aus unzählig vielen Trapezen zusammengesetzt betrachtet, und daher berechnet werden, wenn man in jedem dieser Trapeze die Summe der beiden parallelen Seiten, d. i. zweier gegenüberstehenden Bogenstücke, mit dem halben Abstande, d. i. mit der halben Seite des Kegelstumpfes multiplicirt, und diese Trapezflächen addirt; oder, was einerlei ist, wenn man sogleich alle gegenüberstehenden Bogenstücke, d. i. die Umfänge der beiden Grundflächen addirt, und ihre Summe mit der halben Seite des Kegelstumpfes multiplicirt. Daraus folgt:

Fig. 107.



Die Mantelfläche eines abgekürzten senkrechten Kegels ist gleich dem Producte aus der Summe der Umfänge der beiden Grundflächen in die halbe Seite.

Werden zu der Mantelfläche noch die beiden Grundflächen addirt, so erhält man die ganze Oberfläche.

Z. B. Die Halbmesser der Grundflächen eines senkrechten Kegelstumpfes sind 9^{dm} und 6^{dm}, eine Seite beträgt 4^{dm}; wie groß ist die Oberfläche?

Umfang der unteren Grundfläche $= 18 \times 3 \cdot 14 = 56 \cdot 52^{dm}$

„ „ oberen „ $= 12 \times 3 \cdot 14 = 37 \cdot 68^{dm}$

$94 \cdot 2^{dm}$

Mantelfläche $= 94 \cdot 2 \times 2 = 188 \cdot 4 \square^{dm}$

untere Grundfläche $= 56 \cdot 52 \times 4 \cdot 5 = 254 \cdot 34 \square^{dm}$

obere „ $= 37 \cdot 68 \times 3 = 113 \cdot 04 \square^{dm}$

Oberfläche $= 555 \cdot 78 \square^{dm}$.

Cubikinhalt eines abgekürzten Kegels.

§. 130. Der Cubikinhalt eines abgekürzten Kegels wird bestimmt, indem man die Cubikinhalte der beiden Kegel, deren Differenz der Kegelstumpf ist, berechnet und von einander subtrahirt.

Wie groß ist z. B. der Inhalt eines Kegelstumpfes, dessen Höhe $3 \cdot 5^{dm}$ beträgt, und dessen Grundflächen 5^{dm} und 4^{dm} zu Durchmessern haben?

größerer Kegel

$$\text{Grundfläche} = 2 \cdot 5^2 \times 3 \cdot 14 = 19 \cdot 625 \square^{dm}$$

$$\text{Höhe} = \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 5 - 2} \times 2 \cdot 5 = 17 \cdot 5^{dm}$$

$$\text{Cubikinhalt} = 19 \cdot 625 \times \frac{17 \cdot 5}{3} = 114 \cdot 479 \text{ Cub.}^{dm}$$

kleinerer Kegel

$$\text{Grundfläche} = 2^2 \times 3 \cdot 14 = 12 \cdot 56 \square^{dm}$$

$$\text{Höhe} = \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 5 - 2} \times 2 = 14^{dm}$$

$$\text{Cubikinhalt} = 12 \cdot 56 \times \tfrac{14}{3} = \underline{58 \cdot 613 \text{ Cub.}^{dm}}$$

$$\text{Cubikinhalt des Kegelstumpfes} = 55 \cdot 866 \text{ Cub.}^{dm}.$$

§. 131. Aufgaben.

1. Die Grundflächen eines senkrechten Pyramidalstumpfes sind Quadrate mit den Umfängen $1 \cdot 56^m$ und $1 \cdot 24^m$, die Höhe eines Seitentrapezes beträgt $0 \cdot 63^m$; wie groß ist die Oberfläche?
2. In einer senkrechten abgekürzten Pyramide ist die Seitenoberfläche $3 \cdot 56 \square^m$; die beiden Grundflächen sind gleichseitige Dreiecke, und zwar die untere mit $4 \cdot 9^{dm}$, die obere mit $3 \cdot 6^{dm}$ Seitenlänge; wie groß ist die Höhe eines Seitentrapezes?
3. Ein vierkantiger Balken von $5 \cdot 1^m$ Länge wird nach dem obern Ende allmälig schmäler; die beiden Endflächen sind Quadrate mit $0 \cdot 5^m$ und $0 \cdot 4^m$ langen Seiten; wie groß ist seine ganze Oberfläche?
4. Bei einem vierkantigen Balken hat der untere quadratische Querschnitt $5 \cdot 2^{dm}$, der obere 4^{dm} Seitenlänge; wie groß ist der Inhalt dieses Balkens, wenn dessen Länge 4^m beträgt?
5. Ein Pyramidalstumpf hat $1 \cdot 26^m$ Höhe, seine Grundflächen sind gleichseitige Dreiecke; wie groß ist der Cubikinhalt, wenn eine Seite der unteren Grundfläche $0 \cdot 82^m$ und der oberen $0 \cdot 42^m$ beträgt?
6. Ein behauener Stein, welcher die Form einer abgekürzten vierseitigen Pyramide hat, ist $2 \cdot 2^m$ hoch, unten $1 \cdot 1^m$ breit und 1^m dick, oben $0 \cdot 8^m$ breit und $0 \cdot 73^m$ dick; wie groß ist sein Gewicht, wenn 1 Cub.^{dm} $2 \cdot 7$ Kilogr. wiegt?

---

7. Die Grundflächen eines senkrechten abgekürzten Kegels haben $0 \cdot 7^m$ und $0 \cdot 3^m$ zu Durchmessern; wie groß ist die Oberfläche, wenn die Seite $1 \cdot 2^m$ beträgt? ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

8. Berechne die Mantelfläche eines senkrechten Kegelstumpfes, dessen Grundflächen 5□^{dm} und 4□^{dm} Inhalt haben und dessen Seite 3^{dm} ist. ($\pi = 3\cdot14$.)
9. In einem senkrechten Kegelstumpf sind die Umfänge der Grundflächen $1\cdot36^{m}$ und $0\cdot94^{m}$, die Höhe 1^{m}; wie groß ist a) die Oberfläche b) der Cubikinhalt desselben?
10. Die Mantelfläche eines senkrechten Kegelstumpfes beträgt $50\cdot24$□^{dm}, der Umfang der unteren Grundfläche desselben $9\cdot42^{dm}$, die Seite 7^{dm}; wie groß ist der Durchmesser der oberen Grundfläche?
11. Es sei der Halbmesser der größeren Kreisfläche eines 1^{m} hohen senkrechten Kegelstumpfes $0\cdot9^{m}$, der Halbmesser der kleineren Kreisfläche $0\cdot2^{m}$; wie groß ist der Cubikinhalt?
12. In einem senkrechten Kegelstumpf betragen die Halbmesser der beiden Grundflächen $3\cdot5^{dm}$ und $3\cdot1^{dm}$, die Seite $17\cdot2^{dm}$; wie groß ist a) die Mantelfläche, b) der Cubikinhalt des Stumpfes?
13. Es soll ein rundes kupfernes Gefäß verfertigt werden, dessen Bodendurchmesser $0\cdot8^{m}$, dessen oberer Durchmesser $0\cdot9$, und dessen Seitenlänge $1\cdot2^{m}$ ist; wie viel □^{m} Kupferblech sind dazu erforderlich?
14. Wie hoch muß ein in Form eines Kegelstumpfes anzufertigendes Flüssigkeitsmaß sein, welches 10 Liter faßt, wenn der untere Durchmesser 24^{cm}, der obere 27^{cm} beträgt?
15. Ein silberner Becher, welcher $1\cdot5^{dm}$ tief, oben $1\cdot2^{dm}$ und unten $0\cdot8^{dm}$ weit ist, soll von innen vergoldet werden; wie viel wird die Vergoldung kosten, wenn man für das □^{dm} 4 fl. 85 kr. zahlt?
16. Wie viel Cubikfuß enthält ein runder abgestumpfter Baumstamm von 7^{m} Länge, wenn die größere Querschnittfläche $0\cdot76^{m}$ und die kleinere $0\cdot5^{m}$ im Durchmesser hat?

    Betrachtet man den Baumstamm als einen abgekürzten Kegel, so erhält man $2\cdot212$ Cub.^{m} als dessen Körperinhalt. In der Praxis begnügt man sich dabei jedoch gewöhnlich mit einer blos angenäherten Bestimmung und rechnet den Baumstamm als einen Cylinder, dessen Höhe gleich ist der Länge und dessen Grundfläche gleich ist der halben Summe der beiden Schnittflächen des Baumstammes; man erhält nach dieser Annahme für den obigen Baumstamm $2\cdot277$ Cub.^{m} als Inhalt.

17. Ein Baumstamm ist am untern Ende 64^{cm}, am obern 36^{cm} dick; wie lang ist er, wenn er 11 Cub.^{dm} 434 Cub.^{cm} 167 Cub.^{mm} hält?
18. Ein Braubottich hat oben im Lichten einen Durchmesser von $1\cdot8^{m}$, unten von $2\cdot2^{m}$, und ist $1\cdot5^{m}$ hoch; wie viel Hektoliter hält er?

4. Ausmessung der regelmäßigen Polyeder.

§. 132. Wie die Oberfläche und der Inhalt eines Hexaeders oder Würfels berechnet werden, ist in §§. 110 und 111 gezeigt worden. Es bleiben daher nur das Tetraeder, Oktaeder, Ikosaeder und Dodekaeder zu betrachten übrig.

Die Oberflächen des Tetraeders, Oktaeders und Ikosaeders bestehen aus lauter gleichseitigen Dreiecken, und können nach den bisher vorgetragenen Lehren berechnet werden. Schwieriger gestaltet sich die Berechnung der Oberfläche eines Dodekaeders, sowie des Cubikinhaltes aller dieser Körper. Hier folgen daher die Oberflächen und die Cubikinhalte derselben für die Kantenlänge = 1.

Tetraeder	Oberfläche	1·73205,	Inhalt	0·11785;
Oktaeder	„	3·46410,	„	0·47140;
Ikosaeder	„	8·66025,	„	2·18169;
Dodekaeder	„	20·64573,	„	7·66312;

Da sich, wie für den Würfel in §§. 110 und 111 nachgewiesen wurde, allgemein die Oberflächen der regelmäßigen Polyeder wie die zweiten Potenzen ihrer Kanten, und die Cubikinhalte derselben wie die dritten Potenzen der Kanten verhalten, so erhält man aus den hier für die Kante 1 angeführten Oberflächen und Inhalten der regelmäßigen Polyeder die Oberfläche und den Inhalt eines regelmäßigen Polyeders von irgend einer Kantenlänge, wenn man die ersteren bezüglich mit der zweiten oder dritten Potenz der gegebenen Kanten multiplicirt.

Z. B. Ist die Kante eines Dodekaeders 1^{dm}, so ist die Oberfläche $= 20\cdot64573\square^{dm}$ und der Inhalt $= 7\cdot66312$ Cub.^{dm}; für ein Dodekaeder, dessen Kante 3^{dm} ist, ist daher die Oberfläche $= 20\cdot64573\square^{dm} \times 9 = 185\cdot812\square^{dm}$, der Cubikinhalt $= 7\cdot66312$ Cub.$^{dm} \times 27 = 206\cdot904$ Cub.^{dm}.

§. 133. Aufgaben.

1. Die Kante eines Tetraeders beträgt 5^{dm}; wie groß ist a) die Oberfläche, b) der Inhalt desselben?
2. In einem Oktaeder ist eine Kante $0\cdot08^{m}$; bestimme die Oberfläche desselben a) nach der obigen Tabelle, b) durch Berechnung der gleichseitigen Grenzdreiecke.
3. Wie groß ist a) die Oberfläche, b) der Cubikinhalt eines Ikosaeders von $0\cdot6^{dm}$ Kantenlänge?
4. Wie groß ist a) die Oberfläche, b) der Inhalt eines Dodekaeders von 4^{cm} Kantenlänge?
5. Die Oberfläche eines Tetraeders ist $27\cdot712\square^{dm}$; wie groß ist jede Kante desselben?
6. Der Cubikinhalt eines Ikosaeders ist $4\cdot261$ Cub.^{dm}; wie groß ist eine Kante?

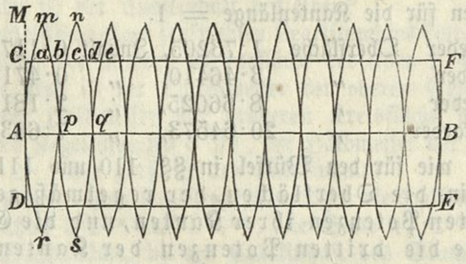
5. Ausmessung der Kugel.

Oberfläche einer Kugel.

§. 134. Bei der Bestimmung der Oberfläche der Kugel wird es am zweckmäßigsten sein, das Netz derselben zu Hilfe zu nehmen.

Ist Fig. 108 das nach §. 108 ausgeführte Netz einer Kugel vom Durchmesser CD, also AB dem Umfange eines größten Kreises gleich, und AM nahe $\frac{3}{4}$ des Durchmessers, so geben die linsenförmigen Figuren

Fig. 108.



Ampr, pnqs, ... zusammen sehr angenähert die ganze Kugeloberfläche. Macht man nun AC und AD gleich dem Halbmesser der Kugel, und construirt das Rechteck CDEF, so enthalten die Linsenstücke amb, cnd,... nahe dieselben Flächenräume, wie die Bestandtheile bpc, dqe,... des Rechteckes. Man wird also gewiß nicht ferne von der Wahrheit sein, wenn man anstatt der Figuren amb, cnd,... die Figuren bpc, dqe,... setzt, wodurch sich die Oberfläche der Kugel in die Fläche des Rechteckes CDEF verwandelt, dessen Grundfläche DE dem Umfange eines größten Kreises, und dessen Höhe CD dem Durchmesser der Kugel gleich ist. Da nun der Flächeninhalt dieses Rechteckes dem Producte aus dem Umfange eines größten Kreises und dem Durchmesser gleich ist, so folgt:

Die Kugeloberfläche ist gleich dem Producte aus dem Umfange eines größten Kreises und dem Durchmesser.

Der strenge Beweis für diesen Satz, dessen angenäherte Richtigkeit hier durch eine anschauliche Construction erkannt wurde, gehört in die geometrische Wissenschaftslehre.

Es sei z. B. 8^{cm} der Durchmesser einer Kugel; wie groß ist ihre Oberfläche?

Der Umfang eines größten Kreises ist $8 \times 3 \cdot 14 = 25 \cdot 12^{cm}$, daher die Oberfläche $25 \cdot 12 \times 8 = 200 \cdot 96 \square^{cm}$.

Heißt o die Oberfläche einer Kugel, und r ihr Halbmesser, so ist $o = 2 r \pi \times 2 r$, oder $o = 4 r^2 \pi$. Da $r^2 \pi$ den Flächeninhalt eines größten Kreises vorstellt, so kann man auch sagen:

Die Oberfläche einer Kugel ist gleich dem 4fachen Flächeninhalte eines größten Kreises.

Bedeutet O die Oberfläche, und R den Halbmesser einer zweiten Kugel, so ist $O = 4 R^2 \pi$; mithin $O : o = R^2 : r^2$; d. h.

Die Oberflächen zweier Kugeln verhalten sich so zu einander, wie die zweiten Potenzen ihrer Halbmesser.

§. 135. Aus der bekannten Oberfläche einer Kugel kann der Halbmesser bestimmt werden. Es ist nämlich die Oberfläche das Product aus der 4fachen Ludolphischen Zahl und dem Quadrate des Halbmessers. Wird daher die Oberfläche durch die 4fache Ludolphische Zahl dividirt, so erhält man das Quadrat des Halbmessers zum Quotienten; um den Halbmesser selbst zu finden, darf man dann nur aus jenem Quotienten die Quadratwurzel ausziehen. Es ist also $r = \sqrt{\frac{o}{4\pi}}$.

Z. B. Wie groß ist der Halbmesser einer Kugel, deren Oberfläche $10\square^{dm}$ beträgt?

$$4\pi = 12 \cdot 566; \qquad 10 : 12 \cdot 566 = 0 \cdot 7958$$
$$\sqrt{0 \cdot 7958} = 0 \cdot 89^{dm}.$$

Cubikinhalt einer Kugel.

§. 136. Wenn man durch den Mittelpunct einer Kugel unzählig viele Ebenen legt, so wird dadurch die Kugel in unendlich viele pyramidenartige Körper zerlegt, welche sich desto mehr Pyramiden nähern, je kleiner die Stücke der Kugeloberfläche sind, die ihnen zur Grundfläche dienen. Für eine solche, mit einer unendlich kleinen Grundfläche versehene Pyramide kann man den Kugelhalbmesser als Höhe annehmen. Den Inhalt aller dieser Pyramiden findet man nun, wenn man jede einzelne Grundfläche mit dem dritten Theile der gemeinschaftlichen Höhe, d. i. des Kugelhalbmessers multiplicirt, und die gefundenen Werthe addirt; oder kürzer, wenn man sogleich alle Grundflächen addirt, und diese Summe, welche die Kugeloberfläche gibt, mit dem dritten Theile des Halbmessers der Kugel multiplicirt.

Der Cubikinhalt einer Kugel ist also gleich dem Producte aus der Oberfläche derselben und dem dritten Theile des Halbmessers.

Z. B. Für eine Kugel, welche 4^{dm} im Durchmesser hat, ist die Oberfläche $= 4 \times 2^2 \times 3 \cdot 141 = 50 \cdot 26\square^{dm}$, daher der Körperinhalt $= 50 \cdot 26 \times \frac{2}{3} = 33 \cdot 51$ Cub.^{dm}.

Heißt r der Halbmesser, und c der Cubikinhalt einer Kugel, so ist die Oberfläche derselben $= 4\, r^2 \pi$, und daher $c = 4\, r^2 \pi \times \frac{r}{3}$, oder $c = \frac{4}{3} \pi \times r^3$; d. h.

Der Cubikinhalt einer Kugel ist gleich dem Producte aus der dritten Potenz des Halbmessers und $\frac{4}{3}$ der Ludolphischen Zahl.

Bedeutet eben so R den Halbmesser, und C den Cubikinhalt einer zweiten Kugel, so ist $C = \frac{4}{3} \pi \times R^3$, daher $C : c = R^3 : r^3$; d. h.

Die Cubikinhalte zweier Kugeln verhalten sich so zu einander, wie die dritten Potenzen ihrer Halbmesser.

§. 137. Wenn man den Cubikinhalt einer Kugel kennt, und den Halbmesser derselben finden will, so darf man nur den Cubikinhalt durch $\frac{4}{3}$ der Ludolphischen Zahl dividiren; der Quotient stellt den Cubus des Halbmessers vor; wird aus diesem Quotienten die Cubikwurzel ausgezogen, so erhält man den Halbmesser selbst. Es ist also $r = \sqrt[3]{\frac{c}{\frac{4}{3}\pi}}$.

Wie groß ist z. B. der Halbmesser einer Kugel, welche 5 Cub.^{m} Inhalt hat?

$3 \cdot 14 \times \frac{4}{3} = 4 \cdot 19; \; 5 : 4 \cdot 19 = 1 \cdot 193$

$\sqrt[3]{1 \cdot 193} = 1 \cdot 06^{m}$ Halbmesser.

§. 138. Aufgaben.

1. Der Halbmesser einer Kugel ist a) 2^{dm}, b) $1 \cdot 5^{m}$, c) $1^{m}\ 2^{dm}\ 5^{cm}$, d) $25\frac{1}{2}^{cm}$; wie groß ist die Oberfläche? ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)
2. Der Durchmesser einer Kugel ist a) 9^{cm}, b) $1 \cdot 6^{m}$, c) $1^{dm}\ 3 \cdot 6^{cm}$; wie groß ist der Cubikinhalt? ($\pi = 3 \cdot 14$.)
3. Der Umfang eines größten Kugelkreises beträgt $7 \cdot 427^{m}$; wie groß ist a) die Oberfläche, b) der Cubikinhalt der Kugel? ($\pi = 3 \cdot 14$.)
4. Wie groß ist der Cubikinhalt einer Kugel, deren größter Kreis $12\square^{m}\ 6\square^{dm}\ 37\square^{cm}$ Inhalt hat? ($\pi = 3 \cdot 1416$.)
5. Die Oberfläche einer Kugel beträgt a) $36\square^{dm}$, b) $572 \cdot 555\square^{cm}$, c) $1\square^{m}\ 2\square^{dm}\ 7 \cdot 035\square^{cm}$; wie groß ist der Halbmesser? ($\pi = \frac{355}{113}$.)
6. Suche den Halbmesser einer Kugel, deren Cubikinhalt a) $33510 \cdot 4$ Cub.^{cm}, b) 5 Cub.^{m} 712 Cub.^{dm} beträgt? ($\pi = 3 \cdot 14$.)
7. Wie groß ist der Cubikinhalt einer Kugel, deren Oberfläche $15\square^{dm}$ beträgt?
8. Der Cubikinhalt einer Kugel ist 15 Cub.^{dm}; es soll ihre Oberfläche bestimmt werden.
9. Eine Kugel aus Sandstein hat $4 \cdot 4^{m}$ im Durchmesser, wie groß ist ihre Oberfläche?
10. Der Durchmesser einer Kegelkugel beträgt $11 \cdot 5^{cm}$; wie groß ist a) ihre Oberfläche, b) ihr Cubikinhalt, c) ihr Gewicht, wenn das Cubikdecimeter zu $1 \cdot 05$ Kilogr. gerechnet wird?
11. Ein kugelrunder Thurmknopf soll vergoldet werden; wie hoch kommt die Vergoldung, wenn der Durchmesser $1 \cdot 05^{m}$ beträgt und wenn für $1\square^{m}$ Vergoldung 28 fl. 80 kr. zu zahlen ist?
12. Wie viel kostet $1\square^{dm}$ der Vergoldung eines Thurmknopfes, dessen Durchmesser $8 \cdot 9^{dm}$ ist, wenn die ganze Vergoldung $78 \cdot 92$ fl. kostet?
13. Der Umfang des Erdäquators ist 5400 geogr. Meilen; wie groß ist die Oberfläche unserer Erde, wenn man diese als eine vollkommene Kugel betrachtet, von welcher der Aequator einen größten Kreis vorstellt? ($\pi = 3 \cdot 14159$.)
14. Der Durchmesser eines Erdglobus ist 32^{cm}; wie verhält sich dessen Oberfläche zu der Oberfläche der Erde? (1 geogr. $\square$ Meile = $0 \cdot 550629\ \square$ Myriameter.)
15. Wie groß müßte der Durchmesser eines Erdglobus angenommen werden, auf welchem 1 geographische $\square$ Meile als $1\square^{cm}$ erscheinen soll?

16. Oesterreich hat einen Flächeninhalt von 11305·91 geographischen □Meilen; welchen Raum wird es auf einem Erdglobus einnehmen, der 4^{dm} Durchmesser hat?

17. Der Durchmesser eines Erdglobus ist 5^{dm}, der eines andern 4^{dm}; wie viel $□^{dm}$ Papier ist nöthig, um beide zu überziehen?

18. Wie viel □Meilen hat die Oberfläche des Mondes, dessen Durchmesser $468\frac{1}{2}$ Meilen beträgt?

19. Der Durchmesser des Planeten Mercur beträgt 671 Meilen; wie groß ist die Oberfläche desselben?

20. Wie groß ist der Inhalt der Erde, wenn man dieselbe als vollkommene Kugel betrachtet, deren Durchmesser $1719\frac{1}{2}$ geogr. Meilen beträgt?

21. Suche den Cubikinhalt a) des Mondes (Aufg. 18), b) des Mercur (Aufg. 19).

22. Der Durchmesser der Sonne ist $112\frac{1}{5}$mal so groß als der Durchmesser der Erde; wie verhält sich der Cubikinhalt der Sonne zu dem Inhalte der Erde?

23. Wie viel wiegt eine Kanonenkugel von 12^{cm} Durchmesser, wenn jedes Cubikdecimeter 7·2 Kilogr. wiegt?

24. Eine Trinkschale, welche eine hohle Halbkugel bildet, hat 8^{cm} Durchmesser; welches ist ihr Inhalt?

25. Wie viel $□^{m}$ Kupferplatten sind zur Bedeckung einer Kuppel erforderlich, welche eine Halbkugel von 9^{m} Durchmesser vorstellt?

26. Das Ausmahlen eines halbkugelförmigen Gewölbes von $4·1^{m}$ Halbmesser kostet $25\frac{1}{5}$ fl.; wie hoch wird das Mahlen für $1□^{m}$ gerechnet?

27. Der äußere Durchmesser einer Hohlkugel ist 3^{dm} und der innere $2·9^{dm}$; wie groß ist ihr Cubikinhalt?

28. Wenn man den Durchmesser der Erde = $1719\frac{1}{2}$ Meilen und die Höhe ihrer Atmosphäre = 11 Meilen setzt, wie viel Cub.-Meilen Inhalt erhält man für die Atmosphäre? = 1068019999·9063

6. Ausmessung unregelmäßiger Körper.

§. 139. Zur Bestimmung des Rauminhaltes mancher Körper, besonders der ganz unregelmäßigen, reicht das rein geometrische Verfahren nicht aus; man muß dabei zu anderen Berechnungsarten Zuflucht nehmen.

Auf eine ganz einfache Weise wird der Cubikinhalt eines beliebigen Körpers mit Hilfe eines prismatischen oder cylindrischen Gefäßes bestimmt, dessen Grundfläche bekannt, und an dessen innerer Seitenwand die Höhe in Decimeter und Centimeter eingetheilt ist. Man legt nämlich den zu messenden Körper in ein solches Gefäß, füllt dieses mit

Wasser so hoch, daß der Körper ganz von Wasser bedeckt ist, und merkt sich die Höhe des Wasserstandes; hierauf wird der Körper herausgenommen, und die Höhe des nun niedrigeren Wasserstandes gelesen. Der Cubikinhalt des zu bestimmenden Körpers ist nun gleich dem Inhalte eines prismatischen oder cylindrischen Körpers, welcher mit dem Gefäße gleiche Grundfläche hat, und dessen Höhe der Differenz der beiden Wasserstände gleich ist. Wenn der zu messende Körper das Wasser einsaugt, so kann man sich des Sandes zum Füllen des Gefäßes bedienen.

Hat z. B. das Gefäß eine quadratische Grundfläche von 4^{dm} innerer Weite, und steht darin das Wasser, welches den Körper bedeckt, $3·2^{dm}$ hoch, während es, wenn der Körper herausgenommen wird, auf $2·4^{dm}$ herabsinkt, so ist die Differenz der beiden Wasserstände $0·8^{dm}$, daher

Inhalt des Körpers $= 4 \times 4 \times 0·8 = 12·8$ Cub.^{dm}

Mittelst eines solchen Gefäßes kann man auch den Inhalt irgend eines andern unregelmäßigen hohlen Gefäßes finden. Man füllt dieses mit Wasser, schüttet dasselbe dann in das mit der Scala versehene Gefäß, und berechnet nach diesem aus der Grundfläche und der Höhe des Wassers den gesuchten Inhalt.

§. 140. Der Cubikinhalt eines Körpers kann auch mittelst des **Gewichtes** desselben bestimmt werden.

Die Größe des Druckes, den ein Körper von beliebigem Rauminhalte auf seine Unterlage ausübt, heißt das **absolute Gewicht** des Körpers. Das Gewicht, das eine Cubikeinheit, z. B. ein Cubikdecimeter, des Körpers hat, nennt man dessen **specifisches Gewicht** Z. B. 1 Cub.^{dm} Silber wiegt 10·51 Kilogramm; diese sind das specifische Gewicht des Silbers für 1 Cub.^{dm} als Cubikeinheit.

Da 1 Cub.^{dm} destillirtes Wasser 1 Kilogramm wiegt, so enthält das specifische Gewicht eines Körpers für 1 Cub.^{dm} auch die Angabe, wie vielmal so groß als das Gewicht eines bestimmten Raumtheiles reinen Wassers das Gewicht eines eben so großen Raumtheiles des betreffenden Körpers ist.

Specifische Gewichte einiger Körper.

1 **Cubikdecimeter**

Alabaster	wiegt	2·70 Kilogr.	Eisen, gegossen ..	wiegt	7·12 Kilogr.
Bernstein	„	1·08 „	Elfenbein	„	1·83 „
Blei	„	11·35 „	Fichtenholz	„	0·47 „
Buchenholz	„	0·74 „	Gold	„	19·36 „
Eichenholz.....	„	0·86 „	Granit (im Mittel)	„	2·70 „ 1112
Eisen, geschmiedet	„	7·79 „	Kalkstein	„	(0·46) „

„ „ „ „ 2.46.—

Kiefernholz	wiegt	0·52 Kilogr.	Silber	wiegt	10·51 Kilogr.
Korkholz	„	0·24 „	Steinkohle (im Mittel)	„	1·30 „
Kupfer gehämmert	„	8·88 „	Stahl	„	7·82 „
„ gegossen.	„	8·79 „	Tannenholz ...	„	0·48 „
Marmor	„	2·72 „	Zink	„	7·19 „
Messing (i. Mittel)	„	8·40 „	Zinn.........	„	7·29 „
Platin	„	21·45 „	Zucker	„	1·50 „
Quecksilber	„	13·60 „			

Es sei z. B. der Cubikinhalt eines Silberbarrens, der 32 Kilogramm wiegt, zu bestimmen.

Da 1 Cub.^{dm} Silber 10·51 Kilogr. wiegt, so nehmen 32 Kilogr. Silber so viel Cub.^{dm} Raum ein, als wie oft 10·51 Kilogr. in 32 Kilogr. enthalten sind; man hat daher

$$32 : 10{\cdot}51 = 3{\cdot}045 \text{ Cub.}^{dm}.$$

Der Cubikinhalt eines Körpers in Cubikdecimetern wird demnach gefunden, indem man das absolute Gewicht desselben in Kilogrammen durch das specifische Gewicht für 1 Cub.^{dm} dividirt.

Umgekehrt findet man aus dem Cubikinhalte eines Körpers das absolute Gewicht desselben, indem man dessen specifisches Gewicht mit der Maßzahl des in Cub.^{dm} ausgedrückten Cubikinhaltes multiplicirt. Ist z. B. das absolute Gewicht von 225 Cub.^{dm} Messing zu bestimmen, so hat man

1 Cub.^{dm} Messing wiegt 8·4 Kilogr.
225 „ „ wiegen 8·4 „ $\times$ 225 = 1890 Kilogr.

§. 141. Aufgaben.

1. In ein prismatisches Gefäß von 47^{cm} Länge und 32^{cm} Breite, welches zum Theil mit Wasser gefüllt war, wurde ein unregelmäßiger Körper gesenkt, so daß ihn das Wasser bedeckte; das Wasser stand dann 36^{cm} hoch. Nachdem man den Körper herausgenommen hatte, stand das Wasser noch 24^{cm} hoch; welchen Cubikinhalt hat der Körper?
2. Ein cylindrisches Gefäß von 3^{dm} Durchmesser und 4^{dm} Höhe, worin sich 2·7^{dm} hoch Wasser befand, war, nachdem man einen unregelmäßigen Körper hineingelegt hatte, gerade gefüllt; wie groß war der Cubikinhalt dieses Körpers?
3. Wie groß ist der Cubikinhalt eines Gefäßes, das leer 1·5 Kilogr., mit Wasser gefüllt 14·8 Kilogr. wiegt?
4. Wie viel Kilogramm wiegt das Wasser, das in einem Gefäße von 165^{cm} Länge, 85^{cm} Breite und 7^{dm} Tiefe enthalten ist?
5. Ein Stück Blei wiegt 24 Kilogr.; welches ist sein Cubikinhalt?

6. Welchen Rauminhalt haben 29 Kilogr. Silber?

7. Wie viel Cub.^{cm} hat ein Vereinsthaler, da er $\frac{1}{60}$ Kilogr. Silber und $\frac{1}{540}$ Kilogr. Kupfer enthält?

8. Wie groß ist die Seite eines Marmorwürfels, welcher 184 Kilogr. wiegt?

9. Eine eiserne Walze von 2·5^{m} Länge wiegt 680 Kilogr.; wie groß ist ihr Durchmesser?

10. Welches Gewicht hat ein Stück gehämmertes Kupfer, welches die Form eines rechtwinkligen Parallelepipeds hat und 0·34^{m} lang, 1·1^{dm} breit, 3^{cm} dick ist?

11. Wie viel Kilogr. wiegt eine Platte von Gußeisen, welche 1·9^{m} lang, 0·2^{m} breit und 0·08^{m} dick ist?

12. Wie viel wiegt ein Cylinder von Eichenholz, wenn seine Länge 2^{m} 6^{dm} und sein Durchmesser 3·5^{dm} beträgt?

13. Auf den Ecksäulen eines Gartenthores liegen zwei kugelförmige Körper aus Sandstein; wie viel Kilogr. wiegen dieselben, wenn jeder 5·2^{dm} im Durchmesser hat?

14. Wie viel wiegt eine hohle Kugel aus Messing, bei welcher der innere Durchmesser 3^{dm} beträgt und das Messing 1^{cm} dick ist?

15. Wie viel Kilogr. wiegen 235 Liter Wein, dessen specifisches Gewicht 0·99 ist?

16. Wie viel kostet eine gußeiserne Röhre von 1·6^{m} Länge, welche bei 1^{cm} Wandstärke im Lichten den Durchmesser 0·18^{m} hat, wenn das Kilogr. zu 68 kr. gerechnet wird?

17. Ein messingener Würfel von 1·2^{dm} Kantenlänge wiegt 14·5 Kilogramm; wie viel wiegt ein Cub.^{dm} Messing?

18. Wie viel wiegt eine Kugel

a) von Blei, deren Durchmesser 2·4^{dm} beträgt?
b) „ Marmor, „ „ 3·1^{dm} „
c) „ Elfenbein, „ „ 0·7^{dm} „

7. Vermischte Aufgaben über die Ausmessung der Körper.

§. 142. 1. Wie groß ist die Kante eines Würfels, dessen Cubikinhalt doppelt so groß ist als der eines zweiten Würfels von 0·12^{m} Kantenlänge?

2. Wie groß ist die Kante eine Würfels, dessen Oberfläche doppelt so groß ist als die eines zweiten Würfels von 2^{dm} Kantenlänge?

3. Die Grundfläche einer senkrechten 0·6^{m} hohen Pyramide ist ein Sechseck von 0·26^{m} Seitenlänge; wie groß ist die Kante eines Würfels von gleichem Inhalte?

4. Ein Würfel und ein Ikosaeder haben 1·4^{dm} zur Kante; wie verhalten sich ihre Oberflächen zu einander?
5. Ein senkrechter Cylinder hat eine Grundfläche von 3^{dm} Durchmesser und zur Höhe 2^{dm}; ein anderer hat nur 1·6^{dm} Höhe und mit dem vorigen gleiche Mantelfläche; wie groß ist bei demselben der Durchmesser der Grundfläche?
6. Ein gleichseitiger Kegel hat 3^{dm} Durchmesser; wie groß ist die Seite eines Würfels, welcher diesem Kegel an Inhalt gleich kommt?
7. Der Durchmesser eines gleichseitigen Cylinders ist 1^{dm}; eben so groß ist der Durchmesser der Grundfläche und die Höhe eines Kegels; wie verhalten sich die Inhalte dieser zwei Körper?
8. Der Durchmesser der Grundfläche eines Kegels ist 0·3^{m}, die Höhe 0·24^{m}; wie groß ist der Durchmesser der Grundfläche eines zweiten Kegels, der 0·32^{m} hoch ist und mit dem ersten gleichen Inhalt hat?
9. Der Durchmesser einer Kugel ist 2·5^{dm}, eben so groß ist die Kante eines Würfels; um wie viel ist die Oberfläche der Kugel kleiner als jene des Würfels?
10. Aus einem hölzernen Würfel von 25 Cub.^{dm} Inhalt soll die größtmögliche Kugel gearbeitet werden; welchen Inhalt wird die Kugel haben?
11. Wie groß ist die Kante eines Würfels, welcher mit einer Kugel von 1·5^{m} Durchmesser gleichen Inhalt hat?
12. Der Durchmesser einer Kugel ist 1^{dm} lang, eben so groß ist der Durchmesser eines gleichseitigen Cylinders; wie verhalten sich die Inhalte dieser zweier Körper?
13. Ein senkrechter Kegel hat 1·5^{m} im Durchmesser und 1·8^{m} Höhe; wie groß muß der Durchmesser einer Kugel sein, die mit jenem Kegel gleiche Oberfläche haben soll?
14. Eine Kugel hat 1^{dm} im Durchmesser, eben so lang ist der Durchmesser der Grundfläche und die Höhe eines Kegels; wie verhalten sich die Inhalte der beiden Körper?
15. Wie groß ist der Halbmesser einer Kugel, welche denselben Inhalt hat als a) ein Würfel von 2·1^{dm} Kantenlänge, b) ein Cylinder von 0·12^{m} Höhe und 0·08^{m} Durchmesser, c) ein senkrechter Kegel, dessen Grundfläche 0·25^{m} im Durchmesser hat und dessen Seite 0·38^{m} beträgt?
16. Der Durchmesser einer Kugel beträgt 1·4^{dm}; wie groß ist der Durchmesser einer zweiten Kugel, deren Oberfläche doppelt so groß ist als jene der ersten Kugel?
17. Von zwei Kugeln hat die eine 28^{cm}, die andere 15^{cm} im Durchmesser; welchen Durchmesser müßte man einer Kugel geben, deren

Oberfläche der Summe der Oberflächen der beiden andern Kugeln gleich sein soll?

18. Wie groß ist der Halbmesser einer Kugel, deren Inhalt doppelt so groß ist als der Inhalt einer Kugel von $12\square^{dm}$ $75\square^{cm}$ Oberfläche?

19. Von zwei Kugeln hat die eine 4^{cm}, die andere 64^{cm} im Halbmesser; wie oft ist die erste Kugel in der zweiten enthalten?

20. Von zwei Kugeln hat die eine 16^{cm}, die andere 4^{cm} im Halbmesser; wie oft ist die Oberfläche der zweiten Kugel in jener der ersten enthalten?

0 21. Man hat zwei Kugeln von 3^{dm} und 1^{dm} 8^{cm} Durchmesser; wie groß ist der Durchmesser einer dritten Kugel, deren Inhalt gleich ist den Inhalten der beiden andern Kugeln zusammengenommen?

22. Ein Würfel, ein gleichseitiger Cylinder und eine Kugel haben gleiche Oberfläche, nämlich $10\square^{dm}$; wie verhalten sich die Cubikinhalte dieser drei Körper?

23. Ein Würfel, ein gleichseitiger Cylinder und eine Kugel haben gleichen Inhalt, nämlich 10 Cub.^{dm}; wie verhalten sich ihre Oberflächen?

24. Man hat zwei Stücke Blei; das eine wiegt 5 Kilogr., das andere 3 Kilogr.; wie groß wird der Durchmesser der Kugel sein, die aus jedem Stücke, und wie groß der Durchmesser der Kugel, die aus beiden Stücken gegossen wird?

25. Zwei an einem Ende verschlossene Glascylinder von 36^{cm} und 18^{cm} Höhe haben 16^{cm} und 8^{cm} Durchmesser im Lichten; wie oft kann der zweite mit dem Wasser gefüllt werden, das den ersten füllt?

0 26. Aus einem prismatischen mit Wasser gefüllten Gefäße, dessen Dimensionen $3 \cdot 2^{dm}$, $2 \cdot 5^{dm}$ und $2 \cdot 2^{dm}$ sind, wird das Wasser in ein cylindrisches Gefäß von 3^{dm} Durchmesser gegossen; bis zu welcher Höhe wird das Wasser in dem letzteren Gefäße stehen? = 2·4908

---

27. Welchen Cubikinhalt haben 180 Kilogr. Blei?

28. Eine Goldstange wiegt $22\frac{7}{8}$ Kilogr.; wie groß ist ihr Cubikinhalt?

29. Eine messingene Walze soll 4 Kilogr. wiegen und $3 \cdot 5^{dm}$ lang sein; welchen Durchmesser muß man der Walze geben?

30. Es soll ein Cylinder aus Gußeisen gegossen werden, der 1 Kilogr. wiegt und 4^{cm} im Durchmesser hat; wie groß wird die Höhe sein?

31. Es sollen cylinderförmige Gewichte von je 1 Kilogr. und zwar a) aus Blei, b) aus Messing, c) aus Gußeisen gegossen werden; wie viel Centimeter muß der Durchmesser betragen, wenn er nur die Hälfte der Höhe des Cylinders sein soll?
32. Eine Röhre aus Gußeisen, welche $1\cdot257^{m}$ äußern Umfang und 2^{m} Länge hat, wiegt 416 Kilogr.; wie dick ist das Metall?
33. Wie hoch ist ein Kegel aus Alabaster, welcher 17 Dekagr. wiegt und dessen Grundfläche 3^{cm} zum Durchmesser hat?
34. Wie viel Kugeln von 1^{cm} Durchmesser können aus 2 Kilogr. Blei gegossen werden?
35. Eine hohle zinnerne Kugel, welche 3^{dm} innern Durchmesser hat, wiegt 6 Kilogr.; welche Dicke hat das Zinnblech?
36. Ein Gefäß, das 128 Cub.^{dm} hält, ist mit Quecksilber gefüllt; wie viel Kilogr. wiegt das Quecksilber?
37. Wie viel wiegt ein □Meter Eichenholz von 80^{cm} Scheitlänge, wenn man wegen der Zwischenräume 30% in Abzug bringt?
38. Ein hohler Würfel aus 2^{mm} starkem Zinkblech hat äußerlich eine Höhe von 1^{dm}; wie viel wiegt ein Zinkwürfel, der genau den hohlen Würfel ausfüllt?
39. Ein würfelförmiges, eichenes Gefäß von $4\cdot9^{dm}$ Seitenlänge und 1^{cm} Wanddicke ist ganz mit Wasser gefüllt; wie viel wiegt das Wasser sammt dem Gefäße?
40. Wie viel Kilogr. wiegt eine Marmorplatte, welche $4\cdot5^{dm}$ lang, $3\cdot2^{dm}$ breit und $1\cdot25^{m}$ hoch ist?
41. Ein Münzstück aus $\frac{9}{10}$ feinem Silber hat 38^{mm} Durchmesser und $2\cdot118^{mm}$ Dicke; wie viel fl. ö. W. beträgt der Werth dieses Münzstückes, da 90 fl. ö. W. 1 Kilogr. feines Silber enthalten?
42. Es soll eine kupferne Röhre von $3\cdot5^{m}$ Länge, $0\cdot28^{m}$ äußerem und $0\cdot27^{m}$ innerem Durchmesser gegossen werden; wie viel Kilogr. Kupfer braucht man dazu?
43. Eine Wassersäule, welche in der Mitte hohl ist, hat 28^{cm} inneren Durchmesser, $3\cdot2^{m}$ Höhe und 8^{cm} Dicke; wie viel Kilogr. beträgt ihr Gewicht?
44. Zu einer Wasserleitung von 1580^{m} Länge braucht man Röhren von Blei, welche 13^{mm} dick sind, und deren Weite im Lichten 79^{mm} beträgt; wie viel kostet das dazu erforderliche Blei, wenn für 100 Kilogr. Blei 28 fl. bezahlt und wegen des Anschlusses der Röhren 2% dazu gerechnet werden?
45. Wie viel wiegt ein Mörser von Messing, der die Gestalt eines ausgehöhlten abgekürzten Kegels hat, wenn die Durchmesser der ganzen obern und untern Fläche 2^{dm} und $1\cdot6^{dm}$, der inneren obern und untern Fläche $1\cdot8^{dm}$ und $1\cdot4^{dm}$ betragen, wenn ferner die Höhe des ganzen Mörsers $2\cdot4^{dm}$ und die Tiefe des innern Raumes $2\cdot1^{dm}$ ist?

46. Wie viel wiegt eine hohle eiserne Kugel, deren innerer Durchmesser $1 \cdot 6^{dm}$ beträgt, und deren Wandung 2^{cm} dick ist?
47. Der äußere Durchmesser einer Hohlkugel aus Elfenbein ist 2^{dm}, die Dicke der Wandung $0 \cdot 16^{dm}$; a) wie viel wiegt die leere Kugel, b) wie viel wiegt die Kugel, wenn der Hohlraum mit Wasser gefüllt ist?
48. Ein Hektoliter Wein wiegt 100·8 Kilogr.; wie groß ist das specifische Gewicht dieses Weines?
49. Ein Faß von 0·6 Cub.^{m} Inhalt ist mit Oel gefüllt, das 520 Kilogr. wiegt; welches specifische Gewicht hat das Oel?
50. An einem Zuckerhut, der die Gestalt eines senkrechten Kegels hat, beträgt der Umfang der Grundfläche 6^{dm} und die Seite 5^{dm}; wie groß ist das specifische Gewicht des Zuckers, wenn der Zuckerhut 6·8 Kilogr. wiegt?
51. In einen hohlen Cylinder, dessen innerer Durchmesser 21^{cm} ist, wird ein Körper gelegt und dann mit Wasser bis auf 45^{cm} gefüllt; wie groß ist der Cubikinhalt des hineingelegten Körpers, wenn nach der Wegnahme desselben das Wasser in dem Cylinder noch 24^{cm} hoch steht?
52. Ein prismatisches Gefäß von 11^{dm} Länge und 8^{dm} Breite war zum Theil mit Wasser gefüllt. Als man in dasselbe einen Stein senkte, stieg das Wasser um 2^{dm} und bedeckte den Stein; wie groß ist der Cubikinhalt des Steines?
53. Ein cylindrisches Glas, dessen innere Höhe 1^{dm} und dessen Durchmesser $1 \cdot 5^{dm}$ beträgt, ist ganz mit Wasser gefüllt; wenn nun eine Kugel von 8^{cm} Durchmesser in das Glas gesenkt wird, so wird daraus ein Theil des Wassers ausfließen. Wie hoch wird das Wasser im Glase stehen, nachdem die Kugel wieder herausgenommen wurde?
54. Der berühmte Diamant des Kaisers von Rußland hat die Größe eines Taubeneies; taucht man denselben in ein mit Wasser gefülltes Gefäß, so fließt daraus Wasser im Gewichte von 11·14 Gramm; wie viel Cub.^{cm} beträgt sein Inhalt?

---

55. Ein Zimmer ist $6 \cdot 2^{m}$ lang, $5 \cdot 8^{m}$ breit und $3 \cdot 5^{m}$ hoch; a) wie viel Meter 85^{cm} breite Tapeten sind für dasselbe nöthig, wenn für Fenster, Thüren und Fußleisten $9\square^{m}$ abgerechnet werden; b) wie viel kosten die Tapeten, das Meter zu 76 kr.?
56. Auf einem Kornboden von 10^{m} Länge und 8^{m} Breite liegt der darauf gelagerte Weizen $1 \cdot 2^{m}$ hoch; a) wie viel Hektoliter Weizen sind es, b) welchen Werth hat der Weizen, wenn das Hektoliter $9\frac{1}{5}$ fl. kostet?

57. Wie viele Fuhren sind erforderlich, um mit einem Karren von 1^{m} 75^{cm} Länge, 85^{cm} Breite und 63^{cm} Tiefe einen Erdhaufen wegzuführen, welcher 12^{m} 75^{cm} Länge, 8^{m} 7^{dm} Breite und 2^{m} 6^{dm} Höhe hat?

58. Eine Mauer soll 29^{m} 7^{dm} lang, $8 \cdot 2^{dm}$ dick und $2 \cdot 5^{m}$ hoch werden; wie viele Ziegelsteine von 30^{cm} Länge, 16^{cm} Breite und 5^{cm} Dicke sind dazu erforderlich, wenn das Mörtelband zu 2^{cm} angenommen wird?

59. Es soll ein Graben 608^{m} lang, $2 \cdot 1^{m}$ breit und $1 \cdot 2^{m}$ tief gegraben werden. Wie lang werden daran 60 Mann zu arbeiten haben, wenn durchschnittlich 1 Mann täglich 26 Cub.^{m} aushebt, und wie viel betragen die Kosten, wenn 1 Mann täglich 94 kr. erhält?

60. Es wird ein Keller gegraben, der $13 \cdot 4^{m}$ lang, $8 \cdot 2^{m}$ breit und $3 \cdot 1^{m}$ tief werden soll, wie viel Cubikmeter Erde muß man ausgraben, und wie viele Wägen Erde werden fortzuschaffen sein, wenn man aus 5 Cub.^{m} festem Boden durch das Graben 9 Cub.^{m} gelockerte Erde erhält, und auf einen Wagen $\frac{3}{4}$ Cub.^{m} rechnet?

61. Eine kegelförmige Tanne hat 24^{m} Höhe und unten 6^{dm} im Durchmesser; nachdem sie in der Höhe von 14^{m} abgeschnitten wird, findet man den Durchmesser an dieser Stelle 2^{dm} groß; wie viel Cubikinhalt hat a) die ganze Tanne, b) die abgeschnittene Spitze, c) der abgestumpfte Baum?

62. Ein Baumstamm von $6 \cdot 2^{m}$ Länge hat an dem einen Ende $2 \cdot 5^{m}$, an dem andern $1 \cdot 8^{m}$ im Umfange; wie hoch wird derselbe zu stehen kommen, wenn das Cub.^{m} mit $17\frac{1}{2}$ fl. bezahlt wird?

63. Wie viel □ Meter Brennholz von 64^{cm} Scheitlänge gibt eine Tanne, deren Durchmesser am untern Ende 84^{cm} und deren Höhe $18 \cdot 5^{m}$ ist, wenn man annimmt, daß sich der Rauminhalt des Holzes durch das Spalten und Aufschichten um $\frac{1}{3}$ vermehrt?

64. Ein □ Meter Tannenholz, das 72^{cm} Scheitlänge hat, kostet $4\frac{1}{2}$ fl.; wie hoch kommt 1 Cub.^{m} dieser Holzart, wenn das geschichtete Holz wegen der Zwischenräume nur 70% feste Holzmasse enthält?

65. Aus einem cylindrischen Baumstamme von $1 \cdot 6^{m}$ Länge und 7^{dm} Durchmesser soll ein eben so langer prismatischer Balken von größtmöglicher quadratischer Grundfläche gehauen werden; wie viel beträgt a) der Inhalt dieses Balkens, b) der Abfall?

66. Ein Thurmdach hat die Form einer vierseitigen senkrechten Pyramide, eine Seite der Grundfläche ist $4 \cdot 2^{m}$ und eine Seitenkante 5^{m}; wenn nun dessen Eindeckung mit Blech 420 fl. kostet, wie viel hat man für $1 \square^{m}$ gerechnet?

67. Wie viel Schieferplatten sind zu dem pyramidenförmig viereckigen Dache eines Thurmes erforderlich, dessen untere Seite 3^{m} 4^{dm} und dessen Seitenkante 6^{m} 2^{dm} ist, wenn eine Schieferplatte 4^{dm} lang und 3^{dm} breit ist, und die Platten 5^{cm} übereinander gelegt werden sollen?

68. Wie viel Meter 125^{cm} breiten Taffet braucht man zu einem Luftballon von $1 \cdot 5^{m}$ Durchmesser?

69. Eine Kugel von $8 \cdot 2^{dm}$ im Durchmesser soll vergoldet werden; wie viel Goldblättchen von 5^{cm} Länge und 3^{cm} Breite sind zur Vergoldung nöthig, wenn man wegen des Verlustes 6% dazurechnet?

70. Eine Kuppel, welche die Form einer Halbkugel hat, soll mit Kupferblech gedeckt werden; der Durchmesser beträgt $10 \cdot 2^{m}$; wie viel kostet die Eindeckung, wenn man für Falze und Verschnitt 8% Blech hinzurechnet, und das $\square^{m}$ mit 4 fl. 24 kr. bezahlt?

71. Ein cylindrisches Gewölbe (Tonnengewölbe), dessen Wölbungsbogen ein Halbkreis ist, hat 5^{m} Länge, $4 \cdot 5^{m}$ inneren Durchmesser und 5^{dm} Dicke; wie viel Ziegelsteine sind zu diesem Gewölbe erforderlich, wenn 1 Ziegelstein 30^{cm} lang, mit der Kalkfuge 16^{cm} breit und 6^{cm} dick ist?

72. Wie viel Cub.^{m} Mauerwerk enthält ein $8 \cdot 2^{m}$ langes Tonnengewölbe, welches 7^{dm} Dicke, 4^{m} inneren Halbmesser, und zur Begrenzung einen Kreisbogen von 60^{0} hat?

73. Ein würfelförmiges Gefäß soll 8 Liter fassen; wie lang muß eine Seite sein?

74. Wie viel Liter hält ein Gefäß von 35^{cm} Länge, 26^{cm} Breite und 32^{cm} Tiefe?

75. Ein cylindrisches Gefäß soll 1 Liter halten; wie groß muß seine Tiefe sein, wenn der innere Durchmesser 86^{mm} beträgt?

76. Ein cylindrischer Wasserbehälter hat eine Grundfläche von $1 \cdot 24 \square^{m}$ und hält $9 \cdot 3$ Hektoliter; welche Tiefe hat derselbe?

77. Man will ein cylindrisches 3^{dm} hohes Gefäß machen, welches ein Hektoliter fassen soll; welchen Durchmesser muß man der Grundfläche geben?

78. Wie viel Liter hält ein $1 \cdot 5^{m}$ langes Faß, welches am Boden $2 \cdot 8^{m}$ und am Spunde $3 \cdot 2^{m}$ im Umfange hat?

79. Ein Wassereimer von der Form eines Kegelstumpfes ist $4 \cdot 3^{dm}$ tief und hat von innen am Boden 4^{dm}, oben $3 \cdot 8^{dm}$ Halbmesser; wie viel Liter faßt dieser Eimer?

80. Eine Feuerspritze hat zwei Cylinder oder Stiefel, deren innerer Durchmesser $1 \cdot 8^{dm}$ beträgt; der Kolben hebt sich bei jedem Cylinder um $2 \cdot 5^{dm}$ und zwar in jeder Minute 24mal; wie viel Hektoliter schafft diese Spritze während einer halben Stunde in die Höhe?

81. Wie viel Cubikfuß Sauerstoff und Stickstoff sind in einem Zimmer, das 7^{m} lang, 6^{m} breit und $3\cdot4^{m}$ hoch ist, da in 100 Raumtheilen atmosphärischer Luft 21 Theile Sauerstoff und 79 Theile Stickstoff enthalten sind?

82. Welche Kraft ist erforderlich, um einen Marmorwürfel von $0\cdot82^{m}$ Seitenlänge auf einem sandigen Wege fortzuschaffen, wenn die Reibung $\frac{1}{6}$ der Last beträgt?

83. Ein Balken aus Eichenholz, welcher $2\cdot3^{m}$ lang, $2\cdot4^{dm}$ breit und $1\cdot8^{dm}$ dick ist, soll über eine Unterlage von Tannenholz bewegt werden; welche Kraft ist dazu nöthig, wenn die Reibung $\frac{2}{15}$ der Last beträgt?

84. Die Größe des Druckes einer Flüssigkeit auf den Boden eines Gefäßes ist gleich dem Gewichte einer cylindrischen oder prismatischen Flüssigkeitssäule, deren Grundfläche die Bodenfläche des Gefäßes und deren Höhe die Höhe des Flüssigkeitsstandes ist. Wie groß ist der Druck auf den Boden eines cylindrischen Gefäßes von $1\cdot2^{dm}$ Durchmesser, das bis zu einer Höhe von 2^{dm} mit Regenwasser (specifisches Gewicht $= 1\cdot09$) gefüllt ist?

85. Die Bodenfläche eines prismatischen Gefäßes von 1^{m} Länge und 5^{dm} Breite kann nur einen Druck von 170 Kilogr. erleiden; bis zu welcher Höhe darf dieses Gefäß mit Baumöl (specifisches Gewicht $= 0\cdot92$) gefüllt werden?

86. Ein Gefäß von der Form eines abgekürzten Kegels hat eine Bodenfläche von $96\,\square^{cm}$, an der oberen Oeffnung eine Durchschnittsfläche von $70\,\square^{cm}$ und eine Höhe von 5^{dm}; wenn dieses Gefäß ganz mit Wasser gefüllt ist, a) wie groß ist der Bodendruck, b) um wie viel ist der Bodendruck größer als das Gewicht des Wassers? um 0.6682 Klg. — Klg 4.8

87. Die Größe des Luftdruckes auf eine Fläche ist gleich dem Gewichte einer Quecksilbersäule, deren Grundfläche jene Fläche und deren Höhe der jeweilige Barometerstand ist. Wie groß ist der Luftdruck auf eine Fläche von $1\,\square^{dm}$ bei einem Barometerstande von 742^{mm}? 100.912 Klg.

88. Wie groß ist der Luftdruck, welchen die zu $1\cdot2\,\square^{m}$ angenommene Oberfläche des menschlichen Körpers bei einem Barometerstande von 742^{mm} erleidet? 12109.440 Klg. —

89. Wie groß ist bei demselben Barometerstande der Luftdruck a) auf die Oberfläche eines Würfels von 4^{dm} Seitenlänge, b) auf die Oberfläche einer Halbkugel von 2^{dm} Durchmesser?

90. Wie hoch müßte das Quecksilber im Barometer stehen, damit auf die Oberfläche einer Kugel von $2\cdot6^{dm}$ Durchmesser ein Luftdruck von 2094 Kilogr. ausgeübt würde?

91. Um wie viel vergrößert sich der Luftdruck auf $1\,\square^{dm}$, wenn das Quecksilber im Barometer a) um 1^{mm}, b) um 1^{cm} steigt? a) um 0.136 Klg b) um 1.360 Klg

92. Der Coefficient der Längenausdehnung des Silbers durch die Wärme ist 0·00001909, d. i. 1 Längen-Meter dieses Metalls dehnt sich bei einer Temperaturerhöhung um 1^0 C (Celsius) um $0·00001909^m$ aus, erhält also eine Länge von $1^m + 0·00001909^m = 1·00001909^m$; wie groß ist dabei die Ausdehnung des Silbers a) für eine Fläche von $1\square^m$, b) für einen Körper von 1 Cub.^{m}?

93. Eine prismatische Stange Eisen ist bei 12^0 C 5^{dm} lang, 1^{dm} breit und $0·5^{dm}$ dick; a) welche Ausdehnungen erhält sie bei einer Erwärmung bis 20^0 C; um wie viel dehnt sich dabei b) die Oberfläche, c) der Inhalt derselben aus, wenn der Ausdehnungscoefficient des Eisens 0·00001167 ist?

94. Ein Würfel aus Kupfer hat bei 0^0 C einen Cubikinhalt von 10 Cub.^{cm}; wie groß wird er, wenn er um 25^0 C erwärmt wird, und der Längeausdehnungs-Coefficient des Kupfers 0·00001717 ist?

95. Eine messingene Kugel hat bei 20^0 C einen Cubikinhalt von 35 Cub.^{cm}; a) wie lang wird ihr Durchmesser, b) wie groß ihre Oberfläche, und c) wie groß ihr Cubikinhalt bei 40^0 C, wenn der Coefficient der Längenausdehnung des Messings 0·0000192 ist?

---

96. Ein Schotterhaufen ist unten $4·7^m$, oben $3·5^m$ lang, seine Breite beträgt $1·85^m$ und die Höhe $0·64^m$; wie viel Cub.^{m} enthält er?
Der Mitteltheil ist ein dreiseitiges Prisma, die beiden Seitentheile geben zusammen eine senkrechte Pyramide mit quadratischer Grundfläche.

97. Ein Walmdach ist am Firste $16·75^m$, an den Dachtraufen $25·24^m$ lang, seine Höhe beträgt $5·6^m$ und die Hausbreite $11·2^m$; wie groß ist der Raum unter dem Dache?

98. Ein cylindrisches Getreidemaß von 5^{dm} Durchmesser und $2·4^{dm}$ Tiefe wird mit Weizen so gefüllt, daß dieser über der oberen Grundfläche des Maßes 1^{dm} hoch kegelförmig gehäuft ist; wie viel Hektoliter faßt das so gefüllte Maß?

99. Ein viereckiges Zelt ist 4^m lang, 3^m breit und bis zum Dache $3·5^m$ hoch; an die Seitenwände setzt sich ein pyramidales Dach, dessen Spitze von jeder Ecke $1·8^m$ absteht; wie viel Meter Leinwand, die 12^{dm} breit ist, sind zu diesem Zelte erforderlich?

100. Der berühmte, auf dem Concordiaplatze in Paris aufgestellte Obelisk von Luxor (in Oberegypten) besteht aus einem einzigen Blocke rothen Granits und hat die Form einer abgekürzten vierseitigen senkrechten Pyramide, deren Grundflächen 21^m $75·8^{cm}$ von einander abstehen, und die Seiten 2^m $43·7^{cm}$ und 1^m $54·7^{cm}$ haben; auf der oberen Grundfläche ruht eine Pyramide von 1^m 21^{cm} Höhe. Wie groß ist a) der Cubikinhalt dieses Obelisken, b) das Gewicht desselben in Kilogr.

101. Eine Mauernische wird oben durch ein Gewölbe in Form einer Viertelkugel gedeckt und bildet unten einen halben Cylinder von $6 \cdot 2^{dm}$ Halbmesser und 3^{m} Höhe; wie groß ist die Oberfläche der Nische?

102. Ein Dampfcylinder ist 8^{dm} weit und $1 \cdot 4^{m}$ lang und hat zu beiden Seiten zwei halbkugelförmige Endstücke; wie viel Cubikmeter Dampf faßt derselbe?

103. Ein Kuppelgewölbe ruht auf vier Säulen, deren jede 1^{m} im Durchmesser hat und $16 \cdot 4^{m}$ hoch ist; der innere Durchmesser des Kuppelgewölbes, das eine Halbkugel vorstellt, ist $7 \cdot 5^{m}$. Wie viel Farbe ist zum Anstreichen dieses ganzen Mauerwerkes nöthig, wenn man auf $1\square^{m}$ Fläche 65 Dekagr. Farbe braucht?

104. Wie viel Ziegelsteine braucht man, um ein Thor zu verlegen, welches mit vollem Bogen geschlossen ist, wenn die Weite desselben im Lichten $2 \cdot 7^{m}$, die Höhe bis zum Schlußsteine 4^{m}, die Dicke der Mauer $0 \cdot 6^{m}$ ist, und wenn auf 1 Cub.^{m} Mauerwerk 264 Ziegel gerechnet werden?

105. Eine Ehrenpforte, die über zwei prismatischen Widerlagen mit vollem Bogen geschlossen ist, soll mit einem farbigen Stoffe überzogen werden; wie viel Meter eines 86^{cm} breiten Stoffes braucht man dazu, wenn die Weite der Pforte im Lichten 3^{m}, die ganze Weite $4 \cdot 5^{m}$, die Höhe bis zum Schlußsteine 5^{m} und die Tiefe der Pforte 2^{m} ist? 7029^{m} trotzdem wird sie nicht schön. —