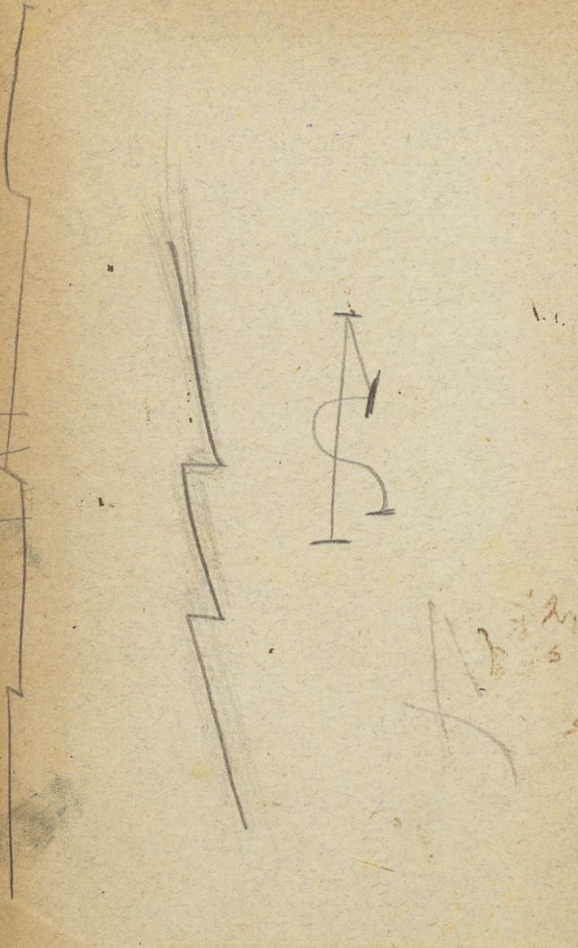


Schollmayer [illegible] III Gim.

12

Schollmaier ist ein Räuber
hauptmann hat wollen den
ptáčkir erstechen mit dem Dolch

N. N.
aus
Krain.

Schollmayer

Lehrbuch

der

Arithmetik

für

Unter-Gymnasien.

Von

Dr. Franz Ritter von Močnik.

Zweite Abtheilung.

Vierzehnte, mit Rücksicht auf die metrischen Maße und Gewichte umgearbeitete Auflage.

Schollmayer

Wien.

Druck und Verlag von Carl Gerold's Sohn.

1874.

Sch

Erster Abschnitt.

Von den algebraischen Zahlen.

I. Erklärungen.

§. 1.

Es gibt Größen, welche, mit einander in Verbindung gebracht, sich vermöge ihres Gegensatzes entweder ganz oder theilweise aufheben. Z. B. 6 fl. Vermögen und 6 fl. Schulden heben sich gegenseitig ganz auf, sie sind einander entgegengesetzt; 10 fl. Vermögen und 6 fl. Schulden heben sich nur theilweise auf, indem durch ihre Verbindung, d. i. nach der Tilgung der Schulden, noch 4 fl. Vermögen übrig bleiben. Ein solcher Gegensatz kommt auch vor bei Gewinn und Verlust, bei Einnahmen und Ausgaben, bei der Richtung nach vorwärts und rückwärts, nach rechts und links, bei der Zeit nach und vor Christi Geburt, bei Graden der Wärme und Kälte in Bezug auf die Temperatur des Eispunctes, u. dgl.

Dieser Begriff des Gegensatzes drängt sich auch bei unbenannten Zahlen nothwendig auf, wenn die Subtraction zweier Zahlen allgemein ausführbar werden soll. Beim Subtrahieren muß man in der natürlichen Zahlenreihe von der Zahl, welche als Minuend gegeben ist, um so viele Einheiten, als der Subtrahend anzeigt, rückwärts schreiten, und es ist die Zahl, zu welcher man in der Zahlenreihe dadurch gelangt, die gesuchte Differenz. Dieses ist zunächst nur möglich, wenn der Minuend größer oder eben so groß ist, als der Subtrahend. Ist z. B. von 6 die Zahl 4 zu subtrahieren, so schreitet man in der Zahlenreihe von 6 aus um 4 Einheiten zurück, wodurch man zur Zahl 2 gelangt; also ist $6 - 4 = 2$. Ist ferner von 6 die gleiche Zahl 6 zu subtrahieren, so schreitet man von 6 um 6 Einheiten zurück, und gelangt zur Null, welche der Ausgangspunct der natürlichen Zahlen ist; man hat also $6 - 6 = 0$.

Ist dagegen von 6 eine größere Zahl z. B. 8 zu subtrahieren, so müßte man, nachdem man von 6 zuerst um 6 Einheiten zurückgezählt hat und dadurch zur Null gelangt ist, von 0 aus noch um 2 Einheiten weiter zurückzuschreiten, was jedoch an der natürlichen Zahlenreihe, da dieselbe mit 0 abbricht, nicht möglich ist.

Um daher die Subtraction auch dann ausführen zu können, wenn der Minuend kleiner ist als der Subtrahend, ist man genöthigt, auch Zahlen anzunehmen, welche durch das Rückwärtszählen von 0 aus erhalten werden. Es kommt dabei nur darauf an, daß die ursprünglich bloß nach vorwärts ohne Ende fortschreitende Zahlenreihe nach dem gleichen Bildungsgesetze von 0 auch nach rückwärts erweitert, und daß der Gegensatz der von 0 nach vorwärts und rückwärts fortschreitenden Zahlen entsprechend ausgedrückt werde. Letzteres geschieht, indem man die ursprünglich vorhandenen Zahlen, welche von 0 aus immer um eine Einheit nach vorwärts schreiten, positiv, die Zahlen aber, zu denen man gelangt, wenn man von 0 nach demselben Bildungsgesetze rückwärts schreitet, negativ nennt, und die ersteren mit dem Zeichen + (mehr), die letzteren mit dem Zeichen — (weniger) bezeichnet. Die dadurch entstehende zweiseitige Zahlenreihe ist daher

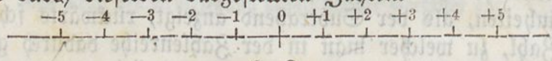
$$\ldots -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, \ldots$$

Während hier die positiven Zahlen die ursprünglichen Zahlen der natürlichen Zahlenreihe vorstellen, treten die negativen als Zahlen einer neuen Form auf, die den Gegensatz zu den positiven ausdrücken.

Es bedeutet z. B. — 1 eine Zahl, zu welcher man in der erweiterten Zahlenreihe gelangt, wenn man von 0 um 1 Einheit zurückschreitet, oder eine Zahl, von welcher man um 1 Einheit vorwärtszählen muß, um zur 0 zu gelangen; — 2 bedeutet eine Zahl, zu welcher man gelangt, wenn man von 0 um 2 Einheiten zurückschreitet, oder eine Zahl, von welcher man um 2 Einheiten vorwärtszählen muß, um zur 0 zu gelangen.

Hiernach ist die oben gesuchte Differenz $6 - 8 = -2$, also eine negative Zahl.

Um die erweiterte Zahlenreihe, sowie auch die später folgende Addition und Subtraction positiver und negativer Zahlen zu versinnlichen, trage man auf eine nach beiden Seiten unbegrenzte Gerade von einem Punkte 0 aus nach rechts und nach links eine als Einheit angenommene Strecke wiederholt auf und schreibe an die Endpuncte der so erhaltenen Längen die durch dieselben dargestellten Zahlen.



§. 2.

Die mit Vorzeichen versehenen Zahlen werden **relative** oder **algebraische Zahlen** genannt, im Gegensatze zu den ursprünglichen Zahlen, welche **absolute Zahlen** heißen.

Jede algebraische Zahl, z. B. + 4 oder — 4, besteht aus einem Vorzeichen + oder — und einem Zahlenwerthe, hier 4. Das **Vorzeichen** zeigt an, ob sich die Zahl auf der positiven oder negativen Seite der Zahlenreihe befindet. Der **Zahlenwerth** ist eine absolute Zahl und zeigt an, welche Stelle die Zahl in der Reihe der positiven oder der negativen Zahlen einnimmt.

Das Zeichen + wird am Anfange eines Zahlenausdruckes und nach dem Gleichheitszeichen nicht angeschrieben; das Zeichen — darf nie weggelassen werden. Wenn daher vor einer Zahl kein Zeichen steht, so ist sie als positiv anzusehen; z. B. 4 bedeutet soviel als + 4.

Zwei Zahlen, welche gleichen Zahlenwerth, aber verschiedene Vorzeichen haben, heißen einander **entgegengesetzt**; z. B. + 4 und — 4.

II. Die vier Rechnungsarten mit algebraischen Zahlen.

1. Die Addition.

§. 3.

Beim Addieren zweier algebraischer Zahlen schreitet man in der zweiseitigen Zahlenreihe von der ersten Zahl in derjenigen Richtung, welche das Vorzeichen der zweiten angibt, um so viele Einheiten fort, als der Zahlenwerth dieser zweiten Zahl anzeigt; diejenige Zahl, zu welcher man dadurch gelangt, ist die gesuchte Summe.

Eine algebraische Zahl, welche zu einer andern addiert oder von ihr subtrahiert werden soll, umgibt man mit Klammern; es bedeutet z. B. $+3+(-4)$ die Summe, und $+3-(-4)$ die Differenz der Zahlen $+3$ und -4.

Es soll z. B. die Summe $+4+(+3)$ bestimmt werden. Man wird in der Zahlenreihe von $+4$ aus in positiver Richtung um 3 Einheiten fortschreiten, wodurch man zur Zahl $+7$ gelangt; folglich ist

$$+4+(+3)=+7.$$

Ist die Summe $+4+(-3)$ zu suchen, so schreitet man von der Zahl $+4$ aus in negativer Richtung um 3 Einheiten fort, und gelangt auf diese Weise zur Zahl $+1$; also ist

$$+4+(-3)=+1.$$

Man bestimme ferner die Summe $-4+(+3)$. Hier wird man von der Zahl -4 aus in positiver Richtung um 3 Einheiten fortschreiten; man gelangt dadurch zur Zahl -1, und es ist also

$$-4+(+3)=-1.$$

Um endlich die Summe $-4+(-3)$ zu erhalten, schreitet man von -4 aus in negativer Richtung um 3 Einheiten fort, wodurch man zur Zahl -7 gelangt; es ist somit

$$-4+(-3)=-7.$$

Daraus folgt:

1. Zwei gleichbezeichnete Zahlen werden addiert, indem man der Summe ihrer Zahlenwerthe das gemeinschaftliche Vorzeichen gibt.

2. Zwei ungleichbezeichnete Zahlen werden addiert, indem man der Differenz der Zahlenwerthe das Vorzeichen der größeren gibt.

Aufgaben.

1) $+6+(+2)=\ldots$ 2) $-7+(-3)=\ldots$
3) $-5+(+4)=\ldots$ 4) $+4+(-6)=\ldots$
5) $+16+(-11)=\ldots$ 6) $-15+(-25)=\ldots$
7) $+33+(+18)=\ldots$ 8) $+68+(-79)=\ldots$
9) $-1284+(-2351)=\ldots$
10) $-2905+(+5107)=\ldots$
11) $+4238+(-3870)=\ldots$
12) $-37181+(-4089)=\ldots$
13) $+12+(-15)+(+17)=-3+(+17)=+14.$
14) $-0{\cdot}35+(-5{\cdot}2)+(+0{\cdot}71)=\ldots$
15) $+378+(+709)+(-592)=\ldots$
16) $+1246+(+988)+(-799)+(-1091)=\ldots$
17) $-51345+(-10982)+(+27460)+(-8912)=\ldots$
18) $-38{\cdot}1354+(+90{\cdot}8642)+(-21{\cdot}3458)+(+3{\cdot}1087)=\ldots$

19) Jemand hat 5242 fl. Vermögen und 2758 fl. Schulden; wie viel beträgt sein reines Vermögen?
20) Der erste punische Krieg begann im Jahre 264 v. Chr. und dauerte 23 Jahre; wann hörte er auf?
21) Kaiser Augustus wurde im J. 63 v. Chr. geboren und erreichte ein Alter von 77 Jahren; wann starb er?
22) Jemand geht 65 Schritte vorwärts, hierauf 37 Schritte rückwärts, dann wieder 48 Schritte vorwärts; a) wie viel Schritte hat er im Ganzen gemacht, b) wie viel Schritte ist er von dem Orte entfernt, von dem er ausging?

2. Die Subtraction.

§. 4.

Um die Differenz zweier algebraischer Zahlen zu finden, schreite man in der Zahlenreihe vom Minuend aus in der entgegengesetzten Richtung, als sie das Vorzeichen des Subtrahends angibt, um so viele Einheiten fort, wie der Zahlenwerth des Subtrahends anzeigt; diejenige Zahl der Zahlenreihe, zu welcher man auf diese Art gelangt, ist die gesuchte Differenz.

Man findet hiernach

$$+5-(+3)=+2,$$
$$+5-(-3)=+8,$$
$$-5-(+3)=-8,$$
$$-5-(-3)=-2.$$

Derselbe Rechnungsgang findet aber auch statt, wenn man jedesmal zu dem Minuend das Entgegengesetzte des Subtrahends addiert. Es ist nämlich

$$+5+(-3)=+2,$$
$$+5+(+3)=+8,$$
$$-5+(-3)=-8,$$
$$-5+(+3)=-2;$$

und somit

$$+5-(+3)=+5+(-3),$$
$$+5-(-3)=+5+(+3),$$
$$-5-(+3)=-5+(-3),$$
$$-5-(-3)=-5+(+3).$$

Von einer algebraischen Zahl wird daher eine andere algebraische Zahl subtrahiert, indem man zu dem Minuend den Subtrahend mit entgegengesetztem Vorzeichen addiert.

Aufgaben.

1) $+25-(+16)=\ldots$ 2) $-50-(-25)=\ldots$
3) $-31-(+58)=\ldots$ 4) $+107-(-93)=\ldots$
5) $+3{\cdot}43-(+2{\cdot}12)=\ldots$ 6) $-7{\cdot}04-(-48{\cdot}1)=\ldots$
7) $+1558-(-1374)=\ldots$ 8) $-6606-(+3419)+\ldots$
9) $-125-(+302)+(+287)=\ldots$
10) $+3640-(-2583)-(+4395)=\ldots$

11) $-395{\cdot}107 + (-492{\cdot}864) - (-780{\cdot}312) = \ldots$
12) $+75386 - (+28908) - (-54221) + (-13570) = \ldots$
13) $+4 - [-5 + (+6)] = \ldots$
14) $-56{\cdot}3 - [-93{\cdot}7 + \{+8{\cdot}94 - (-6{\cdot}39)\}] = \ldots$
15) Das römische Reich wurde vom J. 30 v. Chr. bis zu seinem Untergange im J. 476 n. Chr. von Kaisern regiert; wie lange dauerte in Rom das Kaiserthum?
16) Das Festland Europas liegt zwischen 36° und 71° nördlicher Breite, zwischen 12° westlicher und 63° östlicher Länge (von Paris aus); wie viele Grade dehnt sich dasselbe a) in die Breite, b) in die Länge aus?
17) Von zwei Körpern, welche sich gleichzeitig von demselben Puncte aus a) in derselben Richtung, b) in entgegengesetzten Richtungen bewegen, legt der eine in einer Minute 783^{m}, der andere 828^{m} zurück; wie weit werden beide nach dieser Zeit von einander entfernt sein?
18) Ein Dampfschiff wird durch die Einwirkung des Stromes allein jede Minute 65^{m} abwärts getrieben, durch die Kraft des Dampfes allein legt es jede Minute 412^{m} zurück; wie viel Fuß legt es in der Minute a) stromabwärts, b) stromaufwärts zurück?

3. Die Multiplication.

§. 5.

Um zwei algebraische Zahlen zu multiplicieren, nimmt man, je nachdem der Multiplicator positiv oder negativ ist, den Multiplicand mit umgeändertem oder entgegengesetztem Vorzeichen so vielmal als Summand, als der Zahlenwerth des Multiplicators angibt.

In Bezug auf die Zeichen der beiden Factoren können vier Fälle vorkommen:

$$+5 \,.\, +3,$$
$$-5 \,.\, +3,$$
$$+5 \,.\, -3,$$
$$-5 \,.\, -3.$$

Ist erstlich $+5$ mit $+3$ zu multiplicieren, so muß man den Multiplicand $+5$ selbst 3mal als Summand setzen; es ist also

$$+5 \,.\, +3 = +5 + (+5) + (+5) = +15.$$

Eben so findet man

$$-5 \,.\, +3 = -5 + (-5) + (-5) = -15.$$

Hat man ferner $+5$ mit -3 zu multiplicieren, so muß man den Multiplicand mit entgegengesetztem Vorzeichen, also -5, 3mal als Summand nehmen; folglich ist

$$+5 \,.\, -3 = -5 + (-5) + (-5) = -15.$$

Auf gleiche Weise erhält man:

$$-5 \,.\, -3 = +5 + (+5) + (+5) = +15.$$

Hieraus folgt:

1. Zwei gleichbezeichnete Factoren geben ein positives Product, zwei ungleich bezeichnete Factoren geben ein negatives Product.

2. Der Zahlenwerth des Productes ist gleich dem Producte aus den Zahlenwerthen der Factoren.

Aufgaben.

1) $+9 \,.\, +7 = \ldots$ 2) $-18 \,.\, -5 = \ldots$
3) $-17 \,.\, +8 = \ldots$ 4) $+43 \,.\, -6 = \ldots$
5) $-12{\cdot}8 \,.\, +25 = \ldots$ 6) $+30{\cdot}4 \,.\, -4{\cdot}5 = \ldots$
7) $+457 \,.\, +99 = \ldots$ 8) $-5678 \,.\, -11 = \ldots$
9) $-3{\cdot}29 \,.\, +5{\cdot}49 = \ldots$ 10) $-430{\cdot}2 \,.\, +880 = \ldots$
11) $[-358-(+417)] \,.\, -79 = \ldots$
12) $[+7{\cdot}512-(+2{\cdot}894)] \,.\, [-6{\cdot}037+(-13{\cdot}963)] = +.$
13) Wenn jemand 15 Schritte nach vorwärts (rückwärts) 6mal macht; wie viel Schritte nach vorwärts (rückwärts) hat er gemacht?
14) Jemandem wurden 12 fl. Gewinn 5mal hinweggenommen (er wurde darum verkürzt); wie viel Verlust wurde ihm dadurch zugezogen?
15) Jemandem wurden 250 fl. Schulden 8mal abgenommen (für ihn berichtiget); wie viel Vermögen wurde ihm dadurch gegeben (die Schulden damit selbst zu zahlen)?

§. 6.

Sind mehr als zwei algebraische Zahlen mit einander zu multiplicieren, so ist in Bezug auf das Vorzeichen des Productes Folgendes zu merken:

1. Wenn alle Factoren positiv sind, so ist auch das Product positiv. Z. B.:

$$+2 \,.\, +3 \,.\, +4 = +6 \,.\, +4 = +24,$$
$$+2 \,.\, +3 \,.\, +4 \,.\, +5 = +24 \,.\, +5 = +120.$$

2 Sind alle Factoren negativ, so ist das Product positiv oder negativ, je nachdem die Anzahl der Factoren eine gerade oder ungerade ist. Z. B.:

$$-2 \,.\, -3 \,.\, -4 = +6 \,.\, -4 = -24,$$
$$-2 \,.\, -3 \,.\, -4 \,.\, -5 = -24 \,.\, -5 = +120,$$
$$-2 \,.\, -3 \,.\, -4 \,.\, -5 \,.\, -6 = +120 \,.\, -6 = -720,$$
$$-2 \,.\, -3 \,.\, -4 \,.\, -5 \,.\, -6 \,.\, -7 = -720 \,.\, -7 = +5040.$$

3. Sind endlich die Factoren theils positiv, theils negativ, so ist das Product positiv oder negativ, je nachdem die Anzahl der negativen Factoren eine gerade oder ungerade ist. Z. B.:

$$+2 \,.\, +3 \,.\, -4 = +6 \,.\, -4 = -24,$$
$$+2 \,.\, +3 \,.\, -4 \,.\, -5 = -24 \,.\, -5 = +120,$$
$$+2 \,.\, +3 \,.\, -4 \,.\, -5 \,.\, +6 = +120 \,.\, +6 = +720,$$
$$+2 \,.\, +3 \,.\, -4 \,.\, -5 \,.\, +6 \,.\, -7 = +720 \,.\, -7 = -5040.$$

Aufgaben.

1) $+13 \,.\, +8 \,.\, +7 = \ldots +$ 2) $-38 \,.\, -9 \,.\, -6 = -.$
3) $+315 \,.\, -19 \,.\, +10 = \ldots -$
4) $-20{\cdot}9 \,.\, -1{\cdot}1 \,.\, +8 = \ldots +$
5) $-1356 \,.\, -8 \,.\, -8 \,.\, -472 = +..$

6) $- 428 \cdot - 376 \cdot - 219 \cdot + 105 = \ldots$
7) $- 78{\cdot}3 \cdot - 0{\cdot}57 \cdot - 1{\cdot}38 \cdot - 27{\cdot}9 = \ldots$
8) $- 2{\cdot}906 \cdot + 2{\cdot}076 \cdot - 1{\cdot}49 \cdot 0{\cdot}89 = \ldots$
9) $+ 137 \cdot - 28 \cdot - 119 \cdot + 83 \cdot - 75 \cdot - 125 = \ldots$
10) $- 4315 \cdot - 25 \cdot + 368 \cdot - 11 \cdot - 49 \cdot + 31 = \ldots$
11) $+ 0{\cdot}96 \cdot - 9{\cdot}9 \cdot - 13{\cdot}8 \cdot + 2{\cdot}7 \cdot - 3{\cdot}4 \cdot + 6{\cdot}3 = \ldots$
12) $[- 5431 - (+ 765)] \cdot [+ 8107 - (+ 959)] \cdot [+ 388 + (+ 399)] = \ldots$

4. Die Division.

§. 7.

Das Divisionsverfahren läßt sich aus dem Satze herleiten, daß der Quotient mit dem Divisor multipliciert den Dividend geben muß.

a) Ist erstlich $+ 12$ durch $+ 4$ zu dividieren, so muß der Quotient $+ 3$ sein, weil nur eine positive Zahl $+ 3$ mit einer positiven $+ 4$ multipliciert ein positives Product $+ 12$ geben kann; also
$$+ 12 : + 4 = + 3.$$

b) Es sei $+ 12$ durch $- 4$ zu dividieren; hier muß man den Quotienten 3 so bezeichnen, daß er mit $- 4$ multipliciert $+ 12$ gibt; nun kann nur eine negative Zahl mit einer negativen multipliciert ein positives Product geben; der Quotient muß also negativ sein, und man hat:
$$+ 12 : - 4 = - 3.$$

c) Um $- 12$ durch $+ 4$ zu dividieren, muß man eine Zahl suchen, welche mit $+ 4$ multipliciert $- 12$ gibt; diese Zahl kann nur $- 3$ sein; somit:
$$- 12 : + 4 = - 3.$$

d) Durch dieselbe Schlußfolge erhält man auch:
$$- 12 : - 4 = + 3.$$

1. Der Quotient ist also positiv, wenn Dividend und Divisor gleiche Vorzeichen haben, und negativ, wenn Dividend und Divisor ungleich bezeichnet sind.

2. Der Zahlenwerth des Quotienten ist gleich dem Quotienten aus den Zahlenwerthen des Dividends und des Divisors.

Aufgaben.

1) $+ 264 : + 4 = \ldots$
2) $- 4648 : - 8 = \ldots$
3) $+ 3840 : - 30 = \ldots$
4) $- 2568 : + 12 = \ldots$
5) $+ 106{\cdot}33 : - 4{\cdot}9 = \ldots$
6) $- 42{\cdot}435 : + 34{\cdot}5 = \ldots$
7) $+ 326393 : - 529 = \ldots$
8) $- 6709716 : - 729 = \ldots$
9) $- 1234{\cdot}69037 : + 24{\cdot}679 = \ldots$
10) $+ 462191832 : - 79251 = \ldots$

11) $- 780937996 : - 51862 = \ldots$
12) $- 8612175 \,.\, + 90875 : - 782925 = \ldots$
13) $+ 40{\cdot}185 : [+ 1{\cdot}68 - (+ 0{\cdot}73)] = \ldots$
14) $[+ 560167 + (- 135079)] : [- 30 - (+ 93)] = \ldots$
15) Das Thermometer zeigte an einem Tage Morgens $- 8^0$ R., Mittags $+ 2^0$ R., Abends $- 5^0$ R.; wie groß war die mittlere Tagestemperatur?

Zweiter Abschnitt.

Von den allgemeinen Zahlen.

§. 8.

Von den Zahlen, die wir bisher angewendet haben und die mit Ziffern ausgedrückt werden, zeigt jede eine ganz bestimmte Menge von Einheiten an; sie werden **besondere Zahlen** genannt. So drückt die besondere Zahl 7 eine genau bestimmte Anzahl von Einheiten aus, indem man sich darunter weder mehr noch weniger als 7 Einheiten vorstellen kann. Wegen dieser Eigenschaft der besonderen Zahlen können auch die Rechnungen, die man mit ihnen ausführt, nur für einzelne besondere Fälle gelten, und müßten so oft erneuert werden, als nur die mindeste Veränderung in der Angabe gemacht wird. Um nun auch allgemeine Rechnungen, die für alle ähnlichen Fälle gelten und von den besonderen Werthen der in einer Aufgabe vorkommenden Größen ganz unabhängig sind, vornehmen zu können, war man auf die Einführung von Zahlen bedacht, welche jede beliebige Menge von Einheiten und deren Theilen bedeuten können, und welche darum **allgemeine Zahlen** genannt werden. Als die zweckmäßigste Bezeichnung für solche allgemeine Zahlen stellten sich die **Buchstaben** dar, und zwar die kleinen lateinischen. So ist z. B. a eine allgemeine Zahl, unter welcher man sich jede willkürliche Menge von Einheiten oder deren Theilen vorstellen kann; a kann 1, 2, 10 — 20, $\frac{3}{5}$, oder jede andere positive oder negative Zahl anzeigen. Nur ist zu bemerken, daß jeder Buchstabe den Werth, den man ihm beim Anfange der Rechnung beigelegt hat, durch die ganze Rechnung beibehalten muß; nimmt man für a in irgend einer Aufgabe einen bestimmten Werth, z. B. 5 an, so muß man in dieser Aufgabe für a durchgängig den Werth 5 beibehalten.

Wenn in einer Rechnung verschiedene Buchstaben vorkommen, so werden dadurch im Allgemeinen auch eben so viele verschiedene Zahlen angedeutet; in besonderen Fällen ist es jedoch möglich, daß zwei Buchstaben denselben Werth haben.

Die Wahl der Buchstaben zu allgemeinen Zahlzeichen rührt wahrscheinlich davon her, daß man anfänglich die Wörter selbst in die Rechnung setzte, und später nur die Anfangsbuchstaben beibehielt. Wir haben z. B. in der Proportionsrechnung nachgewiesen, daß der Ertrag der Procente berechnet wird, wenn man die Summe, worauf sich die Procente beziehen, mit den Procenten multipliciert und das Product durch 100 dividiert. Man könnte diesen Satz auf folgende Art allgemein ersichtlich machen:

$$\text{Ertrag} = \frac{\text{Summe} \times \text{Procent}}{100},$$

oder, wenn man statt der Wörter nur ihre Anfangsbuchstaben setzt, und zwar die kleinen lateinischen,

$$e = \frac{s \times p}{100}.$$

Hier kann s jede willkürliche große oder kleine Summe, p jedes beliebige Procent vorstellen; e ist dann die Zahl, welche den zu der angenommenen Summe und dem angenommenen Procent gehörigen Ertrag anzeigt. Der Ausdruck $e = \frac{s \times p}{100}$ stellt daher den oben angeführten Satz ganz allgemein und doch so klar dar, daß ihn jeder sogleich herauslesen kann, wenn er nur die Bedeutung der Buchstaben e, s, p kennt.

Die Lehre vom Rechnen mit allgemeinen Zahlen heißt die allgemeine Arithmetik, zum Unterschiede von der besonderen Arithmetik, in welcher nur besondere Zahlen angewendet werden.

§. 9.

Wenn man in der Zahlenreihe nach beiden Seiten, anstatt um eine Einheit, um die Zahl a fortschreitet, so erhält man die Reihe $\ldots -4a, -3a, -2a, -1a, 0, +1a, +2a, +3a, +4a, \ldots$, welche die Reihe der Vielfachen von a heißt. Die vor a stehenden besonderen Zahlen $+3, +2, +1, -1, -2, -3, \ldots$ werden die Coefficienten von a genannt. Es bedeutet demnach der Coefficient die Zahl, wie vielmal die nach ihm stehende allgemeine Zahl in positivem oder negativem Sinne zu setzen sei, je nachdem derselbe das Vorzeichen + oder — hat. Z. B.:

$$+4a = +a + a + a + a = a \,.\, +4,$$
$$-4a = -a - a - a - a = a \,.\, -4.$$

Man ersieht daraus, daß der Coefficient einer allgemeinen Zahl immer als Multiplicator derselben betrachtet werden kann.

1 wird als Coefficient nicht angeschrieben; es bedeutet demnach a so viel als 1a, und — a so viel als — 1a.

Wenn zwei oder mehrere durch Buchstaben ausgedrückte Zahlen mit einander zu multiplicieren sind, so wird das Multiplicationszeichen gewöhnlich weggelassen; z. B.:

statt $a \times b$ oder $a \,.\, b$ schreibt man ab,
„ $a \times c \times c$ „ $a \,.\, b \,.\, c$ „ „ abc.

Der Ausdruck abc darf mit jenem $a + b + c$ nicht verwechselt werden, da ersterer ein Product, letzterer eine Summe vorstellt. Setzt man z. B. $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$, so ist:

$$abc = 2 \,.\, 3 \,.\, 4 = 24,$$
$$a + b + c = 2 + 3 + 4 = 9.$$

§. 10.

Um in der Folge die zum leichtern Verständnis nöthigen Abkürzungen anwenden zu können, wollen wir hier eine Bezeichnung und einen Begriff einschalten, über welche erst später ausführlicher gesprochen werden wird.

Wenn mehrere gleiche Buchstaben als Factoren neben einander stehen, so schreibt man zur Abkürzung einen solchen Factor nur einmal, und fügt demselben rechts oben die Zahl an, welche angibt, wie oft dieser Buchstabe als Factor steht. Z. B.

statt aa schreibt man a^2,
" bbb " " b^3,
" xxxxx " " x^5.

Ein Product aus mehreren gleichen Factoren nennt man eine Potenz; die Zahl der gleichen Factoren heißt der Potenzexponent, und der Factor, der so oft steht, als der Exponent anzeigt, die Basis, So ist b^3 eine Potenz, 3 ist der Exponent und b die Basis. Der Exponent 1 wird nicht angeschrieben, so daß b so viel bedeutet als b^1.

Die Begriffe Coefficient und Exponent müssen von einander wohl unterschieden werden; es ist

$$4a = a + a + a + a,$$
$$a^4 = a \times a \times a \times a,$$

welche Ausdrücke wesentlich verschieden sind; setzt man z. B. $a = 3$, so ist

$$4a = 3 + 3 + 3 + 3 = 12,$$
$$a^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81.$$

§. 11.

Ein Zahlenausdruck, welcher aus einem Coefficienten und einem Buchstaben oder auch mehreren ohne Zeichen mit einander verbundenen Buchstaben besteht, wird ein eingliedriger Ausdruck oder ein Monom genannt; z. B. a, $2ab$, $-3a^2x$, $5bc^2y^2$.

Ein Zahlenausdruck, welcher mehrere durch das Zeichen + oder − verbundene Ausdrücke enthält, heißt ein mehrgliedriger Ausdruck oder ein Polynom; die einzelnen durch das Zeichen + oder − verbundenen Bestandtheile eines solchen Ausdruckes nennt man seine Glieder. Enthält der Ausdruck zwei Glieder, so heißt er insbesondere ein Binom; ein dreigliedriger Ausdruck wird ein Trinom genannt. So sind:

$$a + b,\ 2m - 3n,\ ax^2 - by^2$$

Binome,

$$a - b + c,\ 2ax + 3by + 4cz,\ 3a^3 - 2a^2b + ba^2$$

Trinome, und alle diese Größen mehrgliedrige Ausdrücke.

Wenn in einem mehrgliedrigen Ausdrucke mehrere Potenzen derselben Basis vorkommen, so pflegt man wegen der leichteren Uebersicht die einzelnen Glieder nach den Potenzexponenten jener Basis zu ordnen. Fängt man mit der höchsten Potenz an und läßt dann immer niedrigere Potenzen folgen, so heißt das Polynom fallend geordnet; setzt man dagegen erst jenes Glied, welches keine oder die niedrigste Potenz der gemeinschaftlichen Basis enthält, und geht dann zu immer höheren Potenzen über, so nennt man das Polynom steigend geordnet. So erhält z. B. der Ausdruck:

$$5x^2 + 1 - 3x + x^5 - 4x^3 - 6x^4$$

fallend geordnet folgende Form:

$$x^5 - 6x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 3x + 1,$$

und steigend geordnet:

$$1 - 3x + 5x^2 - 4x^3 - 6x^4 + x^5.$$

Wenn mit mehrgliedrigen Größen Rechnungsoperationen vorzunehmen sind, so werden sie in Klammern eingeschlossen. Um z. B. anzuzeigen, daß $a + b$ mit $c + d$ zu multiplicieren ist, schreibt man $(a + b) . (c + d)$; würde man die Klammern weglassen und $a + b . c + d$ schreiben, so würde dieser Ausdruck nicht bedeuten, daß $a + b$ mit $c + d$ zu multiplicieren ist, sondern daß man nur b mit c zu multiplicieren und zu dem Producte a und d zu addieren habe. Setzt man z. B.:

$a = 2$, $b = 3$, $c = 4$, $d = 5$, so ist

$$(a + b) . (c + d) = (2 + 3) . (4 + 5) = 5 . 9 = 45;$$
$$a + b . c + d = 2 + 3 . 4 + 5 = 2 + 12 + 5 = 19.$$

§. 12.

Wenn in zwei Zahlenausdrücken gleiche Buchstaben und diese auch in gleicher Anzahl vorkommen, so heißen jene Ausdrücke **gleichnamig**; die Coefficienten können auch verschieden sein. Dagegen heißen zwei Zahlenausdrücke **ungleichnamig**, wenn sie entweder verschiedene Buchstaben, oder gleiche Buchstaben, aber in ungleicher Anzahl enthalten. Z. B.:

$$\left.\begin{matrix} 2a, & 6a \\ ab, & 3ab \\ -5mx^2, & 8mx^2 \end{matrix}\right\} \text{sind gleichnamige,}$$

$$\left.\begin{matrix} 2a, & 3b \\ 5mn, & -2mp \\ 3ax, & 3a^2x \end{matrix}\right\} \text{ungleichnamige Ausdrücke.}$$

Zwei oder mehrere gleichnamige Ausdrücke lassen sich immer in einen einzigen reducieren, und zwar nach folgenden Sätzen:

1. **Gleichnamige Ausdrücke, welche dasselbe Vorzeichen haben, werden reduciert, indem man die Zahlenwerthe der Coefficienten addiert, und die Summe mit dem gemeinschaftlichen Vorzeichen vor den gemeinschaftlichen Buchstabenausdruck setzt.**

Z. B. $+ 3a + 5a = + 8a$,
$$- 4a - 6a = - 10a.$$

Wenn man nämlich in der Reihe der Vielfachen von a in der positiven Richtung von o aus zuerst um $3a$ Einheiten, und dann noch um $5a$ Einheiten fortschreitet, so gelangt man zur Zahl $+ 8a$. Eben so kommt man, wenn man in derselben Reihe von 0 aus in negativer Richtung zuerst um $4a$ Einheiten, dann noch um $6a$ Einheiten fortschreitet, zur Zahl $- 10a$.

2. **Zwei gleichnamige Ausdrücke, welche ungleich bezeichnet sind, werden reduciert, indem man den Zahlenwerth des kleineren Coefficienten von dem Zahlenwerthe des größeren Coefficienten subtrahiert und den Rest mit dem Zeichen des größeren Coefficienten dem gemeinschaftlichen Buchstabenausdrucke voransetzt.**

Es sei $+ 9a - 3a$. Hier muß man in der Reihe der Vielfachen von a von 0 aus zuerst um 9a Einheiten vorwärts schreiten, und von der Zahl $+ 9a$ aus, zu welcher man dadurch gelangt, um 3a Einheiten zurückschreiten, wodurch man zur Zahl $+ 6a$ kommt; also ist

$$+ 9a - 3a = + 6a.$$

Ebenso findet man, daß $+ 4a - 7a = - 3a$ ist.

3. **Zwei entgegengesetzte gleichnamige Ausdrücke heben sich auf.**

$$\text{Z. B. } + 5a - 5a = 0.$$

Aufgaben.

1) $a + 3a + 3a = \ldots$ 2) $- 3bx - 2bx - 8bx = \ldots$
3) $2abc - 2abc = \ldots$ 4) $5ab - 3ab = \ldots$
5) $abx - 4abx = \ldots$
6) $mp - 2mp + 3mp + 4mp = \ldots$
7) $8by + 2by - 2by = \ldots$
8) $7ax - 4by - 3ax + 2by = \ldots$
9) $5b + 3b - 4b + 3b = \ldots$
10) $a^2 + ab + ab + b^2 = \ldots$
11) $3a^2x - 2a^2x + a^2x = \ldots$
12) $5my^3 + 2my^3 - 6my^3 = \ldots$
13) $6ax - 76y - 5ax + 86y = \ldots$
14) $5m + 6m - 2px + 4px - px = \ldots$
15) $3px - px - 15m + 3m = \ldots$
16) $7am - 4y - 2am + 8y - 2y + 3am = \ldots$
17) $6ab + 3ac - 21ad - 5ac + ad - 6ad + 9ad = \ldots$
18) $23bx - 25cx + 17bx + 18cx - 17cx - 19bx - 27cx = \ldots$
19) $5mx + 6ny - 7pz - 3mx - 2ny + pz + 9mx - 3ny + 7pz = \ldots$
20) $9x^2y^2 - 6xy - 6xy + 4 - x^2y^2 + 2xy + 2xy - 1 = \ldots$

§. 13.

In einen Zahlenausdruck anstatt der allgemeinen Zahlen (Buchstaben) besondere Zahlenwerthe setzen, und mit diesen die vorgeschriebenen Rechnungen ausführen, heißt **substituieren.**

Ist z. B. der Ausdruck $y = ax^2 + 4bx$ für $a = 1$, $b = 2$ und $x = 3$ zu berechnen, so hat man

$$y = 1.3^2 + 4.2.3 = 9 + 24 = 33.$$

Aufgaben.

Bestimme die Zahlenwerthe folgender Ausdrücke für die beigefügten Substitutionen:

1) $A = a - 2b + 3c$ für $a = 5,\ b = 2,\ c = 3$.
2) $B = 3x + 4y - 5z$ für $x = 3,\ y = 4,\ z = 5$.
3) $C = x^3 - 2x^2 + 3x - 4$ für $x = 4$.
4) $D = ab - 3ac + 5bc$ für $a = 6,\ b = 7,\ c = 8$.
5) $E = ax^3 + bx^2 - cx - d$ für $a = 1, b = 2, c = 3, d = 4, x = 5$.
6) $F = \frac{xy}{x + y}$ für $x = 2{\cdot}4,\ y = 4{\cdot}6$.

I. Die vier Rechnungsarten mit allgemeinen Zahlenausdrücken.

1. Die Addition.

§. 14.

Es sei zuerst die Summe $+ a + (+ b)$ zu bestimmen. Hier muß man nach §. 3 in der erweiterten Zahlenreihe von $+ a$ um b Einheiten vorwärts schreiten, wodurch man zu der Zahl $+ a + b$ gelangt; es ist also

$$+ a + (+ b) = + a + b,$$

Um $+ a + (- b)$ zu bestimmen, schreitet man in der Zahlenreihe von $+ a$ um b Einheiten zurück, wodurch man $+ a - b$ erhält; es ist somit

$$+ a + (- b) = + a - b,$$

welche Summe eine positive oder negative Zahl bedeutet, je nachdem a größer oder kleiner als b ist.

Ebenso überzeugt man sich, daß

$$- a + (+ b) = - a + b,$$
$$- a + (- b) = - a - b$$

ist, wobei die erstere Summe eine positive oder negative Zahl vorstellt, je nachdem a kleiner oder größer als b ist.

Hieraus folgt:

Eingliedrige Zahlenausdrücke werden addiert, indem man sie mit unveränderten Zeichen neben einander setzt.

Wenn in der Summe gleichnamige Ausdrücke vorkommen, werden sie reduciert.

Aufgaben.

1) $3a + 5a = 8a$ oder $\begin{array}{r} 3a \\ 5a \\ \hline 8a \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} 4a \\ -8a \\ \hline -4a \end{array}$ 3) $\begin{array}{r} -2ax \\ +3ax \\ \hline ax \end{array}$

4) $5ab + (- 5ac) = \ldots$ 5) $8mx + (- 2mx) = \ldots$
6) $- 13mnq + (- 7mnq) = \ldots$
7) $- 5x^2 + (+ 8x^2) = \ldots$ 8) $25my^2 + (- 18m^2y) = \ldots$
9) $7abc + (- 5my) = \ldots$ 10) $120my + (- 95my) = \ldots$
11) $- 33ab^2 + (- 11ab^2) \ldots$
12) $- 75xy + (+ 20x^2y) = \ldots$

13) $9a^2x^2 + (+5a^2x^2) + (-10a^2x^2) = \ldots$
14) $-b^2m^3 + (7b^2m^3) + (-4b^3m^2) = \ldots$

§. 15.

Mehrgliedrige Zahlenausdrücke werden (wie eingliedrige) addiert, indem man sie mit ungeänderten Zeichen neben einander stellt.

Daraus folgt, daß man, wenn vor einem eingeklammerten Ausdrucke das Zeichen $+$ steht, die Klammern ohne alle weitere Veränderung weglassen kann.

Kommen in der Summe gleichnamige Ausdrücke vor, so werden sie reduciert. In solchen Fällen thut man am besten, wenn man die Summanden unter einander schreibt, und zwar so, daß die gleichnamigen Glieder gerade unter einander zu stehen kommen.

Aufgaben.

1) $a + (b + c) = a + b + c.$
2) $3a - 2b + (3c - 4d) = 3a - 2b + 3c - 4d.$
3) $5a + 2x + (3b - 2y) + (3c - 2d + z)$
$= 5a + 2x + 3b - 2y + 3c - 2d + z.$
4) $8x - 5y + (5x + 2y) = 8x - 5y + 5x + 2y = 13x - 3y$

oder
$$\begin{array}{r} 8x - 5y \\ 5x + 2y \\ \hline 13x - 3y. \end{array}$$

5)
$$\begin{array}{r} a^2 + ab \phantom{{}+b^2} \\ + ab + b^2 \\ \hline a^2 + 2ab + b^2 \end{array}$$

6)
$$\begin{array}{r} a^2 + ab \phantom{{}-b^2} \\ - ab - b^2 \\ \hline a^2 \phantom{{}-ab} - b^2 \end{array}$$

7)
$$\begin{array}{r} 6m - 5n + 2p \\ 5m + 8n + 5p \\ -4m - n + 3p \\ \hline \end{array}$$

8)
$$\begin{array}{r} 3a + 5b - 7c \\ 4a - 8b + 12c \\ 2a + 4b - 3c \\ \hline \end{array}$$

9)
$$\begin{array}{r} 2a + 2b - c + d \\ 3a - b + 2c + d \\ -4a + b + 5c + 4d \\ \hline \end{array}$$

10)
$$\begin{array}{r} 7x - 9y + 8z \\ -6x - 5y + 12z \\ 14x - 5y + 4z \\ \hline \end{array}$$

11) $3ab + (5ab - 4m) + (6m - 2ab) = \ldots$
12) $17x^2 - 25ax - 10a^2 + (3x^2 + 12ax - 5a^2) = \ldots$
13) $64m^3 - 96m^2x + 36mx^2 + (-48m^2x + 72mx^2 - 27x^3) = \ldots$
14)
$$\begin{array}{r} x^3 - 2x^2 + 3x - 6 \\ 3x^3 + 2x^2 + 5x + 8 \\ \hline \end{array}$$

15)
$$\begin{array}{r} x^4 - 3x^3y + 5x^2y^2 + 7xy^3 \phantom{{}-8y^4} \\ + x^3y - 3x^2y^2 - 3xy^3 - 8y^4 \\ \hline \end{array}$$

16) $2a^2b - 3ab^2 + 7 + (3a^2b - 2) + (5a^2b - 3ab^2)$
$+ (5ab^2 - 6) = \ldots$
17) $3a^3 - 7a^2x - 5ax^2 + (6a^3 - 3a^2x + 8ax^2 - x^3)$
$+ [4a^2x - 2ax^2 + 7x^3 + (2a^2x - 9ax^2 + 3x^3)] = \ldots$

2. Die Subtraction.

§. 16.

Für das Subtrahieren eingliedriger Zahlenausdrücke gilt derselbe Satz, welcher für das Subtrahieren algebraischer Zahlen in §. 4 begründet wurde. Wir wollen jedoch hier die Richtigkeit dieses Satzes für die verschiedenen Fälle, welche hinsichtlich der Zeichen vorkommen können, auch noch auf eine andere Art nachweisen.

a) Es soll von $+ a$ die Größe $+ b$ subtrahiert werden. Der Minuend $+ a$ bleibt ungeändert, wenn man ihm $+ b$ und $- b$ hinzusetzt, weil $+ b - b = 0$ ist; statt $+ a$ kann man also $+ a + b - b$ setzen. Nimmt man nun von dem so ausgedrückten Minuend $+ a + b - b$ den Subtrahend $+ b$ hinweg, so bleibt $+ a - b$ als Rest; man hat also:

Minuend $+ a$ } statt $+ a$ darf $+ a + b - b$ gesetzt werden.
Subtrahend $+ b$ } davon $+ b$ subtrahiert,
bleibt $+ a \quad - b$ als Rest.

b) Ist von $+ a$ die Größe b zu subtrahieren, so hat man:

Minuend $+ a$ } oder $+ a + b - b$
Subtrahend $- b$ } davon $- b$ subtrahiert,
bleibt $+ a + b$ als Rest.

c) Von $- a$ soll $+ b$ subtrahiert werden. Es ist:

Minuend $- a$ } oder $- a + b - b$
Subtrahend $+ b$ } davon $+ b$ subtrahiert,
bleibt $- a \quad - b$ als Rest.

d) Ist von $- a$ die Größe $- b$ zu subtrahieren, so hat man:

Minuend $- a$ } oder $- a + b - b$
Subtrahend $- b$ } davon $- b$ weggenommen,
bleibt $- a + b$ als Rest.

Man hat demnach:

$$+ a - (+ b) = + a - b$$
$$+ a - (- b) = + a + b$$
$$- a - (+ b) = - a - b$$
$$- a - (- b) = - a + b;$$

d. h. eingliedrige Zahlenausdrücke werden subtrahiert, indem man zu dem Minuend den mit entgegengesetztem Zeichen genommenen Subtrahend hinzufügt.

Wenn der Subtrahend unter den Minuend geschrieben wird, so pflegt man im Subtrahend das geänderte Zeichen sogleich unter das gegebene zu setzen. Sind Minuend und Subtrahend gleichnamig, so wird die Reduction vorgenommen.

Aufgaben.

1) $5x - (- 4x) = 5x + 4x = 9x.$

2) $- 3ab - (+ 5ab) = - 3ab - 5ab = - 8ab.$

3) $2mx$	4) $- 3cp$	5) $8ax$
$- 4mx$	$+ 3cp$	$- 3ay$
$+$	$-$	$+$
$6mx$	$- 6cp$	$8ax + 2ay$

6) $\begin{array}{r} - abc \\ -2abc \\ \hline \end{array}$ 7) $\begin{array}{r} 3ab^2 \\ +10ab^2 \\ \hline \end{array}$ 8) $\begin{array}{r} 15m^2x^2 \\ -7m^2x^2 \\ \hline \end{array}$

9) $-7ay-(-3ay)=\ldots$ 10) $-3mp-(+4mp)=\ldots$
11) $5a^2x-(-3a^2x)=\ldots$ 12) $2ab^2y-(+aby)=\ldots$
13) $9x^2+(-5x^2)-(+8x^2)\ldots$
14) $5m^2n-(-18m^2n)+(-10m^2n)=\ldots$
15) $17ax^3-(-ax^3)-(+24ax^3)=\ldots$

§. 17.

Mehrgliedrige Zahlenausdrücke werden subtrahiert, indem man zu dem Minuend die Glieder des Subtrahends mit entgegengesetzten Vorzeichen hinzufügt.

Um sich von der Richtigkeit dieses Satzes zu überzeugen, nehme man $a+b-c$ als Minuend, und $m=n+p$ als Subtrahend an; anstatt $a+b-c$ kann auch $a+b-c+m-m+n-n+p-p$ gesetzt werden; nimmt man nun von dem so ausgedrückten Minuend den Subtrahend $m-n+p$ hinweg, so bleibt $a+b-c-m+n-p$ als Rest; man hat nämlich:

Minuend $a+b-c$ oder	$a+b-c+m-m+n-n+p-p$
davon der Subtrahend	$+m \qquad -n+p$
hinweggenommen, bleibt	$a+b-c \qquad -m+n \qquad -p$

als Rest; es ist also:

$$a+b-c-(m-n+p)=a+b-c-m+n-p.$$

Daraus ist auch ersichtlich, daß man, wenn vor einem eingeklammerten Ausdrucke das Zeichen $-$ steht, die Klammern auflösen könne, wenn das Zeichen eines jeden Gliedes innerhalb der Klammern in das entgegengesetzte verwandelt wird.

Wenn im Minuend und Subtrahend gleichnamige Ausdrücke vorkommen, so ist es wegen des Reducierens am zweckmäßigsten, den Subtrahend so unter den Minuend zu schreiben, daß die gleichnamigen Glieder unter einander zu stehen kommen, und dann im Subtrahend die geänderten Zeichen sogleich unter die gegebenen zu stellen.

Aufgaben.

1) $3a-(2b+4c)=3a-2b-4c.$
2) $9x-2a-(2y-3b)=9x-2a-2y+3b.$
3) $5ax+6by-(3cx-4ay+5bz)$
$=5ax+6by-3cx+4ay-5bz.$
4) $3a+(4b-5c)-(6d-7e)=3a+4b-5c-6d+e7.$
5) $8a-4b+3c-(6a+2b-3c)$
$=8a-4b+3c-6a-2b+3c=2a-6b+6c,$
oder

$$\begin{array}{r} 8a-4b+3c \\ 6a+2b-3c \\ - \quad - \quad + \\ \hline 2a-6b+6c \end{array}$$

6) $\begin{array}{r} 3ax - 4by \\ 2ax - 2by \\ \hline - \quad + \end{array}$ 7) $\begin{array}{r} x^2 + 6ax + a^2 \\ x^2 - 4ax \\ \hline - \quad + \end{array}$

8) $5x^2 + 7x - 5 - (3x^2 - 2x - 6) = \ldots$

9) $2a - 3b - (5a + 2b) + (4a + b) = \ldots$

10) $2a^2 - 3a + 4 - (a^2 + a - 5) = \ldots$

11) $8m^3 - 7m^2y - my^2 - (3m^2y - 5my^2 + 8y^3) = \ldots$

12) $5abx - 3bcy - (-abx + 4bcy - 3cdz) = \ldots$

13) $-3a + 5b - 7c + 9d - (-8a + 6b + 4c - 2d) = \ldots$

14) $8a^2b - 7ab^2 + 4b^3 - (-2a^3 + 3a^2b - 9ab^2) = \ldots$

15) $3m^2x - 3n^3y + 6p^4z - (-3m^2x - 3n^3y + 5p^4z) = \ldots$

16) $5a^4 - 4a^3 + 3a^2 - 2a + 1 - (3a^4 - 3a^3 - 5a^2 + 5a + 7) = \ldots$

17) $9 + 8m - 7m^2 - 6m^3 + 5m^4 - (-5 + 4m - 3m^2 + 2m^3 - m^4) = \ldots$

18) $27x - [31y + (108 - 45y + 17x)] - (9x - 48y - 101) = \ldots$

3. Die Multiplication.

§. 18.

Besondere Zahlen kann man wirklich multiplicieren, d. i. man erhält als Product eine neue Zahl, in welcher von den Factoren durchaus keine Spur mehr zu finden ist, z. B. $3 \times 6 = 18$. Bei allgemeinen Zahlen ist dieses nicht der Fall; ihr Product kann nur angezeigt werden, indem man die Buchstaben, durch die sie ausgedrückt werden, ohne Zeichen und zwar wegen der leichteren Uebersicht in alphabetischer Ordnung neben einander setzt. So wird das Product aus a und b durch ab, das Product aus ap und bq durch abpq angezeigt.

Es seien die eingliedrigen Ausdrücke 5a und — 4b mit einander zu multiplicieren. Da man die Coefficienten als Factoren der allgemeinen Zahlen betrachten kann, und die Factoren in jeder beliebigen Ordnung mit einander multipliciert dasselbe Product geben, so hat man:

$$5a \times -4b = 5 \times -4 \times a \times b = -20 \times ab = -20ab.$$

Eingliedrige Zahlenausdrücke werden daher multipliciert, indem man die Coefficienten (nach §.5) multipliciert und ihr Product dem Producte der allgemeinen Zahlen voransetzt.

Sehr einfach gestaltet sich das Multiplicieren, wenn in den Factoren Potenzen, welche eine gleiche Basis haben, vorkommen. Es ist

$$a^2 \cdot a = aa \cdot a = aaa = a^3,$$
$$a^3 \cdot a^2 = aaa \cdot aa = aaaaa = a^5,$$
$$a^5 \cdot a^3 = aaaaa \cdot aaa = aaaaaaaa = a^8,$$
$$a^3 \cdot a^2 \cdot a^4 = aaa \cdot aa \cdot aaaaaaaa = a^9.$$

Man sieht sogleich, daß der Exponent im Producte immer gleich ist der Summe der Exponenten der Factoren.

Potenzen derselben Basis werden also multipliciert, indem man die gemeinschaftliche Basis beibehält und ihr die Summe aus den Exponenten der Factoren zum Exponenten gibt.

Aufgaben.

1) $+ a \,.\, + b = + ab.$ 2) $+ a \,.\, - b = - ab.$
3) $- a \,.\, + b = - ab.$ 4) $- a \,.\, - b = + ab.$
5) $7a \,.\, 5b = 35ab.$ 6) $- 3px \,.\, 8m = - 24pmx.$
7) $3b^2 \,.\, - b^3 = - 3b^5.$ 8) $- 3a \,.\, 2a^5 = - 6a^6.$
9) $6a \,.\, - 2a \,.\, = \ldots$ 10) $5mn \,.\, 9m = \ldots$
11) $3ax \,.\, - 4by = \ldots$ 12) $- 8cm \,.\, - dn = \ldots$
13) $- 7ab \,.\, 2ac = \ldots$ 14) $5m^2x \,.\, 3mx^2 = \ldots$
15) $5a^m \,.\, - 2a^n = \ldots$ 16) $3a^2x^2 \,.\, 7a^3x^4 - \ldots$
17) $37a \,.\, - 24b \,.\, - 18c = \ldots$
18) $8ab^2 \,.\, 3ac \,.\, - 4c^2 = \ldots$
19) $7ab \,.\, - 9mp \,.\, 8ap = \ldots$
20) $6ab^2y^3 \,.\, 2b^3y^3 \,.\, - 5a^2y = \ldots$
21) $7m^2x \,.\, 3mx^2 \,.\, - 2mq = \ldots$
22) $- 3pq^2 \,.\, 6p^3q \,.\, 8p^2q^3 = \ldots$
23) $2a^2m^3x^4 \,.\, 3am^5x^2 \,.\, 4a^3mx^2 = \ldots$
24) $6x^3yz^3 \,.\, - 9x^2y^2z^2 \,.\, - 3x^4yz = \ldots$
25) $3ax \,.\, - 2am \,.\, - 4mx \,.\, b^2 = \ldots$
26) $2c^3 \,.\, - 3c^7 \,.\, - 7c^4 \,.\, - c = \ldots$
27) $- 97ax \,.\, 53by \,.\, 82cz \,.\, - acy = \ldots$
28) $3a^3x \,.\, - 15ax^2 + 8a^2x^2 \,.\, 6a^2x = \ldots$
29) $7am^2 \,.\, 3b^2n^2 \,.\, 4ab \,.\, 8a^2bn \,.\, 2b^2n \,.\, 3mn^2 = \ldots$
30) $8m^3p^5 \,.\, 7m^5p^4 - 9m^2p^2 \,.\, 6m^2p^6 \,.\, m^4p = \ldots$

§. 19.

Ist $a + b$ mit n zu multiplicieren, also $n$mal als Summand zu setzen, so hat man

$$\begin{aligned}(a + b).n &= a + b + (a + b) + (a + b) \ldots (n\text{mal})\\ &= a + a + a \ldots (n\text{mal}) + b + b + b \ldots (n\text{mal})\\ &= a.n + b.n;\end{aligned}$$

es ist somit

$$(a + b).n = an + bn.$$

Da es für das Product gleichgiltig ist, in welcher Ordnung die Factoren multipliciert werden, so ist auch

$$n.(a + b) = an + bn.$$

Daraus folgt:

Ein mehrgliedriger Ausdruck wird mit einem eingliedrigen multipliciert, indem man jedes Glied des mehrgliedrigen Ausdruckes mit dem eingliedrigen multipliciert und die Theilproducte addiert.

Aufgaben.

1) $5a.(3b + 4c - d) = 15ab + 20ac - 5ad.$

2) $-3ax \,.\, (by - 2cz + 5) = -3abxy + 6acxz - 15ax.$
3) $(6a - 5b).3c = 18ac - 15bc.$
4) $(7m - 6n + 5p) \,.\, -3x = -21mx + 18nx - 15px.$
5) $(2 + 3a - 4a^2 - 5a^3).6a^2 = 12a^2 + 18a^3 - 24a^4 - 30a^5.$
6) $(3ax - 5by - cz). -2mp = \ldots$
7) $(5a^2 - 3a + 2). -6ax = \ldots$
8) $8by(1 - 2x + 3x^2) = \ldots$
9) $(7am + 6bn - 5cp + 4dp).3fx = \ldots$
10) $(a^2 + b^2 - c^2).ax^2 = \ldots$
11) $3a(4bx - 2cy) - 5a(2bx + 3cy) = \ldots$
12) $(2a^2b - 3ab^2 - 4b^3).17a^3b^4 = \ldots$
13) $-15a^2x^3(2a^4 - 4a^3x + 6a^2x^2) = \ldots$
14) $2x(1 - 3x - 5x^2) + 5x^2(3 - 7x) = \ldots$
15) $5y(x^2 - 2xy + 3y^2) - 3x^2(6y - 3) = \ldots$

§. 20.

Hat man $a + b + c$ mit $n + p + q$ zu multiplicieren, so ist, wenn man den Multiplicand $a + b + c$ vorläufig durch m bezeichnet,

$$m \,.\, (n + p + q) = m.n + m.p + m.q;$$

somit, wenn man statt m wieder seinen Werth setzt,

$$\begin{aligned}(a + b + c) \,.\, (n + p + q) = (a + b + c) &\,.\, n \\ + (a + b + c) &\,.\, p \\ + (a + b + c) &\,.\, q\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}(a + b + c) \,.\, (n + p + q) = an + bn + cn& \\ + ap + bp + cp& \\ + aq + bp + cq&;\end{aligned}$$

d. h. **zwei mehrgliedrige Zahlenausdrücke werden mit einander multipliciert, indem man den ganzen Multiplicand mit jedem Gliede des Multiplicators multipliciert, oder, was einerlei ist, indem man jedes Glied des einen Factors mit jedem Glied des anderen Factors multipliciert und die erhaltenen Theilproducte addiert.**

Man pflegt bei der Ausführung der Multiplication die mehrgliedrigen Factoren gewöhnlich unter einander zu schreiben und in den Theilproducten die etwa vorkommenden gleichnamigen Ausdrücke wegen des leichteren Reducierens ebenfalls gerade unter einander zu stellen.

Aufgaben.

1) $(5a - 3b)(4c - 2d) = (5a - 3b).4c + (5a - 3b). -2d$
$= 20ac - 12bc - 10ad + 6bd.$

2) $(m + 2n - 3p)(2x + 3y) = (m + 2n - 3p).2x + (m + 2n - 3p).3y = 2mx + 4nx - 6px + 3my + 6ny - 9py.$

3) $(5a - 6b)(3a - 4b) = 15a^2 - 18ab - 20ab + 24b^2$
$= 15a^2 - 38ab + 24b^2,$

oder

$$\begin{array}{r} 5a - 6b \\ 3a - 4b \\ \hline 15a^2 - 18ab \qquad\qquad \\ -20ab + 24b^2 \\ \hline 15a^2 - 38ab + 24b^2 \end{array}$$

4) $(a + b\ (a + b) = \ldots$ 5) $(a - b)\ (a - b) = \ldots$

Welche Regel läßt sich daraus für die Multiplication eines Binoms mit sich selbst herleiten? man erhält das Binom zu Quadrat.

6) $(a - b)\ (a + b) = \ldots$ 7) $(2m + 3n)\ (2m - 3n) = \ldots$

Welche Regel folgt daraus für die Multiplication der Summe zweier Zahlen mit der Differenz derselben? Summe² – Differenz² = Produkt

8) $(5a^m + 4b^n)\ (5a^m - 4b^n) = \ldots$
9) $(x^2 - 3x + 4)\ (7x - 3) = \ldots$
10) $(3 + 2a - b)\ (5mx - 7ny + 9pz) = \ldots$
11)
$$\begin{array}{l} 3 + 4x + 5x^2 - 6x^3 \\ 4 - 5x - 6x^2 \\ \hline 12 + 16x + 20x^2 - 24x^3 \\ \qquad - 15x - 20x^2 - 25x^3 + 30x^4 \\ \qquad\qquad - 18x^2 - 24x^3 - 30x^4 + 36x^5 \\ \hline 12 + \quad x - 18x^2 - 73x^3 \qquad\quad + 36x^5. \end{array}$$
12) $(x^3 - 8x^2 + 5x - 7)\ (3x - 2) = \ldots$
13) $(x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + 1)\ (x - 1) = \ldots$
14) $(a^4 + a^3 + a^2 + a + 1)\ (a - 1) = \ldots$
15) $(x - 2y - 3z)\ (3x + y - z) = \ldots$
16) $(m^2 + 2m - 3)\ (m^2 - 2m + 3) = \ldots$
17) $(4ab - 3cd + 2ef)\ (4ab + 3cd - 2ef) = \ldots$
18) $(2mx - 3ny + 4pz)\ (3mx + 4ny - 5pz) = \ldots$
19) $(a - 2b + c + 3d)\ (2a + b - 2c + 6d) = \ldots$
20) $(3 - 4x + 6x^2)\ (2 - 6x - 18x^2) = \ldots$
21) $(8a^4 - 9a^2 + 12)\ (5a^4 - 6a^2 + 7) = \ldots$
22) $(x^6 - 3x^5 + 8x^4 - 5x^3 + 2x + 8)\ (2x + 7) = \ldots$
23) $(3y^3 - 5y^2z + 7yz^2 - 4z^3)\ (2y^2 - 5yz + 3z^2) = \ldots$
24) $(2p^3 - 3p^2 - 8p + 12)\ (3p^3 + 4p^2 - 5p + 6) = \ldots$
25) $(3a + 4b)\ (2c - d)\ (3m - 6n) = \ldots$
26) $(x - 1)\ (x - 2)\ (x - 3) = \ldots$
27) $(x + 2)\ (x - 3)\ (x + 4)\ (x - 5) = \ldots$
28) $(3x - 7y)\ (5x + 2y)\ (3ax - 4by) = \ldots$
29) $(6m^2 - 5)\ (8m^2 + 4)\ (3m - 9) = \ldots$
30) $(2x - 3)\ (3x - 4)\ (4x - 5)\ (5x - 6) = \ldots$
31) $(3y^2 - 4y + 2)\ (5y^2 + 7y - 6)\ (y^2 - 2y + 5) = \ldots$
32) $(4x^2 - 4xy - y^2)\ (x^2 - 2xy + 2y^2)\ (2x^2 + 2xy + 3y^2) = \ldots$
33) $(11a - 6b + 5c)\ (3a - 5c) - (7a + 3b - 7c)$
$(4a + 3c) = \ldots$
34) $(3m^2 - 8m - 5)\ (7m^2 + 5m - 6)$
$- (6m^2 + 4m + 3)\ (3m^2 - 9m + 7) = \ldots$
35) $(x^2 - 4x + 4)\ (x^2 + 4x + 4)$
$- (x + 1)\ (x + 2)\ (x - 4)\ (x - 5) = \ldots$

4. Die Division.

§. 21.

Es ist

$$abc : bc = \frac{abc}{bc} = a, \qquad aabx : aby = \frac{aabx}{aby} = \frac{ax}{y}.$$

Daraus folgt:

Um den Quotienten zweier durch Buchstaben ausgedrückter Zahlen zu finden, läßt man im Dividende diejenigen Buchstaben, welche auch im Divisor vorkommen, und zwar in gleicher Anzahl weg; die übrig bleibenden bilden den Buchstabenausdruck des Quotienten. Kommen im Divisor auch solche Buchstaben vor, die der Dividend nicht enthält, so zeigt man die Division durch diese Buchstaben nur an, indem man sie in den Nenner des Quotienten setzt.

Sind nun zwei eingliedrige Zahlenausdrücke durch einander zu dividieren, so dividiert man zuerst die Coefficienten (nach §. 7) und setzt ihren Quotienten dem Quotienten der allgemeinen Zahlen voran.

Kommen im Dividend und im Divisor Potenzen derselben Basis vor, so ist zu unterscheiden, ob der Exponent des Dividends größer, kleiner oder eben so groß als jener des Divisors ist.

1. Es sei der Potenzexponent des Dividends größer als jener des Divisors. Man findet

$$a^5 : a^2 = aaaaa : aa : = aaa = a^3,$$
$$a^4 . a^2 = aaaaaa : aaaa = aa = a^2,$$
$$a^4 : a = aaaa : a = aaa = a^3,$$

so daß der Exponent des Quotienten immer gleich ist dem Exponenten des Dividends weniger jenem des Divisors.

2. Ist der Exponent des Dividends kleiner als der Exponent im Divisor, so erscheint der Quotient in Form eines Bruches; man hat z. B.:

$$a^2 : a^5 = aa : aaaaa = 1 : aaa = \frac{1}{a^3},$$
$$a^3 : a^5 = aaa : aaaaa = 1 : aa = \frac{1}{a^2},$$
$$a^4 : a^8 = aaaa : aaaaaaaa = 1 : aaaa = \frac{1}{a^4}.$$

Drückt man nun den Bruch $\frac{1}{a^m}$, welcher das Umgekehrte des Bruches a^{+m} ist, durch a^{-m} aus, so ist:

$$a^2 : a^5 = \frac{1}{a^3} = a^{-3},$$
$$a^3 : a^5 = \frac{1}{a^2} = a^{-2},$$
$$a^4 : a^8 = \frac{1}{a^4} = a^{-4}$$

und man sieht, daß auch in diesem Falle der Potenzexponent im Quotienten erhalten wird, indem man von dem Exponenten im Dividend jenen des Divisors subtrahiert.

Man nennt a^{m} eine Potenz mit negativem Exponenten, während a^{m} eine Potenz mit positivem Exponenten heißt.

3. Es seien endlich die Exponenten im Dividend und im Divisor gleich, z. B. beide gleich 3, so ist

$$a^3 : a^3 = 1.$$

In diesem Falle ist also der Quotient keine Potenz von a, sondern die Einheit. Betrachtet man daher 1 auch als eine Potenz von a, und zwar als die 0te, so daß $a^0 = 1$ ist, so hat man

$$a^3 : a^3 = 1 = a^0,$$

und es findet die in den beiden früheren Fällen nachgewiesene Gesetzmäßigkeit auch in diesem Falle statt.

Man kann daher allgemein sagen:

Potenzen derselben Basis werden dividiert, indem man die gemeinschaftliche Basis beibehält und ihr zum Exponenten eine Zahl gibt, welche gleich ist dem Exponenten des Dividends weniger dem Exponenten des Divisors.

Aufgaben.

1) $+ ab : + a = + b.$
2) $+ ab : - a = - b.$
3) $- ab : + a = - b.$
4) $- ab : - a = + b.$
5) $6mx : 2x = 3m.$
6) $12a^4 : - 3a = - 4a^3.$
7) $10ab : 2bc = \frac{5a}{c}.$
8) $x^3 : - x^5 = - x^{-2} = - \frac{1}{x^2}.$
9) $- 12am : 2m = \ldots$
10) $35abcd : 5bd = \ldots$
11) $abx : 5aby = \ldots$
12) $27a^7 : - 3a^3 = \ldots$
13) $- 3bmx : 4ax^2 = \ldots$
14) $ab^2c^3 : abc = \ldots$
15) $- 51abdy^2 : 3bdy = \ldots$
16) $- m^5p^2x^4 : mp^2x^2 = \ldots$
17) $225m^2y : 25my^2 = \ldots$
18) $30x^2y^3 : - 5x^3y = \ldots$
19) $4a^2m^4x^5 : 5a^5m^3x = \ldots$
20) $42x^3y^2z^4 : 7xy^2z^3 = \ldots$
21) $85a^{4m+1} : 5a^{4m-2} = \ldots$
22) $84a^{n-4} : 12a^2 = \ldots$
23) $- 3a^2b^3c^4d^5 : - a^4b^2cd^3 = \ldots$
24) $12\,am^5n^4p^3q^2 : 4m^2n^3p^4q^5 = \ldots$
25) $104ab^3x^9 : (91a^5b^6x^7 : 7a^4b^4x) = \ldots$
26) $(24a^5b^3x : 3a^2b^2) + (35a^6b^2x^2 : - 5a^3bx) = \ldots$

§. 22.

Es ist

$$(a + b + c) \cdot p = ap + bp + cp.$$

Wenn man das Product zweier Factoren durch den einen Factor dividiert, so muß der andere Factor zum Vorschein kommen; es muß also

$$(ap + bp + cp) : p = a + b + c$$

sein; aber a, b, c sind die Quotienten, welche man erhält, wenn man folgeweise ap, bp, cp durch p dividiert; daher gilt der Satz:

Ein mehrgliedriger Ausdruck wird durch einen eingliedrigen dividiert, indem man jedes Glied desselben durch den eingliedrigen Divisor dividiert.

Aufgaben.

1) $(8ab - 12ac) : 4a = 2b - 3c.$
2) $(15am - 10bm + 20cm) : -5m = -3a + 2b - 4c.$
3) $(18amy - 27bny + 36cpy) : -9y = -2am + 3bn - 4cp.$
4) $(20abmn - 16acmp + 9adnq) : 4am = 5bn - 4cp + \frac{9dnq}{4m}.$
5) $(21ax - 18bx + 15cx) : -3x = \ldots$
6) $(30mnp - 25mnq - 15mnr + 10mns) : -5mn = \ldots$
7) $(12x^5 - 8x^3 + 4x) : 4x = \ldots$
8) $(35m^3y + 28m^2y^2 - 14m^3) : -7my^2y = \ldots$
9) $(3x^3 - 6x^5 + 9x^7 - 12x^9) : 3x^2 = \ldots$
10) $(-16a^3bc^5 + 8a^4b^2c^4 - 12a^5b^3c^3 + 20a^6b^4c^2)$
$: -4a^2b^2c^2 = \ldots$

Wenn der Dividend eingliedrig und der Divisor mehrgliedrig ist, so wird die Division nur angezeigt, indem man den Quotienten in Bruchform ausdrückt; z. B.:

$$a : (a + b) = \frac{a}{a + b}.$$

$$-3x : (5a - 2b) = -\frac{3x}{5a - 2b}.$$

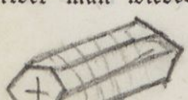
§. 23.

Es sei

$$\begin{array}{lccc} \text{der Divisor} & a & + b & + c, \\ \text{der Quotient} & n & + p & + q, \text{ so ist} \\ \hline \end{array}$$

$$\text{der Dividend} \begin{cases} an + bn + cn \\ + ap + bp + cp \\ + aq + bq + cq. \end{cases}$$

Das erste Glied des Dividends ist an, d. i. das Product aus dem ersten Gliede a des Divisors und dem ersten Gliede n des Quotienten; man findet daher das erste Glied n des Quotienten, indem man das erste Glied an des Dividends durch das erste Glied a des Divisors dividiert. — Wenn man nun das Theilproduct, welches n im Dividende hervorbringt, bildet, indem man nämlich den ganzen Divisor mit n multipliciert, so ist, wenn dieses Theilproduct von dem Dividende subtrahiert wird, das erste Glied ap des Restes das Product aus dem ersten Gliede a des Divisors und dem zweiten Gliede p des Quotienten; man erhält also dieses zweite Glied des Quotienten, indem man das erste Glied des Restes durch das erste Glied des Divisors dividiert. — Bildet man wieder die Bestandtheile, welche p im Dividende hervor-



bringt, nämlich das Product aus dem ganzen Divisor und aus p, und subtrahiert dieses Product von dem früheren Reste, so stellt das erste Glied aq des neuen Restes das Product aus dem ersten Gliede a des Divisors und dem dritten Gliede q des Quotienten vor; wird daher dieses erste Glied des Restes durch das erste Glied des Divisors dividiert, so erhält man das dritte Glied q des Quotienten; u. s. f.

Aus diesen Betrachtungen ergibt sich für das **Dividieren zweier mehrgliedriger Zahlenausdrücke folgendes Verfahren:**

1. Man dividiere das erste Glied des Dividends durch das erste Glied des Divisors; dadurch erhält man das erste Glied des Quotienten. Mit diesem ersten Gliede multipliciere man den ganzen Divisor und subtrahiere das Product vom Dividende.
2. Zu dem Reste setze man das folgende oder auch mehrere folgende Glieder des Dividends herab, und dividiere wieder das erste Glied dieses neuen Theildividends durch das erste Glied des Divisors; dadurch bekommt man das zweite Glied des Quotienten. Mit diesem zweiten Gliede wird der ganze Divisor multipliciert und das Product von dem letzten Theildividende subtrahiert.
3. Zu dem neuen Reste setzt man wieder eines oder mehrere von den folgenden Gliedern des Dividends herab und wiederholt das vorhergehende Verfahren, bis alle Glieder des Dividends in Anspruch genommen wurden.
4. Wenn zuletzt ein Rest übrig bleibt, so ist dieser noch durch den Divisor zu dividieren; der bezügliche Quotient wird jedoch nur angezeigt und in Form eines Bruches zu dem erhaltenen ganzen Quotienten dazu gesetzt.

Aufgaben.

1) $(24abc - 15cxy - 48abd + 30dxy) : (3c - 6d) = 8ab - 5xy$

$$
\begin{array}{llll}
24abc & & -\,48abd & \\
- & & + & \\
\hline
 & -\,15cxy & & +\,30dxy \\
 & -\,15cxy & & +\,30dxy \\
 & + & & - \\
\hline
 & & 0 &
\end{array}
$$

2) $(10a^2 - 11ab - 6b^2) : (2a - 3b) = 5a + 2b$

$$
\begin{array}{lll}
10a^2 & -\,15ab & \\
- & + & \\
\hline
 & +\,4ab & -\,6b^2 \\
 & +\,4ab & -\,6b^2 \\
 & - & + \\
\hline
 & 0 &
\end{array}
$$

3) $(a^2 + 2ab + b^2) : (a + b) = \ldots$

4) $(a^2 - 2ab + b^2) : (a - b) = \ldots$

5) $(a^2 - b^2) : (a + b) = \ldots$ 6) $(a^2 - b^2) : (a - b) = \ldots$

7) $(a^4 - 1) : (a + 1) = \ldots$ 8) $(x^5 - 1) : (x - 1) = \ldots$
9) $(m^8 - 1) : (m + 1) = \ldots$ 10) $(m^7 - 1) : (m - 1) = \ldots$
11) $(x^3 + x^2 - 2x - 8) : (x - 2) = \ldots$
12) $(8x^3 - 22x^2 + 27x - 18) : (2x - 3) = \ldots$
13) $(16x^3 - 2a^3) : (2x - a) = \ldots$
14) $(7a^2 + 10ab + 19ac + 11bc + 3b^2 + 10c^2) : (a + b + 2c) = \ldots$
15) $(6a^2 - 13ab + 4ax + 6b^2 - 11bx - 10x^2) : (3a - 2b + 5x) = \ldots$
16) $(24x^4 - 38a^2x^2 + 15a^4) : (4x^2 - 3a^2) = \ldots$
17) $(9y^2 - 4x^2 - 4x - 1) : (3y - 2x - 1) = \ldots$
18) $(6x^3 - 15x^2 + 12x^2 - 3) : (x^2 - 2x + 1) = \ldots$
19) $(6 + 2a - 23a^2 + 49a^3 - 30a^4) : (2 + 4a - 5a^2) = \ldots$
20) $(9x^4 - 16x^2 + 12x - 5) : (3x^2 - 2x + 1) = \ldots$
21) $(16m^4 - 8m^2n^2 + n^4) : (4m^2 + 4mn + n^2) = \ldots$
22) $(a^{3m} + a^{2m}b^n - a^m b^{3n} - b^{4n}) : (a^m + b^n) = \ldots$
23) $(y^6 - 2y^5 - 7y^4 + 20y^3 - 21y^2 - 18y + 27) : (y^2 - 2y - 3) = \ldots$
24) $(a^4 + 4b^4) : (a^2 - 2ab + 2b^2) = \ldots$
25) $(8p^6 + 27) : (4p^4 - 6p^2 + 9) = \ldots$
26) $(2x^4 + 7bx^3 + b^2x^2 + 2b^3x + 24b^4) : (2x^2 - 3bx + 4b^2) = \ldots$
27) $(24b^4 - 38ab^3 + 31a^2b^2 - 13a^3b + 2a^4) : (4b^2 - 3ab + 2a^2) = \ldots$
28) $(63b^2y^8 + 10b^4y^6 - 155b^6y^3 + 10b^8y^2 + 63b^{10}) : (7by^4 + 5b^3y^2 - 9b^5) = \ldots$
29) $(25a^8 + 51a^{10} - 6a^{12} - 49a^{14}) : (5a^4 - 3a^5 + 6a^6 - 7a^7) = \ldots$
30) $(27a^7 - 33a^6b - 45a^5b^2 + 71a^4b^3 - 36a^2b^5 + 16ab^6) : (9a^3 - 2a^2b - 5ab^2 + 4b^3) = \ldots$

II. Das Rechnen mit gebrochenen Zahlenausdrücken.

§. 24.

Für die Bruchrechnung mit Buchstaben gelten dieselben Sätze, welche für das Rechnen mit besonderen Brüchen entwickelt wurden; es wird daher hier genügen, die Anwendung jener Sätze an Beispielen mit Buchstabengrößen durchzuführen.

Nur eine Bemerkung hinsichtlich der gemischten Zahlen muß hier vorausgeschickt werden. Während bei gemischten besonderen Zahlen der mit der ganzen Zahl verbundene Bruch immer als positiv zu betrachten ist, so daß z. B. $5\frac{3}{4}$ so viel bedeutet als $5 + \frac{3}{4}$; kann bei einer allgemeinen gemischten Zahl der angehängte Bruch, so wie die ganze Zahl, positiv oder negativ sein, und es kann eine gemischte allgemeine Zahl eine der folgenden Formen haben:

$$a + \frac{m}{n},\ n - \frac{m}{n},\ -a + \frac{m}{n},\ -a - \frac{m}{n}.$$

Wenn mit gemischten Zahlen Rechnungsoperationen vorzunehmen sind, werden sie zuerst in unechte Brüche verwandelt. Diese Verwandlung beruhet auf der Addition und Subtraction der Brüche.

§. 25.

Aufgaben über die Darstellung mehrerer Brüche mit dem kleinsten gemeinschaftlichen Nenner.

1) Es seien die Brüche $\frac{a}{2}$, $\frac{2a}{3}$, $\frac{3a}{5}$ auf den kleinsten gemeinschaftlichen Nenner zu bringen.

Der kleinste gemeinschaftliche Nenner ist $2 . 3 . 5 = 30$; man hat daher

$$30 : 2 = 15,\quad a \times 15 = 15a, \text{ also } \frac{a}{2} = \frac{15a}{30};$$
$$30 : 3 = 10,\ 2a \times 10 = 20a,\quad " \quad \frac{2a}{3} = \frac{20a}{30};$$
$$30 : 5 = \ 6,\ 3a \times \ 6 = 18a,\quad " \quad \frac{3a}{5} = \frac{18a}{30}.$$

2) Man bringe die Brüche $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{bd}$ auf den kleinsten gemeinschaftlichen Nenner.

Da b und d als Factoren in bd erscheinen, so ist bd der kleinste gemeinschaftliche Nenner, und man erhält:

$$\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd},\ \frac{c}{d} = \frac{bc}{bd},\ \frac{e}{bd} = \frac{e}{bd}.$$

3) Man soll die Brüche $\frac{1}{a}$, $\frac{2}{a^2}$, $\frac{3}{a^3}$ auf den kleinsten gemeinschaftlichen Nenner bringen.

$$\begin{array}{cc|ll} & & a^3 & \\ \hline \frac{1}{a} & a^2 & a^2 & \text{daher } \frac{1}{a} = \frac{a^2}{a^3} \\ \frac{2}{a^2} & a & 2a & \quad " \quad \frac{2}{a^2} = \frac{2a}{a^3} \\ \frac{3}{a^3} & 1 & 3 & \quad " \quad \frac{3}{a^3} = \frac{3}{a^3} \end{array}$$

4. Es seien die Brüche $\frac{1}{3}$, $\frac{a}{b}$, $\frac{3x}{4cd}$, $\frac{5y}{6d^2}$ auf den kleinsten gemeinschaftlichen Nenner zu bringen.

§. 26.

Aufgaben über das Addieren der Brüche.

1) $\frac{a}{m} + \frac{b}{m} = \frac{a+b}{m}$.

2) $\frac{x+y}{2p} + \frac{x+y}{2p} = \frac{x+y+x+y}{2p} = \frac{2x}{2p} = \frac{x}{p}$.

3) $\frac{n+p}{3} + \frac{n-p+q}{3} + \frac{n-q}{3} = \frac{3n}{3} = n.$

4) $a + \frac{m}{n} = \frac{an+m}{n}.$

5) $1 + \frac{x-y}{x+y} = \frac{x+y+x-y}{x+y} = \frac{2x}{x+y}.$

6) $2a + \frac{3b}{a} = \ldots$ 7) $\frac{a^2+x^2}{a-x} + a - x = \ldots$

8) $5a - 2b + \frac{3a^2-4b^2}{5a-6b} = \ldots$

9) $\frac{a}{m} + \frac{b}{n} = \frac{an}{mn} + \frac{bm}{mn} = \frac{an+bm}{mn}.$

10) $\frac{2x+3y}{2} + \frac{x-2y}{3} = \ldots$ 11) $\frac{a+b}{a-b} + \frac{a-b}{a+b} = \ldots$

12) $\frac{1}{x} + \frac{2}{x-a} = \ldots$ 13) $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a-b} = \ldots$

14) $\frac{3x}{4} + \frac{2x}{3} + \frac{7x}{10} = \ldots$ 15) $\frac{3m-2n}{m+2n} + \frac{3m+2n}{m-2n} = \ldots$

16) $\frac{a-3b}{cb} + \frac{a}{b} + \frac{a^2-ab-b^2}{bcd} + \frac{4b}{cd} = \ldots$

17) $\frac{mpx+n}{mx-1} + n + \frac{mnx+p}{mx+1} = \ldots$

18) $\frac{7x+4a}{9x-5a} + \frac{8x-3a}{3x-2a} + 1 = \ldots$

19) $\frac{3x^2-4x+5}{(x^2-2x+1)} + \frac{8x^2+4x-7}{(x^2+x+1)} = \ldots$

20) $\frac{ax}{a^2-x^2} + \frac{a-x}{a+x} + \frac{a+x}{a-x} = \ldots$ $a^2 - x^2$

21) $\frac{a}{2} + \frac{2b}{3} + \frac{3c}{4} + \left(\frac{4a}{5} + \frac{5b}{6} + \frac{6c}{7}\right) = \ldots$

§. 27.

Aufgaben über das Subtrahieren der Brüche.

1) $\frac{a}{m} - \frac{b}{m} = \frac{a-b}{m}.$

2) $\frac{x+y}{2m} - \frac{x-y}{2m} = \frac{x+y-x+y}{2m} = \frac{2y}{2m} = \frac{y}{m}.$

3) $\frac{5m-3n}{4} - \frac{m+n}{4} = \frac{5m-3n-m-n}{4} = \frac{4m-4n}{4} = m - n.$

4) $a - \frac{m}{n} = \frac{an-m}{n}.$ 5) $\frac{m}{n} - a = \frac{m-an}{n}.$

6) $1 - \frac{x-y}{x+y} = \ldots$ 7) $\frac{1+2x^2}{x} - 3x = \ldots$

8) $\frac{2-3a+4a^2}{5-6a} - 7a = \ldots$ 9) $a + b - \frac{a^2+b^2}{a+b} = \ldots$

10) $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \frac{bx}{ab} - \frac{ay}{ab} = \frac{bx-ay}{ab}.$

11) $\frac{5b}{6} - \frac{3b}{4} = \frac{10b}{12} - \frac{9b}{12} = \frac{b}{12}.$

12) $\frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{y+y} = \frac{(x+y)\,(x+y) - (x-y)\,(x-y)}{(x-y)\,(x+y)} = \frac{4xy}{x^2-y^2}.$

13) $\frac{5a}{3} - \frac{3a}{4} = \ldots$ 14) $\frac{2b-5x}{3b+4x} - \frac{4b+5x}{3b-2x} = \ldots$

15) $\frac{3m}{2x} + \frac{5n}{3y} - \frac{4p}{5xy} = \ldots$ 16) $\frac{5a}{2a+1} - \frac{2a}{a-2} = \ldots$

17) $\frac{17m+3}{12m-15} - \frac{13}{21} + \frac{8m-1}{28m-35} = \ldots$

18) $\frac{np-mn}{mp-np} - \frac{q}{a} - \frac{npq-mpq+anp-amp}{amp+anp} = \ldots$ Kl. ge. Nen.

19) $\frac{5a^2+a-6}{2a^2-5a+3} - \frac{2a^2+3a-4}{3a^2-6a+9} = \ldots$

20) $\frac{a+x}{a-x} - \frac{4x^2}{a^2-x^2} - \frac{a-x}{a+x} = \ldots$

21) $\left(\frac{x^2}{5} - \frac{2x}{3} - \frac{3}{4}\right) - \left(\frac{2x^2}{15} + \frac{x}{5} - \frac{3}{8}\right) \ldots$

§. 28.

Aufgaben über das Multiplicieren der Brüche.

1) $\frac{a}{b} \cdot m = \frac{am}{b}.$ 2) $\frac{3}{4ab} \cdot 2b = \frac{3}{2a}.$

3) $\frac{2abx}{3m} \cdot -5c = -\frac{10abcx}{3m}.$

4) $\left(1 + \frac{b}{a}\right) \cdot 3a = \frac{a+b}{a} \cdot 3a = 3a + 3b.$

5) $\frac{3a^2x^2}{4b^2y^2} \cdot 9y^3 = \ldots$ 6) $\frac{5x^2-4x+2}{7x^2+5x-3} \cdot (x-2) \ldots$

7) $\left(x - y + \frac{x^2+y^2}{x+y}\right) \cdot (x+y) = \frac{2x^2}{x+y} \cdot (x+y) = 2x^2.$

8) $\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{mp}{nq}.$ 9) $\frac{2a}{3m} \cdot \frac{3b}{4n} \cdot -\frac{4c}{5p} = -\frac{2abc}{5mnp}.$

10) $\left(1 + \frac{x}{y}\right) \cdot \left(1 - \frac{x}{y}\right) = \ldots$

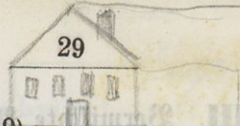
11) $\left(2a + \frac{b}{3c}\right) \left(\frac{2b}{5c} - a\right) = \ldots$

12) $\left(1 + \frac{m}{n}\right) \left(1 - \frac{m}{n}\right) \cdot \frac{m}{m+n} \cdot \frac{m}{n-m} = \ldots$

13) $\frac{5x}{4a} \cdot -\frac{3y}{4b} \cdot \frac{2a}{5c} \cdot -\frac{7z}{8d} = \ldots$

14) $\left(3x - \frac{5ax-3}{2a}\right) \cdot -5ab = \ldots$

15) $\left(\frac{a+b}{a-b} + 1\right) \left(\frac{a-b}{a+b} - 1\right) = \ldots$



16) $\frac{5a-11}{6a-7}\cdot(3a^2-4a+9)=\ldots$

17) $\left(\frac{3x}{4}+\frac{2}{5}-\frac{2}{x}\right)\left(\frac{2x}{3}-\frac{3}{4}+\frac{1}{2x}\right)=\ldots$

18) $\frac{3y^2-5y+7}{5y^2+6y-8}\cdot\frac{y^2+2y+3}{2y^2-3y-4}=\ldots$

19) $\frac{a^2-1}{2a-3}\cdot\frac{a+1}{2a+3}\cdot\frac{a-1}{a+1}=\ldots$

20) $\left(\frac{2a^2}{5b^3}+\frac{a}{3}+\frac{2b^3}{7}\right)\left(\frac{a^2}{3b^2}-\frac{2ab}{9}\right)=\ldots$

§. 29.

Aufgaben über das Dividieren der Brüche.

1) $\frac{ab}{c}:a=\frac{b}{c}.$ 2) $\frac{3ab}{c}:4d=\frac{3ab}{4cd}.$

3) $\frac{12mpx}{5nq}:-3x=-\frac{4mp}{5nq}.$

4) $\left(1+\frac{b}{a}\right):2b=\frac{a+b}{a}:2b=\frac{a+b}{2ab}.$

5) $\frac{10x^2y^3}{m^3n^2}:5xy=\ldots$ 6) $\frac{3ax^3}{4by^3}:6b^2y=\ldots$

7) $a:\frac{b}{c}=a\cdot\frac{c}{b}=\frac{ac}{b}.$

8) $2m:\left(1-\frac{n}{m}\right)=2m:\frac{m-n}{m}=2m\cdot\frac{m}{m-n}=\frac{2m^2}{m-n}.$

9) $\frac{m}{n}:\frac{p}{q}=\ldots$ 10) $\frac{2ax}{3by}:-\frac{5mx}{6ny}=\ldots$

11) $\left(1+\frac{m}{x}\right):\left(1-\frac{m}{x}\right)=\ldots$

12) $\frac{a^2-b^2}{2ab}:\left(1+\frac{b}{a}\right)=\ldots$

13) $\left(\frac{5a-12x}{4}+6a+3x\right):-\frac{a}{4}=\ldots$

14) $\frac{2x-7}{3x+3}:\frac{5x-1}{4x+3}=\ldots$

15) $\frac{21mn-17nx}{12mp}:\frac{9mx-33x^2}{16np}=\ldots$

16) $\frac{5z^2-3z-9}{6z^2-5z-2}:\frac{3z^2-7z-1}{4z^2+8z+3}=\ldots$

17) $\left(\frac{x+3y}{2}-\frac{3x-y}{4}\right):\left(\frac{2x-y}{3}-\frac{x+7y}{4}\right)=\ldots$

18) $\left(\frac{5x^6}{12a^7}-\frac{43x^2}{24a^2}+\frac{9a^3}{5x^2}\right):\left(\frac{3x^2}{4a^3}-\frac{6a^2}{5x}\right)=\ldots$

5
5
6
16 : 3 = 5

III. Vermischte Aufgaben
über das Rechnen mit allgemeinen Zahlen.
§. 30.

1) $8abc \,.\, 4 = \ldots$ 2) $9a^2 \,.\, a = \ldots$

3) $2a + 5m + 3a - 2m = \ldots$

4) $7a - 11b - (3a + b) = \ldots$

5) $7x - 3y + 4z - 2x + 4y - 3z + x - 2y + 5z = \ldots$

6) $28m - 15m^2 + 7m^3 - 21m - 8m^2 - 10m^3 = \ldots$

7) $81ac : -9a = \ldots$ 8) $-65m^2pq : 13mp = \ldots$

9) $5x - (2x + 3z) = \ldots$ ~~10)~~ $24 + (8a - 10) = \ldots$

11) $-5x^5y \,.\, -3x^2 = \ldots$ ~~12)~~ $ab^2c^3 \,.\, -3a^3b^2c = \ldots$

13) $-\frac{3ab}{4x} \,.\, 5b = \ldots$ ~~14)~~ $\frac{a-b}{c} \,.\, x = \ldots$

15) $\frac{15bc}{14ad} : -3c = \ldots$ ~~16)~~ $-\frac{5ax^2}{6y} : 6y = \ldots$

17) $a - 2a^2 + 3a^3 - 3a - 4a^2 - 5a^3 + 6a + 7a^2 = \ldots$

18) $17a - 13b + 10c - (5a + 7b + 6c) \ldots$

19) $(a - 2b + 3c) \,.\, 2x = \ldots$

20) $(21a^2x - 18ax^2) : 3ax = \ldots$

21) $(5m - 2n - p) \,.\, -7m = \ldots$

22) $(35y^3 + 28y^2) : 7y^2 = \ldots$

23) $-36x^6y^5z^4 : -4x^4y^4z^4 = \ldots$

24) $18a^3b^2 : 6ab^4 = \ldots$ läßt sich nicht in die andern Bruchform

25) $\frac{3a}{4x} + \frac{5a}{6x} = \ldots$ 26) $\frac{ax}{b} + \frac{2ax}{3b} = \ldots$

27) $\frac{4a+b}{3} - \frac{3a-2b}{4} = \ldots$ 28) $\frac{5x-a}{2} + \frac{2x-3a}{4} = \ldots$

29) $(a^3 + 3a^2b + 4ab^2 + b^3)(a + b) = \ldots$

30) $(63abc - 72b^2c + 81bcx) : 9bc = \ldots$

31) $3a(2x - a) - 3x(2a + x) = \ldots$

32) $(6a - 3b - 4c) \,.\, -5abcx = \ldots$

33) $(ab + bc + ax + cx) : (b + x) = \ldots$

34) $\frac{2a-9}{15a-25} \cdot (3a - 5) = \ldots$ 35) $\frac{15ax - 5bx}{8ab} : -5x = \ldots$

36) $\frac{1}{2a} + \frac{1}{3b} - \frac{1}{c} = \ldots$ 37) $\frac{5a+8b}{a+b} - \frac{3a-b}{a-b} = \ldots$

38) $\frac{m+n}{a+b} \cdot \frac{m-n}{a+b} = \ldots$ 39) $\frac{a-4}{a+1} \cdot \frac{6a}{a-2} = \ldots$

40) $-8a + 13b - 12c - 9d - (3a + 8b + 2c - 7d) = \ldots$

41) $13x - (8m - 5n) + (4x + 5m) - (7x - 3n) = \ldots$

42) $\frac{8x - 2y + 5z}{12} - \frac{3x + 10y - 15z}{12} - \frac{5x - 24y - 4z}{12} = \ldots$

43) $(2a^2 - ab - 6b^2) : (2a + 3b) = \ldots$

44) $1 - [3m + 4n + 1 - (5m + 2n + 4)] = \ldots$

45) $a - (2b - a) + [3a - (3b - 5a) + 5b] = \ldots$

Mors J. Ros Bahne Alo Lujer ~~Himer~~

85

46) $(3ax - 4by)(5ax + 6by) = \ldots$
47) $(3m - 5n + 6p)(7m + 8n - 9p) = \ldots$
48) $m(a - b + c) - (m - n)(a + b - c) = \ldots$
49) $(6ab - 15ax - 4bc + 10cx) : (2b - 5x) = \ldots$
50) $\frac{5m + 2n}{4p} : (2m - 3n) \ldots$
51) $\frac{21ab - 77bx}{12ac} : \frac{9ax - 33x^2}{16bc} = \ldots$
52) $\frac{3mn - 15my}{6mx - 20nx} \cdot \frac{9mx - 33nx}{14mn - 6my} = \ldots$
53) $(x^2 + 2x - 3)(2x^2 - 3x + 4) = \ldots$
54) $(a^2 - 3ab + 2b^2 + 3ac - 3bc) : (a - b) = \ldots$
55) $(15a^2 - 26ab + 8b^2)(4a - 9b) = \ldots$
56) $(8x^2 - 9xy + 6y^2)(12x^2 + 5xy - 8y^2) = \ldots$
57) $(9a + 3b)(2a - 5b)(a - 4b) = \ldots$
58) $\frac{3x - 4}{4} + \frac{2x + 3}{5} - \frac{x - 2}{6} = \ldots$ 61–7
59) $\frac{ab - 6a}{2b} - \frac{2c - ad}{2d} + \frac{bc - 3ad}{bd} = \ldots$
60) $4a^2 - (2a^2 - 9b) - [6a^2 + 3b - (4a^2 - 5b)] = \ldots$
61) $x^3 - 2x^2 + 3x - (-2x^2 + 6x - 7) = \ldots$
62) $(8 - 12a + 16a^2 - a^3)(4 - 8a + a^2) = \ldots$
63) $(a^3 - 2a^2b + 2ab^2 - b^3)(2a - 3b) = \ldots$
64) $(6a^4 + 9a^3 + 4a^2 + 5a + 4) : (a^2 + 2a + 1) = \ldots$
65) $(x^7 + 1) : (x + 1) = \ldots$
66) $\left(\frac{3a^2}{4b} - \frac{3b}{10a}\right) \cdot \left(\frac{5a}{9b} - \frac{6b}{7a^2}\right) = \ldots$
67) $\left(1 + \frac{m}{2} + \frac{m^2}{3} + \frac{m^3}{4}\right)\left(1 - \frac{m}{2} + \frac{m^2}{3} - \frac{m^3}{4}\right) = \ldots$
68) $6(a - 2b + 3c) - 4(2a - b + 5c) + 5(3b - 2a - c) = \ldots$
69) $(7a - 2b + 4c + 3d)(-2a + 4b - 3c + 5d) = \ldots$
70) $(28am + 26ap - 35mn - 20np) : (4a - 5n) = \ldots$
71) $(2a^4 + a^3b - 5a^2b^2 + 7ab^3 - 4b^4) : (a^2 - 2ab + b^2) = \ldots$
72) $\frac{3m + n - p}{4n} + \frac{4 - 3m - n}{2n} + \frac{3 + 7n - 9p}{9n} = \ldots$
73) $\left(a + \frac{am - b}{m}\right) : \left(a - \frac{am - b}{m}\right) = \ldots$
74) $\left(\frac{2a^3}{5b^3} + \frac{a}{3} - \frac{2b^3}{7}\right)\left(\frac{a^2}{3b^2} - \frac{2ab}{9}\right) = \ldots$
75) $\frac{3a - 8x}{2a - 3x} + \frac{4a - 7x}{5a - 9x} = \ldots$
76) $\frac{5x^2 - 7x + 2}{x^2 - 4x - 2} - \frac{x - 3}{x + 3} = \ldots$
77) $\left(x : \frac{x - b}{c}\right) + \left(\frac{m - c}{x} : \frac{x - b}{m - c}\right) = \ldots$
78) $(5a - 7b + 9c)(8a + 5b - 4c) - (40a^2 - 35b^2 - 36c^2) = \ldots$

79) $(27x^4 - 6x^2 + 1) : (3x^2 + 2x + 1) = \ldots$
80) $46(x - 2y + 5z) + 28(3y - 6z) + 18(2y - x - 5z) = \ldots$
81) $(8x^6 - 36x^4y^3 + 54x^2y^6 - 27y^9) : (2x^2 - 3y^3) = \ldots$
82) $\frac{5a + 6bx}{4a + 6bx} - \frac{ax - x^2}{2a - 3x} = \ldots$
83) $5x - \frac{19x^2 + 17x}{4x - 3} - 1 = \ldots$
84) $a - b + \frac{b^2}{a + b} - \frac{a^2}{a - b} = \ldots$
85) $\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) : \frac{a^2 - b^2}{ab} = \ldots,$
86) $\frac{2}{3}a - \frac{3}{4}b + \frac{1}{5}c - \frac{5}{6}d - (\frac{3}{4}a + \frac{1}{2}b - \frac{3}{10}c + \frac{2}{3}d) = \ldots$
87) $\frac{6x - 13}{10x - 55} + \frac{17}{20} - \frac{5x - 47}{8x - 44} = \ldots$
88) $(x - y)(3m - 2n + 5) - (x + y)(3m - 3n + 5) = \ldots$
89) $7a - 5x - [4b - 3x - (9a - 6b) + (9x - 3a)] = \ldots$
90) $(a^2 - 3a - 6)(a^2 + 4a - 5)(a - 3) = \ldots$
91) $(x - 18x^3 + 81x^5) : (1 - 6x + 9x^2) = \ldots$
92) $(9x - 2y + 4z)(3x + 4y - 2z)(6x - 6y + 2z) = \ldots$
93) $(15a^8x + a^7x^2 - 40a^6x^3 + 16a^5x^4) : (3a^3x - 4a^2x^2) = \ldots$
94) $(\frac{5}{8}a - \frac{1}{2}b - \frac{5}{12}c)(\frac{3}{5}a - \frac{5}{6}b + \frac{4}{5}c) = \ldots$
95) $\frac{x}{x + y} - \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2} - \frac{y}{x - y} = \ldots$
96) $\left[\frac{6z - (4x + 3z)}{a(x + z)} : \frac{3z - 4x}{ax - az}\right] : \frac{b + m}{9m - (3m - 3b) - 3b} = \ldots$
97) $(512 - 5184a^6 + 17496a^{12} - 19683a^{18})$
$: (8 - 36a^2 + 54a^4 - 27a^6) + \ldots$
98) $(2a - 3b)(4a - 5b)(3a + 4b)(6a - 5b) = \ldots$
99) $(7x - 6y)(3x + 4y) - (6x + 3y)(5x + 7y)$
$+ (2x - 5y)(8x - y) = \ldots$
100) $(x^6 - 16x^3y^3 + 64y^6) : (x^4 + 4x^3y + 12x^2y^2 + 16xy^3 + 16y^4) = \ldots$
101) $(x - 1)(x - 3)(x - 5)(x - 7)(x - 9) = \ldots$
102) $(1 - 5a + 10a^2 - 10a^3 + 5a^4 - a^5) : (1 - 3a + 3a^2 - a^3) = \ldots$
103) $\frac{6(x - 1)}{5(x + 1)} \cdot \frac{3(n - x)}{5(x - 1)} : \frac{9(n - x)}{25(y + 1)} = \ldots$
104) $\frac{3n(5a - b) - 3a}{5a - 2b} - \frac{(3n - 4)a - 5bn}{3a + 2b} = \ldots$
105) $(15a^2 - 11ab + \frac{43}{2}ac + \frac{6}{5}b^2 - \frac{64}{5}bc + 2c^2) : (\frac{3}{2}a - \frac{1}{5}b + 2c) = \ldots$

Dritter Abschnitt.

Von den Potenzen und Wurzeln.

§. 31.

Wenn eine Zahl mehrere Male als Factor gesetzt wird, so nennt man, wie schon oben in §. 10 bemerkt wurde, das Product eine **Potenz** jener Zahl, und zwar die **so vielte Potenz**, wie oft jene Zahl als Factor gesetzt wurde; die Zahl, welche öfters als Factor gesetzt wird, heißt eine **Wurzel** des erhaltenen Productes, und zwar die **so vielte Wurzel**, wie oft sie als Factor gesetzt werden muß, um jenes Product zu geben. Z. B.:

$$3 \,.\, 3 = 9$$
$$3 \,.\, 3 \,.\, 3 = 27$$
$$3 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, 3 = 81$$
$$3 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, 3 = 243.$$

Hier ist 9 die 2te Potenz, 27 die 3te, 81 die 4te, 243 die 5te Potenz von 3; umgekehrt ist 3 die 2te Wurzel von 9, die 3te Wurzel von 27, die 4te von 81, die 5te von 243.

Die zweite Potenz wird gewöhnlich auch das **Quadrat**, die dritte Potenz der **Cubus** genannt; eben so heißt die zweite Wurzel die **Quadratwurzel**, die dritte die **Cubikwurzel**.

Die Zahl, welche anzeigt, wie oft die Wurzel als Factor gesetzt werden muß, damit eine andere Zahl als Potenz herauskomme, wird der **Exponent** genannt. In den früheren Beispielen stellen die Zahlen 2, 3, 4, 5 nach der Reihe die Exponenten vor.

Durch das Zusammentreten der Potenz, der Wurzel (Basis) und des Exponenten ergeben sich drei wichtige Rechnungsoperationen, das **Potenzieren**, das **Wurzelausziehen** und die Bestimmung der **Logarithmen**. Die letztere Operation gehört übrigens nicht in das Gebiet der vorliegenden Abhandlung.

Eine Zahl zur 2ten, 3ten, ... mten Potenz erheben, heißt diese Zahl 2mal, 3mal, ... mmal als Factor setzen; z. B. 3 zur 4ten Potenz erheben, heißt 3 4mal als Factor setzen, $3 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, 3 = 81$, die 4te Potenz von 3 ist also 81. Diese Operation wird dadurch angezeigt, daß man der Wurzel rechts oben den Exponenten beisetzt; es ist also:

$$3^4 = 3 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, 3.$$

Aus einer Zahl die 2te, 3te .. mte Wurzel ausziehen, heißt eine Zahl suchen, welche 2mal, 3mal, ... mmal als Factor gesetzt, jene vorgelegte Zahl gibt; z. B.: aus 32 die 5te Wurzel ausziehen, heißt eine Zahl suchen, welche 5mal als Factor gesetzt 32 gibt; diese Zahl ist 2, denn $2.2.2.2.2 = 32$. Für das Wurzelausziehen hat man das Zeichen $\sqrt{}$, in dessen Oeffnung der Exponent gesetzt wird; so bezeichnet man die 5te Wurzel aus 32 durch $\sqrt[5]{32}$. Bei der zweiten Wurzel wird der Exponent 2 nicht angeschrieben, so daß $\sqrt{5}$ so viel bedeutet als $\sqrt[2]{5}$; es kann hier kein Mißverständnis entstehen, weil die erste Wurzel einer Zahl immer der Zahl selbst gleich ist, und man daher bei der ersten Wurzel gar kein Wurzelzeichen anzuschreiben braucht.

I. Vorzeichen der Potenzen.

§. 32.

Es ist:

$$(+a)^2 = +a . +a = +aa = +a^2,$$
$$(+a)^3 = +a . +a . +a = +aaa = +a^3,$$
$$(+a)^4 = +a . +a . +a . +a = +aaaa = +a^4,$$

u. s. w.

Eine positive Wurzel gibt also, zu einer geraden oder ungeraden Potenz erhoben, stets ein positives Resultat.

Ferner ist

$$(-a)^2 = -a . -a = +aa = +a^2,$$
$$(-a)^3 = -a . -a . -a = -aaa = -a^3,$$
$$(-a)^4 = -a . -a . -a - . a = +aaaa = +a^4,$$
$$(-a)^5 = -a . -a . -a . -a . -a = -aaaaa = -a^5,$$

u. s. w.

Eine negative Wurzel gibt also, zu einer geraden Potenz erhoben, ein positives, zu einer ungeraden Potenz erhoben, ein negatives Resultat.

II. Die vier Rechnungsarten mit Potenzen.

1. Das Addieren und Subtrahieren.

§. 33.

Für das Addieren und Subtrahieren der Potenzen gelten dieselben Sätze, wie für das Addieren und Subtrahieren algebraischer Ausdrücke überhaupt. Eine Zusammenziehung im Resultate kann nur dann Statt finden, wenn die Potenzen gleichnamig sind, d. i. wenn sie sowohl gleiche Wurzeln als gleiche Exponenten haben.

Aufgaben.

1) $3a^4 + (-4b^3) = \ldots$ 2) $3a^4 - (-4b^3) = \ldots$

3) $2a^3 + (5a^2) - (3a) = \ldots$

4) $3a^2 + (-5a^2) - (+4a^2) - (-7a^2) = \ldots$

5) $7a^2b^2 - 3a^3b^2 + 4a^3b^2 - 2a^2b^2 = \ldots$

6)
$$\begin{array}{rrrr} 7xy^3 & -\ 3x^2y^2 & -\ 5x^3y & +\ 2x^4 \\ 4xy^3 & -\ 9x^2y^2 & +\ 6x^3y & +\ 5x^4 \\ 8xy^3 & +\ 6x^2y^2 & -\ 12x^3y & -\ 7x^4 \\ -\ 10xy^3 & -\ x^2y^2 & +\ 4x^3y & +\ 4x^4 \\ \hline \end{array}$$

2. Das Multiplicieren.

§. 34.

Bei der Multiplication werden die Potenzen ohne Zeichen neben einander gestellt. Z. B.:

$a^2x^2 \times by^2 = a^3bx^2y^2$; $3am^2. - 5b^2n^3 = -15ab^2m^2n^3$.

Eine Abkürzung kann nur dann eintreten, wenn die Potenzen entweder gleiche Basis oder gleiche Exponenten haben.

a) Wenn die Potenzen dieselbe Basis haben.

Das Multiplicationsverfahren für diesen Fall, sowie Beispiele darüber findet man in §§. 18—20.

b) Wenn die Potenzexponenten gleich sind.

Man hat:

$a^2 . b^2 = aa . bb = ab . ab = (ab)^2$.
$a^3 . b^3 = aaa . bbb = ab . ab . ab = (ab)^3$.
$a^4 . b^4 = aaaa . bbbb = ab . ab . ab . ab = (ab)^4$.
$a^3 . b^3 . c^3 = aaa . bbb . ccc = abc . abc . abc = (abc)^3$.

Potenzen desselben Exponenten werden daher mit einander multipliciert, indem man die Wurzeln multipliciert und ihr Product zur gemeinschaftlichen Potenz erhebt.

Aufgaben.

1) $2^3.5^3 = (2 . 5)^3 = 10^3$.
2) $4^5.5^4.5^4 = \dots$ 3) $2^5.a^5.b^5 = \dots$
4) $(x+y)^2(x-y)^2 = (x^2-y^2)^2$.
5) $x^4.y^4.z^4.3^4 = \dots$
6) $\left(\frac{3x}{4a}\right)^3 . \left(-\frac{4y}{5b}\right)^3 . \left(-\frac{2ax}{3by}\right)^3 = \dots$
7) $\left(\frac{x^2-y^2}{a^2-b^2}\right)^4 . \left(\frac{a+b}{x-y}\right)^4 = \dots$

3. Das Dividieren.

§. 35.

Potenzen werden auf dieselbe Art wie algebraische Ausdrücke überhaupt dividiert. Z. B.:

$24a^2b^3c^4 : 6a^2c^4 = 4b^3$; $15ab^2x^3 : -3b^2y^3 = -\frac{5ax^3}{y^3}$.

Eine Abkürzung im Verfahren kann nur dann Statt haben, wenn entweder die Wurzeln oder die Exponenten gleich sind.

a) Wenn die Potenzen dieselbe Basis haben.

Wie in diesem Falle die Division der Potenzen ausgeführt wird, wurde schon oben in §§. 21—23 angegeben, wo auch Beispiele hierüber zu finden sind.

b) Wenn die Potenzexponenten gleich sind.

Es ist

$$a^2 : b^2 = \frac{a^2}{b^2} = \frac{aa}{bb} = \frac{a}{b} . \frac{a}{b} = \left(\frac{a}{b}\right)^2,$$
$$a^3 : b^3 = \frac{a^3}{b^3} = \frac{aaa}{bbb} = \frac{a}{b} . \frac{a}{b} . \frac{a}{b} = \left(\frac{a}{b}\right)^3,$$
$$a^4 : b^4 = \frac{a^4}{b^4} = \frac{aaaa}{bbbb} = \frac{a}{b} . \frac{a}{b} . \frac{a}{b} . \frac{a}{b} = \left(\frac{a}{b}\right)^4.$$

Daraus folgt:

Potenzen desselben Exponenten werden dividiert, indem man die Wurzeln dividiert und ihren Quotienten zur gemeinschaftlichen Potenz erhebt.

Aufgaben.

1) $36^3 : 4^3 = \left(\frac{36}{4}\right)^3 = 9^3$.

2) $(5a^2bc^3)^4 : (5ac)^4 = \left(\frac{5a^2bc^3}{5ac}\right)^4 = (abc^2)^4$.

3) $(32m^3x^4)^5 : (8m^2xy)^5 = \ldots$

4) $(84a^2b^4x^3)^2 : (6ab^3x)^2 = \ldots$

5) $(3mn^2p^3)^3 : (5m^2n)^3 = \ldots$

III. Das Potenzieren mit Rücksicht auf den verschiedenen arithmetischen Bau der Basis.

1. Das Potenzieren einer Summe oder Differenz.

§. 36.

Es wird für den Zweck dieses Lehrbuches genügen, zu zeigen, wie die Summe oder Differenz zweier Zahlen, d. i. ein Binom, auf die zweite und dritte Potenz erhoben wird.

Um das Quadrat des Binoms $a + b$ zu erhalten, darf man das letztere nur mit $a + b$ multiplicieren; man findet dadurch

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Ebenso erhält man:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Das Quadrat eines Binoms ist also gleich der Summe aus dem Quadrate des ersten Theiles, dem doppelten Producte beider Theile und dem Quadrate des zweiten Theiles.

Die beiden Quadrate sind immer positiv, das Zeichen des doppelten Productes ist + oder —, je nachdem die beiden Theile des gegebenen Binoms gleiche oder entgegengesetzte Zeichen haben.

Multipliciert man das Quadrat einer Zahl mit dieser Zahl selbst, so erhält man ihren Cubus. Es ist also

$$\begin{aligned}(a + b)^3 &= (a^2 + 2ab + b^2)(a + b)\\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}(a - b)^3 &= (a^2 - 2ab + b^2)(a - b)\\ &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.\end{aligned}$$

Der Cubus eines Binoms ist also gleich der Summe aus dem Cubus des ersten Theiles, dem dreifachen Quadrate des ersten Theiles multipliciert mit dem zweiten Theile, dem dreifachen ersten Theile multipliciert mit dem Quadrate des zweiten Theiles und dem Cubus des zweiten Theiles.

Wenn der zweite Theil des Binoms negativ ist, so ist auch der zweite und vierte Bestandtheil im Cubus negativ.

Beispiele.

1) $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1.$
2) $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1.$
3) $(5+a)^2 = 25 + 10a + a^2.$
4) $(3-a)^2 = \ldots$ 5) $(x-4)^2 = \ldots$
6) $(y+2)^3 = \ldots$ 7) $(3-b)^3 = \ldots$

2. Potenzieren eines Productes.

§. 37.

Es ist

$$(ab)^2 = ab \,.\, ab = aabb = a^2b^2,$$
$$(ab)^3 = ab \,.\, ab \,.\, ab = aaabbb = a^3b^3,$$
$$(ab)^4 = ab \,.\, ab \,.\, ab \,.\, ab = aaaabbbb = a^4b^4.$$

Ein Product wird daher zu einer Potenz erhoben, indem man jeden Factor zu jener Potenz erhebt und diese Potenzen mit einander multipliciert.

Aufgaben.

1) $(xy)^5 = x^5y^5.$ 2) $(2x)^3 = 8x^3.$
3) $(5ax)^4 = \ldots$ 4) $(10abc)^5 = \ldots$
5) $(abc)^{10} = \ldots$ 6) $(3amxy)^3 = \ldots$
7) $(3a+4b)^2 = \ldots$ 8) $(2x-3y)^2 = \ldots$
9) $(8y-7z)^2 = \ldots$ 10) $(7a+9x)^2 = \ldots$
11) $(4a-3)^3 = \ldots$ 12) $(5m-4n)^3 = \ldots$
13) $(7x+2y)^3 = \ldots$ 14) $(10a-3b)^3 = \ldots$

3. Potenzieren eines Quotienten (Bruches).

§. 38.

Man hat

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b} = \frac{aa}{bb} = \frac{a^2}{b^2},$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b} = \frac{aaa}{bbb} = \frac{a^3}{b^3},$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^4 = \frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b} = \frac{aaaa}{bbbb} = \frac{a^4}{b^4}.$$

Ein Bruch wird daher zu einer Potenz erhoben, indem man Zähler und Nenner zu derselben Potenz erhebt und die Potenz des Zählers durch die Potenz des Nenners dividiert.

Aufgaben.

1) $\left(\frac{x}{2}\right)^3 = \frac{x^3}{8}.$ 2) $\left(\frac{y}{10}\right)^4 = \frac{y^4}{10000}.$

3) $\left(\frac{3a}{4b}\right)^2 = \frac{9a^2}{16b^2}.$ 4) $\left(-\frac{2x}{5y}\right)^3 = -\frac{8x^3}{125y^3}.$

5) $\left(\frac{m+n}{2p}\right)^2 = \frac{m^2+2mn+n^2}{4p^2}.$

6) $\left(\frac{mx}{ny}\right)^3 = \ldots$ 7) $\left(\frac{5am}{7bn}\right)^7 = \ldots$
8) $\left(\frac{4a-2x}{3a+2x}\right)^2 = \ldots$ 9) $\left(\frac{2a}{b} - \frac{3x}{y}\right)^2 = \ldots$
10) $\left(\frac{3x-2y}{5x+4y}\right)^3 = \ldots$ 11) $\left(\frac{7m}{3n} + \frac{5p}{6q}\right)^3 = \ldots$

4. Potenzieren einer Potenz.

§. 39.

Es ist

$$(a^3)^2 = a^3 \,.\, a^3 = a^6 = a^{3\cdot 2}.$$
$$(a^2)^4 = a^2 \,.\, a^2 \,.\, a^2 \,.\, a^2 = a^8 = a^{2\cdot 4}.$$
$$(a^m)^2 = a^m \,.\, a^m = a^{2m}.$$
$$(a^m)^3 = a^m \,.\, a^m \,.\, a^m = a^{3m}.$$

Eine Potenz wird also zu einer Potenz erhoben, indem man der Basis das Product der Exponenten zum Exponenten gibt.

Aufgaben.

1) $(a^5)^3 = a^{15}$. 2) $(10a^2)^3 = 1000a^6$.
3) $(3m^2n^2)^2 = 9m^4n^4$. 4) $\left(\frac{2ax^2}{3by^2}\right)^2 = \frac{4a^2x^4}{9b^2y^4}$.
5) $\left(\frac{3a^4m^3y^2}{4b^2n^3x^5}\right)^4 = \ldots$ 6) $(5a^2 - 6y^3)^2 = \ldots$
7) $(2ax^2 + 3by^2)^3 = \ldots$ 8) $\left(\frac{4x^2}{3} - \frac{5z^3}{a}\right)^2 = \ldots$
9) $\left(\frac{3ax^2}{5m^3} - \frac{7by^2}{12n^3}\right)^2 = \ldots$ 10) $\left(\frac{a^3m^2}{3x} + \frac{6x^2}{a^2m}\right)^2 = \ldots$
11) $\left(\frac{5m^2y^3}{6n^2z^3} - \frac{3an^3}{4bm^3}\right)^2 = \ldots$ 12) $\left(\frac{8a^2x^4 + 7b^2y^4}{3ax^2 - 4by^2}\right)^3 = \ldots$

VI. Erheben auf das Quadrat und Ausziehen der Quadratwurzel bei besonderen Zahlen.

§. 40.

Das Quadrat einer Zahl wird gefunden, indem man diese Zahl mit sich selbst multipliciert. Z. B.

$$305^2 = 305 \times 305 = 93025,$$
$$(\tfrac{2}{3})^2 = \tfrac{2}{3} \times \tfrac{2}{3} = \tfrac{4}{9}$$
$$(1{\cdot}25)^2 = 1{\cdot}25 \times 1{\cdot}25 = 1{\cdot}5625.$$

Es ist von selbst klar, daß das Quadrat eines Decimalbruches doppelt so viel Decimalen enthält, als der gegebene Decimalbruch, woraus folgt, daß in einem vollständigen Quadrate die Decimalen immer in gerader Anzahl vorkommen müssen.

Die Quadrate der einziffrigen Zahlen sind:

Quadratwurzel	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9.
Quadrat	1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64,	81.

Wegen der späteren Begründung der Lehre vom Ausziehen der Quadratwurzel soll hier noch ein anderes Verfahren, eine Zahl auf's Quadrat zu erheben, entwickelt werden.

Um z. B. die Zahl 47 auf das Quadrat zu erheben, zerlege man sie in zwei Theile 40 + 7, und bilde das Quadrat nach der Formel $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Man erhält

$$47^2 = (\overset{a}{40} + \overset{b}{7})^2 = \overset{a^2}{40^2} + \overset{2ab}{2 \,.\, 40 \,.\, 7} + \overset{b^2}{7^2}.$$

Um eine dreiziffrige Zahl 368 = 300 + 60 + 8 zum Quadrate zu erheben, setze man a = 300, b = 60, c = 8, und ziehe die ersten zwei Theile a und b in ein Glied B zusammen, so daß B = 300 + 60 = 360 sei; dann hat man

$$\overset{B}{360^2} = (\overset{a}{300} + \overset{b}{60})^2 = \overset{a^2}{300^2} + \overset{2ab}{2 \,.\, 300 \,.\, 60} + \overset{b^2}{60^2},$$

und daher

$$368^2 = (\overset{B}{360} + \overset{c}{8})^2 = \overset{B^2}{360^2} + \overset{2Bc}{2 \,.\, 360 \,.\, 8} + \overset{c^2}{8^2},$$

oder, wenn statt 360^2 der obige Wert gesetzt wird,

$$\overset{\overset{B}{\overline{abc}}}{368^2} = \overset{a^2}{300^2} + \overset{2ab}{2 \,.\, 300 \,.\, 60} + \overset{b^2}{60^2} + \overset{2Bc}{2 \,.\, 360 \,.\, 8} + \overset{c^2}{8^2},$$

oder, wenn man diese Bestandtheile unter einander schreibt,

$$\begin{array}{rcllcr}
\multicolumn{6}{l}{\overset{\overset{B}{\overline{abc}}}{368^2} =} \\
\hline
a^2 & = & \ldots\ldots\ldots & 300^2 & = & 90000 \\
2ab & = & \ldots\ldots 2.300. & 60 & = & 36000 \\
b^2 & = & \ldots\ldots\ldots & 60^2 & = & 3600 \\
2Bc & = & \ldots\ldots 2.360. & 8 & = & 5760 \\
c^2 & = & \ldots\ldots\ldots & 8^2 & = & 64 \\
\cline{6-6}
 & & & & & 135424.
\end{array}$$

Auf dieselbe Art erhält man auch

$$\begin{array}{rcllcr}
\multicolumn{6}{l}{\overset{\overset{\overset{C}{\overline{B\,|}}}{\overline{abcd}}}{2438^2} =} \\
\hline
a^2 & = & \ldots\ldots & 2000^2 & = & 4000000 \\
2ab & = & \ldots 2.2000. & 400 & = & 1600000 \\
b^2 & = & \ldots\ldots\ldots & 400^2 & = & 160000 \\
2Bc & = & \ldots 2.2400. & 30 & = & 144000 \\
c^2 & = & \ldots\ldots\ldots & 30^2 & = & 900 \\
2Cd & = & \ldots 2.2430. & 8 & = & 38880 \\
d^2 & = & \ldots\ldots\ldots & 8^2 & = & 64 \\
\cline{6-6}
 & & & & & 5943844.
\end{array}$$

Wenn man die Stellung der Ziffern in den einzelnen Bestandtheilen gehörig berücksichtigt, so können die Nullen beim Anschreiben ganz weggelassen werden; es darf nur jeder folgende Bestandtheil um eine

(3123)

Stelle rechts hinaus gerückt werden. Mit Hinweglassung der Nullen würden sich die früheren Beispiele so stellen:

$368^2 =$		
a^2	3^2 . .	9.
$2ab$ . .	$2.3.6$ . .	36.
b^2	6^2 . .	36.
$2Bc$ . .	$2.36.8$ . .	576.
c^2	8^2 . .	64
		135424

$2438^2 = 2438^2$		
a^2	2^2 . .	4.
$2ab$ . .	$2.\ 2.\ 4$ . .	16.
b^2	4^2 . .	16.
$2Bc$ . .	$2.\ 24.3$ . .	144.
c^2	3^2 . .	9.
$2Cd$ . .	$2.243.8$ . .	3888.
d^2	8^2 . .	64
		5943844.

Aus diesen und anderen auf ähnliche Weise durchgeführten Beispielen ergibt sich für das **Quadrat einer mehrziffrigen Zahl folgendes Bildungsgesetz:**

1. Die erste oder höchste Ziffer der Wurzel gibt ihr eigenes Quadrat.

2. Jede folgende Ziffer gibt im Quadrate zwei Bestandtheile: das Doppelte der ihr vorangehenden Zahl multipliciert mit dieser Ziffer und ihr eigenes Quadrat.

3. Werden alle diese Bestandtheile so unter einander geschrieben, daß jeder folgende um eine Stelle weiter rechts erscheint, und dann, so wie sie stehen, addiert, so ist die Summe das Quadrat der vorgelegten Wurzel.

Aufgaben.

1) 1234^2

a^2 . . .	1.
$2ab$ . . .	4.
b^2 . .	4.
$2Bc$ . .	72.
c^2 . .	9.
$2Cd$ . .	984.
d^2 . .	16
	1522756

2) $94{\cdot}907^2$

a^2 . .	81.
$2ab$ . .	72.
b^2 . .	16.
$2Bc$ . . .	1692.
fehlt 2Cd c^2 . .	81. . .
$2De$ . .	132860.
weil eine Null in der Wurzel e^2 . .	49
	9007·338649.

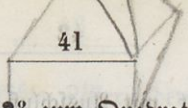
3) $723^2 = ?$ 4) $109{\cdot}2^2 = ?$ 5) $0{\cdot}34081^2 = ?$

6) Wie groß ist die Fläche eines Quadrates, dessen jede Seite $3^{m}\ 5^{dm}$ ist? (Man erhebe die Maßzahl einer Seite auf das Quadrat.)

7) Was kostet ein quadratförmiger Bauplatz, dessen Seite $18^{m}\ 3^{dm}$ ist, wenn jedes Quadratmeter mit 8 fl. 20 kr. bezahlt wird?

§. 41.

Das Verfahren, nach welchem aus einer Zahl die Quadratwurzel ausgezogen wird, läßt sich nach dem Gesetze ableiten, nach welchem die Ziffern der Quadratwurzel in dem Quadrate zusammengestellt erscheinen.



Erhebt man z. B. 7342^2 zum Quadrate, so hat man:

$7342^2 =$

a^2 . .	49	.			
$2ab$ . . .	4	2.			
b^2 . . .		9	.		
$2Bc$ . . .		58	4.		
c^2 . . .			16	.	
$2Cd$ . . .		2	93	6.	C / B / a b c d
d^2 . . .				4	
$\sqrt{\ }$	53	90	49	64	$= 7342$
a^2 . .	49				
	4	90			: 14 . . 2a
$2ab$ . .	4	2.			
b^2 . .		9			
		61	49		: 146 . . 2B
$2Bc$ . .		58	4.		
c^2 . .			16		
		2	93	64	: 1468 . . 2C
$2Cd$ . .		2	93	6.	
d^2 . .				4	
		= =	= =	= =	

Um die Vergleichung des Zusammenhanges zu erleichtern, wurden hier die Rechnungen des Quadrierens und des Ausziehens der Quadratwurzel unmittelbar unter einander gestellt.

Da die erste Wurzelziffer im Quadrate eine oder zwei Stellen gibt, wegen jeder folgenden Wurzelziffer aber im Quadrate immer zwei Stellen zuwachsen, so enthält das Quadrat einer Zahl entweder doppelt so viel Ziffern, als deren die Wurzel hat, oder um eine weniger. Theilt man daher das Quadrat von der Rechten gegen die Linke in Abtheilungen zu zwei Ziffern, wo sodann die erste Abtheilung links auch nur eine Ziffer enthalten kann, so hat man so viele Abtheilungen, als die Quadratwurzel Ziffern enthält.

Das Quadrat der ersten Wurzelziffer kommt in der ersten Abtheilung vor; man findet daher die erste Ziffer a der Quadratwurzel, wenn man die größte Ziffer nimmt, deren Quadrat in der ersten Abtheilung enthalten ist; dieselbe ist 7, also $a = 7$.

Erhebt man die erste Wurzelziffer $a = 7$ zum Quadrate, subtrahiert $a^2 = 49$ von der ersten Abtheilung und setzt zu dem Reste 4 die zweite Abtheilung 90 hinzu, so kommen in der so entstehenden Zahl 490 die Bestandtheile vor, welche die zweite Wurzelziffer hervorbringt, nämlich das Product $2ab$ aus ihr und der doppelten ersten Ziffer und ihr Quadrat b^2, und zwar erstreckt sich das Product $2ab$ nur bis auf die erste Ziffer in der zweiten Abtheilung, ist also in 49 enthalten. Dividiert man daher die Zahl, welche aus dem früheren Reste und der zweiten Abtheilung entsteht, mit Ausschluß der letzten Ziffer, nämlich 49, durch das Doppelte $2a$ der ersten Wurzelziffer, nämlich durch 14, so erhält man die zweite Wurzelziffer $b = 3$.

Wenn man dann die Bestandtheile des Quadrates, welche aus dieser zweiten Wurzelziffer hervorgehen, nämlich $2ab = 42$ und $b^2 = 9$ an den gehörigen Stellen von 490 subtrahiert und zu dem Reste 61 die dritte Abtheilung 49 hinzusetzt, so enthält die dadurch entstandene Zahl 6149 die Bestandtheile, welche die dritte Wurzelziffer c im Quadrate hervorbringt, und zwar kommt das Product $2(a+b)c = 2Bc$ aus dieser Wurzelziffer und dem Doppelten der ihr vorangehenden bereits bekannten Zahl in der Zahl 6149 mit Ausschluß der letzten Ziffer, also in 614 vor. Dividiert man daher 614 durch $2B = 146$, so erhält man die dritte Wurzelziffer $c = 4$; u. s. w.

Da $2ab + b^2 = (2a + b)b$ ist, so kann man, anstatt $2ab$ und b^2 zu subtrahieren, sogleich zu dem bezüglichen Divisor $2a$ mit Rücksicht auf den Stellenwerth die neu gefundene Wurzelziffer b dazu setzen, und dann das Product aus der dadurch gebildeten Zahl $2a + b$ und der neuen Wurzelziffer b subtrahieren. Die Rechnung würde sich so stellen:

$$
\begin{array}{lrl}
 & \sqrt{53|90|49|64} = 7342 & \\
a^2 \ldots & 49 & \\
 & 49,0 & : 143.3 \\
(2a+b)\,b \ldots & 429 & \\
 & 614,9 & : 1464.4 \\
(2B+c)\,c \ldots & 5856 & \\
 & 2936,4 & : 14682.2 \\
(2C+d)\,d \ldots & 29364 & \\
 & = = = = = &
\end{array}
$$

Man kann das Product aus dem jedesmaligen Divisor, nachdem man ihm die neugefundene Ziffer angehängt hat, und aus dieser neuen Ziffer sogleich während des Multiplicierens von dem Dividende subtrahieren. Die Rechnung steht dann:

$$
\begin{array}{rl}
\sqrt{53|90|49|64} = 7342 & \\
49,0 & : 143.3 \\
614,9 & : 1464.4 \\
2936,4 & : 14682.2
\end{array}
$$

Für das Ausziehen der Quadratwurzel gilt daher folgendes Verfahren:

1. Man theile die Zahl, von den Einern angefangen, in Abtheilungen zu zwei Ziffern; die erste Abtheilung zur Linken kann auch nur eine Ziffer enthalten. Bei einem Decimalbruch geschieht die Eintheilung der Ganzen vom Decimalpuncte gegen die Linke und die Eintheilung der Decimalen vom Decimalpuncte gegen die Rechte; wenn in den Decimalen die letzte Abtheilung rechts nur eine Ziffer enthalten sollte, so wird, damit die Anzahl der Decimalen eine gerade werde, eine Null angehängt.

2. Man suche die größte Ziffer, deren Quadrat in der ersten Abtheilung zur Linken enthalten ist, und schreibe sie als erste Ziffer der Wurzel an. Diese Ziffer wird zum Quadrat erhoben und dasselbe von der ersten Abtheilung subtrahiert.

3. Die folgenden Ziffern der Quadratwurzel werden durch die Division gefunden. Man setze nämlich zu dem Reste die nächstfolgende Abtheilung hinzu; diese Zahl, mit Hinweglassung der letzten Ziffer, ist der Dividend. Den Divisor findet man, wenn man den bereits gefundenen Theil der Wurzel mit 2 multipliciert. Nun wird dividiert, und der Quotient als eine neue Ziffer in die Wurzel und zugleich zu dem Divisor geschrieben.

4. Der so veränderte Divisor wird dann mit der neu gefundenen Ziffer der Wurzel multipliciert und das Product von dem Dividende mit Zuziehung der früher weggelassenen Ziffer sogleich während der Multiplication selbst subtrahiert.

5. Zu dem Reste setze man wieder die nächste Abtheilung hinzu und wiederhole dasselbe Verfahren wie früher, bis man alle Zifferabtheilungen heruntergesetzt hat. Findet man 0 als eine Ziffer der Wurzel, so kann man, ohne zu multiplicieren und zu subtrahieren, sogleich die nächste Abtheilung herabsetzen, nur muß diese Null sowohl in die Wurzel als zu dem Divisor geschrieben werden.

6. Enthält das Quadrat Abtheilungen mit Decimalen, so setzt man in der Wurzel den Decimalpunct, bevor man die erste Abtheilung von Decimalen in Rechnung zieht.

7. Bleibt zuletzt kein Rest, so hat man die Quadratwurzel vollständig gefunden und die vorgelegte Zahl ist ein vollständiges Quadrat. Bleibt aber am Ende ein Rest, so ist die Wurzel nicht vollkommen genau; sie kann jedoch mit jeder beliebigen Genauigkeit in Decimalen bestimmt werden, indem man nämlich jedem Reste eine Abtheilung von zwei Nullen anhängt und übrigens so wie vorhin verfährt.

§. 42.

Aufgaben.

1) √ 3|76|36 = 194
  27,6 : 29.9
   153,6 : 384.4
   = = = =

2) √ 34|86|78|44|01 = 59049
  98,6 : 109.9
   5784,4 : 11804.4
   1062801 : 118089.9
   = = = = = = =

18

21

15.

3) $\sqrt{3|15} = 17{\cdot}7482\ldots$

2 1,5 : 27.7
260,0 : 347.7
1710,0 : 3544.4
29240,0 : 35488.8
84960,0 : 354962.2
139676

4) $\sqrt{17|76{\cdot}62|25} = 42{\cdot}15$

17,6 : 82
126,2 : 841
4212,5 : 8425
= = = =

5) $\sqrt{\tfrac{7}{8}} = \sqrt{0{\cdot}87|5_0} = 0{\cdot}935414\ldots$

65,0 : 183
1010,0 : 1865
7750,0 : 18704
26840,0 : 187081
813690,0 : 1870824
648704

Soll die Quadratwurzel sehr viele Decimalstellen enthalten, so kann die Arbeit bedeutend abgekürzt werden. Nachdem man nämlich um eine Ziffer mehr als die halbe Anzahl der Wurzelziffern nach dem gewöhnlichen Verfahren gefunden hat, läßt man, anstatt zu dem Reste eine neue Abtheilung anzuhängen, in dem neuen Divisor die letzte Ziffer weg und entwickelt die folgenden Wurzelziffern mittelst der abgekürzten Division. Z. B.:

6) Um die Quadratwurzel aus 7·3891 in 7 Decimalen zu erhalten, hat man

ohne Abkürzung

$\sqrt{7{\cdot}38|91} = 2{\cdot}7182899\ldots$

33,8 : 47
99,1 : 541
4500,0 : 5428
15760,0 : 54362
48876|0,0 : 543648
5384|160,0 : 5436569
491|24790,0 : 54365789
1|955799

abgekürzt.

$\sqrt{7{\cdot}38|91} = 2{\cdot}7182899$

338 : 47
991 : 541
45000 : 5428
157600 : 54362
48876 : 54,3,6,4
5385
492
3

7) $\sqrt{1\cdot57823} = \ldots$
8) $\sqrt{5\cdot743178} = \ldots$
9) $\sqrt{582169} = \ldots$
10) $\sqrt{6849\cdot2176} = \ldots$
11) $\sqrt{0\cdot000256} = \ldots$
12) $\sqrt{0\cdot0144144036} = \ldots$
13) $\sqrt{9241600} = \ldots$
14) $\sqrt{36108081} = \ldots$
15) $\sqrt{1194\cdot3936} = \ldots$
16) $\sqrt{16\cdot55025124} =$ [illegible]
17) $\sqrt{321} =$ [illegible]
18) $\sqrt{235689} =$ [illegible]
19) $\sqrt{1343281} = \ldots$
20) $\sqrt{65157184} = \ldots$
21) $\sqrt{19\cdot45372} = \ldots$
22) $\sqrt{0\cdot76143076} = \ldots$
23) $\sqrt{3\cdot52} =$ [redacted]
24) $\sqrt{0\cdot35821} = \ldots$
25) $\sqrt{1\tfrac{11}{25}} =$ [redacted]
26) $\sqrt{\tfrac{27}{56}} = \ldots$
27) $\sqrt{455625} = \ldots$
28) $\sqrt{21650409} = \ldots$
29) $\sqrt{30\cdot09} = \ldots$
30) $\sqrt{68492176} = \ldots$
31) $\sqrt{2890137} = \ldots$
32) $\sqrt{961\cdot33482916} = \ldots$

33) Eine quadratförmige Wiese hat einen Flächenraum von 1204 $\square^{m}$ 9 $\square^{dm}$; wie groß ist die Länge einer Seite?

Um aus dem Flächeninhalte eines Quadrates die Länge einer Seite zu finden, muß man aus der gegebenen Zahl der Flächeneinheiten die Quadratwurzel ausziehen.

$1204\,\square^{m}\,9\,\square^{dm} = 1204\cdot09\,\square^{m};\ \sqrt{1204\cdot09} = 34\cdot7^{m} = 34^{m}\,7^{dm}.$

34) Die Fläche eines Quadrates ist 82 $\square^{m}$ 62 $\square^{dm}$ 81 $\square^{cm}$; wie groß ist eine Seite?

35) Wie groß ist die Seite eines Quadrates, welches so groß ist, als drei Quadrate zusammengenommen, deren Seiten $1^{m}\,4^{dm}$, $2^{m}\,1^{dm}$, $2^{m}\,3^{dm}$ sind? [illegible]

36) Ein Haus, dessen Grundfläche die Form eines Rechteckes hat, ist $22^{m}\,5^{dm}$ lang und $18^{m}\,4^{dm}$ breit; wie groß ist die Entfernung zweier entgegengesetzter Ecken des Hauses?

Die Länge und die Breite eines Hauses kann man als Katheten eines rechtwinkligen Dreieckes betrachten, dessen Hypotenuse dann die Entfernung zweier entgegengesetzter Ecken ist. Wenn aber in einem rechtwinkligen Dreiecke die beiden Katheten gegeben sind, so findet man die Hypotenuse, indem man jede Kathete zum Quadrate erhebt, diese Quadrate addiert und aus der Summe die Quadratwurzel auszieht.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Länge} = 22\cdot5^{m}\\ \text{Breite} = 18\cdot4^{m}\end{array}\right\}\ \text{Katheten,}\ \begin{array}{l}22\cdot5^{2} = 506\cdot25\\ 18\cdot4^{2} = \underline{338\cdot56}\end{array}$$

$$\text{Hypot.} = \sqrt{844\cdot81} = 29\cdot06^{m}$$

37) Wie groß ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes, dessen Katheten $3\cdot56^{m}$ und $4\cdot75^{m}$ sind?

38) Wie lang muß eine Leiter sein, damit sie bei einem Gebäude $4^{m}\,5^{dm}$ hoch hinauf reiche, wenn sie unten $2^{m}\,5^{dm}$ weit vom Gebäude aufgestellt werden soll?

39) Wie lang ist in einem rechtwinkligen Dreiecke die zweite Kathete, wenn die Hypotenuse $3\cdot6^{m}$ und die erste Kathete $2\cdot4^{m}$ ist?

40) Eine Thür, welche $17\cdot2^{dm}$ hoch und $14\cdot5^{dm}$ breit ist, soll mit Kreuzbug versehen werden; wie lang muß ein Kreuzbug werden?

41) Wie hoch ist die Höhe eines gleichseitigen Dreieckes, dessen Seite a) 13^{cm}, b) $0\cdot87^{m}$, c) $2^{m}\,3^{dm}\,5^{cm}$ beträgt?

Im Schenkel
42) Berechne ~~die Höhe~~ eines gleichschenkligen Dreieckes, wenn
   a) die Grundlinie $1^m\ 3^{dm}$, die Höhe $1^m\ 8^{dm}$,
   b) „ „ $1^m\ 2^{dm}\ 5^{cm}$, „ „ $2^m\ 1^{dm}\ 8^{cm}$ ist.

43) Der Boden eines Zimmers ist $9^m\ 8^{dm}\ 4^{cm}$ lang und $6^m\ 1^{dm}\ 8^{cm}$ breit; der Boden eines anderen Zimmers hat den gleichen Flächeninhalt, aber die Form eines Quadrates; wie groß ist eine Seite desselben?

44) Wie groß ist der Halbmesser eines Kreises, dessen Fläche 24 $\square^{dm}$ 63 $\square^{cm}$ enthält:

Hier muß man die Zahl der Flächeneinheiten durch 3·1416 dividieren und aus dem Quotienten die Quadratwurzel ausziehen.

45) Jemand will eine Scheibe machen, welche 4 $\square^{dm}$ 42 $\square^{cm}$ enthalten soll; wie groß wird er den Halbmesser nehmen?

V. Erheben auf den Cubus und Ausziehen der Cubikwurzel bei besonderen Zahlen.

§. 43.

Um eine Zahl zum Cubus zu erheben, muß man dieselbe dreimal als Factor setzen. Z. B.:

$$738^3 = 738 \times 738 \times 738 = 401947272$$
$$\left(\tfrac{9}{16}\right)^3 = \tfrac{9}{16} \times \tfrac{9}{16} \times \tfrac{9}{16} = \tfrac{729}{4096}$$
$$7{\cdot}02^3 = 7{\cdot}02 + 7{\cdot}02 + 7{\cdot}02 = 345{\cdot}948408.$$

Aus dem dritten Beispiele ist ersichtlich, daß der Cubus eines Decimalbruches dreimal so viel Decimalen enthalten müsse, als der gegebene Decimalbruch, daß somit in einem vollständigen Cubus die Anzahl der Decimalen immer ein Vielfaches von 3 ist.

Die dritten Potenzen der einziffrigen Zahlen sind:

Cubikwurzel: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9;
1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729.

Um später die Lehre vom Ausziehen der Cubikwurzel begründen zu können, soll hier ein zweites Verfahren, eine Zahl zum Cubus zu erheben, abgeleitet, und dabei die Formel

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

zu Grunde gelegt werden.

Um z. B. 57 nach dieser Formel auf den Cubus zu erheben, hat man

$$57^3 = (\overset{a}{50} + \overset{b}{7})^3 = \overset{a^3}{50^3} + \overset{3a^2b}{3.\ 50^2.\ 7} + \overset{3ab^2}{3.\ 50.\ 7^2} + \overset{b^3}{7^3}.$$

Ist eine dreiziffrige Zahl $429 = 400 + 20 + 9$ zum Cubus zu erheben, so setze man $a = 400$, $b = 20$, $c = 9$ und $a + b = 420 = B$; dann hat man

$$\overset{B}{420^3} = \overset{a^3}{400^3} + \overset{3a^2b}{3.\ 400^2.\ 20} + \overset{3ab^2}{3.\ 400.\ 20^2} + \overset{b^3}{20^3}, \text{ und}$$
$$429^3 = (\overset{B}{420} + \overset{c}{9})^3 = \overset{B^3}{420^3} + \overset{3B^2c}{3.\ 420^2.\ 9} + \overset{3Bc^2}{3.\ 420.\ 9^2} + \overset{c^3}{9^3},$$

daher wenn statt 420^3 der obige Werth gesetzt wird,

$$\overset{\overset{B}{\overline{a\ b\ c}}}{429^3} = \overset{a^3}{400^3} + \overset{3a^2b}{3.\ 400^2.\ 20} + \overset{3ab^2}{3.\ 400.\ 20^2} + \overset{b^3}{20^3}$$
$$+ \overset{3B^2c}{3.\ 420^2.\ 9} + \overset{3Bc^2}{3.\ 420.\ 9^2} + \overset{c^3}{9^3},$$

oder wenn man die einzelnen Bestandtheile unter einander schreibt und wirklich entwickelt,

$$\overset{\overline{B}}{abc}$$

$429^3 =$

a^3	=	400^3	. . .	64000000
$3a^2b$	= . . . 3.400^2.	20	. . .	9600000
$3ab^2$	= . . . 3.400.	20^2	. . .	480000
b^3	=	20^3	. . .	8000
$3B^2c$	= . . . 3.420^2.	9	. . .	4762800
$3Bc^2$	= . . . 3.420.	9^2	. . .	102060
c^3	=	9^3	. . .	729
				78953589

Eben so erhält man

$$\overset{\overset{C}{\overline{B}}}{abcd}$$

$1284^3 =$

a^3	=	1000^3	. .	1000000000
$3a^2b$	= . . . 3.1000^2.	200	. .	600000000
$3ab^2$	= . . . 3.1000.	200^2	. .	120000000
b^3	=	200^3	. .	8000000
$3B^2c$	= . . . 3.1200^2.	80	. .	345600000
$3Bc^2$	= . . . 3.1200.	80^2	. .	23040000
c^3	=	80^3	. .	512000
$3C^2d$	= . . . 3.1280.	4	. .	19660800
$3Cd^2$	= . . . 3.1280.	4^2	. .	61440
d^3	=	4^3	. .	64
				2116874304.

Die Nullen kann man beim Anschreiben der einzelnen Bestandtheile auch ganz weglassen, nur muß jeder folgende Bestandtheil um eine Stelle weiter rechts herausgerückt werden. Mit Uebergehung der Nullen stellen sich die zwei letzten Beispiele so heraus:

429^3

a^3 . .	64.
$3a^2b$ . .	96.
$3ab^2$ . .	48.
b^3 . .	8.
$3B^2c$ . .	47628.
$3Bc^2$ . .	10206.
c^3 . .	729
	78953589.

1284^3

a^3 . .	1.
$3a^2b$ . .	6.
$3ab^2$ . .	12.
b^3 . .	8.
$3B^2c$ . .	3456.
$3Bc^2$ . .	2304.
c^3 . .	512.
$3C^2d$ . .	196608.
$3Cd^2$ . .	6144.
d^3 . .	64
	2116874304.

Aus diesen Beispielen ergibt sich für die **Bildung des Cubus einer mehrziffrigen Zahl folgendes Verfahren:**

1. Man nehme den Cubus der ersten Ziffer der Wurzel.

2. Von jeder folgenden Wurzelziffer bilde man drei Bestandtheile, nämlich das dreifache Quadrat der ihr vorangehenden Zahl multipliciert mit dieser Ziffer, die dreifache vorangehende Zahl multipliciert mit dem Quadrate dieser Ziffer und ihrem Cubus.

3. Diese Bestandtheile werden in der Ordnung so unter einander geschrieben, daß jeder folgende um eine Stelle weiter rechts erscheint, und dann addiert.

Aufgaben.

1) 3915^3

a^3	. .	27.
$3a^2b$	. .	243.
$3ab^2$	. .	729.
b^3	. .	729.
$3B^2c$	. .	4563.
$3Bc^2$	. .	117.
c^3	. .	1.
$3C^2d$	. .	2293215.
$3Cd^2$	. .	29325.
d^3	. .	125
		60006085875.

2) $2{\cdot}1806^3$

a^3	. .	8.
$3a^2b$	. .	12.
$3ab^2$	. .	6.
b^3	. .	1.
$3B^2c$	. .	10584.
$3Bc^2$	. .	4032.
c^3	. .	512.
$3D^2e$	. .	85543200.
$3De^2$	. .	235440.
e^3	. .	216
		10·368788674616

3) $237^3 = ?$ 4) $17{\cdot}83^3 = ?$ 5) $0{\cdot}081053^3 = ?$

6) Wie groß ist der Cubikinhalt eines Würfels, dessen Seite $2^m\ 8^{dm}$ beträgt? (Man erhebt die Länge der Seite zum Cubus.)

§. 44.

Um das Verfahren für das Ausziehen der Cubikwurzel zu entwickeln, wird man in Betrachtung ziehen, wie im Cubus die Bestandtheile der Cubikwurzel zusammengestellt erscheinen, um sie beim Wurzelausziehen wieder gehörig aus einander nehmen zu können.

Erhebt man z. B. 4567 zum Cubus und ist dann aus dem gefundenen Cubus die Cubikwurzel zu ziehen, so hat man

16·9
62

4567^3					
a^3 . .	64	.			
$3a^2b$ . .	24	0.			
$3ab^2$ . .	3	00.			
b^3 . .		125	.		
$3B^2c$ . .	3	645	0.		
$3Bc^2$ . .		48	60.		
c^3 . .			216	.	
$3C^2d$ . .		436	665	6.	
$3Cd^2$ . .			670	32	C
d^3 . .				343	B | a b c d
$\sqrt[3]{}$	95	256	152	263	= 4567
a^3 . .	64				
	31	256			: 48 . . $3a^2$
$3a^2b$ . .	24	0.			
$3ab^2$ . .	3	00.			
b^3 . .		125			
	4	131	152		: 6075 . . $3B^2$
$3B^2c$ . .		645	0.		
$3Bc^2$ . .	3	48	60.		
c^3 . .			216		
		437	336	263	: 623808. $3C^2$
$3C^2d$ . .		436	665	6.	
$3Cd^2$ . .			670	32.	
d^3 . .				343	
		= = =	= = =	= = =	

Da die erste Wurzelziffer im Cubus eine, zwei oder drei Stellen gibt und wegen jeder folgenden Wurzelziffer im Cubus immer drei Stellen zuwachsen, so erhält der Cubus einer Zahl immer entweder dreimal so viel Ziffern, als deren die Cubikwurzel hat, oder um zwei oder eine weniger. Theilt man daher den Cubus, von der Rechten angefangen, in Abtheilungen zu drei Ziffern, wobei die erste Abtheilung zur Linken auch nur zwei oder eine Ziffer enthalten kann, so hat man so viele Abtheilungen, als die Cubikwurzel Ziffern enthält.

Der Cubus der ersten Wurzelziffer ist in der ersten Abtheilung enthalten; die erste Ziffer a der Cubikwurzel wird daher gefunden, wenn man die größte Ziffer nimmt, deren Cubus in der ersten Abtheilung vorkommt; in 95 ist der Cubus von 4, nämlich 64, enthalten; die erste Wurzelziffer a ist demnach 4.

Wird der Cubus $a^3 = 64$ der ersten Wurzelziffer von der ersten Abtheilung subtrahiert und zu dem Reste 31 die zweite Abtheilung herabgesetzt, so enthält diese Zahl 31256 die drei Bestandtheile, welche aus der zweiten Wurzelziffer b hervorgehen, nämlich $3a^2b$, $3ab^2$ und b^3, jeden Bestandtheil um eine Stelle weiter gegen die Rechte gerückt, und zwar erstreckt sich $3a^2b$ nur auf die erste Ziffer in der zweiten Abtheilung. Wird daher 31256 mit Hinweglassung der zwei letzten Ziffern, nämlich 312, durch das dreifache Quadrat $3a^2$ der ersten Wurzelziffer, nämlich durch 48, dividiert, so erhält man die zweite Wurzelziffer $b = 5$.

Entwickelt man die drei Bestandtheile, welche diese neue Wurzelziffer im Cubus hervorbringt, nämlich $3a^2b = 240$, $3ab^2 = 300$ und $b^3 = 125$, und rückt jeden derselben um eine Stelle weiter gegen die Rechte, subtrahiert dann diese drei Zahlen von dem Reste der ersten zwei Abtheilungen und setzt zu dem neuen Reste 4131 die dritte Abtheilung hinzu, so muß die so gebildete Zahl 4131152 die drei Bestandtheile enthalten, welche die dritte Wurzelziffer c im Cubus hervorbringt, und zwar kommt das Product $3(a+b)^2c = 3B^2c$ aus dieser Wurzelziffer und dem dreifachen Quadrate der ihr vorangehenden Zahl in der Zahl 4131152 mit Ausschluß der letzten zwei Ziffern, also in 41311 vor. Dividiert man daher 41311 durch $3B^2 = 6075$, so erhält man die dritte Wurzelziffer $c = 6$; u. s. w.

Beim Ausziehen der Cubikwurzel ist daher folgendes Verfahren anzuwenden:

1. Man theile die Zahl, von den Einern angefangen, gegen die Linke in Abtheilungen zu drei Ziffern; die erste Abtheilung zur Linken kann auch nur zwei Ziffern oder eine enthalten. Kommen in der gegebenen Zahl auch Decimalen vor, so werden diese, vom Decimalpunct angefangen, gegen die Rechte hin in Abtheilungen eingetheilt; hat die letzte Abtheilung von Decimalen zur Rechten weniger als drei Ziffern, so werden die fehlenden durch Nullen ergänzt.

2. Man suche die größte Ziffer, deren Cubus in der ersten Abtheilung zur Linken enthalten ist, und schreibe sie als die erste Ziffer der Wurzel an. Diese Ziffer wird zum Cubus erhoben und derselbe von der ersten Abtheilung subtrahiert.

3. Die folgenden Ziffern der Cubikwurzel werden durch die Division gefunden. Setzt man zu dem letzten Reste die nächstfolgende Abtheilung hinzu, so bildet diese Zahl nach Ausschluß der zwei letzten Ziffern rechts den Dividend; der Divisor ist das dreifache Quadrat des bereits gefundenen Theiles der Cubikwurzel. Der Quotient wird als eine neue Ziffer in die Wurzel geschrieben.

4. Man bildet die Bestandtheile, welche diese neue Ziffer im Cubus hervorbringt, nämlich das dreifache Quadrat der ihr vorangehenden Zahl multipliciert mit dieser Ziffer, die dreifache vorangehende Zahl multipliciert mit dem Quadrate dieser Ziffer und ihren eigenen Cubus, schreibt den ersten Bestandtheil unter den Dividend, jeden folgenden aber um eine Stelle weiter rechts darunter und subtrahiert die Summe der so angesetzten Bestandtheile von dem Dividende mit Zuziehung der früher weggelassenen zwei Ziffern.

5. Zu dem Reste setzt man wieder die folgende Abtheilung hinzu und wiederholt dasselbe Verfahren wie früher, bis man alle Zifferabtheilungen heruntergesetzt hat. Findet man 0 als eine Ziffer der Wurzel, so kann man, ohne die drei Bestandtheile zu entwickeln und zu subtra-

hieren, sogleich die nächste Abtheilung herabsetzen, nur muß man in die Wurzel eine, und zu dem Divisor zwei Nullen schreiben.

6. Kommen in der vorgelegten Zahl Decimalclassen vor, so setzt man in der Wurzel den Decimalpunct, bevor man die erste Abtheilung von Decimalen in Rechnung zieht.

7. Bleibt zuletzt kein Rest, so hat man die Cubikwurzel vollständig gefunden und die gegebene Zahl ist ein vollständiger Cubus. Bleibt aber am Ende ein Rest, so ist die Cubikwurzel nicht vollkommen genau; sie kann jedoch mit jeder beliebigen Genauigkeit in Decimalen bestimmt werden, indem man nämlich jedem Reste eine Abtheilung von drei Nullen anhängt und übrigens wie vorhin verfährt.

§. 45.

Aufgaben.

1) $\sqrt[3]{140|608} = 52$
125
156,08 : 75
150
60
8
= = = = = =

18.4
72

2) $\sqrt[3]{30|517|578|125} = 3125$
27
35,17 : 27
27
9
1
7265,78 : 2883
5766
372
8
1462501,25 : 292032
1460160
23400
125
=

3) $\sqrt[3]{242{\cdot}970|624} = 6{\cdot}24$
216
269,70 : 108
216
72
8
46426,24 : 11532
46128
2976
64
= 7

4) $\sqrt[3]{0{\cdot}000|07_0} = 0{\cdot}0412\ldots$
64
60,00 : 48
48
12
1
10790,00 : 5043
10086
492
8
65472.

5) $\sqrt[3]{7824} = \ldots$ 6) $\sqrt[3]{5\tfrac{3}{16}} = \ldots$

7) $\sqrt[3]{40353607} = \ldots$ 8) $\sqrt[3]{8108486729} = \ldots$

9) $\sqrt[3]{0{\cdot}017173512} = \ldots$ 10) $\sqrt[3]{1{\cdot}91016} = \ldots$

2513

10-15

11) $\sqrt[3]{884736} = \ldots$ 12) $\sqrt[3]{0{\cdot}046656} = \ldots$

13) $\sqrt[3]{876467493} = \ldots$ 14) $\sqrt[3]{171{\cdot}879616} = \ldots$

15) $\sqrt[3]{29} = \ldots$ 16) $\sqrt[3]{123456789} = \ldots$

17) $\sqrt[3]{594823321} = \ldots$ 18) $\sqrt[3]{481890304} = \ldots$

19) $\sqrt[3]{352344599047} = \ldots$ 20) $\sqrt[3]{1029383182673} = \ldots$

21) $\sqrt[3]{22{\cdot}164361129} = \ldots$ 22) $\sqrt[3]{56800{\cdot}235584} = \ldots$

23) $\sqrt[3]{13{\cdot}0835} = \ldots$ 24) $\sqrt[3]{0{\cdot}0000297} = \ldots$

25) $\sqrt[3]{\tfrac{5}{6}} = \ldots$ 26) $\sqrt[3]{2\tfrac{7}{12}} = \ldots$

27) Wie groß ist die Seite eines Würfels, dessen Inhalt 438976 Cub.^{cm} beträgt?

1-32

Um aus dem Körperinhalte eines Würfels die Länge einer Seite zu finden, zieht man aus der gegebenen Zahl der Cubikeinheiten die Cubikwurzel aus.

28) Der Inhalt eines Würfels beträgt 5 Cub.^{m} 639 Cub.^{dm} 752 Cub.^{cm}; wie lang ist eine Seite desselben?

29) Wie lang ist die Seite eines Würfels, welcher so viel Raum enthält, als zwei Würfel zusammen, deren Seiten 2^{m} 5^{dm} und 1^{m} 8^{dm} sind?

30) Ein Kupferschmied hat einen würfelförmigen Kessel zu verfertigen, der 3 Hektoliter 25 Liter fassen soll; wie lang muß eine Seite desselben werden, da 1 Liter = 1 Cub.^{dm} ist?

31) Wie groß ist der Durchmesser einer Kugel, deren Cubikinhalt 1047 Cub.^{dm} 394 Cub.^{cm} 488 Cub.^{mm} beträgt?

Man multipliciere den Cubikinhalt mit 0·2387, und ziehe aus dem Producte die Cubikwurzel aus.

32) Eine messingene Kugel wiegt 3 Kilogramm; wie groß ist der Durchmesser derselben, wenn ein Cubikdecimeter Messing $8\tfrac{2}{5}$ Kilogr. wiegt?

VI. Vermischte Aufgaben über das Rechnen mit Potenzen und Wurzelgrößen.

§. 46.

1) $(8a^3b^4)^2 = \ldots$ 2) $72x^8 : -8x^5 = \ldots$

3) $[(-a^2bx^3)^2]^3 = \ldots$

4) $5a^4 - 3a^4 + 8a^2 - a^4 = \ldots$ 5) $\left(-\frac{2a^2x^3}{3by^4}\right)^3 = \ldots$

6) $\left[\left(\frac{3m^2z^3}{2n}\right)^4\right]^2 = \ldots$

7) $\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^3 \cdot \left(\frac{x+y}{x-y}\right)^3 = \ldots$ 8) $\frac{9a^3b^4}{cd^3} \cdot \frac{5a^2d^3}{6b^2c^2} = \ldots$

9) $2x^2y^3z^2 \cdot -5xy^2z^4 \cdot 3x^3y = \ldots$

10) $35a^2b^4c \cdot -2a^5b^2c^4 : -7a^4b^4c^4 = \ldots$

11) $\left(\frac{5ab^2c^3x^4}{6m^3n^7py^4}\right)^5 = \ldots$

12) $\frac{6a^3m^2x}{7bn^3y} \cdot \frac{an^2y^2}{4b^2my} \cdot \frac{b^2x^3}{a^2y} = \ldots$

13) $[3(a-b)]^3 = \ldots$

14) $[-(a+b)^2]^3 = \ldots$

15) $(9a^2 - 5)^2 = \ldots$

16) $(8a^3 + 3x^2)^2 = \ldots$

17) $(5m + 4n)^3 = \ldots$

18) $(2ax^2 - 5by^2)^3 = \ldots$

19) $(7a^2 - 5ab)^2 = \ldots$

20) $(6a^2b^3 + 5x^3y^2)^3 = \ldots$

21) $(8a^2bx^2 . -3ab^2y^3 . -2b^2x^2y . 5a^2b = \ldots$

22) $(2a^3 - 5a^2b - 4ab^2 + 3b^3) . 6a^2b^3 = \ldots$

23) $(a-b)^3 . (a-b)^2 . (a-b)^{m-4} = \ldots$

24) $(14a^3b^2c + 28a^2b^3c^2 - 35ab^4c^3) : -7ab^2c = \ldots$

25) $(30a^2)^2 . \left(\frac{x^2}{15a}\right)^2 = \ldots$

26) $\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^3 . (a+1)^3 = \ldots$

27) $\frac{(a^4 - m^4)^3}{(3a^2 - 3m^2)^3} = \ldots$

28) $\frac{3^5 . 8^5 . 5^5}{2^5 . 6^5 . 20^5} = \ldots$

29) $\frac{(a-1)^2}{(x-2)^2} \cdot \frac{(x-2)^2}{a-1} = \ldots$

30) $\left(\frac{x^2-1}{a^2-1}\right)^3 : \left(\frac{x+1}{a-1}\right)^3 = \ldots$

31) $\left(\frac{3x}{8} - \frac{5a}{6}\right)^2 = \ldots$

32) $\left(\frac{9a}{b} - \frac{4b}{a}\right)^3 = \ldots$

33) $\left(\frac{5a^2}{4x} + \frac{7x^2}{10a}\right)^2 = \ldots$

34) $\left(\frac{3x^4}{2} + \frac{2y^3}{3}\right)^3 = \ldots$

35) $\left(\frac{a^3}{b} - \frac{b^2}{2a}\right)^3 = \ldots$

36) $\left(\frac{2a^4}{m^3} + \frac{3m^2}{2a}\right)^2 = \ldots$

37) $\left(\frac{3a^2b}{4x^4} - \frac{2ax^2}{9b^3}\right)^2 = \ldots$

38) $\left(\frac{8a^5c^4}{9b^3x^6} - \frac{3a^2b^4}{4c^3y^3}\right)^2 = \ldots$

39) $\sqrt{56169} = \ldots$

40) $\sqrt{29844369} = \ldots$

41) $\sqrt{87329} = \ldots$

42) $\sqrt{63123025} = \ldots$

43) $\sqrt[3]{13144256} = \ldots$

44) $\sqrt[3]{268336125} = \ldots$

45) $\sqrt[3]{96702579} = \ldots$

46) $\sqrt{318611987} = \ldots$

47) $\sqrt{\tfrac{3}{4}} = \ldots$

48) $\sqrt[3]{3\tfrac{4}{5}} = \ldots$

49) $\sqrt{2583 \cdot 6889} = \ldots$

50) $\sqrt[3]{1 \cdot 191016} = \ldots$

51) $(1 - 3x^2 + 5x^4 - 7x^6 + 9x^8)(1 - 2x + 3x^2) = \ldots$

52) $(2a^4 - 13a^3b + 31a^2b^2 - 38ab^3 + 24b^4) : (2a^2 - 3ab + 4b^2) = \ldots$

53) $\frac{(4a^2 \; 5b^3)^4 . (2a^3 . b^3)^2}{(30a^4b^3)^5} = \ldots$

54) $\left(1 - \frac{2x}{3} + \frac{3x^2}{4} - \frac{4x^3}{5}\right)\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{2x^2}{3}\right) = \ldots$

55) $\left(\frac{2a^6}{7b^2} + \frac{3a^3}{5b} - \frac{b}{2}\right)\left(\frac{5a^6}{8b} - \frac{2a^3b}{3} + \frac{3ab^3}{4}\right) = \ldots$

56) $(3a^2b - 2ab^2 + 7b^3)(5a^3b - 4a^2b^2 - 3ab^3) = \ldots$

57) $(3a^2 + 3ab - 6b^2)^2 : (a-b)^2(a+2b)^2 = \ldots$

58) $\frac{2x^2 - 3x + 1}{x^4 - 6x^2 + 9} - \frac{x-2}{x^3 - 3x} = \ldots$

59) $\frac{3a - b}{25a^2 - 20ab + 4b^2} + \frac{2a - b}{75a^2 - 12b^2} = \ldots$

60) $\left(\frac{x^3y}{a^4}\right)^3 \cdot \left(\frac{m^2}{x}\right)^4 : \left(\frac{y^3}{am^2}\right)^3 \cdot \left(\frac{m^2x^3}{a^2y}\right)^5 = \ldots$

61) $\sqrt{25836889} = \ldots$ 62) $\sqrt{57198969} = \ldots$

63) $\sqrt{23614489} = \ldots$ 64) $\sqrt{1607448649} = \ldots$

65) $\sqrt[3]{340068392} = \ldots$ 66) $\sqrt[3]{6372783864} = \ldots$

67) $\sqrt[3]{28 \cdot 25} = \ldots$ 68) $\sqrt[3]{0 \cdot 008743} = \ldots$

69) $\sqrt{2565 \cdot 805321} = \ldots$ 70) $\sqrt{57 \cdot 65213041} = \ldots$

71) $\sqrt[3]{42411367981} = \ldots$ 72) $\sqrt[3]{897237012125} = \ldots$

73) $\sqrt{873456319} = \ldots$ 74) $\sqrt{579749756569} = \ldots$

75) $\sqrt{6975757441} = \ldots$ 76) $\sqrt{17596287801} = \ldots$

77) $\sqrt[3]{83125013456} = \ldots$ 78) $\sqrt[3]{6321363049} = \ldots$

79) $\frac{21a^6m^3x^9 : 12am^2x^5 : 4a^5mx^3}{121a^9m^{15}x^7 : 11a^3m^9x : a^3m^4x^8} = \ldots$

80) $\left(\frac{3a^4b^3}{5x^5} - \frac{4ab^7}{7x} - \frac{7b^{11}x^3}{a^2}\right)\left(\frac{3a^2b}{4x^3} + \frac{4b^5x}{9a} - \frac{b^9x^5}{a^4}\right) = \ldots$

81) $\left(\frac{16a^8}{81x^4} - \frac{8a^6}{9x^2} + \frac{3a^4}{2} - \frac{9a^2x^2}{8} + \frac{81x^4}{256}\right) : \left(\frac{4a^4}{9x^2} - a^2 + \frac{9x^2}{16}\right)$

82) Bestimme $x = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s^2}}$ und $X = \frac{2s}{\sqrt{4 - s^2}} = \ldots$ für $s = 1$.

83) Bestimme $f = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}$ für $a = 38{\cdot}3$, $b = 42{\cdot}5$, $c = 49{\cdot}4$ und $s = \frac{a + b + c}{2}$.

84) Wie groß ist die Seite eines Quadrates, dessen Flächeninhalt $6 \cdot 1009$ □^{m} beträgt?

85) Der Cubikinhalt eines Würfels ist 151 Cub.^{dm} 419 Cub.^{cm} 437 Cub.^{mm} wie viel beträgt die Seite desselben?

86) Ein Meßtischblatt ist ein Quadrat von $7 \cdot 9^{dm}$ Seitenlänge; wie lang ist die Diagonale;

87) In einem rechtwinkligen Dreiecke ist die Hypotenuse $31^m\ 1^{dm}$ und die eine Kathete $29^m\ 2^{dm}$; wie groß ist die andere Kathete?

88) Eine Feuerleiter ist 8^m lang; wie weit wird sie am Boden von der Mauer abstehen, wenn sie am Hause 6^m hinaufreichen soll?

89) Eine 5^m lange Leiter ist so an eine senkrechte Wand gestellt, daß sie auf dem Boden noch 2^m von derselben entfernt ist; wie weit reicht die Leiter an der Wand hinauf?

90) Wie lang müssen die zur Ersteigung einer Festung erforderlichen Sturmleitern sein, wenn dieselbe von einem 7^m breiten Wallgraben und einer 6^m hohen Mauer eingeschlossen ist?

91) Berechne den Schenkel eines gleichschenkligen Dreieckes, wenn
   a) die Grundlinie $2 \cdot 56^{dm}$, die Höhe $2 \cdot 25^{dm}$,
   b) „ „ $1^m\,1^{dm}\,8^{cm}$, „ „ $1^m\,4^{dm}\,9^{cm}$ beträgt.

92) Zwei Thürme sind 21^m von einander entfernt; bei dem einen ist die Spitze 34^m, bei dem andern 28^m über dem Boden; wie weit ist die eine Spitze von der andern entfernt?

93) Wie hoch ist ein Granitwürfel von 50 Kilogr. Gewicht, wenn ein Cub.^{dm} Granit 2·7 Kilogr. wiegt?

94) Wie viel Centimeter Durchmesser muß ein Stamm haben, wenn daraus ein vierkantiger Balken von 21^{cm} und $15{\cdot}7^{cm}$ Stärke gehauen werden soll?

95) Wie viel Kugeln von 2^{cm} Durchmesser können aus einem Cubikdecimeter Blei gegossen werden?

96) Es soll ein Dachstuhl von 10^m Breite und 8^m Höhe gefertiget werden; wie lang müssen die Dachsparren werden, wenn sie noch $0{\cdot}5^m$ Vorsprung erhalten sollen?

97) Wie groß ist der Halbmesser einer Kugel, welche mit einem Würfel von $0{\cdot}4^m$ Seitenlänge gleichen Inhalt hat?

98) Aus einer Bleikugel von 6^{cm} Durchmesser sollen zwei kleinere gegossen werden; wenn nun die eine 2^{cm} Durchmesser haben soll, welcher Durchmesser wird der andern zu geben sein?

Vierter Abschnitt.

Die Combinationslehre.

§. 47.

Die **Combinationslehre** beschäftigt sich im Allgemeinen mit der verschiedenen Anordnung und Zusammenstellung gegebener Größen. Jede solche gegebene Größe heißt ein **Element**, und jede Verbindung mehrerer Elemente eine **Gruppe** oder **Complexion**.

Bei der Combinationslehre kommen **zwei Hauptaufgaben** in Betrachtung.

Es kann verlangt werden, daß man alle verschiedenen Stellungen angibt, in die eine bestimmte Anzahl Elemente gebracht werden kann, wobei jede Complexion alle gegebenen Elemente enthalten soll. So geben die drei Buchstaben a, b, c sechs verschiedene Stellungen: abc, acb, bac, bca, cab, cba. Man nennt diese Versetzung der Elemente das **Permutieren**.

Es kann ferner verlangt werden, daß man aus einer gegebenen Anzahl von Elementen alle Verbindungen zu zwei, zu drei, zu vier ... Elementen bilde, wobei übrigens auf die Stellung der Elemente keine Rücksicht genommen wird. Ein solches Verbinden von gegebenen Elementen nennt man das **Combinieren**. Die Verbindungen zu zwei Elementen heißen **Amben** oder **Combinationen der zweiten Classe**, jene zu drei Elementen **Ternen** oder **Combinationen der dritten Classe**, zu vier Elementen **Quaternen** oder **Combinationen der** vierten Classe u. s. w. Die vier Buchstaben a, b, c, d geben sechs Amben: ab, ac, ad, bc, bd, cd; vier Ternen: abc, abd, acd, bcd, und eine Quaterne: abcd.

Sowohl bei den Versetzungen als bei den Verbindungen kommt es auf zwei Sachen an: auf die wirkliche Bildung der verlangten Gruppen und auf die Bestimmung ihrer Anzahl.

Die einzelnen Elemente pflegt man entweder mit den in natürlicher Ordnung aufeinander folgenden Zahlen, welche Zeiger heißen, oder mit Buchstaben zu bezeichnen.

Eine Gruppe von Elementen heißt natürlich geordnet, wenn der niedrigste Zeiger die erste Stelle einnimmt, hierauf ein immer höherer Zeiger folgt und der höchste am letzten Platze vorkommt, z. B. 123, 134; dagegen ist 132 nicht natürlich geordnet. Von zwei Complexionen, welche eine gleiche Anzahl Zeiger enthalten, heißt jene die höhere, worin von der Linken aus zuerst ein höheres Element vorkommt; z. B. die Gruppe 132 ist höher als 123, eben so 234 höher als 124.

Bei Buchstaben sieht man diejenigen als mit einem höheren Zeiger behaftet an, welche im Alphabete später vorkommen; es ist demnach die Complexion abcd natürlich geordnet, acbd dagegen nicht; ferner stellt acbd eine höhere Complexion vor als abcd.

I. Permutationen.

§. 48.

1. Um von mehreren gegebenen Elementen alle möglichen Permutationen zu bilden, stelle man zuerst die niederste Complexion auf, indem man die Elemente in natürlicher Ordnung anschreibt. Aus jeder schon aufgestellten Complexion erhält man die nächst höhere nach folgender Regel: Man gehe in der letzten Gruppe von rechts nach links so lange fort, bis man auf ein Element kommt, an dessen Stelle aus den rechts folgenden ein höheres Element gesetzt werden kann; schreibe dieses an jene Stelle, und lasse die ihr vorangehenden Elemente ungeändert stehen, die andern aber ihr in natürlicher Ordnung folgen. Die höchste Complexion erkennt man daran, daß darin die Elemente im Vergleich gegen die erste Gruppe gerade in umgekehrter Ordnung vorkommen. Z. B.:

Elemente 1, 2, 3.			Elemente a, b, c.		
123	213	312	abc	bac	cab
132	231	321	acb	bca	cba

Elemente a, b, c, d.

abcd	bacd	cabd	dabc
abdc	badc	cadb	dacb
acbd	bcad	cbad	dbac
acdb	bcda	cbda	dbca
adbc	bdac	cdab	dcab
adcb	bdca	cdba	dcba

Das nämliche Verfahren gilt auch, wenn unter den Elementen, die man zu permutieren hat, mehrere einander gleich sind. Z. B.:

Elemente a, b, b, b, c, c.

abbbcc	babbcc	bbabcc	bcabbc	cabbbc	cbabbc	ccabbb
abbcbc	babcbc	bbacbc	bcabcb	cabbcb	cbabcb	ccbabb
abbccb	babccb	bbaccb	bcacbb	cabcbb	cbacbb	ccbbab
abcbbc	bacbbc	bbbacc	bcbabc	cacbbb	cbbabc	ccbbba
abccbb	bacbcb	bbbcac	bcbacb		cbbacb	
abccbb	baccbb	bbbcca	bcbbac		cbbbac	
acbbbc		bbcabc	bcbbca		cbbbca	
acbbcb		bbcacb	bcbcab		cbbcab	
acbcbb		bbcbac	bcbcba		cbbcba	
accbbb		bbcbca	bccabb		cbcabb	
		bbccab	bccbab		cbcbab	
		bbccba	bccbba		cbcbba	

§. 49.

Aus der Art, wie die Permutationen gebildet werden, läßt sich leicht auch ihre Anzahl bestimmen.

Es soll zuerst der Fall betrachtet werden, wo die gegebenen Elemente unter einander verschieden sind.

Bei einem Elemente a ist nur eine Stellung möglich.

Zwei Elemente a und b lassen zwei Stellungen zu, nämlich ab und ba.

Von drei Elementen a, b, c kann jedes 2mal am ersten Platze stehen, während die anderen zwei permutiert nachfolgen; daher gibt es $2 \times 3 = 6$ verschiedene Stellungen.

Bei vier Elementen, a, b, c, d kann jedes so oft am ersten Platze stehen, wie oft sich die andern drei nachfolgenden Elemente versetzen lassen, somit 6mal; man hat daher 6 Permutationen, wo a die erste Stelle einnimmt, eben so viele, wo b, wo c, wo d am ersten Platze steht; also zusammen $6 \times 4 = 24$ verschiedene Stellungen.

Eben so überzeugt man sich, daß 5 Elemente $24 . 5 = 120$ Permutationen geben.

Drückt man die Anzahl aller Permutationen von n verschiedenen Elementen durch P_n (Permutationszahl von n) aus, so ist nach dem Vorhergehenden

$$P_1 = 1$$
$$P_2 = 2 = 1 . 2$$
$$P_3 = P_2 . 3 = 1 . 2 . 3$$
$$P_4 = P_3 . 4 = 1 . 2 . 3 . 4$$
$$P_5 = P_4 . 5 = 1 . 2 . 3 . 4 . 5,$$

daher allgemein

$$P_n = 1 . 2 . 3 . 4 . . . . (n-1) . n.$$

Die Permutationszahl einer gegebenen Anzahl von verschiedenen Elementen ist also gleich dem Producte der natürlichen Zahlen von 1 bis zu der Zahl, welche die Anzahl der Elemente angibt.

Das Product $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots (n-1) \cdot n$ pflegt man durch das Symbol $n!$ auszudrücken; daher

$$P_2 = 2!,\ P_3 = 3!,\ P_4 = 4!, \ldots \ldots P_n = n!$$

§. 50.

Kleiner fällt die Anzahl der möglichen Permutationen aus, wenn mehrere gleiche Elemente vorkommen.

Es sei z. B. die Permutationszahl der Elemente a, b, b, b, c zu bestimmen. Versieht man die drei gleichen Elemente b mit Zeigern und betrachtet a, b_1, b_2, b_3, c als ganz verschiedene Elemente, so wäre die Anzahl der Permutationen $5! = 120$. Denkt man sich diese Permutationen wirklich gebildet, so wird man sehen, daß es immer mehrere Complexionen gibt, in denen a und c dieselbe Stelle einnehmen, und die sich nur durch die verschiedene Stellung von b_1, b_2, b_3 unterscheiden, und zwar gibt es, da b_1, b_2, b_3 nach dem Vorhergehenden $3! = 6$ verschiedene Stellungen zulassen, für jede Stellung von a und c immer sechs Permutationen, welche sich durch die bloße Versetzung der mit Zeigern versehenen Elemente unterscheiden; so hat man z. B. folgende Permutationen, wo a am ersten und c am dritten Platze vorkommt.

$ab_1\,cb_2\,b_3$, $ab_1\,cb_3\,b_2$, $ab_2\,cb_1\,b_3$, $ab_2\,cb_3\,b_1$, $ab_3\,cb_1\,b_2$, $ab_3\,cb_2\,b_1$.

Läßt man hier die Zeiger weg, d. h. betrachtet man die drei b wieder als gleiche Elemente, so werden alle diese 6 Permutationen in eine einzige abcbb übergehen. Auf dieselbe Art werden von den 120 Permutationen, sobald man die Zeiger beseitiget, je 6 gleich werden und somit auf eine einzige zurückgeführt. Man muß also die Permutationszahl aller Elemente durch die Permutationszahl der gleichen Elemente dividieren; die Anzahl aller verschiedenen Permutationen der Elemente abbbc ist demnach $\frac{5!}{3!} = \frac{120}{6} = 20$.

Auf gleiche Weise überzeugt man sich, daß die Elemente abbbbc $\frac{6!}{4!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 30$ verschiedene Permutationen geben.

Würden unter 10 gleichen Elementen nebst 4 gleichen auch noch andere 3 gleiche Elemente vorkommen, so müßte man aus ähnlichen Gründen die Permutationszahl $\frac{10!}{4!}$ wegen der 3 gleichen Elemente noch durch $3!$ dividieren; die Anzahl aller verschiedenen Permutationen wäre daher $\frac{10!}{4!\,3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 25200$.

§. 51.

Aufgaben.

1) Wie oft können 6 Gäste ihre Plätze am Tische wechseln, bis sie in allen möglichen Ordnungen gesessen sind?

$$6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720\text{mal}.$$

2) Wie vielmal können die 24 Buchstaben des Alphabets versetzt werden?

3) Wie viel verschiedene Stellungen geben eine weiße, zwei blaue und drei rothe Kugeln?

$$\frac{6!}{2!\,3!} = \frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 6}{1 \,.\, 2 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3} = 60.$$

4) Auf wie viele Arten lassen sich fünf Fächer mit drei verschiedenen Kugeln, deren eine weiß, die andere gelb, die dritte roth ist, besetzen?

Es werden immer drei Fächer mit Kugeln besetzt, während zwei Fächer leer bleiben; denkt man sich die zwei leeren Fächer mit 0 besetzt, so hat man 5 Elemente, unter denen 0 zweimal vorkommt; daher gibt es

$$\frac{5!}{2!} = \frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5}{1 \,.\, 2} = 60 \text{ Arten der Besetzung.}$$

5) Wie oft lassen sich die Factoren der Producte $abcdef$, $a^2bc = aabc$, a^3b^2cd, $x^3y^2z^4$, $a^{m-n}b^n$ permutieren?

II. Combinationen.

§. 52.

Man unterscheidet Combinationen **ohne** und **mit Wiederholungen**, je nachdem dasselbe Element in einer Complexion nur einmal oder auch mehrmal vorkommen darf.

1. **Bei der Bildung der Combinationen** geht man wie beim Permutieren stets von niedrigeren Complexionen zu höheren über.

Um aus mehreren gegebenen Elementen alle Amben ohne Wiederholungen zu bilden, stelle man jedes Element vor jedes höhere Element. Z. B.:

Elemente 1, 2, 3, 4	Elemente a, b, c, d, e,
12, 13, 14;	ab, ac, ad ae;
23, 24;	bc, bd, be;
34;	cd, ce;
	de.

Um die Ternen ohne Wiederholungen zu erhalten, setze man jede Ambe vor jedes Element, welches höher ist, als die darin vorkommenden. Z. B.:

123, 124; 134;	abc, abd, abe; acd, ace; ade;
234.	bcd, bce; bde;
	cde.

Auf gleiche Weise geschieht die Bildung der Quaternen, Quinternen . . . ohne Wiederholungen.

Will man aus mehreren gegebenen Elementen alle Amben mit Wiederholungen bilden, so verbinde man jedes Element mit sich selbst und mit jedem höheren Elemente. Z. B.:

Elemente 1, 2, 3, 4	Elemente a, b, c, d, e
11, 12, 13, 14;	aa, ab, ac, ad, ae;
22, 23, 24;	bb, bc, bd, be;
33, 34;	cc, cd, ce;
44;	dd, de;
	ee.

Die Ternen mit Wiederholungen erhält man, wenn man jede Ambe mit Wiederholungen zuerst mit dem höchsten darin vorkommenden Elemente, und dann noch mit jedem höheren Elemente verbindet. Z. B.:

111, 112, 113, 114; 122, 123, 124; 133, 134; 144;
222, 223, 224; 233, 234; 244;
333, 334; 344;
444.

Nach denselben Grundsätzen werden auch die Quaternen, Quinternen, . . . mit Wiederholungen gebildet.

§. 53.

2. Die Anzahl der verschiedenen Combinationen aus mehreren Elementen ergibt sich aus folgenden Betrachtungen:

Sind z. B. fünf Elemente a, b, c, d, e gegeben, so erhält man sicher alle Amben ohne Wiederholungen, wenn man zuerst das Element a mit allen übrigen Elementen verbindet, dann eben so mit b und den noch folgenden Elementen verfährt. Man erhält, wenn man die aus jedem Elemente hervorgehenden Amben in eine Reihe schreibt:

a gibt ab, ac, ad, ae;
b „ ab, bc, bd, be;
c „ ac, bc, cd, ce;
d „ ad, bd, cd, de;
e „ ae, be, ce, de.

Offenbar hat man hier so viele Reihen, als Elemente da sind, nämlich 5, und in jeder Reihe eine Ambe weniger, als man Elemente zu verbinden hat, somit 4; die Anzahl aller Amben ist also 5×4. Allein jede Ambe kommt zweimal vor; z. B. die Ambe bc, indem man b mit c, und indem man c mit b verbindet; daher gibt es nur $\frac{5 \times 4}{2} = 10$ verschiedene Amben. Wären n Elemente gegeben, so hätte man n Reihen und in jeder Reihe $n-1$ Amben, zusammen $n\,(n-1)$; da aber darunter immer zwei gleiche vorkommen, so ist die Anzahl aller verschiedenen Amben

$$\frac{n\,(n-1)}{1\,.\,2}.$$

Es ist ferner gewiß, daß man alle Ternen ohne Wiederholungen erhalten wird, wenn man jede Ambe mit allen Elementen verbindet, nur mit den zwei Elementen nicht, welche in der Ambe vorkommen. Man hat somit:

Ambe ab	gibt abc, abd, abe;	Ambe bd	gibt abd, bcd, bde;
„ ac	„ abc, acd, ace;	„ be	„ abe, bce, bde;
„ ad	„ abd, acd, ade;	„ cd	„ acd, bcd, cde;
„ ae	„ abe, ace, ade;	„ ce	„ ace, bce, cde;
„ bc	„ abc, bcd, bce;	„ de	„ ade, bde, cde.

Hier sind so viele Reihen, als früher Amben da waren, also $\frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$, und in jeder Reihe zwei Ternen weniger, als Elemente zu combinieren sind, nämlich 3; zusammen also $\frac{5 \times 4 \times 3}{1 \cdot 2}$ Ternen. Allein jede Terne kommt dreimal vor; folglich ist die letzte Zahl noch durch 3 zu dividieren, und man hat $\frac{5 \times 4 \times 3}{1 \times 2 \times 3} = 10$ verschiedene Ternen. Für n Elemente hätte man $\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ Ternen.

Eben so überzeugt man sich, daß bei n Elementen

die Anzahl aller Quaternen $= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$

„ „ „ Quinternen $= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$

u. s. w. ist.

Das Gesetz, welches in diesen Zahlen herrscht, ist leicht zu überblicken. Die Anzahl der Combinationen irgend einer Classe ohne Wiederholungen läßt sich nämlich durch einen Bruch darstellen, worin sowohl der Zähler als der Nenner so viele Factoren enthält, als Elemente in einer Combination vorkommen; der erste Factor im Zähler ist gleich der Anzahl aller Elemente, jeder folgende um 1 kleiner; der Nenner ist die natürliche Reihe der Factoren von 1 bis zu der Zahl, welche die Anzahl aller Elemente in einer Combination ausdrückt.

§. 54.

Auf ähnlichen Betrachtungen beruht auch die Bestimmung der Zahl der Combinationen mit Wiederholungen.

Hat man wieder z. B. fünf Elemente, a, b, c, d, e, so wird man gewiß alle Amben mit Wiederholungen erhalten, wenn man jedes Element mit sich selbst und dann noch mit allen Elementen, auch sich selbst nicht ausgenommen, verbindet.

Schreibt man die Amben, die aus einer solchen Verbindung eines jeden Elementes hervorgehen, in eine Reihe, so hat man:

a	gibt aa,	aa,	ab,	ac,	ad,	ae,
b	„ bb,	ab,	bb,	bc,	bd,	be,
c	„ cc,	ac,	bc,	cc,	cd,	ce,
d	„ dd,	ad,	bd,	cd,	dd,	de,
e	„ ee,	ae,	be,	ce,	de,	ee.

Man erhält also so viele Reihen, als Elemente da sind, und in jeder Reihe um eine Ambe mehr, somit 5 Reihen, deren jede 6 Amben enthält, zusammen 5 . 6 Amben. Weil nun darunter jede Ambe 2mal vorkommt, so ist $\frac{5 \cdot 6}{2} = 15$ die Anzahl aller verschiedenen Amben. Für n Elemente erhielte man n Reihen und in jeder Reihe $n + 1$ Amben, zusammen $n(n + 1)$; die Anzahl aller verschiedenen Amben wäre somit $\frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$.

Um sicher alle Ternen mit Wiederholungen zu erhalten, darf man nur jede Ambe zuerst mit den zwei Elementen, die darin vorkommen, und dann noch mit allen Elementen verbinden. Dadurch gibt

die Ambe aa . . aaa, aaa, aaa, aab, aac, aad, aae;
" " ab . . aab, abb, aab, abb, abc, abd, abe;
" " ac . . aac, acc, aac, abc, acc, acd, ace;
" " ad . . aad, add, aad, abd, acd, add, ade;
" " ae . . aae, aee, aae, abe, ace, ade, aee;
" " bb . . bbb, bbb abb, bbb, bbc, bbd, bbe;
" " bc . . bbc, bcc, abc, bbc, bcc, bcd, bce;
u. s. f.

Hier kommen so viele Reihen vor, als Amben mit Wiederholungen da waren, also $\frac{5 \cdot 6}{1 \cdot 2}$, und in jeder Reihe zwei Ternen mehr, als Elemente gegeben sind, hier 7 Ternen; zusammen also $\frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2}$. Allein jede Terne kommt 3mal vor, folglich ist die Anzahl aller verschiedenen Ternen $\frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3}$. Wären n Elemente gegeben, so hätte man $\frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$ Reihen und in jeder $n + 2$ Ternen, also im Ganzen $\frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2}$ Ternen, worunter aber je 3 gleich sind; die Anzahl der verschiedenen Ternen mit Wiederholungen wäre also

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Eben so findet man für n Elemente die Anzahl

der Quaternen mit Wiederholungen $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$

" Quinternen " " $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$

u. s. w.

Man sieht sogleich, daß sich die Zahl der Combinationen irgend einer Classe mit Wiederholungen von der Zahl der Combinationen derselben Classe ohne Wiederholungen nur dadurch unterscheidet, daß bei der ersten die Factoren des Zählers um 1 wachsen, während sie bei der letzteren um 1 abnehmen.

§. 55.

Aufgaben.

1) Man zähle die möglichen Arten eines Wechsels von **je drei** der sechs Farben roth, orange, gelb, grün, blau und violet auf.

2) Wie viele Amben, Ternen, Quaternen, Quinternen geben die 90 Nummern unserer Zahlenlotterie?

Anzahl der Amben $= \frac{90 \,.\, 89}{1 \,.\, 2} = 4005,$

" " Ternen $= \frac{90 \,.\, 89 \,.\, 88}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} = 117480,$

" " Quaternen $= \frac{90 \,.\, 89 \,.\, 88 \,.\, 87}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} = 2555190,$

" " Quinternen $= \frac{90 \,.\, 89 \,.\, 88 \,.\, 87 \,.\, 86}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5} = 43949268.$

3) Wie viele Amben, Ternen, Quaternen, Quinternen geben die in einer Ziehung erscheinenden 5 Nummern der Zahlenlotterie?

Anzahl der Amben $= \frac{5 \,.\, 4}{1 \,.\, 2} = 10,$

" " Ternen $= \frac{5 \,.\, 4 \,.\, 3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} = 10,$

" " Quaternen $= \frac{5 \,.\, 4 \,.\, 3 \,.\, 2}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} = 5,$

" " Quinternen $= \frac{5 \,.\, 4 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 1}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5} = 1.$

4) Wie viel verschiedene Würfe sind mit zwei Würfeln möglich?

Die Anzahl verschiedener Würfe ist offenbar gleich der Anzahl Amben mit Wiederholungen von 6 Elementen, also

$$\frac{6 \,.\, 7}{1 \,.\, 2} = 21.$$

5) Wie viele Combinationen der ersten, zweiten dritten,... Classe mit oder ohne Wiederholungen geben 7 Elemente?

6) Wie viele ein-, zwei-, drei-, vierziffrige Zahlen können mit den Ziffern 3, 4, 5, 6 geschrieben werden? (Hier ist mit dem Combinieren auch das Permutieren zu verbinden.)

Fünfter Abschnitt.

Zusammengesetzte Verhältnisrechnungen.

I. Von den zusammengesetzten Verhältnissen.

§. 56.

Wenn man in mehreren gegebenen Verhältnissen alle Vorderglieder mit einander, und eben so alle Hinterglieder mit einander multipliciert, so bilden die Producte ein neues Verhältnis, welches in Hinsicht der gegebenen einfachen Verhältnisse ein zusammengesetztes genannt wird; z. B.:

$$\text{einfache Verhältnisse} \left\{ \begin{array}{ccc} 1 : 2 & \quad & a : b \\ 3 : 4 & & c : d \\ 5 : 7 & & e : f, \end{array} \right.$$

$$\text{zusammengesetztes Verhältnis } 15 : 56 \quad ace : bdf.$$

Der Exponent eines zusammengesetzten Verhältnisses ist gleich dem Producte aus den Exponenten der einfachen Verhältnisse.

Zusammengesetzte Verhältnisse kommen in der Anwendung überall vor, wo Größen mit einander zu vergleichen sind, die von zwei oder mehreren Größenarten abhängen. So hängt z. B. die Fläche eines Rechteckes von der Länge und Breite desselben ab. Ist nun das Verhältnis der Flächen zweier Rechtecke zu bestimmen, deren erstes 5^m lang und 3^m breit, das zweite 7^m lang und 4^m breit ist, so hat man erstlich

Verhältnis der Längen 5 : 7,
„ „ Breiten 3 : 4.

Die Fläche des ersten Rechteckes wird offenbar die nämliche bleiben, wenn man dasselbe statt 3^m nur 1^m breit, dafür aber 3 mal so lang, also 15^m lang annimmt; eben so kann man das zweite Rechteck, ohne seine Fläche zu ändern, statt 4^m nur 1^m breit, und dagegen 4mal so lang, somit 28^m lang annehmen. Die beiden Flächen und ihr gegenseitiges Verhältnis bleiben also ungeändert, wenn man bei beiden Rechtecken dieselbe Breite 1^m und die Längen 15^m und 28^m annimmt; in diesem Falle aber hängen die Flächen, weil die Breite gleich ist, nur von den Längen 15^m und 28^m ab, und es ist somit das Verhältnis der beiden Flächen gleich 15 : 28 oder $5 \times 3 : 7 \times 4$. Das Verhältnis der Flächen der zwei Rechtecke ist also ein zusammengesetztes Verhältnis aus den einfachen Verhältnissen der Längen und der Breiten. Man pflegt sich kürzer so auszudrücken: die Fläche eines Rechteckes steht im zusammengesetzten Verhältnisse der Länge und der Breite.

Auf dieselbe Art stehen im zusammengesetzten Verhältnisse: die Länge des zurückgelegten Weges mit der darauf verwendeten Zeit und Geschwindigkeit; die Größe des Lohnes mit der Zahl der Arbeiter, Tage und Arbeitsstunden; der Fuhrlohn mit der Länge des Weges und dem Gewichte der Waare; der Zins mit dem Capitale, dem Procente und der Zeit; der Gewinn mit der Einlage und der Zeit.

§. 57.

Bilde das zusammengesetzte Verhältnis

1) aus 8 : 5 und 10 : 16;
2) aus $2\frac{1}{2} : 3$ und $5\frac{1}{8} : 4\frac{1}{2}$;
3) aus $2\frac{5}{8} : \frac{1}{3}$, $\frac{5}{6} : \frac{3}{5}$ und $3\frac{2}{5} : 7$;
4) aus $8\frac{3}{4} : 15\frac{1}{2}$, $10\frac{2}{3} : 7$, 21 : 18 und 12 : $13\frac{5}{6}$.
5) A geht durch 10 Tage und legt täglich 49 Kilometer zurück; B geht durch 12 Tage, macht aber täglich nur 42 Kilometer; wie verhalten sich die von beiden zurückgelegten Wege?

Verhältnis der Zeiten 10 : 12
„ „ Geschwindigkeiten 49 : 42
„ „ Wege 35 : 36.

6) Wie verhalten sich die Flächen zweier Rechtecke, von denen das eine 6^m lang und 4^m breit, das andere 8^m lang und 5^m breit ist?

7) Von zwei Gärten ist der eine 51^m lang und $34{\cdot}4^m$ breit, der andere $36{\cdot}4^m$ lang und $30{\cdot}5^m$ breit; in welchem Verhältnisse stehen die Flächeninhalte derselben?
8) Die Längen zweier Gefäße sind $1^m\ 8^{dm}$ und $1^m\ 6^{dm}$, die Breiten $1^m\ 1^{dm}$ und 8^{dm}, die Tiefen 4^{dm} und 5^{dm}; wie verhalten sich die Inhalte derselben?
9) Von zwei Dampfmaschinen ist die eine im Stande, 15 Tonnen 15^m hoch, die andere in derselben Zeit 9 Tonnen 20^m hoch zu schaffen; in welchem Verhältnisse stehen die Kräfte dieser beiden Maschinen?
10) A hat zwei Capitalien, nämlich 1200 fl. zu 5% und 1500 fl. zu 6%; wie verhalten sich die jährlichen Zinsen beider Capitalien?
11) In welchem Verhältnisse stehen die Arbeitskräfte zweier Arbeiter, von denen A in 4 Tagen zu 12 Stunden täglich und B in 5 Tagen zu 8 Stunden dasselbe Werk zu Stande bringt?
12) Wenn sich der Werth des Goldes zum Werthe des Silbers bei gleichem Gewichte wie 31 : 2 verhält, wie verhalten sich die Werthe dieser Metalle bei gleichem Rauminhalte, da das specifische Gewicht des Goldes 19·36 und das des Silbers 10·51 ist?

II. Die zusammengesetzte Regeldetri.

§. 58.

Wenn eine Art von Zahlen mit zwei oder mehreren andern Arten einzeln genommen in geradem oder verkehrtem Verhältnisse steht, und es ist eine Reihe zusammengehöriger Zahlen aller dieser Arten bekannt, von einer anderen Reihe zusammengehöriger Zahlen aber eine derselben unbekannt und zu suchen, so heißt die Rechnung, durch welche man diese unbekannte Zahl findet, die **zusammengesetzte Regeldetri**.

Jede Aufgabe der zusammengesetzten Regeldetri kann in mehrere Aufgaben der einfachen Regeldetri zerlegt und auf diese Art aufgelöset werden, wie aus dem folgenden Beispiele erhellet.

Aus 20 Kilogr. Garn bekommt man 85 Meter Zeug, das 12^{dm} breit ist; wie viel Meter bekommt man aus 175 Kilogr. Garn, wenn das Zeug 15^{dm} breit sein soll?

Diese Aufgabe der zusammengesetzten Regeldetri kann, indem man jedesmal nur *eine* Art von Zahlen sich ändern läßt, in folgende zwei Aufgaben der einfachen Regeldetri zerlegt werden:

a) Aus 20 Kilogr. Garn bekommt man 85 Meter Zeug von 12^{dm} Breite; wie viel Meter Zeug von gleicher Breite wird man aus 175 Kilogramm erhalten? — Zur Auflösung hat man

20 Kil.	85 Met.	$y : 85 = 175 : 20$
175 „	y „	daher $y = 743\frac{3}{4}$ Meter.

b) Aus 175 Kil. Garn werden $743\frac{3}{4}$ Meter Zeug von 12^{dm} Breite gemacht; wie viel Meter bekommt man daraus, wenn die Breite 15^{dm} betragen soll? — Die Rechnung steht:

bei 12^{dm} Breite	$743\frac{3}{4}$ Meter	$x : 743\frac{3}{4} = 12 : 15$,
„ 15^{dm} „	x „	woraus $x = 595$ Meter.

Diese Methode, eine Aufgabe der zusammengesetzten Regeldetri aufzulösen, ist wegen ihrer Weitläufigkeit nicht geeignet, um allgemein angewendet zu werden; allein sie führt durch sehr einfache Schlüsse auf ein kürzeres Verfahren, die Auflösung vorzunehmen. Man stelle nämlich die erhaltenen Proportionen zusammen, behalte aber dabei statt der gefundenen Zahl $743\frac{3}{4}$ den Buchstaben y bei; man hat:

$$\left.\begin{array}{l} y : 85 = 175 : 20 \\ x : y = 12 : 15 \\ \hline yx : 85y = 175 . 12 : 20 . 15 \end{array}\right\}$$

Durch Multiplication der gleichstelligen Glieder erhält man wieder eine Proportion.

Kürzt man hier das erste Verhältnis durch y ab, so bleibt

$$x : 85 = 175 . 12 : 20 . 15,$$

was man der leichteren Uebersicht wegen auch so schreiben kann

$$\begin{array}{l} x : 85 = 175 : 20 \\ \qquad\qquad 12 : 5, \end{array}$$

wobei man sich denken muß, daß die unter einander stehenden Zahlen zu multiplicieren sind.

Das Verhältnis x : 85 ist demnach gleich dem zusammengesetzten Verhältnisse aus 175 : 20 und 12 : 15.

Vergleicht man die Ordnung der Zahlen in diesen Verhältnissen mit der Stellung der Zahlen in der Aufgabe, nämlich

20 Kil. 85 Meter bei 12^{dm} Breite,
175 „ x „ „ 15^{dm} „

so findet man, daß die zu x Meter und 85 Meter gehörigen Zahlen der Kilogramme, welche mit der Anzahl Meter gerade proportioniert sind, in der nämlichen, die zugehörigen Zahlen der Breite aber, welche mit der Anzahl Meter verkehrt proportioniert sind, in umgekehrter Ordnung zu einem Verhältnisse verbunden erscheinen.

Daraus ergibt sich folgender Satz:

Wenn eine Art von Zahlen von mehreren anderen Arten so abhängt, daß sie mit denselben einzeln genommen theils gerade, theils verkehrt proportioniert ist, so ist das Verhältnis zwischen je zwei Zahlen der ersten Art gleich dem zusammengesetzten Verhältnisse aus den einfachen Verhältnissen zwischen den zugehörigen Zahlen jeder andern Art, in der nämlichen oder in umgekehrter Ordnung genommen, je nachdem die Zahlen dieser Art mit den Zahlen der ersten Art gerade oder verkehrt proportioniert sind.

Auf diesem Satze beruhet nun ein ganz einfaches Verfahren, um die Aufgaben der zusammengesetzten Regeldetri aufzulösen:

1. Man setze die unbekannte und die damit gleichnamige Zahl in das erste Verhältnis.

2. Das zweite Verhältnis der Proportion ist ein zusammengesetztes, dessen einfache Verhältnisse man findet, wenn man die Art von x mit jeder andern Art vergleicht, um zu sehen, ob die beiden Arten gerade oder verkehrt proportioniert sind, und dann die beiden zu x und zu der damit gleichnamigen Zahl gehörigen Zahlen einer jeden Art in derselben

oder in umgekehrter Ordnung nimmt, je nachdem diese Art mit der Art von x gerade oder verkehrt proportioniert ist. Diese Verhältnisse werden unter einander geschrieben.

3. Die Proportion wird aufgelöset, indem man das Product aller in den innern Gliedern vorkommenden Factoren durch das Product aller in den äußeren Gliedern befindlichen Factoren dividiert.

So wie die Aufgaben der einfachen Regeldetri, können auch die der zusammengesetzten Regeldetri nach der Schlußrechnung aufgelöst werden. Für die obige Aufgabe würde sich die Rechnung so stellen:

20 Kil. bei 12^{dm} Breite 85 Meter,

1 „ „ 12^{dm} „ den 20. Theil .. $\frac{85}{20}$ Met.

175 „ „ 12^{dm} „ 175mal so viel.. $\frac{85 \cdot 175}{20}$ Met.

175 „ „ 1^{dm} „ 12mal so viel.. $\frac{85 \cdot 175 \cdot 12}{20}$ Met.

175 „ „ 15^{dm} „ den 15. Theil .. $\frac{85 \cdot 175 \cdot 12}{20 \cdot 15}$ Met.

= 595 Meter.

§. 59.

Aufgaben. (Nach der Proportion und nach der Schlußrechnung aufzulösen.)

1) 12 Arbeiter bekommen für 3 Arbeitstage 45 fl.; wie viel werden 16 Arbeiter für 5 Tage bekommen?

Nach der Proportion:

12 Arb. in 3 Tag. 45 fl. $\quad x : 45 = 16 : 12$

16 „ „ 5 „ x „ $\quad\quad\quad\;\; 5 : 3$

$x = 100$ fl.

Nach der Schlußrechnung:

12 Arb. in 3 Tag. 45 fl.

1 „ „ 3 „ $\frac{45}{12}$ fl.

16 „ „ 3 „ $\frac{45 \cdot 16}{12}$ fl.

16 „ „ 1 „ $\frac{45 \cdot 16}{12 \cdot 3}$ fl.

16 „ „ 5 „ $\frac{45 \cdot 16 \cdot 5}{12 \cdot 3}$ fl. = 100 fl.

2) Von zwei in einander greifenden Zahnrädern hat A 60 Zähne, B 120 Zähne; wenn sich A in 12 Secunden 10mal umdreht, wie oft wird sich B in 36 Secunden umdrehen?

Im Kopfe. Da B statt 60, 120 Zähne hat, so wird es nur die Hälfte von 10, d. i. 5 Umdrehungen machen; da es sich ferner statt durch 12 durch 36 Secunden bewegt, so wird es sich 3mal 5 = 15mal umdrehen.

3) Wenn man für einen Mann in 4 Wochen $12\frac{1}{2}$ Kilogr. Brod rechnet, wie viel Brot werden 120 Mann in 18 Wochen brauchen?

4) Wenn 6 Mann in 5 Tagen $28\frac{1}{2}$ fl. verdienen, in wie viel Tagen werden unter übrigens gleichen Umständen 16 Mann 532 fl. verdienen?

5) 16 Kilogr. Flachs geben 15 Meter Leinwand, wenn dieselbe 78^{cm} breit ist; wie viel Meter geben 36 Kilogr. Flachs, wenn die Leinwand 116^{cm} breit ist?

6) Um 35 Laternen 108 Stunden lang brennen zu lassen, braucht man 250 Kilogr. Oel; wie viel Oel ist erforderlich, wenn 50 solche Laternen 245 Stunden lang brennen sollen?

7) Ein Capital von 3600 fl. bringt in $4\frac{1}{2}$ Jahren 972 fl. Zins; wie viel Zins bekommt man von 5650 fl. Cap. in $2\frac{1}{2}$ Jahren?

8) 100 fl. Capital geben in 1 Jahre $5\frac{1}{2}$ fl. Zins; wie viel fl. Capital muß man anlegen, um in $2\frac{1}{4}$ Jahren 300 fl. Zins zu erhalten?

9) Wenn $12\frac{1}{2}$ Tonnen für $28\frac{3}{4}$ fl. 32 Kilometer geführt werden, wie viel Tonnen werden für $43\frac{3}{4}$ fl. 28 Kilom. weit verführt?

$$\begin{array}{llll} 12\frac{1}{2} \text{ Tonn.} & 28\frac{3}{4} \text{ fl.} & 32 \text{ Kilom.} \\ x & \text{"}\ 43\frac{3}{4} & \text{"}\ 28 & \text{"} \end{array}$$

$$x : 12\tfrac{1}{2} = 43\tfrac{3}{4} : 28\tfrac{3}{4}$$
$$32 : 28$$

$$x = \frac{12\frac{1}{2} \cdot 43\frac{3}{4} \cdot 32}{28\frac{3}{4} \cdot 28} = \frac{25 \cdot \overset{\overset{5}{\cancel{35}}}{\cancel{175}} \cdot \overset{\overset{4}{\cancel{8}}}{\cancel{32}} \cdot \cancel{4}}{\cancel{2} \cdot \cancel{4} \cdot \underset{23}{\cancel{115}} \cdot \underset{7}{\cancel{28}}} = \frac{500}{23} = 21\,\frac{17}{23} \text{ Tonnen.}$$

10) Ein Fuhrmann erhält, um $14\frac{3}{8}$ Tonnen $46\frac{1}{2}$ Kilom. weit zu führen, $68\frac{1}{3}$ fl. als Bezahlung; wie viel muß man ihm zahlen, damit er $17\frac{3}{4}$ Tonnen 40 Kilom. weit führe?

11) Zu einem Fußboden braucht man 28 Bretter, deren jedes 35^{dm} lang und 6^{dm} breit ist; wie viele Bretter werden zu demselben Fußboden erforderlich sein, wenn jedes 28^{dm} lang und 5^{dm} breit ist?

12) Eine Maschine hebt in 88 Secunden 5192 Kil. auf eine Höhe von 3 Meter; auf welche Höhe kann sie 2352 Kil. in 98 Secunden heben?

13) Bei einem Baue müssen 120 Maurer täglich 8 Stunden 12 Wochen lang arbeiten; um wie viel Maurer brauchte man mehr, wenn man täglich 6 Stunden durch 10 Wochen arbeiten ließe?

14) Zu einem Stücke Zeug, welches $54\frac{1}{2}$ Meter lang und $1\frac{3}{4}$ Meter breit ist, braucht man 15 Kilogr. Garn; wie viel Garn wird zu einem Stücke von 30 Meter Länge und $1\frac{1}{2}$ Meter Breite erforderlich sein?

15) Ein Weber verfertigt aus 22·8 Kilogr. Garn 65^{m} Leinwand von $1{\cdot}2^{m}$ Breite; wie viel Meter Leinwand von $1{\cdot}35^{m}$ Breite macht er aus 42·114 Kil. Garn?

16) 150 Meter Tuch von 82^{cm} Breite hat man für $243\frac{1}{2}$ fl. gekauft; wie viel kosten 166·24 Meter eines gleich feinen Tuches von 108^{cm} Breite?

17) Ein Fuhrmann verspricht 2800 Kilogr. 25 Myriameter weit um 46 fl. zu führen. Nachdem er 8 Myriam. weit gefahren, kommt ihm der Auftrag zu, eine andere Straße einzuschlagen, 1000 Kil. mehr auf

zuladen und 12 Myriam. weiter zu fahren, als anfänglich bedungen war. Wie viel Frachtlohn wird ihm gebühren?

Hier muß zuerst die Fracht für 2800 Kilogr. welche 8 Myriam. weit, dann für $2800 + 1000 = 3800$ Kil., welche $25 - 8 + 12 = 29$ Myriam. weit geführt werden, berechnen, und beide Beträge addieren.

25^{Mm} 46 fl.	2800 Kil. 25^{Mm} 46 fl.
8^{Mm} x „	3800 „ 29^{Mm} y „
$x : 46 = 8 : 25$	$y : 46 = 38 : 28$
also x = 14 fl. 72 kr.	29 : 25
72 „ 42 „	also y = 72 fl. 42 kr.
ganze Fracht 87 fl. 14 kr.	

18) Wenn 20 Arbeiter, welche täglich 12 Stunden arbeiten, in 5 Wochen einen Canal von 375^m Länge zu Stande bringen; in wie viel Wochen werden 12 Arbeiter, welche täglich 10 Stunden arbeiten, einen eben solchen Canal von 600^m Länge vollenden?

Nach der Proportion:

20 Arbeiter 12 St. täglich 5 Wochen 375^m Länge,
12 „ 10 „ „ x „ 600^m „

$$x : 5 = \left.\begin{array}{r} 20 : 12 \\ 12 : 10 \\ 600 : 375 \end{array}\right\} \text{woraus } x = 16 \text{ Wochen.}$$

Nach der Schlußrechnung:

20 Arb. 12 St. tägl. 375^m in 5 Wochen
1 „ 12 „ „ 375^m „ 5.20 W.
12 „ 12 „ „ 375^m „ $\frac{5 \cdot 20}{12}$ W.
12 „ 1 „ „ 375^m „ $\frac{5 \cdot 20 \cdot 12}{12}$ W.
12 „ 10 „ „ 375^m „ $\frac{5 \cdot 20 \cdot 12}{12 \cdot 10}$ W.
12 „ 10 „ „ 1^m „ $\frac{5 \cdot 20 \cdot 12}{12 \cdot 10 \cdot 375}$ W.
12 „ 10 „ „ 600^m „ $\frac{5 \cdot 20 \cdot 12 \cdot 600}{12 \cdot 10 \cdot 375}$ W.
= 16 Wochen.

19) 20 Arbeiter vollenden einen 30^m langen Graben in 15 Tagen, wenn sie täglich 12 Stunden arbeiten; wie viel Arbeiter müßten 10 Stunden täglich arbeiten, um einen 24^m langen Graben in 16 Tagen zu Stande zu bringen?

20) Eine Mühle mahlt auf 3 Gängen bei 126 Umdrehungen per Minute in 22 Stunden 24 Hektoliter Getreide; auf wie viel Gängen können bei 99 Umdrehungen per Minute in 42 Stunden 32 Hektol. geliefert werden?

21) Von einer Wiese, welche 512^m lang und 72^m breit ist, werden 10 Wagen Heu gewonnen, von welchen jeder 900 Kil. Ladung hat; wie viel Wagen Heu, jeder zu 1000 Kil., wird man verhältnismäßig von einer Wiese gewinnen, die 384^m lang und 192^m breit ist?

22) 44 Arbeiter verdienen in 30 Tagen bei 11stündiger Arbeitszeit $907\frac{1}{2}$ fl.; in wie viel Tagen verdienen 26 Arbeiter bei 10stündiger Arbeitszeit $214\frac{1}{2}$ fl.?

23) 100 fl. Capital geben in 1 Jahr 5 fl. Zins; a) wie viel Zins geben 3748 fl. in $2\frac{3}{4}$ Jahren; b) in welcher Zeit geben $7835\frac{1}{2}$ fl. Capital $633\frac{1}{4}$ fl. Zins; c) welches Capital gibt in $2\frac{5}{6}$ Jahren 720 fl. 22 kr. Zins?

24) A verpachtet das Heu einer Wiese, die 240^m lang und 105^m breit ist, an B für 32 fl.; B überläßt davon dem C ein Stück von 100^m Länge und 60^m Breite, nimmt aber $16\frac{2}{3}$ % Gewinn; wie viel muß C an B zahlen?

25) In einer Fabrik belaufen sich die jährlichen Kosten für 250 Gasflammen, welche einzeln in jeder Stunde 160 Cub.^{dm} Gas verzehren und 1440 Stunden brennen, auf 8064 fl.; wie hoch kommt hiernach die Gasbeleuchtung in einer anderen Fabrik, in welcher 220 Flammen brennen, jede stündlich 144 Cub.^{dm} Gas verzehrt und die Beleuchtungszeit 1560 Stunden beträgt?

26) An einem Graben, welcher 80^m lang, 5^m breit und 2^m tief wird, arbeiten 20 Arbeiter 18 Tage; wie viele Arbeiter werden einen 120^m langen, 6^m breiten und 3^m tiefen Graben in 36 Tagen vollenden?

Im Kopfe. Wäre der Graben statt 80^m nur 40^m lang, so brauchte man nur $\frac{1}{2}$ von 20, d. i. 10 Arbeiter; wird der Graben 120^m, also 3mal so lang, so braucht man 3mal 10 = 30 Arbeiter; u. s. w.

27) Eine Mauer von 40^m Länge, 5^m Höhe und 75^{cm} Dicke wird von 15 Maurern, welche täglich 12 Stunden arbeiten, zu Stande gebracht; wie hoch ist eine andere Mauer von $103 \cdot 5^m$ Länge und 1^m Dicke, welche von 18 Maurern bei täglich 11stündiger Arbeit in 25 Tagen vollendet wird?

28) Wenn 12 Weber in 3 Monaten 28 Stück Leinwand, jedes 30^m lang und 1^m 25^{cm} breit, verfertigen, da sie monatlich 25 Tage und täglich 12 Stunden arbeiten; in wie viel Monaten verfertigen 22 Weber, welche monatlich 24 Tage und täglich 10 Stunden arbeiten, 66 Stück Leinwand, das Stück 35^m lang und 1^m 5^{dm} breit?

29) Eine Dampfmaschine von 30 Pferdekraft bewegt in 3 Wochen à 6 Tage à 12 Stunden eine Erdmasse von 8^m Länge, 5^m Breite und 5^m Höhe; in wie viel Wochen ununterbrochener Arbeit wird eine Erdmasse von 20^m Länge, und 7^m Breite 4^m Höhe durch eine Damsmaschine von 24 Pferdekraft bewegt werden?

30) Ein Wasserbehälter, 2^m lang, $\frac{4}{5}^m$ tief und 1^m breit, wird in 2 Stunden durch eine Röhre gefüllt, welche in 3 Minuten 40 Cub.^{dm} Wasser ergießt; in welcher Zeit füllt sich ein anderer Behälter von 3^m Länge, 1^m Tiefe und $1\frac{1}{5}^m$ Breite durch eine Röhre, welche in 4 Minuten 56 Cub.^{dm} Wasser liefert?

Einfache Zinsrechnung.

§. 60.

Eine Geldsumme, welche man Jemandem unter der Bedingung leiht, daß er für die Benützung einen bestimmten Geldbetrag entrichtet, endlich aber doch die ganze Geldsumme zurückzuzahlen verpflichtet ist, wird

Capital genannt. Das Geld, welches für die Benützung des Capitals entrichtet wird, heißt Zins oder Interesse; es wird nach Procenten bestimmt, welche sich, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt wird, auf ein Jahr beziehen; z. B. ein Capital ist zu 5 % angelegt, heißt: von je 100 fl. Capital erhält man in einem Jahre 5 fl. Zins.

Die Zinsrechnung ist demnach auch eine Procentrechnung, nur muß dabei auch auf die Zeit, während welcher ein Capital angelegt bleibt, Rücksicht genommen werden. Es wird dabei gewöhnlich jeder Monat zu 30 Tagen und daher das Jahr zu 360 Tagen angenommen.

Bei der Interessenrechnung kommen 4 Bestimmungen vor: das Capital, die Zeit, das Procent und die Zinsen.

Alle Aufgaben der Zinsrechnung können durch die zusammengesetzte Regeldetri aufgelöst werden, nur muß man die Bestimmung der Procente gehörig zerlegen. Z. B. anstatt zu 5 %, stellt man den Satz auf:

100 fl. Capital geben in 1 Jahre 5 fl. Zinsen.

Eben so wird die Frage: zu x %? so ausgedrückt:

x fl. Zinsen geben 100 fl. Capital in 1 Jahre?

1. Berechnung der Zinsen.

§. 61.

Allgemeine Aufgabe: Wie viel Zinsen entfallen für ein Capital zu gegebenem Procent in einer bestimmten Zeit?

Drückt man das Capital durch C, das Procent durch P, die Zeit in Jahren durch J und die Zinsen durch Z aus, so hat man

100 fl. Cap. 1 Jahr P fl. Zins, daher $Z : P = C : 100$

C " " J " Z " " $J : 1$

mithin $Z = \frac{CPJ}{100}$, d. h.

Die Zinsen sind gleich dem Producte aus dem Capitale, den Procenten und Jahren dividiert durch 100.

Aufgaben. (Aufzulösen im Kopfe oder schriftlich nach der obigen Formel, oder nach der zusammengesetzten Regeldetri, oder nach der Schlußrechnung.)

1) Wie viel Zinsen geben 350 fl. zu 4 % in 3 Jahren?

a) Im Kopfe. 300 fl. geben zu 4 % in 1 Jahre 12 fl., in 3 Jahren 36 fl. Zinsen; 50 fl. geben in 1 Jahre 2 fl., in 3 Jahren 6 fl. Zinsen; zusammen 42 fl.

b) Nach der Formel.

$$x = \frac{350 \cdot 4 \cdot 3}{100} = 42 \text{ fl. Zinsen.}$$

c) Nach der Regeldetri.

100 fl. Cap. 1 J. 4 fl. Zins $x : 4 = 350 : 100$

350 " " 3 " x " " $3 : 1$

$x = 42$ fl. Zinsen.

d) Nach der Schlußrechnung.

100 fl. Cap. in 1 Jahr 4 fl. Zinsen
50 „ „ „ 1 „ $\frac{1}{2}$ „ = 2 fl. Zinsen
350 „ „ „ 1 „ 2 „ $\times$ 7 = 14 fl. Zinsen
350 „ „ „ **3** „ 14 „ $\times$ 3 = 42 „ „

2) Wie viel Zins geben $786\frac{2}{3}$ Thaler zu $4\frac{1}{2}$ % in 5 Jahren?
3) Wie viel Zins bekommt man von 3215 fl. 30 kr. zu $5\frac{3}{4}$ % in 2 Jahren 7 Monaten?
4) Ein Capital von 5844 Mark Banco ist durch $3\frac{1}{2}$ Jahre zu $4\frac{1}{2}$ % angelegt; wie viel trägt es in dieser Zeit an Zinsen?
5) Wie viel Zins geben 3105 fl. 90 kr. zu 5 % in 2 Jahren und 1 Monate?
6) Man berechne die Zinsen von 2777 Francs zu $5\frac{3}{4}$ % in $1\frac{5}{6}$ Jahren.
7) Von drei gleichen Capitalien von je 2205 fl. sind die $5\frac{1}{2}$ % Zinsen für $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{4}$ und $2\frac{5}{6}$ Jahre rückständig; wie viel betragen die rückständigen Zinsen?
8) A hat zwei Capitalien angelegt: 3580 fl. zu $5\frac{1}{4}$ % durch 1 Jahr 9 Monate, und $2895\frac{1}{2}$ fl. zu 6 % durch 2 Jahre 4 Monate; welches Capital bringt mehr Zinsen und um wie viel mehr als das andere?

§. 62.

Einfacher geschieht die Bestimmung der Zinsen nach folgenden Regeln, deren Richtigkeit von selbst erhellt:

1. Die Zinsen für ein Jahr findet man nach der Procentrechnung, indem man das Capital mit dem Procent multipliciert und das Product durch 100 dividiert.

2. Die Zinsen für mehrere Jahre werden gefunden, indem man die Zinsen für ein Jahr mit der Anzahl der Jahre multipliciert.

3. Kommen auch Monate und Tage vor, so bedient man sich der wälschen Praktik; man zerlegt nämlich die Monate in aliquote Theile eines Jahres und nimmt von den jährlichen Zinsen eben solche Theile; die Tage aber zerlegt man in aliquote Theile eines Monats und nimmt eben solche Theile von den monatlichen Zinsen. Alle diese Beträge werden dann zu den Zinsen für Jahre addiert.

Aufgaben.

1) Man berechne die einjährigen Zinsen

a) von 31 24 fl. zu 5 %
156·20 = 156 fl. 20 kr.

b) von 3800 fl. zu 4 %
152 fl.

c) von 35 78 fl. 26 kr. zu 6 %
35 78·25
214·69 50 = 214 fl. 70 kr.

d) von 957 fl. zu $4\frac{1}{3}$ %
3828
319
41·47 = 41 fl. 47 kr.

2) Wie viel betragen die jährlichen Zinsen

a) von 1834 fl. à 5 %? b) von $3307\frac{1}{2}$ fl. à 6 %?
c) von 2095 fl. 50 kr. à $6\frac{1}{2}$ %? d) von $912\frac{3}{5}$ fl. à $4\frac{3}{4}$ %?

3) Wie viel Zins geben

a) 21 83 fl. zu 4 % in 3 Jahren
87·32 fl. für 1 Jahr
261·96 fl. für 3 Jahre

b) 147 88 fl. zu $5\frac{1}{4}$ % in 4 Jahren
739 40
36 97
776·37 fl. in 1 Jahre
3105·48 fl. in 4 Jahren

4) Wie viel Zins geben 1848 Thaler zu 5 % in 3 Jahren und 4 Monaten?

28 48 Thlr. zu 5 % in 3 Jahren 4 Mon.
142·40 für 1 Jahr
427·2 „ 3 Jahre
47·467 „ 4 Monate = $\frac{1}{3}$ Jahr.
474·667 „ 474 Thlr. 20 Sgr.

5) Ein Capital von 8425 fl. 18 kr. liegt durch 4 Jahre 11 Monate zu $4\frac{1}{2}$ % an; wie viel Zinsen bringt es?

6) Wie groß sind die Zinsen von 5244 Francs 55 Centimes zu $5\frac{1}{4}$ % in 3 Jahren 5 Monaten 20 Tagen?

7) Wie viel Zinsen geben 2514 fl. 57 kr. zu 6 % in 5 Jahren 8 Monaten 26 Tagen?

8) Wie groß sind die Zinsen von 3457 Mark Banco zu $6\frac{1}{2}$ % in 2 Jahren 7 Monaten 18 Tagen?

9) Wie viel Zins geben 724 Livres Sterling zu $4\frac{3}{4}$ % in 4 Jahren 11 Monaten 27 Tagen?

Berechne noch die Zinsen

10) von 9007 fl. 40 kr. zu 5 % in 10 Monaten;
11) von 1133 fl. 20 kr. zu $5\frac{1}{8}$ % in 3 Jahren 1 Monat;
12) von 950·235 fl. zu $4\frac{1}{2}$ % in 2 Jahren 11 Monaten 17 Tagen;
13) von 7185 fl. 69 kr. zu $4\frac{3}{4}$ % in 3 Jahren 7 Monaten 12 Tagen;
14) von 1019·38 Francs zu $5\frac{1}{2}$ % in 9 Monaten 21 Tagen;
15) von 3407 Mark 5 Schilling zu 6 % in 1 Jahr 2 Monaten 7 Tagen.

§. 63.

Wenn die Zinsen, wie dies besonders im kaufmännischen Verkehre häufig der Fall ist, *blos für eine bestimmte Anzahl Tage* berechnet werden sollen, so pflegt man zuerst die Zinsen zu 6 % zu bestimmen, und daraus die Zinsen für jedes andere Procent mittelst der wälschen Praktik abzuleiten. Das Jahr nimmt man dabei zu 360 Tagen an.

Es seien allgemein die Zinsen von C fl. Capital zu 6 % für T Tage zu bestimmen, so hat man

100 fl. Cap. in 360 Tag. 6 fl. Zins
C „ „ „ T „ x „ „

$$x : 6 = C : 100$$
$$T : 360$$
$$x = \frac{CT}{6000}.$$

Die Zinsen zu 6 % auf Tage werden also gefunden, indem man das Capital mit der Anzahl Tage multipliciert, und das Product durch 6000, d. i. zuerst durch 1000 und dann durch 6, dividiert.

Die Kreuzer des Capitals pflegt man während der Rechnung meistens unberücksichtigt zu lassen, vergrößert jedoch, wenn 50 oder mehr als 50 Kreuzer vorhanden sind, die Anzahl der Gulden um 1; sonst werden die Kreuzer als Hunderttheile der Gulden dargestellt.

Aufgaben.

1) Wie viel Zins geben 2790 fl. zu 6 % in 85 Tagen?

```
 27 90 × 85
223 20
 13 950
237·150
------- : 6
 39·525 = 39 fl. 52½ kr.
```

2) Wie groß sind die Zinsen von 2349 fl. 25 kr. zu 6 % in 182 Tagen?

Mit Weglassung der Kreuzer — genau

```
234 9 × 182                 234 9·25 × 182
187 92                      187 9 400
  4 698                       4 6 9850
427·518                     427 5 6350
 71·253 = 71 fl. 25 kr.      71·2 606 = 71 fl. 26 kr.
```

3) Wie viel Zinsen geben 758 Thlr. zu 6 % vom 13. April bis letzten December?

Vom 13. April bis 13. Dec. sind 8 Mon. = 240 Tage
„ 13. Dec. „ 30. „ 17 „
zusammen 257 Tage.

4) Wie groß sind die Zinsen von 3572 fl. Capital zu 6 % in 217 Tagen?

5) Wie viel Zinsen geben 2350 fl. 47 kr. zu 6 % in 17 Tagen?

6) Wie groß sind die 6 % Zinsen
a) von 925 fl. in 153 Tagen?
b) von 2019 Mark in 96 Tagen?
c) von 1512 fl. 90 kr. in 264 Tagen?

7) Man berechne die Zinsen von 1265 fl. zu 4 % in 231 Tagen.

$$\begin{array}{l} 1\,265 \times 231 \\ \ \ 37\,95 \\ 253\,0 \\ \hline 292\,215 \\ \hline \ \ 48{\cdot}702 \text{ zu } 6\,\% \\ -\ 16{\cdot}234 \text{ zu } 2\,\% = \tfrac{1}{3} \text{ von } 6\,\%. \\ \hline \ \ 32{\cdot}468 \text{ zu } 4\,\% \end{array}$$

8) Wie groß sind die Zinsen von 3402 fl. 9 kr. zu $7\frac{1}{4}$ % in 125 Tagen?

$$\begin{array}{l} 3402 \times 125 \\ \hline 425\,250 \\ \hline \ \ 70{\cdot}875 \text{ zu } 6\,\% \\ \ \ 11{\cdot}812 \text{ „ } 1\,\% \\ \ \ \ \ 2{\cdot}953 \text{ „ } \tfrac{1}{4}\,\% \\ \hline \ \ 85{\cdot}640 \text{ fl.} \end{array}$$

9) Wie viel Zinsen geben 9110 fl. zu 5 % vom 2. Mai bis 5. October?

Vom 2. Mai bis 2. Oct. 150 Tage
„ 2. Oct. „ 15. „ 13 „
163 Tage

$$\begin{array}{l} 911\,0 \times 163 \\ 546\,60 \\ \ \ 27\,330 \\ \hline 1484{\cdot}930 \\ \hline \ \ 247{\cdot}488 \text{ zu } 6\,\% \\ -\ 41{\cdot}248 \text{ „ } 1\,\% \\ \hline \ \ 206{\cdot}240 \text{ fl.} \end{array}$$

10) Wie viel Zinsen bekommt man von 9217 fl. zu 3 % in 174 Tagen?

11) Wie viel Zinsen geben 8635 fl. 25 kr. zu $4\frac{1}{4}$ % in 223 Tagen?

12) Wie viel Zinsen geben zu 5 %
a) 5603 Thlr. in 37 Tagen?
b) 1983 Francs in 210 Tagen?
c) 705 Livres St. in 108 Tagen?

13) Wie viel betragen die Zinsen von 3765 fl.
a) für 49 Tage à 5 %?
b) für 85 Tage à $6\frac{1}{2}$ %?
c) für 103 Tage à 4 %?

14) Wie viel Zinsen geben 12425 fl. 68 kr. zu 4 % vom 1. August bis 5. April?

15) Wie groß sind die Zinsen von 4286 fl. 42 kr. zu 5 % vom 18. December bis 15. April?

16) Jemand hat zu beziehen:
die Zinsen von 3045 fl. zu 6 % für 233 Tage,
„ „ „ 2813 „ „ 5 % vom 17. April bis 22. Sept.,
„ „ „ 4008 „ „ $6\frac{3}{4}$ % „ 24. Mai „ 7. August;
wie groß ist der ganze Zinsenbetrag?

17) A hatte an B zu zahlen:

am 13.	April	387	fl.	87	kr.
„ 25.	Mai	1245	„	38	„
„ 2.	Juni	2008	„	48	„

Dagegen hatte B an A zu bezahlen:

am 20.	April	1533	fl.	63	kr.
„ 15.	Mai	2112	„	8	„
„ 20.	„	972	„	15	„

Am 30. Juni wird die Abrechnung gemacht; wie viel bleibt da B an A schuldig, wenn die Zinsen zu 5 % gerechnet werden?

18) Jemand kauft am 26. April 2000 fl. einheitliche Staatsschuld in Noten à 5 % verzinslich im Curse zu 64 (d. i. 100 fl. Nennwerth zu 64 fl. Bezahlung); wie viel muß er dafür bezahlen, wenn die Zinsen seit 1. Jänner zu vergüten sind und von denselben 16 % Steuer in Abzug gebracht werden?

19) Am 25. Jänner werden 5 Stück 1854er Lose im Curse zu 92 gekauft; wie viel muß dafür bezahlt werden, wenn die Zinsen seit 1. April des vorhergehenden Jahres rückständig sind? (Diese Anlehensloſe lauten auf 250 fl. C. M. und werden zu 4 % mit 20 % Steuerabzug verzinset.)

2. Berechnung des Capitals.

§. 64.

Es sei das Capital C zu finden, welches zu P % in J Jahren Z fl. Zinsen bringt. Man hat

100 fl. Cap. 1 Jahr P fl. Zins
C „ „ J „ Z „ „

$$C : 100 = 1 : J$$
$$\underline{\; Z : P}$$
$$C = \frac{100\,Z}{P\,J}$$

Das Capital wird gefunden, indem man die 100fachen Zinsen durch das Product aus den Procenten und Jahren dividiert.

Aufgaben.

1) Welches Capital gibt zu 4 % in 4 Jahren 48 fl. Zins?

Im Kopfe. Um 4 fl. Zins in 1 Jahr zu erhalten, sind 100 fl. Capital nöthig; um 48 fl. Zins zu bekommen, braucht man 12mal so viel, also 1200 fl. Cap.; um 48 fl. Zins in 4 Jahren zu bekommen, braucht man nur $\frac{1}{4}$ von 1200 fl. = 300 fl. Cap.

Schriftlich. $\frac{48 . 100}{4 . 4} = 300$ fl. Cap.

2) Jemand bezieht in $5\frac{1}{4}$ Jahren 945 fl. Zinsen; wie groß ist das Capital bei 6 % Verzinsung?

Nach der Schlußrechnung:

6 fl. Zins in 1 J. von 100 fl. Cap.

1 „ „ „ 1 „ „ $\frac{100}{6}$ „ „

945 „ „ „ 1 „ „ $\frac{100.945}{6}$ „ „

945 „ „ „ ¼ „ „ $\frac{100.945.4}{6}$ „ „

945 „ „ „ 2¼ „ „ $\frac{100.945.4}{6.21} = 3000$ fl. Cap.

3) Wie groß ist das Capital, welches zu 5½ % jährlich 202 Thlr. 12 Sgr. Zins abwirft?
4) Ein Haus gibt im Durchschnitte jährlich 586 fl. reinen Ertrag; welchen Kaufpreis wird man dafür ansetzen, wenn man es zu 5 % verkaufen, d. i. für jede 5 fl. Reinertrag 100 fl. Kaufschilling oder Capital haben will?
5) Welches Capital gibt zu 4½ % in 1 Jahre 4 Monaten 234 Mark Zinsen?
6) Wie groß muß das Capital sein, damit es zu 5½ % in 2⅖ Jahren 738¾ fl. Zinsen bringt?
7) Welches Capital gibt zu 5½ % in 1 Jahr 9 Monaten 248 fl. 58 kr. Zinsen?
8) In 7½ Monaten erhält man 318 Thlr. 22½ Sgr. an 6 % Zinsen; wie groß ist das Capital?
9) Welches Capital gibt zu 4 % in 108 Tagen 108 Francs Zinsen?
10) Wie groß sind zwei gleiche Capitalien, die zu 4½ % und 5 % in einem Jahre 228 fl. Zins bringen?
11) Welches Capital bringt zu 6 % in 4 Jahren eben so viel Zins, wie ein Capital von 4560 fl. zu 5 % in 2½ Jahren? 2375

3. Berechnung der Zeit.

§. 65.

Es soll die Zeit J in Jahren bestimmt werden, durch welche ein Capital C zu P % anliegen muß, um Z fl. Zinsen zu geben. Man hat

100 fl. Cap. 1 Jahr P fl. Zins

C „ „ J „ Z „ „

$$J : 1 = 100 : C$$
$$Z : P$$
$$J = \frac{100\,Z}{C\,P}.$$

Die Anzahl Jahre wird gefunden, indem man die 100fachen Zinsen durch das Product aus dem Capital und Procent dividiert.

Aufgaben.

1) Wie lange muß ein Capital von 2480 fl. zu 6 % angelegt bleiben, damit es 744 fl. Zinsen einbringt?

$$\frac{744.100}{2480.6} = 5 \text{ Jahre};$$

oder nach der Schlußrechnung:

100 fl. Cap. geben 6 fl. Zins in 1 Jahr.
1 „ „ gibt 6 „ „ „ 100 „
2480 „ „ geben 6 „ „ „ $\frac{100}{2480}$ „
2480 „ „ „ 1 „ „ „ $\frac{100}{2480 \cdot 6}$ „
2480 „ „ „ 744 „ „ „ $\frac{100 \cdot 744}{2480 \cdot 6} = 5$ Jahr.

3) Wie lange muß ein Capital von $9824\frac{1}{3}$ Thlr. zu $5\frac{1}{8}$ % ausstehen, damit es 1132·82 Thlr. Zinsen einträgt?
4) Wie lange muß ein Capital von 5212 fl. 67 kr. anliegen, um zu $5\frac{1}{2}$ % 712 fl. 80 kr. Zinsen einzutragen?
5) In welcher Zeit erhält man von 9421 fl. 28 kr. zu $4\frac{1}{2}$ % 269 fl. 75 kr. Zins?
6) In wie viel Zeit geben 3855 fl. 67 kr. zu $5\frac{1}{2}$ % 721 fl. Zins?
7) In wie viel Zeit geben $1237\frac{1}{2}$ Mark Capital bei 6 % $84\frac{3}{20}$ Mark Zinsen?
8) 900 fl. Capital gaben zu 5 % 112 fl. 50 kr. Zinsen; wie lange sind dieselben ausgeliehen worden?
9) In welcher Zeit verdoppelt sich ein Capital bei 5 % Zinsen?
10) Wie lange muß ein Capital von 1863 Francs zu 5 % anliegen, damit es so viel Zins bringe, wie 3450 Francs zu $4\frac{1}{2}$ % in 9 Monaten?

4. Berechnung der Procente.

§. 66.

Ist zu finden, zu wie viel (P) % ein Capital von C fl. angelegt werden muß, damit es in J Jahren Z fl. Interessen einbringe, so hat man folgende zusammengesetzte Regeldetri:

P fl. Int. 100 fl. Cap. 1 Jahr
Z „ „ C „ „ J „

$$P : Z = 100 : C$$
$$1 : J$$
$$P = \frac{100\,Z}{CJ}.$$

Das Procent wird demnach gefunden, indem man die 100fachen Zinsen durch das Product aus dem Capitale und den Jahren dividiert.

Aufgaben.

1) Zu wie viel Procent muß ein Capital von 3445 fl. angelegt werden, um in 4 Jahren 689 fl. Zinsen zu geben?

Zu $\frac{689 \cdot 100}{3445 \cdot 4} = 5$ %;

oder nach der Schlußrechnung:

3445 fl. Cap. in 4 J. 689 fl. Zins
1 „ „ „ 4 „ $\frac{689}{3445}$ „ „
100 „ „ „ 4 „ $\frac{689 \cdot 100}{3445}$ „ „
100 „ „ „ 1 „ $\frac{689 \cdot 100}{3445 \cdot 4} = 5$ fl. Zins.

2) Ein Capital von 5500 fl. gibt jährlich 330 fl. Zins; zu wie viel Procent verzinset es sich? 6 %
3) Zu wie viel Procent verzinset sich ein Capital von 4755 fl. 25 kr., welches in 3 Jahren 3 Monaten 850 fl. Zinsen gibt?
4) Zu wie viel Procent ist ein Capital von 4585 fl. 52 kr. angelegt, wenn es in $3\frac{1}{4}$ Jahren $844\frac{1}{2}$ fl. Zinsen gibt?
5) Zu wie viel Procent tragen $328\frac{4}{5}$ Thlr. in $3\frac{2}{3}$ Jahren $46\frac{3}{4}$ Thlr. Zinsen?
6) Wie hoch sind 1080 fl. Capital verzinset worden, da sie in 3 Jahren 4 Monaten 144 fl. Zinsen getragen haben?
7) Zu wie viel Procent verinteressiert sich ein Capital von 6800 Francs, welches in zwei Jahren 4 Monaten 12 Tagen 844·9 Francs Zinsen gibt?
8) Ein Capital von 3150 fl. trägt in 8 Monaten $73\frac{1}{2}$ fl. Zinsen; zu wie viel Procent verzinset es sich?
9) Ein Kaufmann hat in seinem Geschäfte ein Capital von 18356 fl.; am Schlusse des Jahres stellt sich ein reiner Gewinn von 1376 fl. 70 kr. heraus; wie viel Procent hat ihm das Capital eingebracht?
10) Bei wie viel % würde man von einem Capitale in 5 Jahren 1533 fl. Zinsen erhalten, wenn dasselbe Capital bei 5 % in 4 Jahren 876 fl. Zinsen bringt?
11) Jemand lieh 460 fl. auf ein Jahr zu 5 %, mußte sich aber die Zinsen gleich bei Empfang des Capitals abziehen lassen; um wie viel wurde er dabei übervortheilt und wie viel Procent wurden eigentlich gerechnet?
12) Ein Haus wurde für 28500 fl. gekauft; der jährliche Miethzinsertrag ist 1980 fl.; zu wie viel Procent verzinset sich das Capital, wenn für Reparaturen 125 fl. in Anschlag gebracht werden, und wenn die Hauszinssteuer 25 % beträgt?

5. Berechnung des Werthes einer Geldsumme nach einer bestimmten Zeit.

§. 67.

Da hier der gegebene Betrag das reine Capital vorstellt und daher mit der Grundzahl 100 gleichartig ist, so wird, wie in den vorhergehenden Aufgaben, auch hier die Rechnung von Hundert angewendet (Arithmetik I. Abth., §§. 92 und 93).

Man berechnet nämlich entweder die Zinsen des Capitals für die bestimmte Zeit und addiert sie zu dem gegebenen Capitale; oder man sucht unmittelbar den ganzen Belauf, indem man zuerst ausmittelt, wie viel 100 fl. sammt den Zinsen nach jener Zeit betragen werden, und dann die Regeldetri oder die Schlußrechnung anwendet.

Aufgaben.

1) Jemand nimmt 3420 fl. zu 5 % auf 3 Jahre auf; wie viel wird er nach dieser Zeit an Capital und Zinsen zu zahlen haben?

3420 à 5 %		Capital	3420 fl.
171·00 für 1 Jahr		Zinsen für 3 Jahre	513 „
513 fl. für 3 Jahre		Belauf nach 3 Jahren	3933 „

oder

100 fl. geben zu 5 % in 3 Jahren 15 fl. Zins, folglich betragen 100 fl. sammt Zinsen nach 3 Jahren 115 fl.; man hat daher

100 fl. Cap. 115 fl. Belauf $x : 115 = 3420 : 100,$

3420 „ „ x „ „ $x = 3933$ fl.

2) Jemand hat 4500 Mark nach sechs Monaten sammt den Zinsen zu 6 % zu berichtigen; wie viel muß er zahlen?

		oder:
Cap.	4500 M.	100 Mark geben 103 Mark nach 6 Mon.
Zins für 6 Mon.	135 „	4500 „ „ $103 \times 45 = 4635$ Mark nach 6 M.
Belauf nach 6 Mon.	4635 M.	

3) Ein Kaufmann hatte eine Summe von 4108 fl. am 20. October zu zahlen, leistete aber die Zahlung erst am 31. December; wie viel hatte er da bei 6 % Zinsen zu bezahlen?

Schuld am 20. Oct.	4108 fl.
Zins für 71 Tage	48 „ 61 kr.
Belauf am 31. Dec.	4156 fl. 61 kr.

Nach der Regeldetri würde sich diese Aufgabe minder bequem ausführen lassen.

4) Jemand ist seit 6. Mai $750\frac{1}{3}$ Thlr. schuldig, die er zu $5\frac{1}{2}$ % verzinset; wie viel beträgt seine Schuld am 30. Juni?

5) Jemand nimmt 2345 fl. auf 42 Tage zu 7 % auf Zins; wie viel wird er nach Verlauf dieser Zeit zu zahlen haben?

6) Wenn 3050 fl. durch 2 Jahre 4 Monate zu $5\frac{1}{2}$ % ausstanden, wie viel muß nach dieser Zeit an Capital und Zins zurückgezahlt werden?

7) Für eine nach 2 Jahren fällige Schuld werden sogleich 360 fl. gezahlt; wie groß war dieselbe, wenn die Zinsen mit 5 % in Abzug gebracht wurden?

6. Berechnung des Werthes einer Geldsumme vor einer bestimmten Zeit.

§. 68.

Da die gegebene Geldsumme nicht ein reines, sondern ein um die Zinsen vermehrtes Capital vorstellt, das durch Abrechnung der darin enthaltenen Zahlen vermindert werden soll, das also nicht mit 100 selbst, sondern mit 100 vermehrt um die Procente für die entsprechende Zeit gleichartig ist, so muß hier die Rechnung auf Hundert angewendet werden (Arith. I. Abth., §. 92 und §. 94).

Aufgaben.

1) Für ein Capital, welches durch 3 Jahre zu $5\frac{1}{2}$ % ausstand, erhält man an Capital und Zinsen 5359 fl.; wie groß sind die Zinsen, und wie groß ist das Capital?

Die Procente für 3 Jahre betragen $16\frac{1}{2}$; man hat also

$116\frac{1}{2}$ fl. Cap. mit Zins $16\frac{1}{2}$ fl. Zins $x : 16\frac{1}{2} = 5359 : 116\frac{1}{2}$

5359 „ „ „ „ x „ „ $x = 759$ fl. Zins.

Capital mit Zins	5359 fl.
Zins	759 „
Capital	4600 fl.

oder
100 fl. betragen sammt den $5\frac{1}{2}$ % Zinsen nach 3 Jahren
$116\frac{1}{2}$ fl.; man hat daher nach der Schlußrechnung:

$116\frac{1}{2}$ fl. Cap. mit Zins enthalten 100 fl. Cap.
233 „ „ „ „ „ 200 „ „
1 „ „ „ „ enthält $\frac{200}{233}$ „ „
5359 „ „ „ „ enthalten $\frac{200 . 5359}{233} = 4600$ fl. Cap.

2) Jemand hat nach 4 Monaten 2620 fl. zu bezahlen; er wünscht aber seine Schuld contant, d. i. sogleich zu berichtigen; wie viel wird die contante Zahlung betragen, wenn man die Abzugszinsen, den Rabatt, zu 6 % rechnet?

100 fl. geben in 4 Mon. 2 fl. Zins; 100 fl. contant sind somit nach 4 Monaten 102 fl. werth, und man hat:

100 fl. cont. 102 fl. nach 4 M.
x „ 2620 „

$x : 100 = 2620 : 102,$
$x = 2568\cdot63$ fl.

3) Wie viel sind 850 Thlr., welche nach 2 Jahren bezahlt werden sollen, bei 5 % Rabatt jetzt werth?

4) Bei dem Kaufe eines Ackers wird bestimmt, daß von der Kaufsumme 600 fl. sogleich, die übrigen 636 fl. aber nach 1 Jahre gezahlt werden sollen; der Käufer zahlt jedoch auch diese sogleich und erhält 6 % Rabatt; wie viel hat er zusammen bar zu zahlen?

5) A soll an B nach 5 Jahren 1245 fl. bezahlen; wie viel hätte er bei $5\frac{1}{4}$ % Zins nach 2 Jahren zu zahlen?

6) Ein Wechsel von 4003 Mark, welcher nach 42 Tagen fällig ist, wird heute mit 6 % Discont pro anno verkauft; wie viel beträgt a) der Discont, b) der discontierte Werth des Wechsels? (Arithmetik I. Abth., §. 94, Aufgaben 26, 29 und 30.)

Der Discont sollte richtig auf Hundert gerechnet werden; Kaufleute rechnen jedoch den Discont bei Wechseln, wie auch den Sconto bei Waarenbeträgen immer vom Hundert.

7) Bei einem nach 3 Monaten zahlbaren Waarenbetrage von 895 fl. 38 kr. wird bei contanter Bezahlung ein Sconto von $1\frac{1}{2}$ % (für 3 Monate) bewilligt; wie groß ist a) der Sconto, b) die contante Zahlung?

Die Terminrechnung.

§. 69.

Häufig tritt der Fall ein, daß unverzinsliche Geldsummen, die nach und nach in bestimmten Zeitfristen oder Terminen gezahlt werden sollen, auf einmal, oder daß Geldsummen, die zu bestimmten Terminen zahlbar sind, zu anderen, als den festgesetzten Terminen abgetragen werden. Die Bestimmung der Zeitpunkte, zu denen dieß ohne Nachtheil sowohl des Schuldners als des Gläubigers geschehen kann, lehrt die Terminrechnung.

Wenn mehrere Theilzahlungen, die zu verschiedenen Zeiten zahlbar sind, auf einmal berichtigt werden sollen, so heißt der Zeitpunkt, wann die Gesammtzahlung zu leisten ist, der mittlere Zahlungstermin.

Wie der mittlere Termin gefunden werde, soll an folgendem Beispiele erläutert werden:

Jemand ist 6000 fl. schuldig, und verpflichtet sich, 2000 fl. nach 2 Monaten, 2500 fl. nach 4 Monaten und 1500 fl. nach 10 Monaten zu bezahlen; wann wird die Zahlung erfolgen müssen, wenn er die ganze Summe auf einmal abtragen will?

Bei der bedungenen Zahlungsweise hat der Schuldner den Vortheil, von den einzelnen Theilcapitalien die Zinsen bis zu ihrem Verfallstermine, somit die Zinsen von 2000 fl. durch 2 Monate, von 2500 fl. durch 4 Monate und von 1500 fl. durch 10 Monate zu genießen.

Es geben aber bei demselben Procent

2000 fl. Cap. in 2 Mon.	eben so viel Zinsen als	4000 fl. Cap. in 1 Mon.
2500 „ „ „ 4 „		10000 „ „ „ 1 „
1500 „ „ „ 10 „		15000 „ „ „ 1 „
6000 fl. Cap.		29000 fl. Cap. in 1 Mon.

Eben so viel Zinsen, als 29000 fl. in 1 Monate geben, muß der Schuldner, damit er keinen Nachtheil habe, auch genießen, wenn er die ganze Schuld auf einmal entrichten soll. Um daher den mittleren Zahlungstermin zu bestimmen, muß man fragen: In wie viel Monaten geben 6000 fl. eben so viel Zinsen als 29000 fl. in einem Monate? Diese Frage führt auf die Proportion

$$x \text{ Mon.} : 1 \text{ Mon.} = 29000 : 6000,$$

woraus

$$x = \frac{29000}{6000} = \frac{29}{6} = 4\tfrac{5}{6} \text{ Mon.}$$

folgt.

Daraus ergibt sich für die Bestimmung des mittleren Zahlungstermins folgendes Verfahren:

1. Man multipliciert jede Terminzahlung mit der Zeit, nach welcher sie geleistet werden soll.

2. Man addiert sowohl die Terminzahlungen, als die erhaltenen Producte, und dividiert die zweite Summe durch die erste; der Quotient zeigt den mittleren Termin an.

Aufgaben.

1) Eine Summe von 10000 fl. ist in 4 Raten zu bezahlen, und zwar: 3000 fl. nach 4 Monaten, 2500 fl. nach 6 Monaten, 2000 fl. nach 8 Monaten und der Rest nach 1 Jahre; wenn nun die ganze Summe auf einmal erlegt wird, wann soll dieses geschehen?

	3000 fl. nach	4 Mon.	= 1 2000
	2500 „ „	6 „	= 1 5000
	2000 „ „	8 „	= 1 6000
Rest	2500 „ „	12 „	= 3 0000
	10000		7·3000 = 7 Monate 9 Tage.

Die Gesammtzahlung wird demnach nach 7 Monaten 9 Tagen zu erfolgen haben.

Um sich von der Richtigkeit zu überzeugen, untersuche man, ob der Schuldner wirklich bei der Gesammtzahlung denselben Vortheil hat, als bei den ratenweisen Zahlungen, wenn man irgend ein Procent, z. B. 5 % annimmt.

Bei den ratenweisen Zahlungen genießt der Schuldner

die Zinsen von	3000 fl.	durch	4 Monate	=	50 fl. — kr.,
" " "	2500 "	"	6 "	=	62 " 50 "
" " "	2000 "	"	8 "	=	66 " 67 "
" " "	2500 "	"	12 "	=	125 " — "
				zusammen	304 fl. 17 kr.

Berichtiget der Schuldner die ganze Summe von 10000 fl. nach 7 Monaten 9 Tagen, so genießt er dabei an Interessen auch 304 fl. 17 kr. Der Schuldner hat also bei dieser Zahlungsweise weder einen Vortheil noch einen Nachtheil, woraus von selbst folgt, daß auch der Gläubiger dabei weder gewinnt noch verliert.

2) Jemand ist vertragsmäßig verpflichtet, 12000 Francs sogleich, 9000 Francs nach 4 Monaten, 9000 Francs nach 8 Monaten, 9000 Francs nach 12 Monaten und 9000 Francs nach 16 Monaten zu zahlen; wann wird die Zahlung geschehen müssen, wenn sie auf einmal geleistet werden soll?

12000 × 0	4 × 0	= 0
9000 × 4	3 × 4	= 12
9000 × 8	3 × 8	= 24
9000 × 12	3 × 12	= 36
9000 × 16	3 × 16	= 48
	16	120

120 : 16 = $7\frac{1}{2}$ Monat. — Antwort: nach $7\frac{1}{2}$ Monaten.

3) Jemand ist verpflichtet, 1200 fl. so zu zahlen, daß er je nach 3 Monaten 300 fl. abtrage; wann müßte er die ganze Summe auf einmal entrichten?

300 fl.	nach	3 Mon.	= 900 fl.
300 "	"	6 "	= 1800 "
300 "	"	9 "	= 2700 "
300 "	"	12 "	= 3600 "
1200			9000

Nach 9000 : 1200 = $7\frac{1}{2}$ Monaten.

Wenn die Terminalzahlungen gleich groß sind, so erhält man den mittleren Zahlungstermin kürzer, wenn man nur die Zeiten addiert und die Summe derselben durch die Anzahl der Termine dividiert; also

$$3 + 6 + 9 + 12 = 30, \qquad \frac{30}{4} = 7\tfrac{1}{2} \text{ Monate.}$$

4) Ein Capital von 2800 Rubel soll zu vier gleichen Theilen, nach je 4 Monaten zahlbar, abgetragen werden; nach wie viel Monaten fällt der mittlere Zahlungstermin des ganzen Capitals?

5) Jemand hat 20000 fl. so zu entrichten, daß er 4000 fl. sogleich, 4000 fl. nach 3 Monaten, 5000 fl. nach 6 Monaten und den Rest nach 10 Monaten bezahlt; er wünscht nun die ganze Schuld auf einmal zu tilgen; nach wie viel Monaten wird dieses geschehen müssen?

6) A schuldet an einen Fabrikanten drei Posten, nämlich 300 Thlr. bar, 460 Thlr. nach 7 Monaten und 500 Thlr. nach 10 Monaten; wann könnte A die Zahlung in einer Summe leisten?

7) Jemand kauft einen Acker um 6000 fl., wovon er 1500 fl. nach 4 Monaten, 1000 fl. nach 6 Monaten, 2000 fl. nach 9 Monaten, und den Rest nach 1 Jahre bezahlen soll. Wann kann er die ganze Summe auf einmal erlegen?

8) Von einer Schuld soll die Hälfte sogleich, $\frac{1}{3}$ nach $1\frac{1}{2}$ Jahren, der Rest 'aber nach 3 Jahren bezahlt werden. Es steht jedoch dem Schuldner frei, die ganze Schuld auf einmal zu zahlen; wann müßte dies geschehen?

9) Wann müssen 1800 fl. auf einmal bezahlt werden, wenn man 300 fl. nach 1 Jahr, 400 fl. nach $1\frac{1}{4}$ Jahr, 500 fl. nach $2\frac{1}{2}$ Jahren und den Rest nach $3\frac{1}{3}$ Jahren ohne Zins zu zahlen schuldig ist?

10) Jemand hat 1000 fl. sogleich, 1050 fl. nach 2 Monaten, 1100 fl. nach 4 Monaten, 1150 fl. nach 6 Monaten, 1200 fl. nach 8 Monaten, 1250 fl. nach 10 Monaten zu zahlen; wann muß die Zahlung geschehen, wenn die Summe aller jener Terminzahlungen auf einmal erlegt werden soll?

11) A hat an B drei Capitalien zu zahlen: 1600 fl. am 1. Juli, 1400 fl. am 1. September, 1000 fl. am 1. November; wann kann er die drei Capitalien zugleich zahlen?
Als Ausgangstermin wird der 1. Juli angenommen.

12) A hat nach 10 Monaten 1500 fl. zu zahlen; er zahlt schon nach 2 Mon. 600 fl. und nach weiteren 5 Mon. 400 fl.; wann hat er dann den Rest zu zahlen?

A darf benutzen:	1500 fl.	10 Mon.	=	15000 fl.	1 Mon.
er benutzt:	600 fl.	2 Mon.	=	1200 fl.	1 Mon.
	400 „	7 „	=	2800 „	1 „
	1000 fl.			4000 „	1 „
hat noch zu benutzen:	500 fl.	x Mon.	=	11000 fl.	1 Mon.

11000 : 500 = 22 Monate.

Der Rest von 500 fl. wird also nach 22 Monaten, von Beginne an gerechnet, zu zahlen sein.

13) A hat nach 2 Jahren 2000 fl. zu zahlen; er zahlt aber 800 fl. nach 1 Jahre; wie lange darf er den Rest behalten?

14) Jemand ist 300 fl. nach 4, und 500 fl. nach 5 Jahren zu zahlen schuldig; er zahlt 300 fl. schon nach 2 Jahren; wann werden dann die 500 fl. fällig sein?

15) A hat nach 4 Monaten 500 fl., 2 Monate später 600 fl. und weitere 2 Monate später 700 fl. abzutragen; wenn er nun nach 3 Monaten (vom Beginne an) 400 fl. und 4 Monate später 900 fl. zahlt, wie lange darf er noch den Rest benützen?

III. Die Gesellschaftsrechnung.

§. 70.

Die *Gesellschaftsrechnung* wird angewendet, wenn eine Zahl in mehrere Theile so getheilt werden soll, daß diese Theile in einem bestimmten Verhältnisse stehen. Die Zahlen, durch welche dieses Verhältnis ausgedrückt wird, heißen die *Verhältniszahlen.*

Z. B. zu einem Handelsgeschäfte verbinden sich drei Personen; A legt 8500 fl., B 9800 fl., C 10000 fl. in den Handelsfond; wenn nun der ganze Gewinn 3400 fl. beträgt, wie viel davon gebührt einem jeden? — Hier muß der Gewinn verhältnismäßig nach den Einlagen getheilt werden; diese Aufgabe gehört also zur Gesellschaftsrechnung, und zwar bilden die Einlagen 8500, 9800, 10000 die Verhältniszahlen.

Kommt in einer Aufgabe nur *eine Reihe* von Verhältniszahlen vor, so nennt man die Gesellschaftsrechnung eine *einfache*; werden aber *mehrere Reihen* von Verhältnissen gegeben, so heißt das Rechnungsverfahren die *zusammengesetzte* Gesellschaftsrechnung.

Die Gesellschaftsrechnung kommt bei Handelsgesellschaften zur Theilung des Gewinnes, ferner bei Bankerotten, Erbschaften, Schiffsantheilen, Steuervertheilungen, Vermischungen und verschiedenen anderen Geschäften in Anwendung.

§. 71.

Es sei folgende Aufgabe zu lösen:

640 fl. sind unter drei Personen A, B, C nach dem Verhältnisse der Zahlen 9, 7 und 4 zu theilen; wie viel entfällt auf jede Person?

Im Kopfe. Auf A kommen 9, auf B 7 und auf C 4, also auf alle zusammen 20 gleiche Theile; der 20ste Theil von 640 fl. sind 32 fl.; somit bekommt

A 9mal 33 fl. = 288 fl.,
B 7mal 32 fl. = 224 fl.,
C 4mal 32 fl. = 128 fl.

Auf denselben Schlüssen beruht auch die schriftliche Rechnung:

9	32 fl. × 9 = 288 fl.	bekommt A
7	32 fl. × 7 = 224 „	„ B
4	32 fl. × 4 = 128 „	„ C
640 fl. : 20 = 32 fl.	640 fl.	

Bei der *einfachen Gesellschaftsrechnung* hat man daher auf folgende Art zu verfahren:

1. Man schreibe die Verhältniszahlen unter einander. Sind sie Brüche, so multipliciere man sie alle mit dem kleinsten gemeinschaftlichen Nenner; haben alle Verhältniszahlen ein gemeinschaftliches Maß, so kürze man sie dadurch ab.

2. Die auf die einfachste Form gebrachten Verhältniszahlen werden addiert.

3. Man dividiere die zu vertheilende Zahl durch die Summe der

Verhältniszahlen, und multipliciere den erhaltenen Quotienten nach und nach mit jeder Verhältniszahl; die Producte sind die gesuchten Theile.

Die vorige Aufgabe kann auch durch wiederholte Anwendung der Regeldetri gelöst werden; man hat nämlich

$$x : 640 = 9 : 20, \qquad x = 288 \text{ fl.};$$
$$y : 640 = 7 : 20, \qquad y = 224 \text{ fl.};$$
$$z : 640 = 4 : 20, \qquad z = 128 \text{ fl.}$$

Aufgaben.

1) Zur Bereitung einer Art des Schießpulvers nimmt man: 75 Theile Salpeter, 13 Theile Kohlen und 12 Theile Schwefel; wie viel von jedem dieser Bestandtheile wird zu 800 Kilogr. Schießpulver erfordert?

Salpeter 75;	8 Kil. × 75 =	600 Kil.
Kohlen 13;	8 Kil. × 13 =	104 „
Schwefel 12;	8 Kil. × 12 =	96 „
800 Kil. : 100 = 8 Kil.		800 Kil.

2) Drei Personen treten zu einem Handelsgeschäfte zusammen, und zwar gibt A 2800 fl., B 3600 fl. und C 4000 fl.; sie gewinnen damit 1300 fl., wie viel von diesem Gewinne entfällt auf jede der drei Personen?

28~~00~~	7	50 fl. × 7 = 350 fl.	gewinnt A
36~~00~~	9	50 fl. × 9 = 450 „	„ B
40~~00~~	10	50 fl. × 10 = 500 „	„ C
1300 fl. : 26 = 50 fl.		1300 fl.	ganzer Gewinn.

3) Vier Personen treten zum Betriebe eines Geschäftes zusammen, und zwar A mit einer Einlage von 4500 Francs, B mit 5400 Francs, C mit 6000 Francs, D mit 9600 Francs, wenn nun das Geschäft einen Gewinn von 4248 Francs abwirft, wie viel kommt auf jeden Theilnehmer?

4) Ein Vermögen von 1440 fl. soll unter 4 Gläubiger nach Verhältnis ihrer Forderungen vertheilt werden; wenn nun A 300 fl., B 400 fl., C 430 fl. und D 470 fl. zu fordern hat, wie viel bekommt jeder?

5) Zum Ankauf eines Creditloses gibt A 60 fl., B 50 fl. und C 40 fl.; das Los macht einen Treffer von 20000 fl.; wie viel erhält jeder?

6) Ein Bezirk hat 4 Gemeinden, von denen A 2845 fl. 47 kr., B 1748 fl. 62 kr., C 2106 fl. 48 kr., D 3019 fl. 88 kr. Steuer zahlt; wenn nun dieser Bezirk eine besondere Zahlung von 548 fl. zu leisten hat, wie viel wird jede Gemeinde im Verhältnisse der Steuerquote zu entrichten haben?

7) Ein Kaufmann ist schuldig: an A 2000 fl., an B 3200 fl., an C 1200 fl., an D 2800 fl., an E 4600 fl.; sein Vermögen besteht aber nur in 8625 fl.; wie viel wird jeder Gläubiger bei der Theilung erhalten und wie viel Procent verliert jeder?

8) Wie viel Silber und Kupfer enthält ein Silberbarren, welcher 7 Kilogr. wiegt und 750 Tausendtheile fein ist?

9) Zu Porzellan nimmt man 25 Theile Thon, 2 Theile Kies, 1 Theil Gyps; wie viel von jedem dieser Stoffe braucht man zu einer Masse von 105 Kilogramm?

10) Sechs Personen kaufen ein Grundstück von 2600 Ar; A gibt dazu 180, B 243, C 288, D 189, E 300 und F 360 fl.; wie viel Ar erhält jeder auf seinen Antheil?

11) Für die Versendung von 2133 Kilogr. Caffee, 1735 Kil. Zucker und 923 Kil. Pfeffer werden 65 fl. 30 kr. Fracht gezahlt; wie viel kommt auf jeden dieser Artikel?

12) Es sollen 5610 Mark nach dem Verhältnisse der Zahlen $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$ unter A, B, C, D vertheilt werden.

A $\frac{1}{2}$	6;	$170 \times 6 = 1020$ Mark bekommt	A
B $\frac{2}{3}$	8;	$170 \times 8 = 1360$ " "	B
C $\frac{3}{4}$	9;	$170 \times 9 = 1530$ " "	C
D $\frac{5}{6}$	10;	$170 \times 10 = 1700$ " "	D
$5610 : 33 = 170$		5610 Mark zusammen.	

13) Man theile die Zahl 3555 im Verhältnisse der Zahlen $\frac{1}{3}$. $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{7}$, 1.

14) Bei guter rother Tinte rechnet man auf 1 Liter Weinessig $1\frac{1}{4}$ Dekagr. Alaun, 20 Dekagr. Fernambuk, $3\frac{1}{8}$ Dekagr. arabischen Gummi; wollte man nun aus 2 Kilogr. 15 Dekagr. dieser trockenen Mischung rothe Tinte bereiten, wie viel von jedem der drei letzteren Bestandtheile müßte genommen, und wie viel Weinessig dazu gesetzt werden?

15) Ein Schnittwaarenhändler hat 6 Stück Tuch von derselben Güte gekauft und für sämmtliche Stücke 852 fl. bezahlt. Das erste hält 48 Meter, das zweite $52\frac{1}{2}$, das dritte $51\frac{1}{4}$, das vierte $58\frac{3}{4}$, das fünfte 60 und das sechste $54\frac{1}{2}$ Meter; wie viel kostet jedes Stück?

16) Zu einem Brückenbaue, der 5241 fl. 35 kr. kostet, sollen drei Gemeinden beitragen, die Gemeinde A ist von der Brücke 1 Kilom., B 2 und C 3 Kilom. weit entfernt; wie viel wird jede Gemeinde beisteuern, wenn die Zahlungen im umgekehrten Verhältnisse der Entfernungen, also nach den Verhältniszahlen 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ zu geschehen haben?

17) Unter 5 Beamte, von denen A 1200 fl., B 1000 fl., C 900 fl. D 750 fl., E 650 fl. Gehalt bezieht, sollen 2041 fl. 50 kr. Gratification nach dem umgekehrten Verhältnisse der Gehalte vertheilt werden; wie viel erhält jeder?

18) Jemand hinterläßt ein Vermögen von 15845 fl., welches unter seine drei Erben so vertheilt werden soll, daß A 2mal so viel als B und B 3mal so viel als C bekommt; wie viel bekommt jeder Erbe?

So oft C 1 fl. erhält, bekommt B 3 fl. und A 6 fl.; die Erbtheile von A, B und C stehen also im Verhältnisse 6 : 3 : 1.

19) Drei Personen haben 1170 Lire unter einander zu theilen; wie viel erhält jede Person, wenn B doppelt so viel als A, und C 3mal so viel als B bekommt?

20) Drei Personen sollen 2050 fl. so unter einander theilen, daß A so oft 3 fl. als B 4 fl., C aber so oft 5 fl. als B 3 fl. erhält; wie viel bekommt jede Person?
21) Fünf Personen sollen eine Erbschaft von 20045 Francs so unter einander theilen, das sich der Antheil einer jeden Person zu dem der nächstfolgenden wie 2 : 3 verhält; wie viel kommt auf jede Person?
22) Drei Personen erhalten 1160 fl.; davon soll A 3mal so viel als B, und B 2mal so viel als C und noch 40 fl. haben; wie viel bekommt jeder?
23) Zu einem Geschäfte gibt A 1250 fl., B 2000 fl., C 2750 fl., D 3000 fl. Wenn 1260 fl. gewonnen werden, und A außer seinem verhältnismäßigen Antheile wegen seiner besonderen Dienstleistung noch 5 % des Gewinnes erhält; wie viel kommt auf jeden?
24) Drei Personen sollen eine Summe von 190 Gulden so theilen, daß A $\frac{1}{2}$ weniger 35 fl., B $\frac{1}{8}$ weniger 40 fl., C $\frac{1}{4}$ weniger 24 fl. erhält; wie viel bekommt jeder?
25) Drei Kaufleute legen zu einem gemeinschaftlichen Geschäfte Geld zusammen, und zwar A 450 fl., B 560 fl. und C 640 fl. Sie gewinnen damit 25 fl. weniger als 20 % von der Einlage; wie viel gewinnt jeder?
26) Eine Erbschaft von 9000 fl. soll unter 4 Personen so vertheilt werden, daß A $\frac{1}{3}$, B $\frac{1}{4}$, C $\frac{1}{5}$ und D den Rest erhält. Vor der Theilung stirbt jedoch B und die übrigen drei theilen nun noch den Antheil des B im Verhältnisse ihrer Antheile. Wie viel bekommt jeder?
27) Zu Neusilber nimmt man 55·4 Theile Kupfer, 29·1 Theile Zink und 17·5 Theile Nickel; wie viel von jedem dieser Metalle ist nöthig, um 600 Kilogr. Neusilber darzustellen, wenn beim Zusammenschmelzen $1\frac{1}{2}$ % verloren geht?
28) Drei Kaufleute kaufen eine Partie Waare und verkaufen dieselbe mit 15 % Gewinn, den sie nach Verhältnis ihrer Einlage unter sich theilen; A erhielt vom Gewinn 210 fl., B 350 fl. und C 280 fl.; wie viel hat jeder eingelegt?

§. 72.

Bei der zusammengesetzten Gesellschaftsrechnung, in welcher mehrere Reihen von Verhältniszahlen angegeben werden, hängen die einzelnen Theile von den Producten der darauf bezüglichen Verhältnisse ab, wodurch jede zusammengesetzte Gesellschaftsrechnung auf eine einfache zurückgeführt werden kann.

Wenn z. B. zu einem Handelsfonde A 13000 fl. durch 4 Monate, B aber 10000 fl. durch 6 Monate hergibt, und dabei ein Gewinn von 5000 fl. erzielt wird, so ist dieser Gewinn nach Verhältnis der Einlagen und zugleich nach Verhältnis der Zeit zu theilen. Allein da es gleich viel ist,

ob A	13000 fl.	durch	4 Monate,	oder	52000 fl.	durch	1 Monat,
„ B	10000 „	„	6 „	„	60000 „	„	1 „

zur Benützung überläßt, so müssen auch in beiden Fällen auf A und B dieselben Antheile am Gewinne entfallen. Weil nun im zweiten Falle die Zeit der Benützung dieselbe ist, so wird der Gewinn nur nach Verhältnis der Einlagen, d. i. der Producte 52000 und 60000 unter A und B zu vertheilen sein; diese Zahlen bilden sonach die Verhältniszahlen zu einer einfachen Gesellschaftsrechnung.

Bei der zusammengesetzten Gesellschaftsrechnung ist daher folgendes Verfahren anzuwenden:

1. Man schreibe die Verhältniszahlen, welche auf denselben Theil Bezug haben, neben einander.

2. Man multipliciere die neben einander stehenden Verhältniszahlen mit einander.

3. Die erhaltenen Producte betrachte man als Verhältniszahlen der einfachen Gesellschaftsrechnung, nach welcher dann die weitere Auflösung erfolgt.

Aufgaben.

1) Zu einem Geschäfte vereinigen sich drei Personen: A gibt 8200 fl. auf 5 Monate, B 10500 fl. auf 4 Monate, C 12000 fl. auf 3 Monate her; das Geschäft bringt einen Gewinn von 4522 fl.; wie viel davon wird jede der 3 Personen erhalten?

A	8200 × 5	410	38 fl. × 41 = 1558 fl.	erhält	A
B	10500 × 4	420	38 „ × 42 = 1596 „	„	B
C	12000 × 3	360	38 „ × 36 = 1368 „	„	C
	4522 fl. :	119 = 38 fl.	4522 fl.		

2) Ein Fuhrmann verpflichtet sich, für einen Lohn von $133\frac{1}{2}$ fl. drei Ladungen, und zwar 1·6 Tonnen 105 Kilom. weit, 1·5 Tonnen 140 Kilom. weit und 1·4 Tonnen 175 Kilom. weit zu führen; was gebührt ihm für jede einzelne Ladung?

3) A, B und C übernehmen die Ausbesserung einer Bezirksstraße, und zwar schickt A vier Arbeiter durch 6 Tage, B 3 Arbeiter durch 9 Tage und C 4 Arbeiter durch 8 Tage zur Arbeit; wenn sie nun für diese Arbeit eine Vergütung von 103 fl. 75 kr. erhalten, wie viel gebührt davon einem jeden?

A	4 Arbeiter	auf 6 Tage	= 24 Arb.	auf 1 Tag
B	3 „	„ 9 „	= 27 „	„ 1 „
C	4 „	„ 8 „	= 32 „	„ 1 „
		zusammen	83 Arb.	auf 1 Tag.

Wenn 83 Arbeiter auf 1 Tag 103·75 fl. verdienen,
so verdient 1 „ „ 1 „ 1·25 „

Es erhält also A . .	1·25 fl. × 24	=	30 fl.
B . .	1·25 „ × 27	=	33·75 „
C . .	1·25 „ × 32	=	40 „
			103·75 fl.

4) Eine Arbeit war durch 94 Arbeiter in drei Abtheilungen zu 24, 40 und 30 Mann für die Accordsumme von 844 fl. übernommen

worden; wenn nun die Abtheilung A 14, die Abtheilung B 12, die Abtheilung C 15 Tage gearbeitet hatte, wie viel erhielt jede von obiger Summe?

5) Zu einem Geschäfte, welches einen Fond von 9000 fl. forderte, gab A $\frac{1}{3}$ auf 10 Monate, B $\frac{4}{9}$ auf 8 Monate, C den Rest auf 6 Monate; der Rechnungsabschluß zeigte einen Gewinn von 629 fl.; wie mußte dieser vertheilt werden?

6) Bei einem Brückenbaue waren 3 Gemeinden beschäftigt; aus der Gemeinde A arbeiteten 22 Mann durch 10 Tage zu 9 Stunden, aus der Gemeinde B 18 Mann durch 9 Tage zu 10 Stunden, aus der Gemeinde C 15 Mann durch 5 Tage zu 12 Stunden täglich; wenn nun dafür ein Lohn von 400 fl. verabfolgt wird, wie viel wird jede einzelne Gemeinde bekommen?

7) Es sollen in möglichst kurzer Zeit 1000 Hektoliter Getreide auf 3 Mühlen gemahlen werden, von denen A in 5 Stunden 12 Hektoliter, B in 4 Stunden 15 Hektoliter, C in 2 Stunden 9 Hektoliter mahlt; wie viel Hektoliter sind jeder dieser Mühlen zuzutheilen?

8) A beginnt am 1. Jänner ein Geschäft mit 8000 fl. Capital, am 1. Mai tritt B mit 5000 fl., und am 1. Juli C mit 6000 fl. bei; wenn sich nun am Ende December ein Gewinn von 1180 fl. 33 kr. ergibt, wie viel gebührt davon jedem der Theilnehmer?

9) Zu einem gemeinschaftlichen Geschäfte gibt A 2300 fl. und nach 5 Monaten noch 900 fl., B 2400 fl. und nach 7 Monaten noch 1100 fl., C 1900 fl. und nach 8 Monaten noch 1300 fl.; wie ist am Ende des Jahres der Gewinn von 679 fl. 60 kr. zu vertheilen?

10) Drei Personen beschließen auf zwei Jahre ein Geschäft in Gemeinschaft zu führen; A legt dazu 4800 fl., B ebenfalls 4800 fl. und C 6000 fl. ein. Nach 4 Monaten nimmt A 800 fl., nach 8 Monaten B 300 fl. und nach 10 Monaten C 1000 fl. zurück; am Schlusse theilten sie einen Gewinn von 1415 fl.; wie viel gebührt jedem?

IV. Die Alligationsrechnung.

§. 73.

Die Alligations- oder Vermischungsrechnung wird angewendet, wenn man das Verhältnis finden will, in welchem zwei oder mehrere gleichartige Dinge von verschiedenem Gehalte mit einander verbunden werden müssen, um eine Mittelgattung von bestimmtem Gehalte zu bekommen.

Die Gattung, welche man beim Mischen erhalten will, muß immer besser als die geringste und geringer als die beste der Gattungen sein, die man zur Mischung verwendet. Wasser und Kupfer werden, wenn man sie zur Herabsetzung des Gehaltes des Weines und der edlen Metalle damit verbindet, ihrem Werthe nach gleich Null gesetzt und nur der Menge nach berücksichtigt.

Bei den meisten Aufgaben muß, nachdem man durch die Alligationsrechnung das Verhältnis der Mischung gefunden hat, die weitere Auflösung nach der Gesellschaftsrechnung vorgenommen werden.

§. 74.

Wenn man aus zwei gegebenen Gattungen eine Mittelgattung erhalten will, so muß bei der Mischung das, was der geringeren Gattung bis zur Mittelgattung abgeht, die bessere durch ihren Ueberschuß ersetzen. Z. B. Jemand hat von einer Waare zwei Gattungen, das Kilogramm zu 40 kr. und zu 52 kr.; er will aus beiden eine Mittelgattung, von der das Kilogr. 45 kr. kosten soll, mischen; in welchem Verhältnisse muß er die beiden Gattungen mischen?

Geringere Gatt. à Kil.	40 kr.	Bessere Gatt. à Kil.	52 kr.
Mittelgattung „ „	45 „	Mittelgattung „ „	45 „
Abgang an 1 Kil.	5 kr.	Ueberschuß an 1 Kil.	7 kr.
Abgang an 7 Kil.	35 kr.	Ueberschuß an 5 Kil.	35 kr.

Werden daher je 7 Kilogr. der geringern Gattung mit 5 Kilogr. der besseren zur Mischung verwendet, so gleichen sich Abgang und Ueberschuß gegenseitig aus. Es zeigt demnach der Abgang oder Ueberschuß bei dem Werthe der einen Gattung die Zahl der gleichen Theile an, welche von der andern Gattung zu nehmen sind, also die Verhältniszahl der Mischung für diese Gattung. Man hat

geringere Gattung		40	5 Abgang	7 Theile
Mittelgattung	45			
Bessere Gattung		52	7 Uebersch.	5 Theile.

Das Verhältnis der Mischung ist also 7 : 5.

Wenn daher nur zwei Gattungen unter einander gemischt werden sollen, um daraus eine bestimmte Mittelgattung zu erhalten, so beobachte man folgendes Verfahren:

1. Man schreibe die beiden zu vermischenden Gattungen untereinander und setze links dazwischen die Mittelgattung.

2. Man subtrahiere die geringere Gattung von der Mittelgattung und setze die Differenz rechts neben die bessere Gattung; dann subtrahiere man die Mittelgattung von der besseren und schreibe die Differenz rechts neben die geringere Gattung. Diese Differenzen sind die Verhältniszahlen der Mischung für die nebenstehenden Gattungen.

Aufgaben.

1) Ein Wirth will zweierlei Weine, den einen zu 30 kr. das Liter, den andern zu 52 kr. das Liter so mischen, daß ein Liter der Mischung 40 kr. werth ist; in welchem Verhältnisse wird die Mischung geschehen müssen?

$$40\begin{array}{c|c|c} 30 & 12 & 6 \\ 52 & 10 & 5 \end{array}$$

Die Differenz zwischen 52 und 40 wird neben 30, die Differenz zwischen 40 und 30 neben 52 hingeschrieben. Die Verhältniszahlen der Mischung sind also 12 und 10 oder abgekürzt 6 und 5; d. h. der Wirth muß von dem schlechteren Weine 6 Theile, von dem besseren aber 5 eben solche Theile zur Mischung verwenden.

Wollte er z. B. 30 Liter Wein zu 30 kr. nehmen, so müßten 25 Liter zu 52 kr. dazu gemischt werden, weil aus $x : 30 = 5 : 6$ sich $x = 25$ ergibt. Daß 1 Liter dieser Mischung wirklich 40 kr. werth ist, findet man durch die Durchschnittsrechnung; es ist

30 Liter zu 30 kr. =	900 kr.
25 „ „ 52 „ =	1300 „
55 Liter der Mischung	2200 kr.
daher 1 „ „ „	40 kr.

2) Wie viel Kupfer muß zu Golde, welches 900 Tausendtheile fein ist, zugesetzt werden, wenn ein Feingehalt von 750 Tausendtheilen erreicht werden soll?

3) Ein Gemenge von zweierlei Weizen, nämlich das Hektoliter zu 9 fl. und $7\frac{1}{2}$ fl., wurde zu $8\frac{1}{2}$ fl. verkauft; in welchem Verhältnisse war der Weizen gemengt, wenn an jedem Hektoliter $\frac{2}{5}$ fl. gewonnen wurden?

4) Ein Kaufmann will aus Caffee im Preise zu 116 kr. und zu 104 kr. 18 Kilogr. à 112 kr. mischen; wie viel Kilogr. muß er von jeder Sorte nehmen?

$$112\,\frac{116}{104}\left|\begin{matrix}8\\4\end{matrix}\right|\begin{matrix}2\\1\end{matrix}$$

Die Menge von 18 Kil. muß also im Verhältnisse 2 : 1 getheilt werden; man hat nun nach der Gesellschaftsrechnung:

2; 6 Kil. × 2 = 12 Kil. von der Sorte zu 116 kr.
1; 6 Kil. × 1 = 6 „ „ „ „ „ 104 „

18 Kil. : 3 = 6 Kil.

Um sich von der Richtigkeit zu überzeugen, wendet man die Durchschnittsrechnung an; man erhält

12 Kil. zu 116 kr. =	1392 kr.
6 „ „ 104 „ =	624 „
18 Kil.	2016 „
daher 1 Kil. . . .	112 kr.

5) Ein Wirth hat zweierlei Weine, das Hektoliter zu 15 fl. und zu 24 fl.; er will durch Mischung dieser beiden Gattungen 10 Hektoliter zu 21 fl. erhalten; wie viel muß er von jeder Gattung dazu verwenden?

6) Zwei Gattungen Reis, zu 24 kr. und zu 30 kr. das Kilogr., sollen so gemischt werden, daß man 100 Kilogr. zu 28 kr. erhält; wie viel von jeder Gattung muß dazu genommen werden?

7) Ein Essighändler will seinen zu starken Essig mit Wasser verdünnen; unverdünnt würde er das Liter um 28 kr. verkaufen; wenn er $12\frac{1}{2}$ Hektoliter verdünnten Essig erhalten und das Liter davon um 21 kr. verkaufen will, wie viel Essig und wie viel Wasser muß er zu der Mischung nehmen?

8) Wie muß man Spiritus à 80 % (80 Grad)*) und 70 % mischen, um 20 Hektoliter à 78 % zu erhalten?

9) Wie viel feines Silber und wie viel Kupfer muß man nehmen, um $8\frac{3}{4}$ Kilogr. Silber, das 520 Tausendtheile fein ist, zu bekommen?

*) Spiritus von 80 % enthält unter 100 Raumtheilen 80 Theile Weingeist (Alkohol) und 20 Theile Wasser.

10) Ein Silberarbeiter hat 6 Kilogr. feines Silber; wie viel Kupfer muß er damit legieren, um Silber von $812\frac{1}{2}$ Tausendtheilen Feingehalt zu bekommen?

$$812\tfrac{1}{2}\;\begin{array}{r|r|r} 1000 & 812\frac{1}{2} & 13 \\ \cline{1-1} 0 & 187\frac{1}{2} & 3 \end{array}$$

daher $x : 6 = 3 : 13$, woraus $x = 1\frac{5}{13}$ Kil. Kupfer.

Probe. 6 Kil. à 1000 Tsdth. = 6000 Tsdth. fein Silber
$1\frac{5}{13}$ „ à 0 „ = 0 „ „ „
$7\frac{5}{13}$ Kil. . . . . . 6000 Tsdth. fein Silber
1 „ . . . . . . $812\frac{1}{2}$ Tsdth. fein Silber.

11) Wie viel Kupfer muß zu 3 Kil. Silber à 750 Tausendtheile fein genommen werden, damit Silber à 520 Tausendtheile fein daraus entstehe?

12) Wie viel Kupfer muß zu 3 Kil. Gold, das 850 Tausendtheile fein ist, zugesetzt werden, damit ein Feingehalt von 700 Tausendtheilen erreicht werde?

13) Ein Goldarbeiter hat 2 Mark 16karatigen Goldes; zur Verfertigung von goldenen Ketten braucht er $18\frac{5}{12}$karatiges Gold; wenn er nun dieses durch Zusatz von reinem Golde erhalten will, wie viel feines Gold muß er zusetzen?

14) Ein Silberarbeiter hat 30 Loth 12löthiges und 24 Loth 10löthiges Silber; wie viel feines Silber muß er dazu legieren, um 13löthiges Silber zu erhalten?

15) Wie viel Kilogr. à 18 kr. muß man zu 564 Kil. à 32 kr. setzen, damit das Kil. der Mischung auf 24 kr. komme?

16) Ein Gastwirth will ein Hektoliter Wein, von dem er das Liter zu 48 kr. verkauft, so mit Wasser verdünnen, daß er das Liter zu 40 kr. weggeben kann; wie viel Wasser muß er zusetzen?

§. 75.

Häufig soll man auch mehr als zwei Gattungen zur Mischung verwenden und zu diesem Ende das Mischungsverhältnis ausmitteln. Die Auflösung dieser Aufgabe ist unbestimmt; es lassen sich nämlich verschiedene Zusammensetzungen vornehmen, welche alle auf die verlangte Mittelgattung führen.

Sollen mehr als zwei Gattungen mit einander gemischt werden, um eine Mittelgattung zu erhalten, so geht man dabei von dem Grundsatze aus: wenn man immer eine bessere und eine geringere Gattung so zusammensetzt, daß man die verlangte Mittelgattung erhält, so wird gewiß auch durch alle diese Mischungen zusammen genommen dieselbe Mittelgattung zum Vorschein kommen. Daraus ergibt sich zur Auffindung des Mischungsverhältnisses folgendes Verfahren:

1. Man schreibe die zu vermischenden Gattungen in der Ordnung von der besten zur geringsten oder umgekehrt unter einander; links wird die Mittelgattung gesetzt.

2. Man nehme nach und nach immer eine bessere und eine geringere Gattung und vergleiche sie mit der Mittelgattung; die Differenz

zwischen der Mittelgattung und der geringeren setze man rechts neben der besseren Gattung, die Differenz zwischen der mittleren und besseren Gattung schreibe man rechts neben der geringeren an. So fahre man fort, bis jede Gattung mit einer anderen verbunden erscheint. Oefters wird eine Gattung auch mit mehreren anderen zusammengesetzt, und zwar dann, wenn die Anzahl der besseren Gattungen jener der geringeren nicht gleich ist, oder wenn man von einer Gattung eine größere Menge zur Mischung verwenden will; in solchen Fällen kommen dann neben jener Gattung mehrere Differenzen zu stehen. Die Differenz, welche neben jeder Gattung steht, oder wenn mehrere Differenzen da sind, ihre Summe, ist die Verhältniszahl der Mischung für die betreffende Gattung.

Aufgaben.

1) Aus drei Sorten einer Waare à 48, 36 und 24 kr. das Kilogr. soll eine andere Sorte, wovon das Kilogr. 40 kr. kostet, gemischt werden; wie viel Theile wird man von jeder Sorte nehmen?

40	48	4 + 16	20	5
	36	8	8	2
	24	8	8	2

Hier verbindet man zuerst die Sorten à 48 kr. und 36 kr., dann die Sorten à 48 kr. und 24 kr., und erhält so die Verhältniszahlen 20, 8 und 8, oder 5, 2 und 2.

Wenn man z. B. 5 Kilogr. à 48 kr. und 2 Kilogr. à 36 kr. nimmt, so muß man 2 Kilogr. à 24 kr. dazu setzen, um eine Mischung, wovon das Kilogr. 40 kr. kostet, zu erhalten; wirklich ist

5 Kilogramm	à 48 kr.	=	240 kr.
2 "	à 36 "	=	72 "
2 "	à 24 "	=	48 "
9 Kilogr. Mischung		=	360 kr.
also 1 "	"	=	40 "

2) Ein Silberarbeiter braucht 650 tausendtheiliges Silber; er hat aber nur feines und 720 tausendtheiliges Silber und muß daher auch dazu mischen; in welchem Verhältnisse wird er die drei Bestandtheile Kupfer zur Legirung verwenden?

3) Man will 4 Kilogr. Gold à 750 Tausendtheile erhalten; wie viel Gold à 900, 720, 640 Tausendtheile kann man dazu legieren?

4) Aus 8löthigem, 10löthigem und feinem Silber sollen 15 Mark 13löthiges Silber legiert werden; wie viel Mark sind von jeder Sorte zu nehmen?

5) Ein Wirth will viererlei Weine, das Hektoliter zu 15 fl., zu 18 fl., zu 24 fl. und zu 28 fl., so mischen, daß er 38 Hektoliter zu 20 fl. erhalte; wie viel Hektoliter kann er von jeder Sorte dazu nehmen?

a) Man verbinde die beste und schlechteste, und dann die beiden mittleren Gattungen.

20	A 15	8 × 2 =	16 Hektol.	à 15 fl. =	240 fl.
	B 18	4 × 2 =	8 "	à 18 " =	144 "
	C 24	2 × 2 =	4 "	à 24 " =	96 "
	D 28	5 × 2 =	10 "	à 28 " =	280 "
		38 : 19 = 2	38 Hektol.	. . .	760 fl.
			1 Hektol. kostet wirklich		20 "

b) Man verbinde A mit C, B mit D.

	A 15	$4 \times 2 =$	8 Hektol.	à 15 fl.	= 120 fl.	
	B 18	$8 \times 2 =$	16 „	à 18 „	= 288 „	
20	C 24	$5 \times 2 =$	10 „	à 24 „	= 240 „	
	D 28	$2 \times 2 =$	4 „	à 28 „	= 112 „	
		$38 : 19 = 2$	38 Hektol.	. . .	760 fl.	
			also kostet	1 Hektol.	20 fl.	

c) Man verbinde A mit C, A mit D, B mit C.

	A 15	$4 + 8$	$12 \times 1\frac{5}{14} =$	$16\frac{4}{14}$ Hektol.	zu 15 fl.	$= 244\frac{4}{14}$ fl.	
	B 18	4	$4 \times 1\frac{5}{14} =$	$5\frac{6}{14}$ „	„ 18 „	$= 97\frac{10}{14}$ „	
20	C 24	$5 + 2$	$7 \times 1\frac{5}{14} =$	$9\frac{7}{14}$ „	„ 24 „	= 228 „	
	D 28	5	$5 \times 1\frac{5}{14} =$	$6\frac{11}{14}$ „	„ 28 „	= 190 „	
			$38 : 28 = 1\frac{5}{14}$	38 Hekt.	. . . .	760 „	

Welche Verbindungen lassen sich hier noch vornehmen und in welchem Falle wäre die eine oder die andere vorzuziehen.

6) Aus Silber von 720, 800, 940 Tausendtheilen Feingehalt und aus Kupfer sollen 10 Pfund Silber à 760 Tausendtheile legiert werden; wie viel Pfund wird man von jeder Sorte dazu nehmen können?

7) Ein Kaufmann hat fünf verschiedene Sorten einer Waare, das Kilogr. zu 60 kr., zu 68 kr,., zu 72 kr., zu 75 kr., zu 80 kr.; welche Verbindungsarten lassen sich vornehmen, um eine Sorte zu erhalten, wovon das Kilogr. 70 kr. kostet?

8) Aus Spiritus à 92 %, 70 %, 65 % und Wasser soll man 94 Liter Spiritus à 80 % mischen; wie viel von jeder Sorte wird man dazu nehmen?

V. Die Kettenrechnung.

§. 76.

Es gibt Aufgaben, zu deren Auflösung solche Mittelbestimmungen erforderlich sind, daß jede derselben zwei am Werthe gleiche Größen enthält, die einzeln entweder mit einer Größe einer anderen Mittelbestimmung oder der Aufgabe selbst gleichnamig sind. Die Rechnungsart, durch welche solche Aufgaben gelöset werden, heißt wegen der innigen Verkettung der dabei vorkommenden Größen die **Kettenrechnung**.

Z. B. Wie viel fl. ö. W. kosten 15 Buch feines Schreibpapier, wovon 3 Rieß mit 64 Francs bezahlt werden?

Zur Lösung dieser Aufgabe sind folgende Mittelbestimmungen nöthig:

1 Rieß = 20 Buch, und
100 Francs = 45 fl. ö. W. (Curswerth).

Die Aufgabe läßt sich nun in folgende drei Aufgaben zerlegen:

a) Wie viel Buch sind 3 Rieß, da 1 Rieß 20 Buch hat?

y Buch	3 Rieß		$y : 20 = 3 : 1$
20 „	1 „		also $y = 60$ Buch.

b) Wie viel fl. ö. W. sind 64 Francs, wenn 100 Francs 45 fl. ö. W. betragen?

z fl. ö. W.	64 Francs		$z : 45 = 64 : 100$
45 „ „ „	100 „		also $z = 28\frac{4}{5}$ fl.

c) Wie viel fl. ö. W. kosten 15 Buch Papier, wenn 60 Buch $28\frac{4}{5}$ fl. ö. W. kosten?

x fl. ö. W.	15 Buch		$x : 28\frac{4}{5} = 15 : 60$
$28\frac{4}{5}$ „ „ „	60 „		also $x = 7\frac{1}{5}$ fl.

Eine solche wiederholte Anwendung der einfachen Regeldetri führt zwar zum gewünschten Resultate, sie ist aber zu weitläufig; daher soll ein Verfahren abgeleitet werden, nach welchem die Aufgaben der Kettenrechnung mittelst eines einzigen Ansatzes aufgelöset werden.

Stellt man die drei erhaltenen Proportionen zusammen, indem man jedoch in der ersten die beiden Verhältnisse verwechselt, und in der dritten statt der gefundenen Zahlen $28\frac{4}{5}$ und 60 die Buchstaben z und y beibehält, so hat man

$$\left.\begin{array}{l} 3 : 1 = y : 20 \\ z : 45 = 64 : 100 \\ x : z = 15 : y \end{array}\right\}$$ Durch Multiplication der gleichstelligen Glieder erhält man wieder eine Proportion.

$$x.z.3 : z.1.45 = y.64.15 : y.20.100.$$

Kürzt man das erste Verhältnis durch z, und das zweite durch y ab, so ist

$$x.3 : 1.45 = 64.15 : 20.100.$$

Das Product der äußeren Glieder ist gleich dem Producte der inneren Glieder, daher

$$x.20.3.100 = 15.1.64.45,$$

und

$$x = \frac{15 \,.\, 1 \,.\, 64 \,.\, 45}{20 \,.\, 3 \,.\, 100}.$$

Um den Zusammenhang dieses Ausdruckes mit den Zahlen der Aufgabe zu ersehen, bringe man diese auf folgende Form:

fl. ö. W.	x	kosten	15 Buch,
wenn Buch	20	. .	1 Rieß machen,
wenn Rieß	3	. .	64 Francs kosten,
und wenn Francs	100	. .	45 fl. ö. W. betragen?

Vergleicht man nun diesen Ansatz mit dem oben für x gefundenen Ausdrucke, so sieht man sogleich, daß x gleich ist dem Producte aller im Ansatze rechts stehenden Zahlen dividiert durch das Product aller links vorkommenden bekannten Zahlen. Würde man zwischen beiden Reihen von Zahlen einen aufrechten Strich ziehen, so könnte der Werth von x nach der Strichmethode gefunden werden.

Hiernach ergibt sich für die Kettenrechnung folgendes Verfahren:

1. Man ziehe einen aufrechten Strich und schreibe x mit seiner Benennung links, die bekannte Größe aber, deren Betrag gesucht wird und die daher mit x gleichen Werth hat, rechts des Striches.

2. Darunter setze man alle Mittelbestimmungen, und zwar fange man jedesmal links mit einer Größe an, welche mit der nächstvorhergehenden Größe auf der rechten Seite völlig gleichen Namen und gleiche Bedeutung hat, und rechts neben jeder Größe kommt diejenige Größe, welche mit ihr gleichen Werth hat. Kommt eine mehrnamige Zahl vor, so muß sie in eine einnamige verwandelt werden. — Wenn alle Mittelbestimmungen in die Kette aufgenommen wurden, was man daran erkennt, daß die letzte Größe rechts mit x gleiches Namens und gleicher Bedeutung ist, so ist der Ansatz vollendet.
3. Die Auflösung erfolgt nach der Strichmethode.

§. 77.

Aufgaben.

1) Wie viel kosten 3 Tonnen einer Waare, wenn man $2\frac{1}{4}$ Kilogramm für 72 kr. bekommt?

fl. x	3 Tonnen
1	1000 Kilogr.
$2\frac{1}{4}$	72 kr.
100	1 fl.; woraus x = 960 fl.

Man setzt x mit dem Namen, hier Gulden, links, und rechts die Größe 3 Tonnen, deren Werth man sucht. Da man mit Tonnen aufhört, so muß die folgende Mittelbestimmung mit Tonnen anfangen; dieses geschieht, indem man folgert: wenn 1 Tonne ... 1000 Kilogr. enthält. Nun bildet man den Uebergang von der Waare zum Preise dadurch, daß man sagt: wenn $2\frac{1}{4}$ Kilogr. ... 72 kr. kosten. Hier hört man mit Kreuzern auf; x bedeutet aber Gulden, darum zieht man noch die Mittelbestimmung zu Hilfe: wenn 100 kr. ... 1 fl. geben. Da nun die letzte Größe rechts mit x gleichen Namen hat, so ist der Ansatz fertig. Zur Auflösung desselben bedient man sich der Strichmethode.

2) Ein Landmann gibt einem Wirthe $13\frac{1}{2}$ Hektoliter Weizen à $8\frac{2}{5}$ fl.; wie viel Wein muß ihm dafür der Wirth geben, das Hektoliter zu 18 fl. gerechnet?

3) Wie viel Londoner Ctr. machen 2534 Kilogr., wenn 100 Lond. Pfd. = $45\frac{9}{25}$ Kilogr. und wenn 1 Lond. Ctr. 112 Lond. Pfund enthält?

4) Eine russ. Dessetine enthält $109\frac{1}{4}$, ein schweiz. Juchart 36 Ar; wie viel russ. Dessetinen hält ein Grundstück, welches nach schweiz. Maße $187\frac{3}{4}$ Juchart groß ist?

5) Wie viele Kilometer gehen auf die österreichische Meile von 4000 Wiener Klafter, wenn 1 Wiener Fuß 0·316081 Meter enthält?

6) Jemand kauft 354 Kilogr. für 118 fl. ein; wie theuer wird er 1 Kil. verkaufen, wenn er dabei 20 % gewinnen will, d. i. wenn er die um 100 fl. eingekaufte Waare um 120 fl. verkaufen will?

kr. Verkauf x	1 Kilogr.
354	118 fl. Eink.
100	120 fl. Verk.
1	100 kr. Verk.
x = ..	

7) Jemand kauft 4 Stück Tuch à 32 Meter für 430 fl., wie theuer muß er das Meter verkaufen, wenn er 10 % gewinnen will?

8) Wenn man 923 Kilogr. einer Waare für 876 fl. einkauft und je 100 Kilogr. für 87 fl. verkauft; hat man dabei Gewinn oder Verlust und zwar um wie viel Procent?

Um den Gewinn oder Verlust in Procenten zu bestimmen, fängt man die Kette mit der Frage an: x fl. Einnahme beim Verkaufe geben 100 fl. Ausgabe beim Einkaufe? Ist das Resultat der Kettenrechnung größer als 100, so hat man Gewinn, und zwar zeigt die Zahl, um welche die gefundene Einnahme größer als 100 ist, die Gewinnprocente an; kommt weniger als 100 heraus, so hat man Verlust, und zwar zeigt die Zahl, um welche die gefundene Einnahme kleiner als 100 ist, die Verlustprocente an; kommt gerade 100 heraus, so hat man weder Gewinn noch Verlust.

x fl. Einnahme	100 fl. Ausgabe	
876	923 Kilogr.	100
100	87 fl. Einnahme	90·63

x = 90·63 fl. Einnahme, also 9·37 % Verlust.

9) Jemand kauft 80 Hektoliter Wein à 14 fl. und verkauft dann das Liter à 16 kr.; wie viel Procent gewinnt oder verliert er?

10) Wenn ein Ballen Schreibpapier um 36 fl. gekauft und das Buch um 21 kr. verkauft wird, wie viel Procent gewinnt man?

11) Ein Kaufmann verkaufte 153 Meter Tuch für 439 fl. und gewann daran 7 %; wie viel kostete ein Meter im Einkaufe?

12) A erhält 2158 Kilogr. Brutto von einer Ware, die Tara beträgt 7 %, 1 Kilogr. Netto kommt auf 85 kr. zu stehen; wie viel hat A für diese Ware zu bezahlen?

13) Wie hoch kommt dem Landwirth ein Kilogr. Weizenbrot zu stehen, wenn 1 Hektol. Weizen 77 Kil. schwer ist, 100 Kil. Weizen 77 Kil. Mehl geben, aus 1 Kil. Mehl $1\frac{1}{4}$ Kil. Brot gebacken wird, und wenn der Preis des Weizens $8\frac{3}{10}$ fl. per Hektoliter ist?

14) Der Hamburger Centner hat 100 Hamburger Pfund, wovon jedes 0·5 Kilogramm enthält; wie viel Gulden österr. Währung kosten 100 Kilogr. einer Ware, wovon 3 Hamburger Centner $208\frac{1}{2}$ Mark Banco kosten, wenn man 100 Mark B. zu $86\frac{3}{4}$ fl. österr. Währ. rechnet?

15) In Spanien gilt die Fanega Weizen 42 Realen; wie viel in ö. W. kostet in demselben Verhältnis 1 Hektoliter? — 20 Fanegas = 11 Hektoliter; 20 Realen = 1 Duro; 45 fl. ö. W. = 21·127 Duros.

16) Wenn eine Eisenbahnschiene von 5 Meter Länge $125\frac{1}{2}$ Kilogr. wiegt und für 100 Kilogramm Schienen in Belgien $27\frac{6}{10}$ Francs bezahlt werden; wie viel fl. ö. W. kosten die für 1 Kilometer erforderlichen Schienen? — 100 Frcs. = 44 fl. ö. W.

17) Jemand kauft 24 Säcke Reis, von denen jeder 115 Kilogr. wiegt, und bezahlt je 100 Kilogr. mit $25\frac{1}{2}$ fl holländisch; wie viel Gulden ö. W. hat er dafür zu bezahlen, wenn 100 fl. holländ. = $94\frac{1}{2}$ fl. ö. W. gerechnet werden?

18) In Hamburg kostet 1 Hamb. Pfund Caffee $8\frac{1}{2}$ Schilling, wie hoch in österr. Währung kommen 500 Kilogr. wenn 2 Hamb.

Pfd. = 1 Kilogr. und 100 Mark = $83\frac{1}{2}$ fl. österr. Währ. angenommen werden, wenn endlich 1 Mark 16 Schilling enthält?

19) Ein Quintal einer Waare kostet in Marseille 84 Francs; wie theuer in ö. W. kommen demnach 2318 Kilogr. in Triest bei 12 % Transportkosten und 10 % Gewinn? — Ein Quintal = 48·95 Kilogr.; 100 Francs = 45 fl. ö. W.

20) Ein Weinhändler bezieht 450 Flaschen Rheinwein, welche ihm sammt Spesen mit 774 fl. südd. Währung berechnet werden; wie theuer in ö. W muß er, um 25 % zu gewinnen, die Flasche verkaufen, wenn 100 fl. südd. W. = $94\frac{3}{5}$ fl. ö. W. sind?

21) Ein Silberbarren ist $14\frac{1}{2}$ Kilogr. schwer, und zwar enthält jedes Kilogr. 720 Tausendtheile fein Silber; wie viel ist der Silberbarren werth, wenn das Kilogr. fein Silber zu 90 fl. gerechnet wird?

22) Wie viel Kreuzer ö. W. gilt 1 Mark Banco, da $27\frac{3}{4}$ Mark Banco auf 1 Mark feines Silber à 233·855 Gramm gerechnet werden, und aus 500 Gramm feinen Silbers 45 fl. ö. W. geprägt werden?

23) Welchen Werth in österr. Währung hat der nordamerikanische Dollar, welcher $\frac{9}{10}$ feines Silber enthält und 26·729 Gramm wiegt?

24) Eine englische Krone à 5 Shilling wiegt $\frac{10}{11}$ Troy-Unzen und hat $\frac{37}{40}$ Feingehalt; wie viel ist sie in ö. W. werth, wenn 1 Troy-Pfund à 12 Unzen = $373\frac{1}{4}$ Gramm ist?

25) Wie viel Mark Hamburger Courant gehen auf 500 Gramm feinen Silbers, wenn 1 Mark 9·164 Gramm 750 Tausendtheile feines Silber enthält?

26) Wenn 1 Kilogr. Gold $15\frac{1}{2}$mal so viel werth ist als 1 Kilogr. Silber, welchen Werth in Gulden ö. W. hat ein neues Vierguldenstück, da aus 500 Gramm Gold, das $\frac{9}{10}$ fein ist, 155 Vierguldenstücke geprägt werden?

27) Man verwandle 100 preußische Friedrichsd'or nach ihrem inneren Geldwerthe in kais. Ducaten. — Aus einer kölnischen Mark Gold, $21\frac{2}{3}$ Karat fein, wurden 35 Friedrichsd'or geprägt; dagegen gehen von k. Dukaten auf eine kölnische Mark Gold, $23\frac{2}{3}$ Karat fein, 67 Stück.

28) Jemand verwechselt in Wien 312 Napoleonsd'or gegen Ducaten; wie viel Ducaten wird er erhalten, wenn 1 Napoleonsd'or = 20 Francs, 100 Francs = $44\frac{1}{2}$ fl. ö. W. gerechnet werden, und 1 Ducaten = $5\frac{1}{2}$ fl. ö. W. ist?

29) Wie viel in österr. Achtguldenstücken ist ein deutsches Zehnmarkstück werth, wenn aus 1 Pfund (500 Gramm) feines Gold $139\frac{1}{2}$ Zehnmarkstücke geprägt werden und 155 Achtguldenstücke 1 Kilogramm 900tausendtheiliges Gold enthalten?

30) Eine Maschine kostet in England 875 Pfund Sterling; die Spesen in London betragen 8 %, die Transport- und andere Kosten bis Wien 25 % vom Werthe der Maschine; wie hoch in ö. W. kommt die Maschine in Wien, wenn 10 Pfund Sterling = 112 fl. ö. W. gerechnet werden?

Zinseszinsrechnung.

§. 78.

Bei der Verzinsung von Capitalien geschieht es häufig, daß die Zinsen am Ende eines jeden ganzen oder halben Jahres zum Capitale geschlagen und mit diesem zugleich wieder verzinst werden; man sagt in diesem Falle: das Capital ist auf Zins von Zins oder auf Zinseszinsen angelegt. Die Zinseszinsen werden auch zusammengesetzte Interessen genannt, während die gewöhnlichen Interessen einfache heißen.

Um den Werth eines Geldbetrages nach einer bestimmten Zeit, während welcher die Zinsen nach einer bestimmten Periode wieder zum Capitale geschlagen und mit diesem verzinst werden, zu erhalten, könnte man den Zins für jede einzelne Periode berechnen und jedesmal zu dem Anfangscapital jener Periode addieren.

Z. B. Wie hoch werden 2000 fl. Capital nach 4 Jahren anwachsen, wenn man die 5 % Zinsen am Ende eines jeden Jahres zum Capital schlägt und von neuem verzinset?

Anfangscapital	fl.	2000
Zins des 1. Jahres	„	100
Capital zu Ende des 1. Jahres	fl.	2100
Zins des 2. Jahres	„	105
Capital zu Ende des 2. Jahres	fl.	2205
Zins des 3. Jahres	„	110·25
Capital zu Ende des 3. Jahres	fl.	2315·25
Zins des 4. Jahres	„	115·7625
Capital zu Ende des 4. Jahres	fl.	2431·0125 = 2431 fl. 1 kr.

Nach den einfachen Interessen wäre der Zins in 1 Jahre 100 fl., also in 4 Jahren 400 fl., während das Erträgnis nach Zinseszinsen 431 fl. 1 kr. ist; der Unterschied von 31 fl. 1 kr. geht also aus den Zinseszinsen hervor.

Da die vorhergehende Rechnung sehr weitläufig ist, so soll hier ein anderes kürzeres Verfahren entwickelt werden, nach welchem man das Anwachsen mittelst Zinseszinsen berechnen kann.

100 fl. am Anfange eines Jahres sind zu 5 % verzinset am Ende desselben Jahres 105 fl., also 1 fl. den 100sten Theil von 105, nämlich 1·05 fl. werth. Man hat daher für das frühere Beispiel folgende Kettenrechnung:

x fl. Werth am Ende des 4. Jahres	2000 fl. Anfangscapital
1	1·05 „ am Ende des 1. Jahres.
1	1·05 „ „ „ „ 2. „
1	1·05 „ „ „ „ 3. „
1	1·05 „ „ „ „ 4. „

$$x = 2000 \times 1{\cdot}05 \times 1{\cdot}05 \times 1{\cdot}05 \times 1{\cdot}05$$

oder $x = 2000 \times (1{\cdot}05)^4$.

Man muß also 1·05, d. i. die Zahl, welche gefunden wird, wenn man zu 100 das Procent 5 addiert und diese Summe 105 durch 100 dividiert, 4mal, d. i. so oftmal als Jahre da sind, als Factor setzen und dann das Anfangscapital damit multiplicieren.

$(1·05)^4$ gibt 1·215506 und

2000 × 1·215506 = 2431·012 = 2431 fl. 1 kr. wie oben.

Würde man die Zinsen nicht ganzjährig, sondern am Ende eines jeden halben Jahres zum Capitale schlagen, so hätte man, da 100 fl. nach einem halben Jahre 102·5 fl. werth sind, 1 fl. also den Werth von 1·025 fl. bekommt, folgende Kette:

x Werth am Ende des 8. Halbjahres	2000 fl. Anfangscapital
1	1·025 „ am Ende des 1. Halbj.
1	1·025 „ „ „ „ 2. „
1	1·025 „ „ „ „ 3. „
1	1·025 „ „ „ „ 4. „
1	1·025 „ „ „ „ 5. „
1	1·025 „ „ „ „ 6. „
1	1·025 „ „ „ „ 7. „
1	1·025 „ „ „ „ 8. „

$x = 2000 \times (1·025)^8.$

Hier ist also 1·25, d. i. die Zahl, welche erhalten wird, wenn man zu 100 das Procent 2·5 für ein halbes Jahr addiert und die Summe 102·5 durch 100 dividiert, zur 8ten, d. i. zur sovielten Potenz zu erheben, als Halbjahre da sind, und mit der so erhaltenen Zahl das Anfangscapital zu multiplicieren.

Die Zahlen $(1·05)^4$ und $(1·025)^8$ kann man Aufzinsungsfactoren nennen.

Um daher den Werth eines Capitals nach einer bestimmten Zeit, während welcher Zins von Zins gerechnet wird, zu finden, multipliciert man das gegebene Capital mit dem entsprechenden Aufzinsungsfactor. Es wird aber der entsprechende Aufzinsungsfactor berechnet, wenn man zu 100 das Procent für eine Zeitperiode addiert, diese Summe durch 100 dividiert und den Quotienten zur sovielten Potenz erhebt, als Zeitperioden da sind.

Zur Berechnung des Aufzinsungsfactors für 6 Perioden, wenn der Zinsfuß z. B. 4 % ist, hat man

1·04 × 1·04	1·124864 × 1·124864
416	4,6,8,4,2,1,1
(2) 1·0816 × 1·04	1·124864
43264	112486
(3) 1·124864	22497
	4499
	900
	68
	5

$(1·04)^6 = 1·265319.$

Die folgende Tabelle enthält die bereits ausgerechneten Aufzinsungsfactoren für 2, 3, 4, 5 Procent und 1, 2, 3, ... 29, 30 Zeitperioden.

Zeitperioden	2 %	3 %	4 %	5 %
1	1·02	1·03	1·04	1·05
2	1·0404	1·0609	1·0816	1·1025
3	1·061208	1·092727	1·124864	1·157625
4	1·082432	1·125509	1·169859	1·215506
5	1·104081	1·159274	1·216653	1·276282
6	1·126162	1·194052	1·265319	1·340096
7	1·148686	1·229874	1·315932	1·407100
8	1·171659	1·266770	1·368569	1·477455
9	1·195093	1·304773	1·423312	1·551328
10	1·218994	1·343916	1·480244	1·628895
11	1·243374	1·384234	1·539454	1·710339
12	1·268242	1·425761	1·601032	1·795856
13	1·293607	1·468534	1·665074	1·885649
14	1·319479	1·512560	1·731676	1·979932
15	1·345869	1·557967	1·800944	2·078928
16	1·372786	1·604706	1·872981	2·182875
17	1·400241	1·652848	1·947900	2·292018
18	1·428246	1·702433	2·025817	2·406619
19	1·456811	1·753506	2·106849	2·526950
20	1·485947	1·806111	2·191123	2·653298
21	1·515666	1·860295	2·278768	2·785963
22	1·545980	1·916103	2·369919	2·925261
23	1·576899	1·973587	2·464716	3·071524
24	1·608437	2·032794	2·563304	3·225100
25	1·640606	2·093778	2·665836	3·386355
26	1·673418	2·156591	2·772470	3·555673
27	1·706886	2·221289	2·883396	3·733456
28	1·741024	2·287928	2·998703	3·920129
29	1·775845	2·356566	3·118651	4·116136
30	1·811362	2·427262	3 243398	4·321942

§. 79.

Aufgaben.

1) Ein Capital von 5000 fl. ist zu 5 % Zinseszins angelegt; wie hoch wird es bei ganzjähriger Capitalisierung in 6 Jahren anwachsen?

Der Aufzinsungsfactor für 6 Zeitperioden von 5 % ist 1·340096; man hat daher

$$\begin{array}{r} 5000 \times 1{\cdot}340\,096 \\ \hline 6\,700{\cdot}480 \text{ fl.} = 6700 \text{ fl. } 48 \text{ kr.} \end{array}$$

2) Wie hoch wird ein zu 4 % Zins von Zins angelegtes Capital von 1234 Mark in 7 Jahren bei halbjähriger Capitalisation anwachsen?

Hier sind 14 Halbjahre und das halbjährige Procent, nämlich 2 % in Rechnung zu bringen; der entsprechende Aufzinsungsfactor ist 1·319479, und man hat:

$$\begin{array}{r} 1234 \times 1{\cdot}319\,479 \\ 4\,321 \\ \hline 1\,319\,479 \\ 263\,583 \\ 39\,896 \\ 5\,278 \\ \hline 1\,628\,237 \text{ Mark.} \end{array}$$

3) Wie viel werden 5800 fl. zu 3 % Zinseszins bei ganzjähriger Capitalisierung nach 20 Jahren werth sein?

$5800 \times 1{\cdot}806111 = 10475{\cdot}444 = 10475$ fl. 44 kr.

4) Ein Vater legt zu Gunsten seines jetzt 13jährigen Sohnes 2300 fl. in die Sparcasse ein, welche mit 4 % jährlich verzinst und wovon die Interessen halbjährig zum Capital geschlagen werden. Welchen Betrag wird der Sohn, wenn er das 24. Jahr erreicht hat, aus der Sparcasse beziehen?

Man hat hier 22 Halbjahre und 2 % halbjährig, daher

$2300 \times 1{\cdot}545980 = 3555{\cdot}754$ fl. $= 3555$ fl. 75 kr.

5) Jemand ist verpflichtet, 3000 fl. nach 1 Jahre, 2000 fl. nach 2 Jahren, 1000 fl. nach 3 Jahren und 4000 fl. nach 4 Jahren zu bezahlen; wie viel werden alle diese Beträge nach 4 Jahren werth sein, wenn man 5 % Zinseszins rechnet und wenn die Capitalisierung ganzjährig geschieht?

3000	fl.	nach	1	Jahre zahlbar,	sind	nach	4	Jahren	3472·875	fl.	werth,
2000	„	„	2	„	„	„	„	„	2205·000	„	„
1000	„	„	3	„	„	„	„	„	1050·000	„	„
4000	„	„	4	„	„	„	„	„	4000·000	„	„

ganzer Betrag nach 4 Jahren 10727·875 fl.
= 10727 fl. 88 kr.

6) Jemand legt durch 6 Jahre zu Anfang eines jeden derselben 325 fl. auf Zins von Zins; wie hoch wird das Capital bei ganzjähriger Capitalisation zu 4 % in jener Zeit anwachsen?

Da die erste Summe durch 6, die zweite durch 5, ... die sechste durch 1 Jahr anliegt, so hat man

1. Summe nach 6 Jahren	325 × 1·265319	
2. " " " "	325 × 1·216653	
3. " " " "	325 × 1·169859	
4. " " " "	325 × 1·124864	
5. " " " "	325 × 1·081600	
6. " " " "	325 × 1·040000	
Gesammtbetrag nach 6 Jahren	325 × 6·898295	= 2241·959 fl.
		= 2241 fl. 96 kr.

7) Eine Kirche legt für einen Neubau in eine Sparcasse 8480 fl. zu 4 % Zinseszinsen nieder. Zu welchem Betrage ist die Summe nach 15 Jahren angewachsen?

8) Welchen Werth hat ein Capital von 3758 Francs 40 Centimes bei 5 % Zinseszinsen nach 18 Jahren?

9) Ein Vater will seinem Sohne bei der Geburt ein Capital sichern, welches dem letzteren im 24. Lebensjahre ausgezahlt werden soll. Zu dem Ende legt er gleich jetzt den Betrag von 1250 fl. in eine Versicherungsanstalt, welche 4 % Zinsen rechnet. Welche Summe wird diese Anstalt, wenn die Zinsen jährlich zum Capitale geschlagen worden sind, dem Sohne auszuzahlen haben?

10) Die Seelenzahl einer Stadt betrug vor 8 Jahren 25360; wie groß ist sie gegenwärtig, wenn die Zunahme der Bevölkerung jährlich im Durchschnitte 2 % betrug?

11) Der Bestand eines Waldes ist gegenwärtig 9000 Klafter; wie groß wird derselbe bei einem jährlichen Zuwachs von 3 % nach 10 Jahren sein?

12) Jemand legt zu Anfang jedes halben Jahres durch 12 Jahre hinter einander 40 fl. in eine Sparcasse, bei welcher halbjährige Capitalisierung mit 2 % Statt findet; wie groß ist sein Ersparnis nach dieser Zeit?

13) Bei einem Hausverkaufe wird dem Käufer freigestellt, jetzt gleich 6000 fl. und das zweite und dritte Jahr zu derselben Zeit eine gleiche Summe zu erlegen, oder zur Zeit des letzten Termins eine Summe von 19000 fl. zu entrichten. Da der Käufer seine Gelder in seinem Geschäfte mit 5 % Nutzen verwenden kann, so möchte er wissen, auf welche Bedingungen er, um seinen Vortheil zu wahren, eingehen solle.

§. 80.

Um die umgekehrte Aufgabe zu lösen, wie nämlich der Werth eines Geldbetrages vor einer gewissen Zeit mit Rücksicht auf Zinseszinsen bestimmt wird, wird man wieder die Kettenrechnung zu Hilfe ziehen.

Man suche z. B. den Werth, den ein Betrag von 2000 fl. vor 3 Jahren hat, den Zins von Zins zu 4 % gerechnet, und zwar bei ganzjähriger Capitalisation. — 100 fl. sind nach einem Jahre 104 fl., daher 1 fl. den 100sten Theil von 104, d. i. 1·04 fl. werth; umgekehrt muß also der Werth von 1·04 fl. um 1 Jahr früher nur 1 fl. werth sein. Man hat daher die Kette:

x fl. Werth vor 3 Jahren	2000 fl. gegenwärtiger Werth
1·04	1 fl. Werth vor 1 Jahre
1·04	1 „ „ „ 2 Jahren
1·04	1 „ „ „ 3 „

$$\text{woraus } x = \frac{2000}{(1 \cdot 04)^3} = 2000 \cdot \frac{1}{(1 \cdot 04)^3}.$$

Es ist also 1 durch den Aufzinsungsfactor $(1 \cdot 04)^3$ zu dividieren und mit der dadurch erhaltenen Zahl der gegebene Geldbetrag 2000 zu multiplicieren.

Da $(1 \cdot 04)^3 = 1 \cdot 124864$ und somit $\frac{1}{(1 \cdot 04)^3} = 0 \cdot 888996$ ist, so hat man $x = 2000 \times 0 \cdot 888996 = 1777 \cdot 992$ fl. = 1777 fl. 99 kr.

Wäre hier die Capitalisation halbjährig vorausgesetzt worden, so hätte man nur das halbe Procent, also 2 %, nehmen, dagegen 1 durch $(1 \cdot 02)^6$, weil 6 halbe Jahre vorkommen, dividieren, und folglich 2000 mit $\frac{1}{(1 \cdot 02)^6}$ multiplicieren müssen.

Die Zahlen $\frac{1}{(1 \cdot 04)^3}$ und $\frac{1}{(1 \cdot 02)^6}$ sollen **Abzinsungsfactoren** heißen.

Um daher den Werth eines Geldbetrages vor einer bestimmten Zeit mit Rücksicht auf Zinseszinsen zu finden, multipliciert man jenen Betrag mit dem entsprechenden Abzinsungsfactor. Es wird aber dieser Abzinsungsfactor berechnet, wenn man 1 durch den entsprechenden Aufzinsungsfactor dividiert.

In der folgenden Tabelle erscheinen die Abzinsungsfactoren für 2, 3, 4, 5 Procent und 1, 2, 3, ... 29, 30 Zeitperioden bereits ausgerechnet.

Zeit-perioden	2 %	3 %	4 %	5 %
1	0·980392	0·970874	0·961539	0·952381
2	0·961169	0·942596	0·924556	0·907030
3	0·942322	0·915142	0·888996	0·863838
4	0·923845	0·888487	0·854804	0·822703
5	0·905731	0·862609	0·821927	0·883526
6	0·887971	0·837484	0·790315	0·746215
7	0·870560	0·813092	0·759918	0·710681
8	0·853491	0·789409	0·730690	0·676839
9	0·836755	0·766417	0·702587	0·644609
10	0·820349	0·744094	0·675564	0·613913
11	0·804263	0·722421	0·649581	0·584679
12	0·788493	0·701380	0·624597	0·556837
13	0·773033	0·680951	0·600574	0·530321
14	0·757875	0·661118	0·577475	0·505068
15	0·743015	0·641862	0·555265	0·481017
16	0·728446	0·623167	0·533908	0·458112
17	0·714162	0·605016	0·513373	0·436297
18	0·700159	0·587395	0·493628	0·415521
19	0·686431	0·570286	0·474642	0·395734
20	0·672971	0·553676	0·456387	0·376890
21	0·659776	0·537549	0·438834	0·358942
22	0·646839	0·521893	0·421955	0·341850
23	0·634156	0·506692	0·405726	0·325571
24	0·621722	0·491934	0·390122	0·310068
25	0·609531	0·477606	0·375117	0·295303
26	0·597579	0·463695	0·360689	0·281241
27	0·585862	0·450189	0·346817	0·267848
28	0·574375	0·437077	0·333478	0·255094
29	0·563112	0·424346	0·320651	0·242946
30	0·552071	0·411987	0·308319	0·231377

§. 81.

Aufgaben.

1) Wie viel sind 4000 fl. nach 5 Jahren zahlbar bei ganzjähriger Capitalisation zu 4 % Zinseszins gegenwärtig, d. i. um 5 Jahre früher, werth?

Für 5 Perioden und 4 % hat man den Abzinsungsfactor 0·821927, daher:

$$4000 \times 0·821927 = 3287·708 \text{ fl.} = 3287 \text{ fl. } 71 \text{ kr.}$$

2) Welchen Werth haben fl. 7310 „ 75 vor 15 Jahren, 5 % Zinseszins und ganzjährige Capitalisierung vorausgesetzt?

$7310 \cdot 75 \times 0 \cdot 481017 = 3516 \cdot 595$ fl. $=$ 3516 fl. 60 kr.

3) Wie viel Capital muß man zu 4 % Zins von Zins anlegen, damit es bei halbjähriger Verzinsung in 12 Jahren auf 5200 fl. anwachse?

Der Abzinsungsfactor für 24 Perioden und 2 % ist 0·621722, man hat daher

$5200 \times 0 \cdot 621722 = 3232 \cdot 954$ fl. $=$ 3232 fl. 95 kr.

4) Ein 60jähriger Mann will bei seinem Absterben seinem treuen Diener einen Betrag von 800 fl. versichern. Welche Einlage muß er in die Versorgungsanstalt machen, wenn diese ganzjährig zu 4 % capitalisiert?

Da die mittlere Lebensdauer eines 60jährigen Menschen 12 Jahre ist, so ist diese Aufgabe mit der folgenden gleichbedeutend: wie viel Capital muß man anlegen, damit es in 12 Jahren zu 4 % Zinseszins auf 800 fl. anwachse; oder welchen Werth haben 800 fl. vor 12 Jahren bei 4 % Zins von Zins? Man hat also?

$800 \times 0 \cdot 624597 = 499 \cdot 678$ fl. $=$ 499 fl. 68 kr. Einlage.

5) Zu einem Gute finden sich drei Käufer. A will 18000 fl. sogleich baar bezahlen; B bietet 20000 fl. an, aber so, daß er nur 10000 fl. sogleich, und die andere Hälfte erst nach 5 Jahren erlegen will; C bietet auch 20000 fl. und zwar 5000 fl. sogleich, 8000 fl. nach 3 Jahren und den Rest nach 4 Jahren zahlbar. Welcher von den drei Kauflustigen hat wohl am meisten angeboten, wenn man die Capitalisierung ganzjährig zu 5 % Zinseszins annimmt?

Hier muß man alle Zahlungen auf dieselbe Zeit reducieren; man sucht z. B. den gegenwärtigen Werth aller Anbote.

A bietet baar	sogleich	18000 fl.	
B bietet	sogleich	10000 fl.	
und 10000 fl. nach 5 Jahren, oder	„	7835 „	26 kr.
	zusammen sogleich	17835 fl.	36 kr.
C bietet	sogleich	5000 fl.	
8000 fl. nach 3 Jahren, oder	„	6910 „	70 kr.
7000 „ „ 4 „ „	„	5758 „	92 „
	zusammen sogleich	17669 fl.	62 kr.

A hat also das vortheilhafteste Anbot gemacht.

6) A will dem B eine Geldsumme geben, damit ihm dieser durch 5 Jahre am Ende eines jeden Jahres 586 fl. auszahle; wie groß wird jene Summe bei 4 % Zinseszins und ganzjähriger Capitalisierung sein müssen?

Hier muß man berechnen, wie viel der erste Jahresbetrag von 586 fl. um 1 Jahr früher, der zweite um 2 Jahre früher, ... der fünfte um 5 Jahre früher werth ist.

586 fl. um 1 Jahr früher	$= 586 \times 0{\cdot}961539$	
" " " 2 " "	$= 586 \times 0{\cdot}924556$	
" " " 3 " "	$= 586 \times 0{\cdot}888996$	
" " " 4 " "	$= 586 \times 0{\cdot}854804$	
" " " 5 " "	$= 586 \times 0{\cdot}821927$	
gegenwärtiger Gesammtwerth	$= 586 \times 4{\cdot}451822$	$= 2608{\cdot}768$ fl.
		$= 2608$ fl. 77 kr.

7) Welches Capital wächst bei 4 % Zinseszins nach 14 Jahren auf 3580 fl. an?

8) Ein Capital hat sich bei 4 % Zinseszins in 16 Jahren auf 36400 fl. vergrößert; wie viel betrug das ursprüngliche Capital?

9) Eine Stadt hat gegenwärtig 18350 Einwohner; wie groß war die Bevölkerung vor 12 Jahren bei einer jährlichen Zunahme von 2 %?

10) Man bietet für ein Gut 85000 fl. unter der Bedingung, daß dieser Kaufschilling erst nach 8 Jahren zu bezahlen sei; wie hoch ist, den Zinseszins zu 5 % gerechnet, dieses Anbot für den Augenblick anzuschlagen?

11) Wenn ein Vater seinem Kinde im 20sten Jahre eine Aussteuer von 3000 fl. dadurch sichern will, daß er gleich bei der Geburt in eine Versicherungsanstalt eine bestimmte Summe einlegt; wie hoch wird diese Summe sein müssen, wenn die Anstalt jährlich 4 % Zinseszinsen berechnet?

12) Jemand will durch 12 Jahre nach Ablauf jedes Jahres 850 fl. beziehen; welchen Betrag muß er dafür sogleich erlegen, wenn jeder Capitalsrest mit 5 % verzinset wird?

13) Jemand übernimmt ein Haus mit der Verpflichtung, dem bisherigen Besitzer 15 Jahre hintereinander eine nachschußweise Rente von 600 fl. auszuzahlen; wie hoch wurde das Haus veranschlagt, wenn 5 % Zinseszinsen gerechnet werden?

I. Vermischte Aufgaben

über die zusammengesetzten Verhältnisrechnungen.

§. 82.

1) Aus 15 Kil. Garn erhält man 60 Meter Leinwand, welche 115cm breit ist; wie viel Meter Leinwand wird man von 5 Kil. Garn bekommen, wenn dieselbe 105cm breit sein soll?

2) Ein Capital von 2800 fl. ist zu 4 % Zinseszins angelegt; wie hoch wird es a) bei ganzjähriger, b) bei halbjähriger Capitalisirung in 10 Jahren anwachsen?

3) Drei Gesellschafter unternahmen ein Geschäft auf gemeinschaftlichen, nach den eingelegten Capitalien zu vertheilenden Gewinn; A gab 5400 fl., B 6300 fl., C 4500 fl.; der Gewinn betrug 3977 fl.; wie viel erhält jeder von dem Gewinne?

4) Wie viel wiegen 6312 Cub.^{cm} Eisen, wenn 1 Cub.^{cm} Eisen so viel wiegt als $7\frac{4}{5}$ Cub.^{cm} Wasser, und wenn 1 Cub.^{dm} Wasser 1 Kilogr. wiegt?

5) Welches Capital gibt
   a) zu 5 % in 3 Jahren 109 fl. 35 kr. Zins?
   b) zu $4\frac{1}{2}$ % in 2 Jahren 180 fl. 80 kr. Zins?
   c) zu 4 % in 6 Monaten 137 fl. Zins?

6) 15 Arbeiter verrichten eine Arbeit in 10 Tagen, wenn sie täglich 12 Stunden arbeiten; wie viele Arbeiter wird man aufnehmen müssen, damit sie die nämliche Arbeit in 6 Tagen à 10 Stunden vollenden?

7) Wie viel feines Gold und wie viel Kupfer enthalten 2·6 Kilogramm Gold, welches 900 Tausendtheile fein ist?

8) Ein Goldschmied hat 840- und 650tausendtheiliges Gold; wie viel von jeder Sorte muß er nehmen, um $1\frac{1}{10}$ Kilogr. Gold, welches 750 Tausendtheile fein ist, zu erhalten?

9) Wie viel Zinsen geben 3456 Thlr.
   a) zu 4 % in 3 Jahren?
   b) zu $4\frac{3}{4}$ % in 2 Jahren 6 Monaten?
   c) zu 5 % in 49 Tagen?

10) Welches ist die gemeinschaftliche Verfallszeit für sechs gleiche Capitalien à 800 fl., welche beziehungsweise in 4, 5, 7, 9, 10, 14 Monaten zahlbar sind?

11) Die Abschrift eines Werkes kann von 6 Schreibern, welche täglich $12\frac{1}{2}$ Stunden schreiben, in 8 Tagen vollendet werden; wie viele Schreiber wird man dazu aufnehmen müssen, damit sie mit der Abschrift desselben Werkes in 5 Tagen fertig werden, wenn sie täglich nur 12 Stunden schreiben?

12) Wie viel beträgt der Zins à $4\frac{1}{2}$ %
   a) von 6250 fl. in $2\frac{3}{4}$ Jahren?
   b) von 1306 fl. 58 kr. in 1 Jahr 5 Mon.?
   c) von 978 Frcs. vom 1. April bis 16. Juni?

13) Wie viel in öst. W. kostet 1 Kilogr., wenn 100 Hamb. Pfd. mit $72\frac{1}{2}$ Mark Banko bezahlt werden? (2 Hamb. Pfd. = 1 Kilogr. und 100 Mark Banko = 83 fl. ö. W.)

14) Eine Partie Viertelgulden wiegt $2\frac{1}{9}$ Kilogr.; wie viel feines Silber und wie viel Zusatz enthalten dieselben, da sie 250 Tausendtheile fein sind?

15) Ein Getreidehändler hat zweierlei Weizen; von der besseren Sorte kostet das Hektoliter 9 fl., von der schlechteren 8 fl.; er will nun 42 Hektoliter so mischen, daß er jedes Hektoliter um 8 fl. 40 kr. verkaufen kann; wie viel muß er von jeder Sorte dazu nehmen?

16) Wie viel Zinsen geben in 68 Tagen
   a) 2085 fl. à 5 %?
   b) 1593 fl. 80 kr. à $4\frac{1}{2}$ %?
   c) 3103 fl. 12 kr. à 4 %?

17) Eine Goldstange wiegt 1 Kilogr. 685 Gramm und hat 857 Tausendtheile Feingehalt; wie groß ist ihr Werth in ö. W. zu 1395 fl. pr. Kilogr. fein?

18) A kauft einen Garten für 1200 fl., wovon er sich nach je 3 Monaten 240 fl. zu zahlen verpflichtet; wann müßte er die ganze Summe auf einmal entrichten?

19) Ein Buch, dessen jede Seite 32 Zeilen à 45 Buchstaben enthält, hat 240 Seiten; wie viele Buchstaben muß man im Durchschnitte in einer Zeile anbringen, um den Inhalt jenes Buches auf 200 Seiten, deren jede 36 Zeilen enthält, zu bringen?

20) In wie viel Zeit geben
   a) 908 fl. Capital zu $4\frac{3}{4}$ % 86 fl. 26 kr. Zins?
   b) 5160 fl. Capital zu 5 % 330 fl. Zins?
   c) 2180 fl. Capital zu 6 % 327 fl. Zins?

21) Eine Mutter mit 2 Söhnen und 1 Tochter haben 6300 Thlr. so zu theilen, daß die Mutter 15, der älteste Sohn 12, der jüngste Sohn 10 und die Tochter 8 Theile erhält; wie viel bekommt jede dieser Personen?

22) Vier Personen haben 2852 fl. so unter einander zu theilen, daß A so oft 3 fl. als B 4, C 7 und D 9 fl. bekommt; wie viel entfällt auf jeden?

23) Jemand erhält 730 Meter Seidenband und hat für 9 Meter $22\frac{1}{2}$ Francs zu bezahlen; wie groß ist der Betrag in ö. W., da 5 Francs $2\frac{1}{4}$ fl. sind?

24) Zu wie viel Procent tragen
   a) 3075 fl. Capital in 9 Monaten 92 fl. 25 kr. Zins?
   b) 5409 fl. Capital in $2\frac{1}{2}$ Jahren 607 fl. 50 kr. Zins?
   c) 650 fl. Capital in $3\frac{2}{3}$ Jahren 143 fl. Zins?

25) Auf einem Acker von 150^m Länge und 30^m Breite können 2 Hektoliter Weizen gesäet werden; wie lang muß ein 36^m breiter Acker sein, um darauf 3 Hektoliter säen zu können?

---

26) Drei Personen kaufen ein Schiff um 24000 Lire; davon zahlt A 12000 Lire, B 8000 Lire, C den Rest. Welchen Theil oder Part wird jeder am Schiffe haben? (Das Schiff wird als Einheit angenommen.)

27) Jemand zahlt für ein durch 6 Jahre benütztes Capital sammt den einfachen $5\frac{1}{2}$ % Zinsen 452 fl. 20 kr. zurück; wie groß war das geliehene Capital?

28) Bei einem Geschäfte, zu welchem A 3500 fl., B 2850 fl., C 4180 fl. hergegeben hat, werden 11 % gewonnen; wie viel von diesem Gewinne entfällt auf jeden Gesellschafter?

29) Welchen Werth haben 5360 fl. vor 12 Jahren, 5 % Zinseszins und a) ganzjährige, b) halbjährige Capitalisation vorausgesetzt?

30) Eine Lira italiana wiegt 5 Gramm und ist $\frac{9}{10}$ fein; wie viele Stücke gehen auf 1 Kilogramm feines Silber?

31) Löst man 7 Theile Zinn in 3 Theilen Quecksilber auf, so erhält man das Amalgam, welches zum Belegen des Glases bei Anfertigung der Spiegel benützt wird; wie viel von jedem Metalle muß man zu 18 Kilogr. dieses Amalgams nehmen?

32) Von zwei Rädern, welche in einander greifen, hat das eine 56, das andere 21 Zähne; wenn nun das erste in $2\frac{5}{10}$ Minuten 58 Umläufe macht, wie vielmal dreht sich das zweite Rad in $3\frac{3}{4}$ Minuten um?

33) Drei Personen legen in ein Geschäft 9600 fl. und gewinnen damit $\frac{1}{8}$ der Einlage; sie ziehen darauf ihr Geld zurück; wie viel erhält A, der 2400 fl., B, der 3600 fl., und C, der den Rest eingelegt hat?

34) Ein Vater will seinem Sohne gleich bei der Geburt ein Capital sichern, welches dem letzteren nach zurückgelegtem 24sten Lebensjahre ausgezahlt wird; zu dem Ende legt er gleich jetzt ein Capital von 2450 Thlr. in eine Sparcasse, welche dasselbe mit 4 % verzinset. Welche Summe wird die Sparcasse, wenn die Zinsen jährlich zum Capital geschlagen worden sind, dem Sohne auszuzahlen haben?

35) Es hat Jemand nach und nach folgende Zahlungen zu leisten: den 17. März 250 fl., den 13. Juli 300 fl., den 21. August 400 fl., den 7. October 250 fl. und den 18. December 500 fl. An welchem Tage kann er diese sämmtlichen Posten auf einmal abtragen? (Man berechne hier die einzelnen Zeiten vom 1. Jänner an, von welchem Zeitpuncte aus dann auch das Resultat zu nehmen ist.)

36) Ein Kaufmann hatte einen Betrag von 4108 Rubel am 20. October zu zahlen, leistete aber die Zahlung erst am 31. December; wie viel hatte er da bei 6 % Zins zu bezahlen?

37) Ein Wiener Cubikfuß Wasser wiegt 56·384 Wiener Pfd.; wie viel Kilogramm wiegt 1 Cub.^{dm} Wasser? (1 W. Cub.′ = 31·57867 Cub.^{dm}, 1 W. Pfund = 0·56006 Kilogr.)

38) Ein Kaufmann besitzt von einer Gattung Waare drei Sorten, das Kilogr. zu 40 kr., 33 kr., 30 kr., wie viel wird er von jeder Sorte nehmen, um eine Mischung von 120 Kilogr. à 36 kr. zu erhalten?

39) Jemand mischt 50 Kilogr. einer Waare, wovon das Kil. 60 kr. kostet, mit 40 Kil. einer geringeren Sorte, und nun kommt das Kil. der Mischung auf 54 kr.; wie viel kostet ein Kilogr. der zweiten Sorte?

40) Ein Wiener kauft in Hamburg 80 Säcke Domingo-Caffee, wovon ein jeder 160 Hamb. Pfd. enthält; wie groß ist der Betrag in ö. W., wenn ein Hamb. Pfd. $7\frac{3}{4}$ Schilling Banco kostet, 1 Mark Banco = 16 Schilling und 100 Mark Banco = $83\frac{1}{2}$ fl. ö. W. sind?

41) Jemand legt in die Sparcasse ein Capital von 3580 fl.; wenn nun die Sparcasse mit 4 % jährlich verzinset und die Interessen halb-

jährig zum Capitale schlägt, welchen Werth wird jenes Capital nach 8 Jahren haben?

42) Wie viel Kronen konnten aus $22\frac{1}{2}$ köln. Mark Gold von $21\frac{1}{3}$ Karat Feingehalt geprägt werden, da 50 Kronen 500 Gramm feines Gold enthalten und 1 köln. Mark = 233·87 Gramm ist?

43) 120 fl. wurden unter 20 Männer und Frauen so vertheilt, daß jeder Mann 8 fl., jede Frau 3 fl. erhielt; wie viel Männer und wie viel Frauen waren es?

44) 1050 fl. sollen so getheilt werden, daß A so oft $1\frac{1}{2}$ fl. bekommt, als B $1\frac{2}{3}$ fl., C $1\frac{5}{6}$ fl., D 2 fl.; wie viel erhält jeder?

45) Ein Kaufmann eröffnete sein Geschäft mit einem Fonde von 22500 fl.; wenn er nun durch 10 Jahre jährlich 5 % gewann und diesen Gewinn im Geschäfte ließ, wie groß war der Handelsfond am Ende des 10ten Jahres?

46) 2640 fl. werden unter drei Personen getheilt; B erhält 2mal so viel als A weniger 240 fl., C aber 3mal so viel als B; wie viel kommt auf jeden?

47) Jemand hat 30 Kilogr. einer Waare à 48 kr. und 40 Kil. à 44 kr.; er setzt noch 50 Kil. einer dritten Sorte dazu und nun kostet das Kilogr. der Mischung 40 kr.; wie viel kostet ein Kilogr. von der letzten Sorte?

48) Welches Capital wird zu 4 % Zinseszins bei halbjähriger Capitalisierung nach 9 Jahren auf 5000 anwachsen?

49) A hat 2400 fl. nach 4 Jahren zu bezahlen; er entrichtet 800 fl. sogleich; wann wird die Zahlung des Restes zu erfolgen haben?

50) 100 Kilogr. Roggenkörner geben 75 Kil. Mehl, 22 Kil. Kleie und 3 Kil. Abgang; wie viel Mehl und wie viel Kleie wird man von 6 Hektoliter Roggen erhalten, wenn 1 Hektoliter Roggen 72 Kilogr. wiegt?

---

51) Feines und 920 Tausendtheile haltendes Silber sollen mit Kupfer so legiert werden, daß man 32 Kilogr. zu 750 Tausendtheile fein erhält; wie viel wird man von jedem nehmen?

52) Vier Fuhrleute übernehmen einen Gütertransport und erhalten dafür 184 fl.; A stellt 4 Pferde auf 3 Tage, B 6 Pferde auf $2\frac{1}{2}$ Tage, C 5 Pferde auf 4 Tage und D 8 Pferde auf $2\frac{3}{4}$ Tage; wie viel erhält jeder der Fuhrleute?

53) A bietet für ein Haus entweder 8410 fl. baar, oder 8785 fl. nach 9 Monaten zahlbar; wenn nun der Verkäufer das Geld zu 5 % darleihen kann, welches Anbot ist für ihn das vortheilhaftere?

54) Ein Silberbarren wiegt 8·765 Kilogr. und ist 750 Tausendtheile fein; welchen Betrag erhält man dafür in Guldenstücken ö. W. bei 1 % Abzug für die Prägekosten? (45 Guldenstücke enthalten 500 Gramm feines Silber.)

55) Drei Personen haben 285 fl. so zu theilen, daß A so oft 5 fl. als B 8 fl. und C so oft 3 fl. als B 4 fl. erhalte; wie viel bekommt jeder?

56) Wie theuer muß das Kilogr. einer Waare sein, welche mit 50 Kil. à 24 kr., 30 Kil. à 18 kr. und 40 Kil. à 20 kr. vermischt, das Ganze auf 200 Kil. à 22 kr. bringt?

57) Wie viel Kilogramm wiegen 165 Guldenstücke, wenn jedes Stück $\frac{1}{45}$ Pfund feines Silber enthält und einen Feingehalt von $\frac{9}{10}$ hat und wenn 2 Pfund = 1 Kilogr. sind?

58) Vier Kaufleute haben im Handel 1236 fl. gewonnen; wie viel bekommt jeder vom Gewinne, wenn sich der Antheil des A zu dem des B wie 2 : 3, des B zu jenem des C wie 4 : 5, und des C zu dem des D wie 10 : 11 verhält?

59) Die Münzordnung des Kaisers Ferdinand I. vom Jahre 1529 bestimmte, daß aus einer kölnischen Mark (= 233·855 Gramm) Gold, $18\frac{1}{2}$ Karat fein, 72 Goldgulden geprägt werden sollten; wie viel neue Achtguldenstücke sind 100 solcher Goldgulden werth, da ein Achtguldenstück $\frac{9}{10}$ fein ist und auf ein halbes Kilogr. rauh $77\frac{1}{2}$ gehen?

60) Jemand legt zu Ende jedes Jahres, 14 Jahre nach einander, 85 fl. in eine Sparcasse, welche mit 4 % jährlich verzinset und die Interessen halbjährig zum Capital schlägt; wie groß ist sein Ersparnis nach dieser Zeit?

61) Drei Maurermeister erhalten für einen gemeinschaftlichen Bau 2700 fl., welche sie nach Verhältnis der Anzahl Arbeiter und der Zeit unter sich theilen; nun hat A 16 Arbeiter 40 Tage, B 20 Arbeiter 36 Tage und C 25 Arbeiter 32 Tage gestellt; wie viel erhält jeder Meister?

62) A hat an B, so lange dieser lebt, eine jährliche Rente von 420 fl. zu bezahlen; B wünscht aber sogleich den Betrag aller Renten baar zu empfangen. Wie viel wird ihm A zu geben haben, wenn man annimmt, daß B noch 18 Jahre leben wird, und wenn man ganzjährig 4 % Zinseszins rechnet?

63) A, B und C gewannen bei einem Geschäfte 960 fl.; B hatte 3000 fl., C 5000 fl. eingelegt. Wie viel betrug die Einlage des A, da er vom Gewinne 320 fl. erhielt?

64) Eine Dampfmaschine von 36 Pferdekraft bewegt in 18 Tagen à 12 Stunden eine Erdmasse von 8^m Länge, 5^m Breite und $5·2^m$ Höhe; in wie viel Tagen ununterbrochener Arbeit wird eine Erdmasse von 15^m Länge, 7^m Breite und $4·5^m$ Höhe durch eine Dampfmaschine von 24 Pferdekraft bewegt werden?

65) Im Kristallpalast zu Sydenham bei London war im Mai 1858 ein in Australien gefundener Klumpen reines Gold ausgestellt, der 1743 engl. Troy-Unzen wiegt. a) Wie viel Vierguldenstücke, jedes 5·80645 Gramm feines Gold enthaltend, könnten aus demselben geprägt werden? b) Wie groß ist dessen Werth in Gulden ö. W.,

das Vierguldenstück zu 4 fl. 5 kr. gerechnet? (12 Troy-Unzen $= 373\frac{1}{4}$ Gramm.)

66) Jemand kauft ein Landgut für 60000 fl. mit der Bedingung, die Kaufsumme in 5 gleichen Raten nach 1 Jahre, nach 2, 3, 4 und 5 Jahren zu bezahlen; er zahlt jedoch 20000 fl. sogleich, 10000 fl. nach $1\frac{1}{2}$ Jahren, dann 10000 fl. nach 2 Jahren; wann muß er den Rest entrichten?

67) In einem Dorfe haben vier Hausbesitzer an ihrem Eigenthume, das bei A auf 2000 fl., bei B auf 1800 fl., bei C auf 2400 fl. und bei D auf 1200 fl. geschätzt ist, Schaden gelitten und es beträgt derselbe bei A 640 fl., bei B 520 fl., bei C 800 fl., während D alles verloren hat; wenn nun für diese vier Personen 980 fl. milde Beiträge eingegangen sind, wie sind dieselben zu vertheilen?

68) A lieh seinem Freunde B 126 Stück Ducaten à 5·6 fl. und erhält sie nach 25 Tagen zurück; als aber B auch die Zinsen mit 6 % entrichten will, bittet A denselben, ihm jetzt 100 Stück Ducaten zu 5 % so lange vorzuschießen, bis jene Zinsen ausgeglichen wären; wie lange darf A das Geld behalten, wenn B die Ducaten zum Curse 5·88 fl. anrechnet?

69) A nimmt ein Capital von 6000 fl. auf und zahlt für Rechnung der 5 % Zinsen und der Capitaltilgung am Schlusse eines jeden Jahres 850 fl.; wie groß wird noch der Schuldrest nach 8 Jahren sein, und welchen gegenwärtigen Werth hat dieser Schuldrest?

70) A hatte an B zu zahlen:

am 5. Juli 2325 fl. 82 kr.,
am 27. Sept. 978 „ 39 „
am 19. Nov. 1815 „ 40 „

dagegen hatte B an A zu bezahlen:

am 13. August 1546 fl. 6 kr.,
am 1. Dec. 2410 „ — „

Am 31. December werden die gegenseitigen Forderungen mit 6 % Zins ausgeglichen; wie viel hat da A an B zu bezahlen?

Sechster Abschnitt.

Gleichungen des ersten Grades.

§. 83.

Die Gleichstellung zweier Ausdrücke, welche einerlei Werth haben, wird eine Gleichung genannt; z. B.

$a = a$; $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$; $3x - 5 = 2x + 3$.

Die Ausdrücke zu beiden Seiten des Gleichheitszeichens heißen Theile der Gleichung und können einzeln wieder aus mehreren Gliedern bestehen. In der Gleichung $3x - 5 = 2x + 3$ ist $3x - 5$ der erste, $2x + 3$ der zweite Theil; jeder dieser beiden Theile besteht aus zwei Gliedern.

Man unterscheidet zweierlei Gleichungen, identische und Bestimmungsgleichungen. Eine identische Gleichung gilt für jeden Werth der darin vorkommenden noch unbestimmten Größen; diese Eigenschaft haben die obigen Gleichungen $a = a$ und $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$, welche richtig bleiben, man mag für a und b was immer für Werthe setzen. Bestimmungsgleichungen dagegen sind solche, welche nicht für alle, sondern nur für bestimmte Werthe der darin vorkommenden Unbekannten giltig sind. So ist $3x - 5 = 2x + 3$ eine Bestimmungsgleichung, weil ihr nur der Werth $x = 8$ Genüge leistet.

Die Werthe einer Bestimmungsgleichung auffinden, welche ihr Genüge leisten, heißt die Gleichung auflösen.

Nach der Anzahl der Unbekannten, welche in einer Gleichung vorkommen, unterscheidet man Gleichungen mit einer, mit zwei oder mit mehreren Unbekannten. Z. B. $7x - 3 = 4x$ ist eine Gleichung mit einer, $5x - 3y = 8$ eine Gleichung mit zwei, $7x = 3y - 5z + 5$ eine Gleichung mit drei Unbekannten.

Nach dem höchsten Potenzexponenten der Unbekannten werden die Gleichungen in jene des ersten, zweiten, dritten, ... Grades eingetheilt. So sind

$$\left.\begin{aligned} 3x &= 20 \\ 2x - 3y &= 7 \end{aligned}\right\} \text{Gleichungen des ersten Grades,}$$

$$\left.\begin{aligned} x^2 - 5x &= 9 \\ x^2 + y^2 &= 2xy \end{aligned}\right\} \text{Gleichungen des zweiten Grades.}$$

In dieser Anleitung soll nur von den Bestimmungsgleichungen des ersten Grades die Rede sein.

I. Auflösung der Gleichungen des ersten Grades mit einer Unbekannten.

§. 84.

Eine Gleichung des ersten Grades einer Unbekannten ist als aufgelöst zu betrachten, wenn die Unbekannte für sich allein vor dem Gleichheitszeichen steht und hinter demselben nur bekannte Zahlen vorkommen. Wenn man z. B. aus der Gleichung $6x + 4x = 780 - 3x$ das Resultat $x = 60$ findet, so ist jene Gleichung aufgelöst.

Das Auflösen der Gleichungen des ersten Grades beruhet auf dem Grundsatze:

Wenn man mit gleichen Ausdrücken gleiche Veränderungen vernimmt, so müssen wieder gleiche Ausdrücke zum Vorschein kommen.

8*

Aus diesem allgemeinen Grundsatze ergeben sich folgende besondere Sätze:

1. Gleiches zu Gleichem addiert, gibt gleiche Summen.

Ist $a = b$ und $c = d$, so muß auch $a + c = b + d$ sein.

2. Gleiches von Gleichem subtrahiert, gibt gleiche Differenzen.

Ist $a = b$ und $c = d$, so muß auch $a - c = b - d$ sein.

Zu Folge dieser beiden Sätze kann jedes Glied in einem Theile der Gleichung weggelassen und in den andern Theil mit dem entgegengesetzten Zeichen übertragen werden. Hat man z. B. $x + a = b$, so ist $x = b - a$; durch diese Versetzung ist nichts anderes geschehen, als daß von beiden Theilen der Gleichung $+ a$ subtrahiert wurde. Aus $5x = 16 - 3x$ folgt $5x + 3x = 16$; hier wurde auf beiden Seiten $3x$ addiert, oder, was gleichviel ist, $- 3x$ subtrahiert.

3. Gleiches mit Gleichem multipliciert, gibt gleiche Producte.

Ist $a = b$ und $c = d$, so muß auch $ac = bd$ sein.

Mit Hilfe dieses Satzes lassen sich die Brüche in einer Gleichung wegschaffen; man darf nur beide Theile der Gleichung mit einem gemeinschaftlichen Vielfachen der Nenner multiplicieren. Z. B. aus $\frac{x}{a} - b = c$ folgt, wenn man mit a multipliciert, $x - ab = ac$.

Eben so gibt $\frac{x}{2} - 2 = \frac{x}{3}$, wenn beide Theile mit $2 \times 3 = 6$ multipliciert werden, $3x - 12 = 2x$.

4. Gleiches durch Gleiches dividiert, gibt gleiche Quotienten.

Ist $a = b$ und $c = d$, so muß auch $a : c = b : d$ sein.

Es ist daher erlaubt, beide Theile einer Gleichung durch dieselbe Zahl zu dividieren, wodurch die Gleichung häufig auf eine einfachere Gestalt gebracht wird. So gibt $6x = 24$ die einfachere Gleichung $x = 4$.

Um durch Anwendung der vorhergehenden Sätze eine Gleichung des ersten Grades mit einer Unbekannten aufzulösen, verfährt man auf folgende Art:

1. Wenn die Gleichung Brüche enthält, so werden diese weggeschafft, indem man beide Theile der Gleichung mit dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen aller Nenner multipliciert.

2. Kommen in der Gleichung zusammengesetzte, durch Klammern verbundene Ausdrücke vor, so werden die durch Klammern angezeigten Operationen wirklich ausgeführt.

3. Es werden alle Glieder, welche die Unbekannte enthalten, in den ersten Theil der Gleichung gebracht und zusammengezogen; die bekannten Glieder dagegen werden in den zweiten Theil übertragen und ebenfalls reduciert.

4. Man befreit die Unbekannte von ihrem Coefficienten, indem man beide Theile der Gleichung durch denselben dividiert.

Um sich von der Richtigkeit der Auflösung zu überzeugen, darf man nur den gefundenen Werth für die Unbekannte in die gegebene Gleichung substituieren, und die Ausdrücke auf beiden Seiten auf die einfachste Gestalt bringen. Erhält man beiderseits dasselbe Resultat, so ist die Auflösung richtig; im entgegengesetzten Falle wäre sie unrichtig.

§. 85.

Auflösungs-Aufgaben.

1) $3x - 8 = 13.$

Auflösung. $3x = 13 + 8$ Probe. $3 \times 7 - 8 = 13$
$3x = 21$ $21 - 8 = 13$
$x = 7$ $13 = 13$

2) $7x - 23 = 40.$ 3) $2x - 11 = 23.$
4) $9 - x = 7.$ 5) $5y + 14 = 49.$
6) $2x + 15 = 31.$ 7) $14 = 5z - 16.$
8) $17 - 3x + 1 = 0.$ 9) $104 + 4x = 484.$
10) $8 + 8x = 128.$ 11) $234 = 272 - 2x.$
12) $93 = 121 - 4y.$ 13) $50 = 8 - 6y.$
14) $a + x = b.$ 15) $a - x = b.$
16) $a + b - y = c.$ 17) $a - b = c - y.$
18) $7x + 2 = 9x - 2.$ 19) $3x + 4 = 44 - x.$
20) $9y + 7y + 5y = 0.$ 21) $5z - 7 = 2z + 8.$
22) $9x + 100 = 14x + 95.$ 23) $37 - 5x = 3x - 12.$ $x = 6.125$?
24) $2y - 3 + 5y = 2y + 2.$ $y = 1$?
25) $144 - 7x = 19x - 350.$
26) $2a + 6b - 5y = 3a - 4y + 5b.$
27) $3a - 4x = 9a + 6b - 6x.$
28) $8x + 9a + 10b - 13c = 4x + 5a + 6b + 7c.$
29) $2x - 11 + 2x - 5x + 7 = 7x - 7.$
30) $138 - 13x + 35 - 17x = 155 - 3x - 27.$
31) $12(x - 1) = 3x + 24.$

Aufl. $12x - 12 = 3x + 24$ Probe. $12(4 - 1) = 3 \times 4 + 24$
$12x - 3x = 24 + 12$ $12 \times 3 = 12 + 24$
$9x = 36$ $36 = 36$
$x = 4$

32) $20 - (x - 4) = 2x.$ 33) $8 - (2 - y) = 1 - 2y.$
34) $14x = 1950 - 9(150 - x).$
35) $18(x + 35) = 10(2x + 45).$
36) $15(273x - 55) = 2(825x - 273).$
37) $3(z - 3) + 12 = 33 - 7(z - 10).$
38) $7(x - 4) + 3(x + 1) = 20x - 32.$
39) $4(z - 2) + 3z = 5(z - 3) + 19.$
40) $22(x + 1) - 8(x + 7) = 5(x + 5) - 32.$
41) $7y - 4(2y - 4) = 20y - 1 - 4(4y + 2).$

42) $3(x+15)+5=2(2x+19)+4(x+13)$.
43) $16-3(2x+65)=9(x+33)-4(x+37)$.
44) $6(x-2)-2(3x+1)=1-4(2x+3)$.
45) $3(x+1)-4(x-1)=8(2x-15)$.
46) $55(60-2y)-3(y+2)=22y+9(3y+6)$.
47) $5(4z+5)-4(z+5)=7(5z+9)-3-8(4+z)$.
48) $7(2y+28)-3(y+21)=5(2y+27)-4(3y+40)$.
49) $8x-2x(1-3x)=(3x-2)(2x-3)+19$.
50) $(y+2)(3-y)=(4-y)(5+y)-22$.
51) $20+5[5-(8-2x)]=7x+2(3x-5)$.
52) $7(x+5)-3[x-4(3-x)]-1=5[3+(2x-7)]+60$.
53) $\frac{x}{2}=x-5$.

Aufl. $x=2x-10$ Probe. $\frac{10}{2}=10-5$

$x-2x=-10$ $5=5$

$-x=-10$

$x=10$

54) $\frac{x}{16}=\frac{3}{4}$. 55) $\frac{3}{5}y-36=0$.

56) $\frac{3x}{5}+7=16$. 57) $13+\frac{z}{9}=11$.

58) $\frac{4}{3}x+15=3$. 59) $7=\frac{5}{6}x-3$.

60) $\frac{24}{x+1}=6$. 61) $\frac{8}{x-1}=2$.

62) $\frac{5}{3x+2}=1$. 63) $\frac{6+y}{6-y}=2$.

64) $\frac{2x+4}{x+15}=1$. 65) $z-\frac{5z}{6}=2$.

66) $5y-28=\frac{8y}{3}$. 67) $-\frac{2x}{3}+8=0$.

68) $2x-\frac{3x}{5}=3(x-2)$.

69) $\frac{34-7x}{5}=22-9x$.

70) $7x-\frac{4x}{7}+2(x-1)=8x+1$.

71) $3(4x+5)-6x=4(2x+5)-\frac{1}{3}(2x-5)$.

72) $\frac{x+3}{5}-\frac{x-3}{9}=2$.

Aufl. $9(x+3)-5(x-3)=90$

$9x+27-5x+15=90$

$9x-5x=90-27-15$

$4x=48$

$x=12$

Probe.

$\frac{12+3}{5}-\frac{12-3}{9}=2$

$\frac{15}{5}-\frac{9}{9}=2$

$3-1=2$

$2=2$

73) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + 35 = 2x.$ 74) $4 . \frac{11 - 3x}{2} + 5x = 19.$

75) $\frac{4x - 15}{13} + \frac{5x + 2}{12} = x.$ 76) $\frac{45 - x}{3} = x + \frac{21 - x}{4}.$

77) $\frac{9 - x}{14} - 1 = \frac{x + 7}{5} - 2.$ 78) $\frac{7(25 - 2x)}{15} = \frac{4(39 - 3x)}{11}.$

79) $10\left(\frac{9x}{4} + 13\right) = 60 + \frac{85x}{3}.$ 80) $\frac{19 - y}{2} + y = \frac{4 - y}{3}.$

81) $\frac{2x + 1}{3} - \frac{x - 3}{5} = \frac{3x + 7}{10}.$

82) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 13.$ 83) $\frac{z}{2} - \frac{z + 4}{3} - \frac{z - 6}{4} = z - 3.$

84) $\frac{6x + 3}{3x - 4} = \frac{10x + 1}{5x - 8}.$ 85) $\frac{5x + 3}{4} + \frac{3 - 5x}{4} = 1 - \frac{x}{6}.$

86) $\frac{8x - 1}{3} - 12 = \frac{7 - 6x}{2} + 10x.$

87) $\frac{7 + x}{5} - \frac{10 + x}{13} = \frac{4 + x}{7}.$ 88) $\frac{z - 1}{2} - \frac{3z}{5} = \frac{6z - 8}{9}.$

89) $\frac{7x - 13}{6} + \frac{7 - 3x}{8} = \frac{5x + 11}{12} - 2.$

90) $\frac{4x - 2}{3} - \frac{2 + 3x}{5} = 7 - \frac{3 - 4x}{2}.$

91) $\frac{x + 2}{3} - \frac{4x + 5}{6} + \frac{7x - 8}{9} = x + 2.$

92) $\frac{8 + x}{9} - \frac{x - 6}{6} - 3 = 10 - \frac{8 + 4x}{5}.$

93) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{5} = x + 17.$

94) $x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{8} + \frac{x}{16} = 2x - 4.$

95) $x + \frac{x}{2} + \frac{2x}{3} + \frac{3x}{4} = \frac{7x}{8} + 49.$

96) $\frac{x}{2} + \frac{2x}{3} + \frac{3x}{4} + \frac{4x}{5} = \frac{5x}{6} + 678.$

97) $\frac{x}{2} + \frac{x + 1}{3} + \frac{x - 2}{4} = \frac{2x}{11} - \frac{2 - 3x}{4} - 3.$

98) $(x - 1)(x + 1) = x^2 + x + 1.$

99) $3x + \frac{7x - 9}{2} = 28 - \frac{2x - 7}{3} + \frac{2x - 3}{7}.$

100) $\frac{5x - 11}{8} + \frac{7x - 5}{6} - \frac{7 - 5x}{12} = \frac{7x - 14}{3} + 2.$

101) $\frac{24}{5x - 3} - 2 + \frac{96}{7(5x - 3)} = \frac{8}{7}.$

102) $\frac{54}{2x + 1} - 6 = \frac{7(8x + 3)}{9(2x + 1)} - \frac{9}{7}.$

103) $\frac{4(x-2)}{5} - \frac{2(x-3)}{7} = 10 - 2(x-1)$.

104) $\frac{17x-5}{5(3x+1)} - \frac{7x-3}{3x+1} = 1 - \frac{13x-1}{2(3x+1)}$.

105) $\frac{3a(2a-3b)}{2(5a-x)} = \frac{a-b}{3} - \frac{2b(5a+x)}{5a-x}$.

II. Auflösung der Gleichungen des ersten Grades mit mehreren Unbekannten.

§. 86.

Zur Bestimmung von zwei oder mehreren Unbekannten sind eben so viele einander nicht widerstreitende und von einander völlig unabhängige Gleichungen erforderlich.

Um zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten aufzulösen, muß aus denselben eine Unbekannte eliminiert, d. i. eine neue Gleichung gebildet werden, welche diese Unbekannte nicht enthält. Diese Gleichung hat dann nur eine einzige Unbekannte, welche daraus bestimmt und durch deren Substitution in eine der gegebenen Gleichungen auch der Werth der andern Unbekannten gefunden wird.

Für das Eliminieren einer unbekannten Größe hat man vorzugsweise drei Methoden.

1. Man bestimmt den Werth der einen Unbekannten aus beiden Gleichungen und setzt die erhaltenen Ausdrücke gleich. (Comparationsmethode.) Z. B.

$$2x + 5y = 26 \ldots 1) \text{ und } 3x - 2y = 1 \ldots 2)$$

Aus 1) folgt $x = \frac{26-5y}{2}$,

aus 2) folgt $x = \frac{1+2y}{3}$;

daher $\frac{26-5y}{2} = \frac{1+2y}{3}$,

woraus man $y = 4$ erhält. Wird dieser Werth in 1) substituiert, so hat man

$$2x + 5 \,.\, 4 = 26,$$

woraus $x = 3$ folgt.

2. Man sucht den Werth einer Unbekannten aus einer Gleichung und substituiert denselben in der andern Gleichung. (Substitutionsmethode.) Z. B.

$$x + 2y = 8 \ldots 1) \text{ und } 6x - 5y = 14 \ldots 2)$$

Aus 1) folgt $x = 8 - 2y$.

Wird dieser Werth in 2) substituiert, so erhält man

$$6(8 - 2y) - 5y = 14,$$

woraus $y = 2$ hervorgeht. Durch Substitution dieses Werthes in 1) bekommt man sodann $x = 4$.

3. Man macht in beiden Gleichungen die Coefficienten der zu eliminierenden Unbekannten dadurch einander gleich, daß man die Gleichungen mit entsprechenden Factoren multipliciert, und addiert oder subtrahiert sodann die neuen Gleichungen, je nachdem diese Coefficienten ungleiche oder gleiche Vorzeichen haben. (**Methode der gleichen Coefficienten.**) Z. B.

$$4x - 3y = 9 \ldots 1) \text{ und } 6x + 5y = 61 \ldots 2)$$

Multipliciert man die erste Gleichung mit 3, und die zweite mit 2, so erhält man

$$12x - 9y = 27,$$
$$12x + 10y = 122.$$

Wird nun die erste Gleichung von der zweiten subtrahiert, so hat man

$$19y = 95,$$

woraus $y = 5$ folgt. Wenn man diesen Werth in der Gleichung 1) substituiert, so findet man daraus $x = 6$.

Nach denselben Methoden können auch Gleichungen mit **drei** oder **mehreren** Unbekannten aufgelöset werden.

Es seien z. B. die Gleichungen gegeben

$$2x - 3y + 4z = 4 \ldots 1)$$
$$3x + y - 5z = 6 \ldots 2)$$
$$4x - 2y + 3z = 11 \ldots 3)$$

Nach der Comparationsmethode erhält man

$$x = \frac{4 + 3y - 4z}{2} \ldots 4)$$
$$x = \frac{6 - y + 5z}{3} \ldots 5)$$
$$x = \frac{11 + 2y - 3z}{4} \ldots 6)$$

Aus 4) und 5) folgt $\frac{4 + 3y - 4z}{2} = \frac{6 - y + 5z}{3} \ldots 7)$

aus 4) und 6) folgt $\frac{4 + 3y - 4z}{2} = \frac{11 + 2y - 3z}{4} \ldots 8)$

Ferner erhält man aus 7) $y = \frac{22z}{11} \ldots 9)$

und aus 8) $y = \frac{6 + 10z}{8} \ldots 10)$

daher $\frac{22z}{11} = \frac{6 + 10z}{8}$, woraus $z = 1$ folgt.

Wird dieser Werth in 9) substituiert, so ergibt sich $y = 2$; und wenn man endlich die beiden Werthe von z und y in 4) substituiert, so erhält man $x = 3$.

Man nehme hier die Elimination auch nach der Substitutionsmethode und nach der Methode der gleichen Coefficienten vor.

§. 87.

Auflösungs-Aufgaben.

1) $7x - 2y = 12,$
$3x + 2y = 8.$

2) $4x + 5y = 22,$
$5x - 4y = 7.$

3) $5x + y = 44,$
$x + 3y = 34.$

4) $7x + 3y = 56,$
$12x - 7y = 11.$

5) $7x + 5y = 41,$
$12x + 7y = 64.$

6) $5x - 3y = 33,$
$2x + 3y = 51.$

7) $15x - 8y = 2,$
$5x + 2y = 23.$

8) $13x - 4y = 19,$
$9x - 5y = 2.$

9) $3x - 4y = 10,$
$2x + 5y = 22.$

10) $21x + 17y = 97,$
$21x - 19y = 25.$

11) $8x + 5y = 67,$
$5x + 8y = 76.$

12) $51x - 7y = 44,$
$93x - 13y = 48.$

13) $27x + 16y = 452,$
$18x = 88 + 16y.$

14) $15x - 17y = 81,$
$17x + 15y = 79.$

15) $51x = 45 + 19y,$
$15x = 2(21 - 2y).$

16) $20(x - 3) + 5y = y + 4$
$2(y - 3) = 3(y - x - 2).$

17) $x + y = 20,$
$\frac{x}{3} = y.$

18) $-\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 8,$
$3x - 33 = y.$

19) $x - y = 12,$
$\frac{x}{9} - \frac{y}{8} = 1.$

20) $\frac{a}{y} = \frac{b}{y'},$
$x - y = c.$

21) $\frac{5}{8}x - \frac{4}{9}y = 4,$
$\frac{1}{7}x - \frac{1}{4}y = 3.$

22) $\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y = \frac{3}{4},$
$\frac{4}{5}x + \frac{5}{6}y = \frac{6}{7}.$

23) $\frac{x}{4} - \frac{2y}{3} = 17,$
$\frac{5x}{4} + \frac{5y}{8} = 27.$

24) $\frac{x+y}{2} - \frac{x+y}{3} = 4,$
$\frac{x-y}{2} - \frac{x-y}{3} = 1.$

25) $x + y = 30,$
$3y - 2z = 25,$
$x - 2z = 3.$

26) $4x + 3y - 5z = 13,$
$3x - 4y + z = 2,$
$-2x + 7y + 3z = 11.$

27) $7x - 2y + 7z = 60,$
$3x + 4y + 2z = 20,$
$5x - 8y - 3z + 2 = 0.$

28) $4x - 2y + 3z = 8,$
$7x + 8y - z = 59,$
$10x + 3y + 2z = 49.$

29) $x - 3y + z = 2,$
$20x - y - 2z = 7,$
$7x + 9y - 4z = 3.$

30) $\frac{x+y}{2} + \frac{y+z}{3} = 5,$
$\frac{x+z}{3} + \frac{y+z}{3} = 6,$
$2x + 2y - 5z = 6.$

31) $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{2} = 13,$
$\frac{x}{2} + \frac{x}{8} + \frac{z}{5} = 10,$
$3x - y - z = 10.$

32) $x + y + z - u = 8,$
$x - y + z + u = 12,$
$2x + 3y + 4z + 5u = 82,$
$12x - 5y - 2z + 2u = 15.$

33) $3u + 5x + y + 2z = 37,$
$u + 3x + 3y + 4z = 47,$
$4u + 3x + y + z = 26,$
$2u + 4x + 2y + 3z = 42.$

III. Anwendung der Gleichungen auf die Auflösung von Aufgaben.

§. 88.

In jeder Aufgabe werden gewisse Bedingungen angegeben, denen die zu suchenden Zahlen Genüge leisten sollen. Das erste Geschäft bei der algebraischen Auflösung einer Aufgabe besteht darin, daß man die gegebenen Bedingungen in die algebraische Zeichensprache überträgt, d. i. die Gleichungen ansetzt. Dafür gibt es keine allgemeinen Regeln; Scharfsinn und eine durch Lösung vieler Aufgaben erworbene Uebung werden in jedem einzelnen Falle angeben, wie die zu bestimmenden Unbekannten nach den Bedingungen der Aufgabe zu behandeln und in Gleichungen zu bringen sind.

Sind die Gleichungen angesetzt, so gibt die Auflösung derselben die gesuchten Werthe für die Unbekannten.

Es ist Anfängern sehr anzurathen, daß sie die verschiedenen Aufgaben auch ohne Ansatz einer Gleichung, durch bloße Verstandesschlüsse im Kopfe aufzulösen versuchen. Bei den ersteren Aufgaben erscheint in dieser Anleitung nebst der algebraischen Lösung auch jene im Kopfe angegeben, bei den weiteren Aufgaben wird diese dem eigenen Nachdenken der Schüler überlassen.

Um sich von der Richtigkeit der Auflösung einer Aufgabe zu überzeugen, untersuche man, ob durch den gefundenen Werth der Unbekannten auch wirklich die Bedingungen der Aufgabe erfüllt werden.

§. 89.

Aufgaben.

1) Man suche eine Zahl, deren 5faches und 7faches zusammen 96 beträgt.

Im Kopfe. Das 5fache und 7fache macht das 12fache; 96 ist also das 12fache von der gesuchten Zahl, oder diese Zahl ist der 12te Theil von 96, mithin 8.

Algebraisch. Es sei x die gesuchte Zahl; ihr 5faches ist $5x$, das 7fache $7x$. Nach der Bedingung der Aufgabe muß also

$$5x + 7x = 96$$

sein; löst man diese Gleichung auf, so ergibt sich $x = 8$.

Probe. $5 \cdot 8 + 7 \cdot 8 = 40 + 56 = 96$.

2) Welches ist die Zahl, deren 5faches um 42 vermehrt ihr 8faches gibt?

Im Kopfe. Um aus dem 5fachen das 8fache zu erhalten, muß man das 3fache dazu setzen. Wenn man nun aus dem 5fachen auch durch Hinzusetzung von 42 das 8fache bekommt, so muß 42 gleich dem 3fachen der Zahl, und daher die gesuchte Zahl der dritte Theil von 42, d. i. 14 sein.

Algebraisch. Ist x die gesuchte Zahl, so ist $5x$ ihr 5faches, $8x$ ihr 8faches. Nun muß ersteres um 42 vermehrt werden, um das letztere zu geben, somit hat man $5x + 42 = 8x$, und daraus $x = 14$.

Probe. $5 \times 14 + 42 = 70 + 42 = 112$.
$8 \times 14 = 112$.

3) Welche Zahl ist es, deren 9faches um 72 vermindert ihr 5faches gibt?

Im Kopfe. Um aus dem 9fachen das 5fache zu erhalten, muß man das 4fache subtrahieren. Soll also das 9fache durch die Verminderung um 72 in das 5fache übergehen, so muß 72 das 4fache der gesuchten Zahl vorstellen, die Zahl selbst also der 4te Theil von 72, somit 18 sein.

Algebraisch. Nennt man x die verlangte Zahl, so ist $9x$ ihr 9faches, $5x$ ihr 5faches, und es muß nach der Bedingung der Aufgabe

$$9x - 72 = 5x$$

oraus $x = 18$ folgt.

Probe. $9 \times 18 - 72 = 162 - 72 = 90$,
$5 \times 18 = 90$.

4) Die Hälfte und der dritte Theil einer Zahl betragen 25; wie groß ist die Zahl?

Im Kopfe. $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ sind $\frac{5}{6}$; wenn nun $\frac{5}{6}$ von der gesuchten Zahl 25 beträgt, so beträgt $\frac{1}{6}$ nur den fünften Theil von 25, also 5; die Zahl selbst ist daher 6mal 5, d. i. 30.

Algebraisch. Heißt x die gesuchte Zahl, so ist ihre Hälfte $\frac{x}{2}$, und der dritte Theil $\frac{x}{3}$, daher nach der Bedingung der Aufgabe

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 25,$$

folglich $x = 30$.

Probe. $\frac{30}{2} + \frac{30}{3} = 15 + 10 = 25$.

5) Das 5fache einer Zahl ist um 86 größer als ihre Hälfte und ihr Fünftel zusammengenommen; welche Zahl ist es?

Im Kopfe. $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{5}$ sind $\frac{7}{10}$; das 5fache der gesuchten Zahl soll also um 86 größer sein als 7mal der 10te Theil, somit das 50fache um 860 größer als das 7fache; das 50fache ist aber um das 43fache größer als das 7fache, es muß also 860 das 43fache der gesuchten Zahl, also diese der 43ste Theil von 860, mithin 20 sein.

Algebraisch. Wenn x die gesuchte Zahl vorstellt, so ist $5x$ ihr 5faches, $\frac{x}{2}$ ihre Hälfte und $\frac{x}{5}$ ihr Fünftel, und man hat

$$5x - 86 = \frac{x}{2} + \frac{x}{5},$$

woraus $x = 20$ folgt.

Probe. $5 \times 20 = 100, \frac{20}{2} + \frac{20}{5} = 10 + 4 = 14;$

$$100 - 14 = 86.$$

6) Jemand wird gefragt, wie viel Geld er bei sich hat. Er antwortet: wenn ich noch halb so viel hätte, als ich jetzt habe, weniger 2 fl., so hätte ich 16 fl. Wie viel Gulden hat er bei sich?

Im Kopfe. Eine Zahl um ihre Hälfte vermehrt, gibt 3mal die Hälfte, und dieses um 2 vermindert muß 16, also 3mal die Hälfte 18 geben; daher ist die Hälfte der Zahl der dritte Theil von 18, d. i. 6, und somit die Zahl selbst 12.

Algebraisch. Es sei x die Anzahl der Gulden, die der Gefragte bei sich hat, so ist $\frac{x}{2}$ die Hälfte davon, und es muß nach der Bedingung der Aufgabe

$$x + \frac{x}{2} - 2 = 16$$

sein, woraus $x = 12$ hervorgeht.

Probe. $12 + \frac{12}{2} - 2 = 12 + 6 - 2 = 16.$

7) Ein Reisender wird gefragt, wie viel Kilometer er zurückgelegt hat. Er gibt zur Antwort: wenn ich 48 Kilometer mehr zurückgelegt hätte, so würde ich 3mal so weit gekommen sein als jetzt. Wie viel Kilometer hat er zurückgelegt?

Es sei x die Anzahl der zurückgelegten Kilometer. Hätte der Reisende 48 Kilometer mehr zurückgelegt, so würde er $x + 48$ Kilometer gemacht haben, und da er in diesem Falle 3mal so weit, also $3x$ Kilometer weit gekommen wäre, so ist $x + 48 = 3x$, daher $x = 24$.

Probe. $24 + 48 = 72$; $3 \times 24 = 72$.

8) Ein Kaufmann kauft ein Stück Tuch, das Meter zu $3\frac{3}{4}$ fl.; hierauf verkaufte er dasselbe zu $4\frac{1}{2}$ fl. das Meter. Wenn er nun dabei 27 fl. gewonnen hat, wie viel Meter enthielt das Stück?

Bei dieser Aufgabe wird als stillschweigende Bedingung vorausgesetzt, daß der Gewinn gleich ist der Verkaufssumme weniger der Einkaufssumme.

Es sei x die Anzahl der Meter, so ist

die Verkaufssumme für x Meter $= 4\frac{1}{2} \cdot x = \frac{9x}{2}$,

die Einkaufssumme für x Meter $= 3\frac{3}{4} \cdot x = \frac{15x}{4}$; daher

$$\frac{9x}{2} - \frac{15x}{4} = 27,$$

woraus $x = 36$ folgt.

Probe. 36 Meter zu $4\frac{1}{2}$ fl. geben 162 fl. beim Verkaufe,
36 „ zu $3\frac{3}{4}$ fl. „ 135 fl. „ Einkaufe,
27 fl. Gewinn.

9) Jemand wurde um sein Alter gefragt und sagte: Mein Alter nach 10 Jahren wird doppelt so groß sein, als mein Alter vor 4 Jahren war. Wie alt war er?

Setzt man die Anzahl seiner Jahre $= x$, so ist
sein Alter nach 10 Jahren $= x + 10$,
sein Alter vor 4 Jahren $= x - 4$.

Da nun nach der Bedingung der Aufgabe die erste Zahl doppelt so groß sein soll als die zweite, so wird, damit man eine Gleichung bekomme, die zweite Zahl mit 2 multipliciert; daher ist

$$x + 10 = 2(x - 4),$$

woraus $x = 18$ folgt.

Probe. Alter nach 10 Jahren = 28 Jahre,
Alter vor 4 Jahren = 14 Jahre,
und wirklich ist $28 = 2 . 14$

10) Ein Vater ist 32, sein Sohn 2 Jahre alt; nach wie viel Jahren wird der Vater gerade 3mal so alt sein als sein Sohn?

Nach x Jahren. Nach dieser Zeit wird der Vater $32 + x$, der Sohn $2 + x$ Jahre alt, und da nach der Bedingung der Aufgabe die erste Zahl 3mal so groß ist als die zweite, so muß man, damit die Gleichheit hergestellt werde, die zweite Zahl mit 3 multiplicieren; man hat also die Gleichung

$$32 + x = 3(2 + x),$$

welcher der Werth $x = 13$ Genüge leistet.

Probe. Nach 13 Jahren wird der Vater 45, der Sohn 15 Jahre alt, daher der Vater wirklich 3mal so alt als der Sohn.

11) Ein Menschenfreund wollte eine Summe, die er eben bei sich hatte, unter 10 Arme vertheilen. Gibt er jedem 20 kr., so hat er eben so viel zu wenig, als er zu viel hat, wenn er jedem nur 18 kr. geben will. Wie viel Kreuzer hatte er bei sich?

Es sei x die Anzahl der Kreuzer. Will er jedem Armen 20 kr. geben, so hat er $200 - x$ Kreuzer zu wenig; will er jedem 18 kr.

geben, so hat er $x - 180$ Kreuzer zu viel. Da nun diese beiden Zahlen gleich sein müssen, so ist

$$200 - x = x - 180,$$

woraus $x = 190$ folgt.

12) Ein Herr versprach seinem Bedienten jährlich ein Kleid und 60 Gulden. Nach 2 Monaten wird der Bediente entlassen und erhält das Kleid. Wie hoch wurde ihm dieses angerechnet?

Es sei der Werth des Kleides $= x$ fl. Der ganzjährige Lohn beträgt also $x + 60$ Gulden, folglich der Lohn für zwei Monate $\frac{x + 60}{6}$ fl.; da nun der Bediente für diese Zeit das Kleid, also x fl. im Werth bekommen hat, so muß

$$x = \frac{x + 60}{6},$$

daher $x = 12$ sein.

13) Ein Courier geht nach A und macht täglich 12 Meilen; einen Tag später wird ihm ein zweiter Courier nachgeschickt; wie viel Meilen muß dieser täglich zurücklegen, damit er den ersten Courier in 4 Tagen einhole?

Bedeutet x die Anzahl der Meilen, welche der zweite Courier täglich zurücklegen muß, so werden von ihm in 4 Tagen $4x$ Meilen gemacht; der erste Courier, welcher einen Tag länger auf dem Wege ist, wird in diesen Tagen $12 \times 5 = 60$ Meilen machen. Da nun die von den beiden Courieren zurückgelegten Wege, wenn sie zusammengekommen, gleich sein müssen, so hat man $4x = 60$, somit $x = 15$.

§. 90.

Aufgaben, in denen nach mehreren Unbekannten gefragt wird, kann man entweder mit Hilfe so vieler Gleichungen, als Unbekannte gesucht werden, oder auch durch Zurückführung auf eine Gleichung mit einer einzigen Unbekannten auflösen, wie dies aus den folgenden Beispielen ersichtlich ist.

14) Ich denke mir zwei Zahlen, von denen die erste um 3 kleiner ist als die zweite; multipliciere ich die erste mit 4 und subtrahiere vom Producte 18, so erhalte ich die zweite. Welches sind die zwei Zahlen?

a) Mittelst zweier Gleichungen mit zwei Unbekannten. Es seien x und y die beiden Zahlen. Da die erste um 3 kleiner ist als die zweite, so hat man die Gleichung

$$x = y - 3.$$

Nach der zweiten Bedingung der Aufgabe muß das 4fache der ersten Zahl um 18 vermindert die zweite Zahl geben, also die Gleichung

$$4x - 18 = y$$

Statt finden. Durch die Auflösung dieser zwei Gleichungen erhält man $x = 7$ und $y = 10$.

b) Mittelst einer einzigen Gleichung mit einer Unbekannten. Nennt man x die erste Zahl, so ist $x + 3$ die zweite. Man hat daher nach den Bedingungen der Aufgabe

$$4x - 18 = x + 3,$$

woraus $x = 7$, und daher $x + 3 = 10$ hervorgeht.

Probe. Die zweite Zahl 10 ist wirklich um 3 größer als die erste 7; ferner gibt das 4fache von 7 weniger 18 zur Differenz 10, d. i. die zweite Zahl.

15) Man theile 50 so in zwei Theile, daß der eine Theil um 6 kleiner sei als der andere.

a) Wenn x und y die zwei gesuchten Theile vorstellen, so ist erstlich

$$x + y = 50.$$

Da ferner der erste Theil um 6 vermehrt werden muß, um den zweiten zu erhalten, so hat man auch die Gleichung

$$x + 6 = y.$$

Aus diesen Gleichungen folgt nun $x = 22$ und $y = 28$.

b) Heißt der kleinere Theil x, so ist $50 - x$ der größere, und man muß nach den Bedingungen der Aufgabe zu dem kleineren Theile x noch 6 addieren, um den größeren $50 - x$ zu erhalten; es ist daher $x + 6 = 50 - x$, woraus $x = 22$ und $50 - x = 28$ hervorgeht.

16) Ein Vater ist gegenwärtig 2mal so alt als sein Sohn; vor 15 Jahren war er 5mal so alt als der Sohn. Wie alt ist der Vater, wie alt der Sohn?

Der Sohn sei x Jahre alt, so ist das Alter des Vaters $2x$ Jahre; vor 12 Jahren war also der Vater $2x - 15$, der Sohn $x - 15$ Jahre alt. Man hat daher die Gleichung

$$2x - 15 = 5(x - 15),$$

woraus man $x = 20$ und $2x = 40$ erhält. Der Vater ist also 40, der Sohn 20 Jahre alt.

Man löse diese Aufgabe auch mit Hilfe zweier Gleichungen mit zwei Unbekannten auf.

17) Ein Knabe sagte: ich und mein Vater haben zusammen 60 Altersjahre; ich habe aber nur den 4ten Theil von dem Alter meines Vaters. Wie alt ist der Vater, wie alt der Sohn?

Das Alter des Vaters sei x, also jenes des Sohnes $\frac{x}{4}$ Jahre, so hat man

$$x + \frac{x}{4} = 60,$$

woraus $x = 48$ und $\frac{x}{4} = 12$ hervorgeht. Der Vater ist also 48, der Sohn 12 Jahre alt.

Wie wird diese Aufgabe mittelst zweier Gleichungen aufgelöst?

18) Unter drei Knaben werden 100 Zehner so vertheilt, daß der zweite doppelt so viel als der erste, und der dritte um 10 Zehner mehr

als die Hälfte dessen bekommt, was der erste und zweite zusammen erhalten. Wie viel Zehner bekommt jeder der drei Knaben?

a) Mittelst dreier Gleichungen. Es seien x, y, z die Zahlen der Zehner, welche folgeweise A, B und C bekommen, so ist erstlich

$$x + y + z = 100.$$

Da B doppelt so viel als A bekommt, so ist ferner

$$y = 2x.$$

Da endlich C um 10 Zehner mehr als die Hälfte dessen bekommt, was A und B zusammen erhalten, so hat man auch

$$z = \frac{x + y}{2} + 10.$$

Durch Auflösung dieser drei Gleichungen erhält man nun $x = 20$, $x = 40$ und $z = 40$.

b) Mittelst einer einzigen Gleichung.

Es sei x die Anzahl Zehner, welche A bekommt,
so ist $2x$ " " " B "
$\frac{x + 2x}{2} + 10$ " " " C "

daher

$$x + 2x + \frac{3x}{2} + 10 = 100,$$

welche Gleichung $x = 20$ gibt.

A bekommt also $x = 20$ Zehner.
B " $2x = 40$ "
C " $\frac{3x}{2} + 10 = 40$ "

19) Ein Knabe gibt seinem ältesten Bruder die Hälfte seiner Nüsse weniger 8, dem zweiten die Hälfte des Restes weniger 8, dem dritten wieder 8 weniger als die Hälfte des jetzigen Restes, und so auch dem vierten 8 weniger als die Hälfte des neuen Restes; die noch übrigen 20 Stücke behält er selbst. Wie viel Nüsse hatte er anfänglich und wie viele gab er jedem Bruder?

Heißt x die anfängliche Zahl der Nüsse, so gab er dem ersten Bruder $\frac{x}{2} - 8$ und es blieben noch $x - \frac{x}{2} + 8 = \frac{x}{2} + 8$; der zweite Bruder bekam $\frac{x}{4} + 4 - 8 = \frac{x}{4} - 4$ und es blieben noch $\frac{x}{2} + 8 - \left(\frac{x}{4} - 4\right) = \frac{x}{4} + 12$; der dritte Bruder bekam $\frac{x}{8} + 6 - 8 = \frac{x}{8} - 2$, und es blieben noch $\frac{x}{4} + 12 - \left(\frac{x}{8} - 2\right) = \frac{x}{8} + 14$; davon erhielt der vierte Bruder $\frac{x}{16} + 7 - 8 = \frac{x}{16} - 1$, so daß noch $\frac{x}{8} + 14 - \left(\frac{x}{16} - 1\right) = \frac{x}{16} + 15$ übrig bleiben. Der Rest soll aber 20 betragen; mithin ist

$$\frac{x}{16} + 15 = 20,$$

woraus $x = 80$ folgt.

Der Knabe hatte also anfänglich 80 Nüsse, und gab

$$\text{dem ersten Bruder } \frac{x}{2} - 8 = 32,$$

$$\text{„ zweiten „ } \frac{x}{4} - 4 = 16,$$

$$\text{„ dritten „ } \frac{x}{8} - 2 = 8,$$

$$\text{„ vierten „ } \frac{x}{16} - 1 = 4.$$

§. 91.

Löse noch folgende Aufgaben:

20) Wenn ich eine gewisse Zahl mit 3 multipliciere, so erhalte ich dasselbe, als wenn ich 24 zu ihr addiere; welches ist die Zahl?

21) Man suche eine Zahl von der Beschaffenheit, daß, wenn man sie durch 4 dividiert, eben soviel herauskommt, als wenn man von ihr 32 subtrahiert.

22) Welche Zahl ist um 23 größer als die Summe aus ihrem vierten, fünften und sechsten Theile?

23) Welche Zahl gibt mit 8 multipliciert dasselbe, als wenn man zum 3fachen derselben 25 addiert?

24) Von welcher Zahl ist das 4fache eben so groß als das 6fache der um 8 verminderten Zahl?

25) Wenn ich zu einer gewissen Zahl 8 addiere und diese Summe durch 5 dividiere, so erhalte ich denselben Quotienten, als wenn ich von der Zahl 4 subtrahiere und die Differenz durch 3 dividiere; welches ist die Zahl?

26) Ich denke mir eine Zahl. Wenn ich dieselbe mit 3 multipliciere, zu dem Producte 8 addiere, die Summe durch 8 dividiere und von dem Quotienten 4 subtrahiere, so erhalte ich 0. Welche Zahl habe ich mir gedacht?

27) Wenn man eine gewisse Zahl mit 7 multipliciert, vom Producte 5 subtrahiert, den Rest durch 13 dividiert und zum Quotienten 6 addiert, so erhält man diese Zahl selbst. Welche Zahl ist es?

28) Wenn man die um 3 verminderte unbekannte Zahl durch 4 dividiert, zum Quotienten 17 addiert, so kommt eine Zahl heraus, die um 3 kleiner ist, als das 3fache der Unbekannten. Welches ist die Unbekannte?

29) Welche Zahl muß zum Zähler und Nenner des Bruches $\frac{13}{20}$ addiert werden, damit man den Bruch $\frac{3}{4}$ erhalte?

30) Welche Zahl muß man vom Zähler und Nenner des Bruches $\frac{23}{27}$ subtrahieren, um den Bruch $\frac{5}{6}$ zu erhalten?

31) Welche Zahl muß man vom Zähler des Bruches $\frac{13}{32}$ subtrahieren, und zugleich zum Nenner desselben addieren, damit man den Bruch $\frac{1}{8}$ erhalte?

32) Welche Zahl muß man zu 32 addieren und von 32 subtrahieren, damit sich die Summe zum Unterschiede wie 11 : 5 verhalte?

33) Welches ist die Zahl, deren 5faches eben so viel über 20, als ihr 8faches über 44 ist?
34) Vermehrt man den Zähler des Bruches $\frac{17}{25}$ um eine gewisse Zahl und vermindert den Nenner um das Dreifache derselben Zahl, so erhält man den Bruch $\frac{5}{4}$. Welches ist jene Zahl?
35) Welches ist die Zahl, von der $\frac{3}{4}$ um 2 kleiner sind, als $\frac{2}{5}$ der doppelten Zahl?
36) Durch welche Zahl muß man 230 dividieren, damit man 13 zum Quotienten und 9 zum Reste erhalte?
37) Man theile die Zahl 100 so in zwei Theile, daß der eine den andern um 35 übersteigt.
38) Die Zahl 85 ist in zwei Theile zu theilen, die sich wie 8 : 9 verhalten.
39) Der gemeinschaftliche Gewinn zweier Geschäftsfreunde beträgt 505 fl.; derselbe soll so getheilt werden, daß A um 25 fl. weniger bekomme als B; wie viel erhält jeder?
40) Ein Lehrer gab auf die Frage, wie viel Schüler er habe, folgende Antwort: die Hälfte meiner Schüler beträgt 16 mehr als der sechste und neunte Theil derselben. Wie viele Schüler hatte er?
41) Jemand war vor 8 Jahren 4mal so alt als der 5te Theil seines gegenwärtigen Alters beträgt; wie alt ist er jetzt?
42) Jemand wurde nach seinem Alter gefragt. Er antwortete: nach 12 Jahren werde ich 4mal so alt sein, als ich vor 12 Jahren war. Wie alt ist er?
43) Ein Vater sagt: ich bin jetzt 40 Jahre alt, mein älterer Sohn 16, mein jüngerer 3; nach wie vielen Jahren werden meine Söhne zusammen so viele Lebensjahre zählen als ich?
44) Jemand ist 60 Jahre und sein Sohn 24 Jahre alt; a) vor wie viel Jahren war der Vater 4mal so alt als der Sohn? b) nach wie viel Jahren wird er doppelt so alt als der Sohn sein?
45) Um eine Uhr zu kaufen hat A nur $\frac{1}{4}$, B $\frac{1}{7}$ des geforderten Preises bei sich; beide zusammen haben $16\frac{1}{2}$ Gulden. Wie groß ist der Preis der Uhr?
46) Ein Bauernmädchen wurde nach der Anzahl Eier gefragt, die sie im Korbe trug. Drei Viertel davon, erwiederte sie, betragen 5 mehr, als fünf Achtel davon machen. Wie viel Eier waren im Korbe?
47) Eine Staatsschuld, wovon $\frac{1}{3}$ mit 5 % und $\frac{2}{3}$ mit $4\frac{1}{2}$ % verzinslich sind, erfordert jährlich $1\frac{1}{2}$ Millionen Gulden Zinsen; wie viel beträgt die ganze Staatsschuld?
48) Zwei Couriere gehen von A nach B ab; der erste legt täglich 70 Kilometer, der zweite 105 Kilom. zurück. Wenn nun der zweite um 4 Tage später von A abgegangen ist als der erste, in wie viel Tagen wird er den ersten einholen?
49) Von B gegen C marschiert ein feindliches Heer und macht täglich 32 Kilom.; von A aus will man demselben nachsetzen, um es in

5 Tagen einzuholen; wie viel Kilometer müssen täglich zurückgelegt werden, wenn die Entfernung zwischen A und B 80 Kilom. beträgt?

50) Einem Boten, der von A aus vor 6 Tagen abging und täglich 6 Meilen macht, wird von B aus, welchen Ort er berührte, ein zweiter Bote nachgesendet, welcher täglich 10 Meilen macht; in wie viel Tagen wird er den ersten einholen, wenn die Entfernung zwischen A und B 11 Meilen beträgt?

51) Hätte A 120 fl. mehr, so würde er gerade so viel über 100 fl. besitzen, als ihm jetzt noch daran fehlen. Wie viel Gulden hat er?

52) Wenn man von einer Summe die Hälfte wegnimmt, von dem Reste wieder die Hälfte und von dem neuen Reste nochmals die Hälfte, so bleiben 37 fl. übrig. Wie groß war die anfängliche Summe?

53) Mehrere Personen wollen mit gleichen Beiträgen ein Los kaufen. Wenn jede Person 7 fl. gibt, so kommen 4 fl. mehr zusammen, als das Los kostet; wenn jede Person 6 fl. beiträgt, so kommen 16 fl. weniger zusammen. a) wie viel Personen sind es, b) wie viel kostet das Los?

54) Von 62 Meter Tuch wird ein Theil verkauft und dabei an jedem Meter $\frac{2}{5}$ fl. gewonnen; beim Verkaufe des Restes werden an jedem Meter $\frac{3}{16}$ fl. verloren. Wenn nun der reine Gewinn 15 fl. beträgt, wie viele Meter wurden mit Gewinn und wie viele mit Verlust verkauft?

55) Die Summe zweier Zahlen ist 47, ihre Differenz 9; welches sind die beiden Zahlen? 28 + 19 = 47, 28 − 19 = 9

56) Welche zwei Zahlen geben 81 zur Summe und 35 zur Differenz?

57) Die halbe Summe zweier Zahlen ist 90 und die doppelte Differenz 100; welches sind die beiden Zahlen?

58) Zwei Zahlen, deren Differenz 12 ist, sind so beschaffen, daß das 3fache der ersten gleich ist dem 5fachen der zweiten; welches sind diese Zahlen?

59) Die Zahl 104 soll in zwei Theile so getheilt werden, daß der Unterschied der beiden Theile $\frac{2}{3}$ von dem Unterschiede zwischen der ganzen Zahl und dem größeren Theile betrage.

60) Mitten im Mai ist der Tag an einem Orte um 6 Stunden 15 Minuten länger als die Nacht; wie lang ist da der Tag und wie lang die Nacht?

61) A hat in zwei Rollen zusammen 206 fl., in der ersten 44 fl. mehr als in der zweiten; wie viel in jeder?

62) Die Zahl 32 soll in drei Theile so getheilt werden, daß der erste um 5, der zweite um 3 größer sei als der dritte; welches sind diese Theile?

63) Die Zahl 48 in drei Theile zu theilen, welche sich wie 4 : 5 : 7 verhalten.

64) Drei Personen sollen 360 fl. so unter einander theilen, daß A doppelt so viel als B, und C dreimal so viel als A erhalte. Wie viel bekommt jede Person?

65) Drei Personen theilen eine Summe von 350 fl. in der Art, daß B 18 fl. mehr als C und A 14 fl. mehr als B erhält; wie viel bekommt jeder?

66) Zwei Brüder zählen gegenwärtig zusammen 47 Lebensjahre. Vor 10 Jahren war der ältere Bruder gerade doppelt so alt als der jüngere. Wie alt ist jeder?

67) Ein Vater, der 25 Jahre älter als sein Sohn ist, wird nach 5 Jahren doppelt so alt als dieser sein. Wie alt ist a) der Vater, b) der Sohn?

68) Ein Vater ist jetzt dreimal so alt als sein Sohn, nach 12 Jahren wird er doppelt so alt als sein Sohn sein. Wie alt ist der Vater, wie alt der Sohn?

69) Man soll die Zahl 76 in zwei Theile so theilen, daß, wenn der größere durch 11 und der kleinere durch 7 dividiert wird, die Quotienten zusammen 8 ausmachen; welche Theile sind es?

70) Zwei Personen besitzen zusammen 3500 fl.; gäbe B dem A 150 fl. von seinem Vermögen, so hätten beide gleichviel. Wie viel besitzt jeder?

71) Man soll drei Zahlen finden, die so beschaffen sind, daß die erste und zweite 38, die erste und dritte 43, die zweite und dritte 31 zur Summe geben.

72) Es sollen 140 fl. unter 5 Personen so vertheilt werden, daß jede folgende 4 fl. weniger bekommt; wie viel erhält jede Person?

73) Auf einem Tische lag eine bestimmte Summe Geldes. A sagt: ich habe 2mal so viel Geld; B, ich habe 3mal so viel Geld; C, ich habe die Hälfte von dem, was A und B zusammen haben. Wenn nun alle zusammen 240 fl. hatten, wie viel Geld lag auf dem Tische und wie viel besaß jeder?

74) 1200 fl. sollen unter drei Personen so vertheilt werden, daß die zweite 3mal so viel als die erste weniger 20 fl., die dritte 4mal so viel als die zweite und noch 20 fl. erhält. Wie viel bekommt jede?

75) Von 3700 fl. bekommt A 2mal so viel als B, B 3mal so viel als C, und C 400 fl. weniger als D; wie viel erhält jede Person?

76) Von zwei Spielern hatte A 4mal so viel Geld als B. Nachdem aber A an B 5 fl. verloren hat, hatte A nur noch 3mal so viel als B. Wie viel Geld hatte jeder am Anfange des Spieles.

77) In einer Gesellschaft befinden sich 88 Personen, Männer und Frauen, und es verhält sich die Anzahl der Männer zu jener der Frauen wie 5 : 6. Wie viel Männer und wie viel Frauen zählt die Gesellschaft?

78) In einer Gesellschaft waren 3mal so viel Herren als Damen; nachdem aber später 3 Herren mit 4 Damen dazu kamen, waren

2mal so viel Herren als Damen. Wie viel Herren und Damen waren Anfangs da? 15 — 5

79) In einer Gesellschaft waren 2mal so viel Männer als Frauen; als 6 Männer mit ihren Frauen fortgegangen waren, blieben 5mal so viel Männer als Frauen. Wie viel Männer und wie viel Frauen waren Anfangs in der Gesellschaft? 16 — 8

80) Jemand hat 2 goldene Dosen, die eine ist $\frac{5}{8}$ von der anderen werth und kostet deßhalb um 14 fl. weniger. Wie theuer ist jede Dose?

81) Ich habe mir 2 Zahlen gedacht, welche um 1 verschieden sind. Dividiere ich die größere durch 4 und die kleinere durch 5, so sind die Quotienten ebenfalls um 1 verschieden. Welches sind die 2 Zahlen? 15 16

82) Ich habe 2 Zahlen, deren Differenz 10 ist; ziehe ich die kleinere von 105, die größere von 135 ab, so verhalten sich die Reste wie 7 : 9. Welches sind die 2 Zahlen? 35 — 45

83) Zähler und Nenner eines Bruches betragen zusammen 16; vermehrt man den ersteren um 2 und vermindert den letzteren um 2, so erhält man den umgekehrten Bruch; wie heißt der gegebene Bruch? (Mit einer Unbekannten aufzulösen.) 7/9 — 9/7

84) Ein Spieler verliert im ersten Spiele 6 fl. weniger als $\frac{1}{4}$ seines Geldes, im zweiten Spiele 2 fl. mehr als $\frac{1}{6}$ des Restes, im dritten Spiele 8 fl. mehr als $\frac{1}{7}$ dessen, was ihm nach dem zweiten übrig geblieben war, und hat nun 28 fl.; wie viel hatte er Anfangs?

85) Von zwei Personen besitzt jede eine Summe Geldes. Gibt A an B 4 fl. ab, so haben beide gleich viel; gibt aber B an A 5 fl. ab, so hat A doppelt so viel als B. Wie viel Geld hat A, wie viel B;

86) Hier dies Grabmal deckt Diophantus sterbliche Hülle,
Und in des Trefflichen Kunst zeigt es sein Alter dir an.
Knabe zu sein gewährt ihm der Schöpfer ein Sechstel des Lebens,
Und ein Zwölftel der Zeit ward er ein Jüngling genannt.
Noch ein Siebentel schwand, da fand er des Lebens Gefährtin,
Und fünf Jahre darauf ward ihm ein liebliches Kind.
Halb nur hatte der Sohn des Vaters Alter vollendet,
Als ihn plötzlich der Tod seinem Erzeuger entriß.
Noch vier Jahre betrauert er ihn in schmerzlichem Kummer,
Und nun sage das Ziel, welches er selber erreicht.

Inhalts-Verzeichnis
der zweiten Abtheilung der Arithmetik.

Erster Abschnitt.

Zweiter Abschnitt.

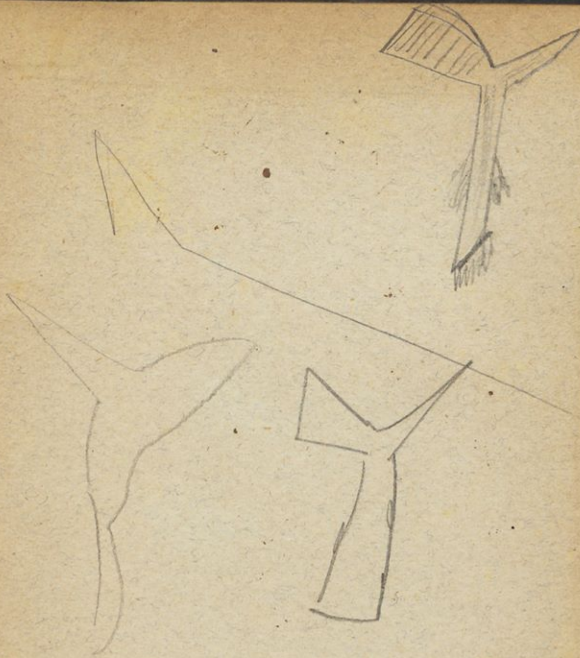
Dritter Abschnitt.

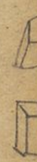
Seite

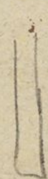
Vierter Abschnitt.

Fünfter Abschnitt.

Sechster Abschnitt.







Unihalic