Univerza *v Ljubljani*
Fakulteta *za strojništvo*

Funkcije več spremenljivk in osnove vektorske analize

Aljoša Peperko
Boštjan Gabrovšek

Ljubljana, 2022

Naslov:	Funkcije več spremenljivk in osnove vektorske analize
Avtorja:	doc. dr. Aljoša Peperko, doc. dr. Boštjan Gabrovšek
Recenzenta:	prof. ddr. Janez Žerovnik, doc. dr. Eva Horvat
Naslovnica:	Slovenia - Kranjska Gora - Lake Jasna, Harshil Shah (CC BY-ND 2.0)
Založba:	Fakulteta za strojništvo Univerze v Ljubljani
Izdaja:	1. elektronska izdaja
Leto izida:	2022
Naklada:	spletna izdaja
Cena:	prosto dostopno na repozitoriju Univerze v Ljubljani
URI:	`https://repozitorij.uni-lj.si/IzpisGradiva.php?id=134764`

ISBN 978-961-6980-87-6

9 789616 980876

Katatložni zapis o publikaciji (CIP) pripravili v Narodni in univerzitetni knjižnici v Ljubljani.

ISBN 978-961-6980-87-6 (PDF)
COBISS.SI-ID= 97630467

Univerza v *Ljubljani*
Fakulteta *za strojništvo*

Funkcije več spremenljivk in osnove vektorske analize

Aljoša Peperko, Boštjan Gabrovšek

Ljubljana, februar 2022

Predgovor

Učbenik je namenjen študentom drugega letnika razvojno raziskovalnega programa pri predmetu Matematika 3 na Fakulteti za strojništvo, Univerze v Ljubljani (FS UL), vendar avtorja verjameva, da bo koristen študijski pripomoček tudi študentom drugih naravoslovnih študijskih programov. V tem učbeniku obravnavana snov predstavlja pomembno matematično orodje za reševanje številnih fizikalnih in inženirskih problemov, ki so obravnavani pri mnogih predmetih na FS UL. Dobro obvladovanje in razumevanje te snovi sodi v "osnovno opremo" vsakega inženirja, ki se želi s takšnimi problemi ukvarjati na primerno visokem nivoju.

Učbenik je nastal s pomočjo številnih virov. Viri, ki sva jih najbolj uporabljala, so navedeni v seznamu literature. Ob tem se posebej zahvaljujeva prof. Mihaelu Permanu, ki je predaval Matematiko 3 do leta 2013 in je nesebično delil svoje zapiske, kar je Aljoši Peperku občutno pomagalo pri oblikovanju svojih predavanj in kasneje tudi pri pisanju delov tega učbenika.

Za osvojitev zahtevanega predznanja za dobro razumevanje tega učbenika lahko študentje uporabijo učbenika [14] in [15], posežejo pa lahko tudi po novejšem učbeniku [17]. Študentom toplo priporočava tudi uporabo s primernimi teoretičnimi osnovami razširjeno zbirko nalog [10]. Nekatere naloge iz [10] so vključene tudi v ta učbenik. Del obravnavane snovi lahko študentje najdejo tudi v novih učbenikih [17] in [18].

Rokopis sta pregledala prof. ddr. Janez Žerovnik in doc. dr. Eva Horvat. Njune komentarje in popravke sva po svojih močeh upoštevala. Za morebitne nepopolnosti in napake se bralcem opravičujeva. Hvaležna bova, v kolikor naju boste na njih opozorili.

Ljubljana, december 2021 avtorja

Kazalo

1 Funkcije več spremenljivk

1.1 Uvod

Matematika predstavlja temelj za obravnavo in analizo številnih naravnih fizikalnih pojavov. Ta obravnava temelji na natančnih eksplicitnih predpostavkah in poenostavitvah, s čimer dobimo model opisa obravnavanega pojava. Korektnost in ustreznost modela je odvisna od tega, v kolikšni meri privzete predpostavke sovpadajo z dejanskimi naravnimi danostmi. Mnogo fizikalnih in geometrijskih problemov lahko obravnavamo v kontekstu funkcij več spremenljivk (skalarnih polj) in vektorskih polj.

Začnimo s fizikalnim primerom za motivacijo.

Primer 1.1.1. Naj bo G območje v prostoru in $[0,t_0]$ časovni interval, kjer je $t_0 > 0$. S $T(x,y,z,t)$ označimo temperaturo v točki $(x,y,z) \in G$ ob času $t \in [0,t_0]$ in $D = G \times [0,t_0] = \{(x,y,z,t) \mid (x,y,z) \in G,\ t \in [0,t_0]\}$. Potem je $T : D \to \mathbb{R}$ funkcija štirih spremenljivk.
Denimo, da na območju G opazujemo tudi fluid v časovnem intervalu $[0,t_0]$. Z $\vec{v}(x,y,z,t)$ označimo vektor hitrosti fluida v točki (x,y,z) ob času t. Preslikava $F : D \to \mathbb{R}^3$,

$$F(x,y,z,t) = \vec{v}(x,y,z,t) = (v_1(x,y,z,t), v_2(x,y,z,t), v_3(x,y,z,t))$$

podaja (dinamično) hitrostno vektorsko polje fluida. Vsaka izmed koordinatnih funkcij $v_i : D \to \mathbb{R}$ za $i = 1,2,3$ je funkcija štirih spremenljivk.

1.1.1 Nekatere definicije in oznake

Dogovorimo se za nekaj oznak. Naj bosta A in B neprazni množici, ki sta podmnožici dane (univerzalne) množice $\mathcal{U}$. Unija $A \cup B$, presek $A \cap B$, kartezični produkt $A \times B$ in razlika množic $A \setminus B$ so definirane z

$$
\begin{aligned}
A \cup B &= \{x \in \mathcal{U} \mid x \in A \text{ ali } x \in B\},\\
A \cap B &= \{x \in \mathcal{U} \mid x \in A \text{ in } x \in B\},\\
A \times B &= \{(x,y) \mid x \in A,\, x \in B\},\\
A \setminus B &= A - B = \{x \in \mathcal{U} \mid x \in A,\ x \notin B\}.
\end{aligned}
$$

Besedo **ali** pogosto označimo z $\vee$, besedo **in** pa z $\wedge$. Besedo **vsak** oziroma besedno zvezo **za vsak** označimo z $\forall$, besedo **obstaja** označimo z $\exists$. Besedno zvezo **natanko tedaj** zapišemo z $\iff$, besedo **sledi** označimo z $\implies$.

Zapišemo lahko torej na primer

$$
\begin{aligned}
A \cup B &= \{x \in \mathcal{U} \mid x \in A \quad \vee \quad x \in B\},\\
A \cap B &= \{x \in \mathcal{U} \mid x \in A \quad \wedge \quad x \in B\} \quad \text{in}\\
A \subset B &\iff (\forall x\colon (x \in A \implies x \in B)).
\end{aligned}
$$

Z $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ označujemo zaporedoma množice naravnih, celih, racionalnih, realnih in kompleksnih števil.

Evklidska ravnina $\mathbb{R}^2$ je definirana kot $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, torej

$$\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\} = \{(x_1,x_2) \mid x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Analogno je **evklidski prostor** $\mathbb{R}^3$ enak

$$\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\} = \{(x_1,x_2,x_3) \mid x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}, x_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Splošneje definiramo ***n*-razsežni** (dimenzionalni) **evklidski prostor** $\mathbb{R}^n$ kot množico n-teric realnih števil

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1,x_2,\ldots,x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1,\ldots,n\}.$$

Zaprti krog v $\mathbb{R}^2$ s središčem $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ in polmerom $r > 0$ je množica $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-a)^2+(y-b)^2 \leq r^2\}$. **Odprti krog** v $\mathbb{R}^2$ s središčem $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ in polmerom $r > 0$ je množica $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2\}$. Množica v $A \subset \mathbb{R}^2$ je **odprta**, če za vsak $(a,b) \in A$ obstaja tak odprti krog K s središčem (a,b), da je $K \subset A$. Če je $(a,b) \in B \subset \mathbb{R}^2$ in če obstaja tak odprti krog K s središčem (a,b), da je $K \subset B$, potem množico B imenujemo **okolica** točke (a,b). Okolico B točke (a,b), kjer je B tudi odprta množica, imenujemo odprta okolica točke (a,b).

Definicija 1.1.1. Pravimo, da je **preslikava** $f : A \to B$ urejena trojica (A, B, f), kjer sta A in B neprazni množici, f pa predpis, ki vsakemu elementu $x \in A$ priredi natanko določen element $f(x) \in B$.
Pogosto pišemo: $f : A \to B$, $x \mapsto f(x)$.

Množico A imenujemo **domena**, množico B pa **kodomena** preslikave $f : A \to B$.

Zaloga vrednosti $Z_f \subset B$ preslikave $f : A \to B$ je množica

$$Z_f = \{y \in B \mid f(x) = y \text{ za nek } x \in A\}.$$

Graf Γ_f preslikave $f : A \to B$ je

$$\Gamma_f = \{(x,y) \in A \times B \mid f(x) = y \text{ za nek } x \in A\}.$$

Pravimo, da je preslikava $f : A \to B$ **injektivna**, če za vsak $x,y \in A$ iz $f(x) = f(y)$ sledi $x = y$. Pravimo, da je preslikava $f : A \to B$ **surjektivna**, če za vsak $y \in B$ obstaja tak $x \in A$, da je $f(x) = y$. Preslikava $f : A \to B$ je surjektivna natanko tedaj, ko je $Z_f = B$. Preslikava $f : A \to B$ je **bijektivna**, če je surjektivna in injektivna. Ekvivalentno, preslikava $f : A \to B$ je bijektivna natanko tedaj, ko za vsak $y \in B$ obstaja **natanko določen** $x \in A$, da je $f(x) = y$.

Če je $f : A \to B$ bijektivna, lahko definiramo njej **inverzno (obratno)** preslikavo $f^{-1} : B \to A$ na naslednji način:

$f(x) = y$ natanko tedaj, ko $f^{-1}(y) = x$.

Potem je $f^{-1}(f(x)) = x$ za vse $x \in A$ in $f(f^{-1}(y)) = y$ za vse $y \in B$.

1.2 Definicija realne funkcije več spremenljivk, limita in zveznost

Definicija 1.2.1. Naj bosta $D \subseteq \mathbb{R}^n$ in $B \subset \mathbb{R}$ poljubni neprazni množici. Preslikavo $f : D \to B$ imenujemo **realna funkcija** n **realnih spremenljivk**. Za vsak $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$ torej obstaja natanko en $x_{n+1} \in \mathbb{R}$, da velja $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_{n+1}$.

Spomnimo se, da množico D imenujemo **domena**, množico B pa **kodomena** funkcije f. Večkrat uporabljamo zapis:

$$\begin{array}{rrcl} f: & D & \to & B \\ & (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & f(x_1, \ldots, x_n). \end{array}$$

Pogosto f podamo s predpisom. Potem največjo možno množico $D \subset \mathbb{R}^n$, na kateri je predpis f "dobro definiran" (t.j., največja takšna $D \subset \mathbb{R}^n$, da je $f : D \to \mathbb{R}$ preslikava) včasih imenujemo (naravno) **definicijsko območje** predpisa (funkcije) f in jo označimo z D_f.

Primer 1.2.1. Za točko $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ je s predpisom $d(x,y) = \sqrt{(x-3)^2 + (y+4)^2}$ definirana funkcija dveh spremenljivk, $d : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, kjer $d(x,y)$ predstavlja razdaljo točke (x,y) do točke $(3,-4)$. Splošneje, razdalja med dvema točkama (x,y) in (p,q) je enaka $d(x,y) = \sqrt{(x-p)^2 + (y-q)^2}$.

Graf Γ_f realne funkcije n realnih spremenljivk $f : D \to B$ je množica

$$\Gamma_f = \{(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (x_1,\ldots,x_n) \in D,\ x_{n+1} \in B,\ f(x_1,\ldots,x_n) = x_{n+1}\}.$$

Zaloga vrednosti Z_f funkcije $f : D \to B$ je množica

$$Z_f = \{x_{n+1} \in B \mid (x_1,x_2,\ldots,x_n) \in D, \quad f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = x_{n+1}\}.$$

V posebnem primeru, ko je $n = 2$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, za funkcijo dveh spremenljivk $f : D \to B$, $(x,y) \mapsto f(x,y) = z$, velja

$$\Gamma_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in D,\ z \in B,\ f(x,y) = z\}.$$

Graf Γ_f funkcije $f : D \to B$ dveh spremenljivk je pogosto (a ne nujno) neka ploskev v prostoru $\mathbb{R}^3$, ki leži nad območjem D. Zaloga vrednosti je enaka

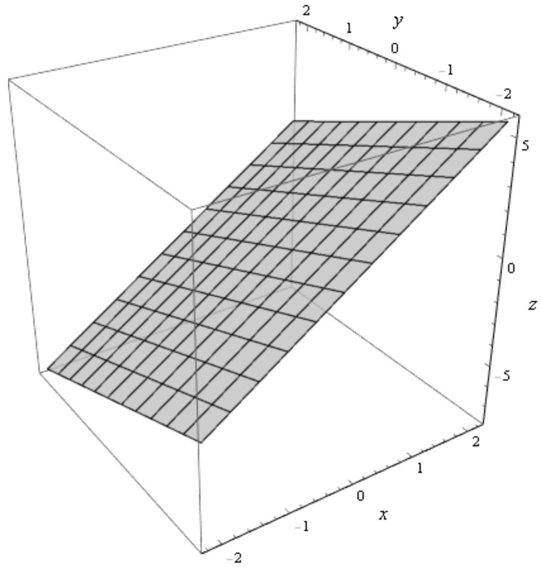
$$Z_f = \{z \in B \mid (x,y) \in D,\ f(x,y) = z\}.$$

Ponavadi (razen, če obstaja tehten razlog, da se odločimo drugače) izberemo $B = \mathbb{R}$. Tako je tudi v naslednjih treh primerih.

Primer 1.2.2. Poiščimo definicijsko območje, zalogo vrednosti in graf funkcije

$$f(x,y) = 2x - y - 1.$$

Graf lahko hitro zagledamo, saj enačba $z = 2x - y - 1$ določa ravnino, katere enačbo lahko tudi prepišemo v $2x - y - z = 1$.



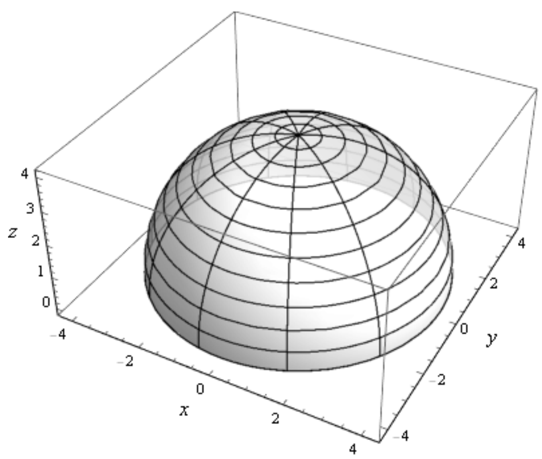
Graf funkcije $f(x,y) = 2x - y - 1$.

V tem primeru je $D_f = \mathbb{R}^2$ in $Z_f = \mathbb{R}$.

Primer 1.2.3. **(a)** Podobno analizirajmo predpis $f(x,y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$. Vrednosti $f(x,y)$ so realna števila, le če je $16 - x^2 - y^2 \geq 0$, torej $x^2 + y^2 \leq 16$. Zato je definicijsko območje $D_f = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 16\}$, kar je krog s središčem $(0,0)$ in polmerom 4.
Za določitev grafa Γ_f zapišemo $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$, kar je ekvivalentno $x^2 + y^2 + z^2 = 16, z \geq 0$. Torej je

$$\Gamma_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 16, z \geq 0\},$$

kar je zapis za zgornjo (severno) polsfero krogle s središčem $(0,0,0)$ in radijem 4.



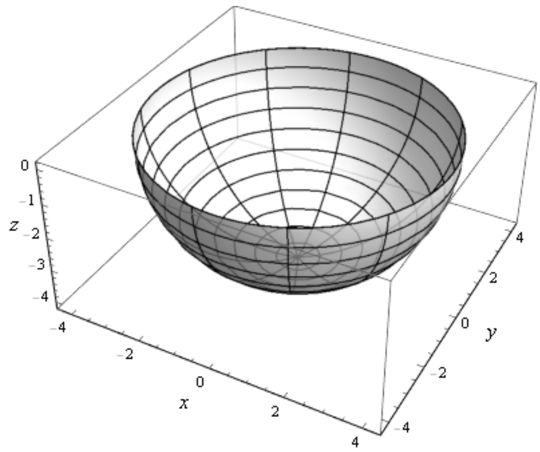
Graf funkcije $f(x,y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$.

Zaloga vrednosti je enaka intervalu $Z_f = [0,4]$.

(b) Podobno predpis $g(x,y) = -\sqrt{16 - x^2 - y^2}$ določa funkcijo z definicijskim območjem $D_g = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 16\}$. Graf Γ_g je enak

$$\Gamma_g = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 16, z \leq 0\},$$

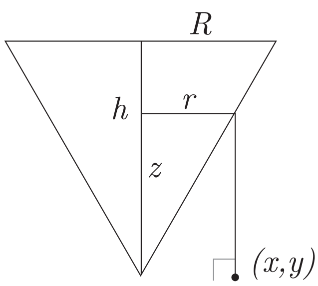
kar je zapis za spodnjo (južno) polsfero krogle s središčem (0,0,0) in radijem 4. Zaloga vrednosti je enaka $Z_g = [-4,0]$.



Graf funkcije $f(x,y) = -\sqrt{16 - x^2 - y^2}$.

V naslednjem primeru opravimo obratno nalogo. Danemu geometrijskemu telesu določimo takšno funkcijo, da je plašč telesa graf funkcije (modelirajmo plašč telesa kot graf funkcije).

Primer 1.2.4. **(a)** Zapišimo funkcijo dveh spremenljivk, katere graf je plašč $\mathcal{S}$ ("sladolednega") stožca z vrhom (0,0,0) z višino $h = 1$ in polmerom osnovne ploskve $R = 1$ (osnovna ploskev stožca leži v ravnini $z = 1$).



Označimo z (x,y,z) poljubno točko na $\mathcal{S}$ in z r oddaljenost točke (x,y) od $(0,0)$ v ravnini $z = 0$. Iz podobnosti trikotnikov sledi $\frac{z}{r} = \frac{h}{R}$, $z = \frac{h}{R}r = r$. Iz Pitagorovega izreka sledi $z = r = \sqrt{x^2 + y^2}$, torej dobimo predpis $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Za domeno D funkcije izberemo krog $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ in za kodomeno interval $B = Z_f = [0,1]$ (za kodomeno B bi lahko izbrali katerikoli interval, ki vsebuje interval $[0,1]$). Torej je $\mathcal{S}$ graf funkcije $f : D \to B$.

(b) Podobno premislimo, da je plašč $\mathcal{S}$ stožca z višino h, osnovno ploskvijo v xy ravnini, polmerom osnovne ploskve R in središčem osnovne ploskve v $(0,0,0)$, graf funkcije $g : D \to B$, kjer je
$g(x,y) = h - \frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}$, $D_g = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq R^2\}$ in $B = Z_g = [0,h]$.

Primer 1.2.5. **(a)** Naj bo $S(x,y)$ ploščina pravokotnika s stranicama dolžin $x,y > 0$. Potem je $S(x,y) = xy$. Torej je $S : D \mapsto \mathbb{R}$ funkcija dveh spremenljivk, kjer je $D = D_S = (0,\infty) \times (0,\infty)$ in $Z_S = (0,\infty)$.

(b) Naj bo $V(x,y,z)$ prostornina (volumen) kvadra z robovi dolžin $x,y,z > 0$. Potem je $V(x,y,z) = xyz$. Torej je $V : D \mapsto \mathbb{R}$ funkcija treh spremenljivk, kjer je $D = D_V = (0,\infty) \times (0,\infty) \times (0,\infty)$ in $Z_V = (0,\infty)$.

Primer 1.2.6. Naj bo $G \subset \mathbb{R}^3$ območje v prostoru in $[0,t_0]$ časovni interval, kjer je $t_0 > 0$. S $T(x,y,z,t)$ označimo temperaturo v točki $(x,y,z) \in G$ ob času $t \in [0,t_0]$ in $D = G \times [0,t_0]$. Potem je $T : D \to \mathbb{R}$ funkcija štirih spremenljivk.

Spomnimo se še primera iz uvodnega razdelka.

Primer 1.2.7. Naj bo $G \subset \mathbb{R}^3$ območje v prostoru in $[0,t_0]$ interval, kjer je $t_0 > 0$. Na območju G opazujemo fluid v časovnem intervalu $[0,t_0]$. Z $\vec{v}(x,y,z,t)$ označimo vektor hitrosti fluida v točki (x,y,z) ob času t. Preslikava $F : G \times [0,t_0] \to \mathbb{R}^3$,

$$F(x,y,z,t) = \vec{v}(x,y,z,t) = (v_1(x,y,z,t), v_2(x,y,z,t), v_3(x,y,z,t))$$

podaja (dinamično) hitrostno vektorsko polje fluida. Vsaka izmed koordinatnih funkcij $v_i : G \times [0,t_0] \to \mathbb{R}$ za $i = 1,2,3$ je funkcija štirih spremenljivk.

Naj bo n naravno število, $R > 0$ in $(a_1,a_2,\ldots,a_n) \in \mathbb{R}^n$. Z oznako $K((a_1,a_2,\ldots,a_n),R)$ označimo (n-dimenzionalno) **zaprto kroglo** v $\mathbb{R}^n$ s središčem $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ in radijem $R > 0$:

$$K((a_1,a_2,\ldots,a_n),R) = \{(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n : (x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+\cdots+(x_n-a_n)^2 \leq R^2\}.$$

Podobno z $O((a_1,a_2,\ldots,a_n),R)$ označimo (n-dimenzionalno) **odprto kroglo** v $\mathbb{R}^n$ s središčem $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ in radijem $R > 0$:

$$O((a_1,a_2,\ldots,a_n),R) = \{(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n : (x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+\cdots+(x_n-a_n)^2 < R^2\}.$$

V primeru, ko je $n = 2$, je $K((a_1,a_2),R)$ zaprti krog v ravnini (vključno z robno krožnico) in $O((a_1,a_2),R)$ odprti krog v ravnini (brez robne krožnice). Podobno je v primeru $n = 3$ množica $K((a_1,a_2,a_3),R)$ zaprta krogla v prostoru $\mathbb{R}^3$ (vključno z robno sfero) in $O((a_1,a_2,a_3),R)$ odprta krogla v prostoru $\mathbb{R}^3$ (brez robne sfere).

Pravimo, da je množica $D \subset \mathbb{R}^n$ **odprta**, če za vsak $(a_1,a_2,\ldots,a_n) \in D$ obstaja tak $r > 0$ (lahko je zelo majhen), da je $O((a_1,a_2,\ldots,a_n),r) \subset D$.

Definicija 1.2.2. Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta množica in $(a_1,a_2,\ldots,a_n) \in D$. Pravimo, da je $L \in \mathbb{R}$ **limita funkcije** $f : D \to \mathbb{R}$ v točki $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da za vse $(x_1,\ldots,x_n) \in O((a_1,a_2,\ldots,a_n),\delta)$, $(x_1,\ldots,x_n) \neq (a_1,a_2,\ldots,a_n)$, velja, da je $f(x_1,\ldots,x_n) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ (oziroma enakovredno, da je $|f(x_1,\ldots,x_n) - L| < \varepsilon$). Oznaka:

$$L = \lim_{(x_1,\ldots,x_n)\to(a_1,\ldots,a_n)} f(x_1,\ldots,x_n).$$

Pravimo, da je $f : D \to \mathbb{R}$ **zvezna** v točki $(a_1,a_2,\ldots,a_n) \in D$, če limita

$$\lim_{(x_1,\ldots,x_n)\to(a_1,\ldots,a_n)} f(x_1,\ldots,x_n)$$

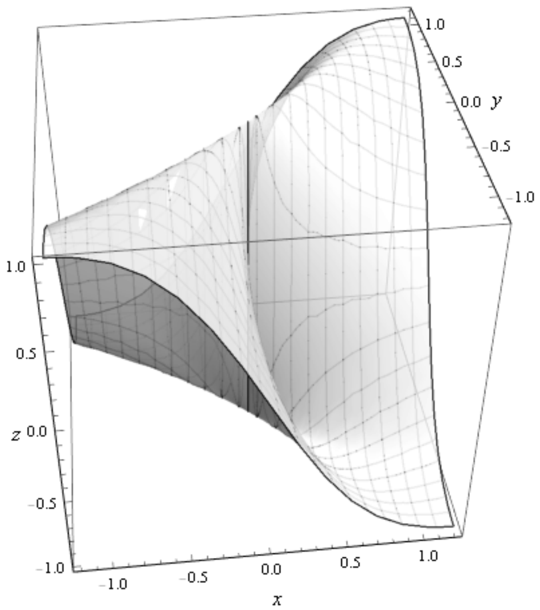
obstaja in je enaka $f(a_1,a_2,\ldots,a_n)$. Pravimo tudi, da je f zvezna na D, če je zvezna v vsaki točki $(a_1,\ldots,a_n) \in D$.

Intuitivno gledano ima f limito L v $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ tedaj, ko se $f(x_1,\ldots,x_n)$ približuje k L, medtem ko "se približujemo" k $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ po točkah $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, ki so različne od $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$.

Graf funkcije f, ki je zvezna v $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ je v tej točki "nepretrgan".

Primer 1.2.8. Naj bo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ podana z

$$f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2} \quad \text{za} \quad (x,y) \neq (0,0) \quad \text{in} \quad f(0,0) = 0.$$



Graf funkcije $f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$.

Potem f ni zvezna v $(0,0)$, saj za vse $x \neq 0$ velja $f(x,x) = 1$ in $f(x,-x) = -1$.

Torej
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$
ne obstaja (v kolikor bi limita L obstajala, bi za dovolj majhne x vrednosti $f(x,x)$ in $f(x,-x)$ morale biti poljubno blizu L).

1.3 Parcialni odvodi, gradient, diferencial, smerni odvodi, parcialni odvodi višjega reda, verižno pravilo, Taylorjeva formula

Definicija 1.3.1. Naj bo $D \subset \mathbb{R}^n$ odprta množica, $(a_1,\ldots,a_n) \in D$, $f : D \to \mathbb{R}$, $(x_1,\ldots,x_n) \mapsto f(x_1,\ldots,x_n)$ funkcija n spremenljivk in $i \in \{1,\ldots,n\}$. Pravimo, da je f parcialno odvedljiva po i-ti spremenljivki, če obstaja limita
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a_1,\ldots,a_{i-1},a_i+h,a_{i+1},\ldots,a_n) - f(a_1,\ldots,a_n)}{h}.$$
V tem primeru to limito označimo z $f_{x_i}(a_1,\ldots,a_n)$ ali z $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1,\ldots,a_n)$ in jo imenujemo **parcialni odvod** funkcije f po i-ti spremenljivki x_i v točki $(a_1,\ldots,a_n)$.
Pravimo tudi, da je f **parcialno odvedljiva na** D, če je parcialno odvedljiva v vseh točkah $(a_1,\ldots,a_n) \in D$.

Opomnimo, da je parcialni odvod $f_{x_i}(a_1,\ldots,a_n) = g'(a_i)$, kjer je $g'(a_i)$ običajni odvod realne funkcije ene realne spremenljivke $g : x_i \mapsto f(a_1,\ldots,a_{i-1},x_i,a_{i+1},\ldots,a_n)$, definirane na neki okolici točke a_i. Res,
$$f_{x_i}(a_1,\ldots,a_n) = \lim_{h\to 0} \frac{g(a_i+h)-g(a_i)}{h} = g'(a_i).$$

Torej za parcialne odvode veljajo vsa običajna pravila za odvajanje (pri primernih predpostavkah).

Situacija za $n=2$. Naj bo $D \subset \mathbb{R}^2$ odprta množica $f : D \to \mathbb{R}$ parcialno odvedljiva funkcija dveh spremenljivk. Parcialna odvoda po x in po y funkcije f v točki $(a,b) \in D$ sta enaka
$$f_x(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h},$$
$$f_y(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \lim_{k\to 0}\frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k}.$$

Parcialna odvoda torej izračunamo tako, da odvajamo funkcijo po prvi spremenljivki oziroma po drugi spremenljivki po znanih pravilih za odvajanje funkcij ene spremenljivke, pri čemer "vzamemo preostalo spremenljivko za konstantno".

Ker sta parcialna odvoda v točki (a,b) običajna odvoda funkcij ene spremenljivke $f_x(a,b) = z_1'(a)$, kjer je $z_1(x) = f(x,b)$ in $f_y(a,b) = z_2'(b)$, kjer je $z_2(y) = f(a,y)$, pri primernih predpostavkah geometrijsko predstavljata smerna koeficienta krivulj, ki ju dobimo kot presek ravnin $y = b$ in $x = a$ z grafom funkcije f.

Primer 1.3.1. Naj bo $f(x,y) = 2x^6y + x^3y^2$. Potem je $f_x(x,y) = 12x^5y + 3x^2y^2$ in $f_y(x,y) = 2x^6 + 2x^3y$.

Primer 1.3.2. Naj bo

$$f(x,y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2} \quad \text{za} \quad (x,y) \neq (0,0) \quad \text{in} \quad f(0,0) = 0.$$

V prejšnjem razdelku smo ugotovili, da ta funkcija ni zvezna, bomo pa pokazali, da je parcialno odvedljiva na vsem $\mathbb{R}^2$. Za $(x,y) \neq (0,0)$ je

$$f_x(x,y) = \frac{2y(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

in

$$f_y(x,y) = \frac{2x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2},$$

kar sledi iz pravila za odvajanje kvocienta funkcij. Odvoda v točki $(0,0)$ je potrebno izračunati posebej:

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0 - 0}{h} = 0,$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0 - 0}{h} = 0.$$

Zgornji primer ilustrira, da pojem parcialne odvedljivosti za funkcije več spremenljivk ni primeren analog pojma odvedljivosti funkcij ene spremenljivke, saj se lahko zgodi, da obstajajo funkcije, ki so parcialno odvedljive povsod, a nimajo želenih lastnosti, ki bi jih morda pričakovali (in potrebovali pri ustrezni analizi fizikalnih pojavov). Ustrezna posplošitev pojma odvedljivosti funkcij v kontekst funkcij večih spremenljivk je pojem diferenciabilnosti, ki ga bomo spoznali v nadaljevanju poglavja.

Primer 1.3.3. V primeru, ko $T(x,y,z)$ predstavlja temperaturo v točki (x,y,z), parcialni odvod $T_x(x,y,z)$ določa hitrost spreminjanja temperature (toplotni tok) v točki (x,y,z) vzdolž premice, vzporedne abscisni osi.

Primer 1.3.4. Naj bo $f(x,y,z) = x^2y + x\sin(x^3)z^2 + y\sqrt{2z+1}$. Potem je

$$f_x(x,y,z) = 2xy + \sin(x^3)z^2 + 3x^3\cos(x^3)z^2,$$

$$f_y(x,y,z) = x^2 + \sqrt{2z+1},$$

$$f_z(x,y,z) = 2x\sin(x^3)z + \frac{y}{\sqrt{2z+1}}.$$

Poglejmo si primer funkcije f, za katero $f_y(0,0)$ obstaja, $f_x(a,b)$ pa ne.

Primer 1.3.5. Naj bo

$$f(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2} \quad \text{za} \quad (x,y) \neq (0,0) \quad \text{in} \quad f(0,0) = 0.$$

Potem za $(x,y) \neq (0,0)$ velja

$$f_x(x,y) = -\frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2},$$

$$f_y(x,y) = -\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

Nadalje je

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0.$$

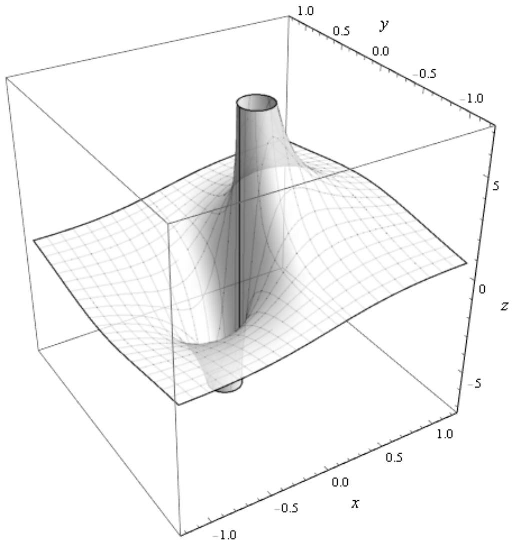
Toda

$$\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \frac{2/h-0}{h} = \frac{2}{h^2}$$

za vse $h \neq 0$ in zato funkcija f ni parcialno odvedljiva v $(0,0)$ po spremenljivki x, saj limita

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}$$

ne obstaja.



Graf funkcije $\frac{2x}{x^2+y^2}$.

Z zamenjavo neodvisnih spremenljivk v zgornjem primeru dobimo primer funkcije, kjer velja ravno obratno.

Primer 1.3.6. Naj bo

$$f(x,y) = \frac{2y}{x^2 + y^2} \quad \text{za} \quad (x,y) \neq (0,0) \quad \text{in} \quad f(0,0) = 0.$$

Potem je $f_x(0,0) = 0$ in funkcija f ni parcialno odvedljiva v točki $(0,0)$ po spremenljivki y.

Kot smo že omenili, običajna parcialna odvedljivost ni dovolj "močan" matematičen pojem. Primerna posplošitev pojma odvedljivosti v kontekst funkcij več spremenljivk je diferenciabilnost, ki omogoča uporabo v praksi pomembnih matematičnih orodij, kot je na primer pravilo za odvajanje sestavljenih funkcij (verižno pravilo), ki ga bomo spoznali v nadaljevanju.

Definicija 1.3.2. (vir: [4]) Naj bo $D \subset \mathbb{R}^n$ odprta množica, $(a_1, \ldots, a_n) \in D$, $f : D \to \mathbb{R}$, $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto f(x_1, \ldots, x_n)$ funkcija n spremenljivk. Pravimo, da je f **diferenciabilna** v točki $(a_1, \ldots, a_n)$, če obstaja tak vektor $(A_1, \ldots, A_n) \in \mathbb{R}^n$, da velja

$$\lim_{(h_1,\ldots,h_n)\to(0,\ldots,0)} \frac{f(a_1 + h_1, \ldots, a_n + h_n) - f(a_1, \ldots, a_n) - (A_1 h_1 + \ldots + A_n h_n)}{\sqrt{h_1^2 + \cdots + h_n^2}} = 0.$$

Funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ je **diferenciabilna na** D, če je diferenciabilna v vsaki točki $(a_1, \ldots, a_n) \in D$.

Opomba (a) Če je f diferenciabilna v točki $(a_1, \ldots, a_n)$, potem je f tudi zvezna v

$(a_1, \ldots, a_n)$, saj je

$$\lim_{(h_1,\ldots,h_n)\to(0,\ldots,0)} f(a_1 + h_1, \ldots, a_n + h_n) = f(a_1, \ldots, a_n).$$

(**b**) Funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ je diferenciabilna v točki $(a_1, \ldots, a_n)$ natanko tedaj, ko obstaja taka zvezna funkcija g, definirana na neki okolici U točke $(0, \ldots, 0)$ v $\mathbb{R}^n$, in tak vektor $(A_1, \ldots, A_n) \in \mathbb{R}^n$, da je

$$f(a_1+h_1, \ldots, a_n+h_n) = f(a_1, \ldots, a_n)+(A_1h_1+\ldots+A_nh_n)+g(h_1, \ldots, h_n)\sqrt{h_1^2 + \cdots + h_n^2}$$

za vse takšne $(h_1, \ldots, h_n) \in U$, da je $(a_1 + h_1, \ldots, a_n + h_n) \in D$ in

$$\lim_{(h_1,\ldots,h_n)\to(0,\ldots,0)} g(h_1, \ldots, h_n) = 0.$$

(**c**) Vektor $(A_1, \ldots, A_n) \in \mathbb{R}^n$ je enolično določen in velja

$$(A_1, \ldots, A_n) = (f_{x_1}(a_1, \ldots, a_n), \ldots, f_{x_n}(a_1, \ldots, a_n)).$$

Res, če postavimo v definicijo diferenciabilnosti $h_1 = 0, \ldots, h_{i-1} = 0, h_{i+1} = 0, \ldots, h_n = 0$ in pošljemo $h_i \to 0$, sledi $A_i = f_{x_i}(a_1, \ldots, a_n)$ za vse $i = 1, \ldots, n$.

Vektor $(f_{x_1}(a_1, \ldots, a_n), \ldots, f_{x_n}(a_1, \ldots, a_n))$ imenujemo **gradient** funkcije f v točki $(a_1, \ldots, a_n)$ in ga označimo z

$$\text{grad } f(a_1, \ldots, a_n) = \nabla f(a_1, \ldots, a_n).$$

Izkaže se, da gradient določa smer najhitrejšega naraščanja funkcije f v točki $(a_1, \ldots, a_n)$.

Diferencial (totalni diferencial) $Df_{(a_1,\ldots,a_n)}(h_1, \ldots, h_n)$ funkcije f v točki $(a_1, \ldots, a_n)$, izračunan na vektorju $\vec{h} = (h_1, \ldots, h_n)$, je definiran z

$$Df_{(a_1,\ldots,a_n)}(h_1, \ldots, h_n) = \text{grad } f(a_1, \ldots, a_n) \cdot \vec{h},$$

kjer $\cdot$ označuje skalarni produkt. Torej je

$$Df_{(a_1,\ldots,a_n)}(h_1, \ldots, h_n) = f_{x_1}(a_1, \ldots, a_n)h_1 + \cdots + f_{x_n}(a_1, \ldots, a_n)h_n.$$

Če je f diferenciabilna, potem je "za majhne" $h_1, \ldots, h_n$ diferencial $Df_{(a_1,\ldots,a_n)}(h_1, \ldots, h_n)$ "dober približek" za vrednost $f(a_1 + h_1, \ldots, a_n + h_n)$, torej za vrednost funkcije f v točki, ki je "blizu" točke $(a_1, \ldots, a_n)$. Pravimo, da je vrednost $Df_{(a_1,\ldots,a_n)}(h_1, \ldots, h_n)$ linearna aproksimacija vrednosti $f(a_1 + h_1, \ldots, a_n + h_n)$.

V posebnem primeru, ko je $n = 2$ je gradient grad $f(a,b)$ funkcije f v točki (a,b) je enak

$$\text{grad} f(a,b) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right) = (f_x(a,b), f_y(a,b)),$$

diferencial $Df_{(a,b)}(h,k)$ funkcije f v točki (a,b), izračunan na (h,k), pa je enak

$$Df_{(a,b)}(h,k) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \cdot h \; + \; \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \cdot k = f_x(a,b)h + f_y(a,b)k.$$

Že znani primer pokaže, da iz obstoja vseh parcialnih odvodov funkcije f v neki točki ne sledi diferenciabilnost funkcije f v tej točki.

Primer 1.3.7. Naj bo

$$f(x,y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2} \;\text{ za }\; (x,y) \neq (0,0) \;\text{ in }\; f(0,0) = 0.$$

Pokazali smo že, da je $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ in da funkcija f ni zvezna v $(0,0)$. Ker pa f ni zvezna v $(0,0)$, tudi ni diferenciabilna v $(0,0)$.

Naslednji izrek pa pokaže, da v kolikor vsi parcialni odvodi funkcije f obstajajo in so zvezne funkcije (v tem primeru pravimo, da je f parcialno zvezno odvedljiva funkcija), potem je f tudi diferenciabilna.

Izrek 1.3.3. Naj bo $D \subset \mathbb{R}^n$ odprta množica in $f : D \to \mathbb{R}$ parcialno zvezno odvedljiva funkcija na D. Potem je f tudi diferenciabilna na D.

Dokaz. Navedimo le idejo dokaza v primeru $n = 2$, ideja dokaza za splošen n je zelo podobna.
Naj bo $(a,b) \in D$. Potem za "dovolj majhne" h in k iz enakosti

$$f(a+h,b+k) = f(a,b) + (f(a+h,b+k) - f(a,b+k)) + (f(a,b+k) - f(a,b)),$$

iz Lagrangeovega izreka [14, 17] in zveznosti parcialnih odvodov sledi, da je

$$f(a+h,b+k) \approx f(a,b) + f_x(a,b+k)h + f_y(a,b)k$$

$$\approx f(a,b) + f_x(a,b)h + f_y(a,b)k = f(a,b) + Df_{(a,b)}(h,k).$$

□

Naj bo $D \subset \mathbb{R}^2$ odprta množica in $f : D \to \mathbb{R}$ diferenciabilna funkcija v $(a,b) \in D$. Potem "za majhne" h in k velja

$$f(a+h,b+k) \approx f(a,b) + f_x(a,b)h + f_y(a,b)k.$$

Označimo $a+h = x$, $b+k = y$ in $f(a,b) + f_x(a,b)h + f_y(a,b)k = z$. Potem sledi, da je

$$f(x,y) \approx f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) = z.$$

Slednje pomeni, da desna stran dobro aproksimira vrednost $f(x,y)$ za (x,y) "blizu" (a,b). Kaj je geometrijski pomen enačbe

$$f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) = z$$

oziroma enakovredno enačbe

$$f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)-z+f(a,b)=0?$$

Gre za enačbo **tangentne ravnine** v točki $T(a,b,f(a,b))$ na graf Γ_f funkcije f, kar navedimo na tem mestu brez izpeljave.

1.3.1 Smerni odvod

Definicija 1.3.4. Naj bo $G \subset \mathbb{R}^n$ odprta množica, $(a_1,\dots,a_n) \in G$ in $f : G \to \mathbb{R}$. Naj bo $\vec{e} = (e_1,\dots,e_n)$ enotski vektor ($|\vec{e}| = \sqrt{e_1^2+\cdots+e_n^2} = 1$). Definiramo funkcijo ene spremenljivke

$$F(t) = f(a_1+te_1, a_2+te_2,\dots,a_n+te_n)$$

na odprti okolici $t=0$. Če je F odvedljiva v točki $t=0$, potem $F'(0)$ imenujemo **smerni odvod** funkcije f v točki $(a_1,\dots,a_n)$ v smeri vektorja $\vec{e}$ in ga označimo z $\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(a_1,\dots,a_n)$. Velja torej

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(a_1,\dots,a_n) = F'(0) = \lim_{t\to 0}\frac{F(t)-F(0)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{f(a_1+te_1,\dots,a_n+te_n)-f(a_1,\cdots,a_n)}{t}.$$

Opomba. Iz zgornje definicije je razvidno, da smerni odvod posplošuje pojem parcialnega odvoda funkcije f. Res, za enotski vektor $\vec{e} = (0,\dots,0,1,0,\dots,0)$ (kjer je 1 na i-ti koordinati) velja

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(a_1,\dots,a_n) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1,\dots,a_n) = f_{x_i}(a_1,\dots,a_n),$$

torej je smerni odvod v tem primeru enak parcialnemu odvodu funkcije f po i-ti spremenljivki.

Izrek 1.3.5. Naj bo $G \subset \mathbb{R}^n$ odprta množica in $(a_1,\dots,a_n) \in G$. Če je funkcija $f : G \to \mathbb{R}$ diferenciabilna v točki $(a_1,\dots,a_n)$, potem ima f smerni odvod v smeri poljubnega enotskega vektorja $\vec{e} = (e_1,\dots,e_n)$ in velja

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(a_1,\dots,a_n) = Df_{(a_1,\dots,a_n)}(e_1,\dots,e_n) = \text{grad } f(a_1,\dots,a_n)\cdot\vec{e}$$

$$= f_{x_1}(a_1,\dots,a_n)e_1+\cdots+f_{x_n}(a_1,\dots,a_n)e_n.$$

Dokaz. Naj bo $f : G \to \mathbb{R}$ diferenciabilna v točki $(a_1, \dots, a_n)$, naj bo $\vec{e} = (e_1, \dots, e_n)$ poljuben enotski vektor in

$$F(t) = f(a_1 + te_1, a_2 + te_2, \dots, a_n + te_n).$$

Ker je f diferenciabilna v točki $(a_1, \dots, a_n)$, obstaja takšna funkcija g (definirana na okolici točke $(0, \dots, 0)$ v $\mathbb{R}^n$), da je

$$\lim_{(h_1,\dots,h_n)\to(0,\dots,0)} g(h_1, \dots, h_n) = 0$$

in

$$\begin{aligned} F(t) - F(0) &= f(a_1 + te_1, \dots, a_n + te_n) - f(a_1, \dots, a_n) \\ &= Df_{(a_1,\dots,a_n)}(te_1, \dots, te_n) + g(te_1, \dots, te_n)|t|. \end{aligned}$$

Sledi

$$F(t) - F(0) = (f_{x_1}(a_1, \dots, a_n)e_1 + \dots + f_{x_n}(a_1, \dots, a_n)e_n)t + g(te_1, \dots, te_n)|t|$$

in zato je

$$\frac{F(t) - F(0)}{t} = f_{x_1}(a_1, \dots, a_n)e_1 + \dots + f_{x_n}(a_1, \dots, a_n)e_n \pm g(te_1, \dots, te_n).$$

Ko pošljemo $t \to 0$, sklep izreka sledi. □

Posebej si poglejmo primer, ko je $n = 2$. Tedaj je

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(a,b) &= f_x(a,b)e_1 + f_y(a,b)e_2 \\ &= Df_{(a,b)}(e_1, e_2) = \text{grad } f(a,b) \cdot \vec{e} \\ &= |\text{grad } f(a,b)||\vec{e}| \cos\varphi = |\text{grad } f(a,b)| \cos\varphi, \end{aligned}$$

kjer je φ kot med gradientnim vektorjem grad $f(a,b) = (f_x(a,b), f_y(a,b))$ in enotskim vektorjem $\vec{e} = (e_1, e_2)$. Smerni odvod je torej največji natanko tedaj, ko je $\cos\varphi = 1$, torej ko je kot $\varphi = 0$ in je zato

$$\text{grad } f(a,b) = k\vec{e}$$

za nek $k \geq 0$ (ko vektorja grad $f(a,b)$ in $\vec{e}$ kažeta v isto smer). Torej gradient grad $f(a,b)$ kaže v smeri najhitrejšega naraščanja funkcije f v točki (a,b) in smerni odvod v tej smeri je enak dolžini gradienta

$$|\text{grad } f(a,b)| = \sqrt{f_x(a,b)^2 + f_y(a,b)^2}.$$

Če je grad $f(a,b)$ neničeln vektor, je smer najhitrejšega naraščanja funkcije f v točki (a,b) določena z enotskim vektorjem

$$\vec{e} = \frac{1}{|\text{grad } f(a,b)|}\text{grad } f(a,b) = \frac{1}{\sqrt{f_x(a,b)^2 + f_y(a,b)^2}}(f_x(a,b), f_y(a,b)).$$

Smerni odvod je najmanjši natanko tedaj, ko je $\cos\varphi = -1$, torej ko je kot $\varphi = \pi$ in je zato

$$\operatorname{grad} f(a,b) = k\vec{e}$$

za nek $k \leq 0$ (ko vektorja $\operatorname{grad} f(a,b)$ in $\vec{e}$ kažeta v nasprotno smer). Analogno velja v poljubni dimenziji n.

Primer 1.3.8. Vzemimo funkcijo s predpisom $f(x,y) = x^2y$. Smerni odvod v točki $T(1,2)$ in v smeri vektorja $\vec{e}_1 = (1,0)$ je enak

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}_1}(1,2) = \operatorname{grad} f(1,2) \cdot (1,0) = (4,1) \cdot (1,0) = 4 = f_x(1,2).$$

Smerni odvod v točki T v smeri vektorja $\vec{v} = (2,3)$ pa je enak

$$\frac{\partial f}{\partial \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}}(1,2) = \operatorname{grad} f(1,2) \cdot \frac{(2,3)}{|(2,3)|} = (4,1) \cdot \frac{(2,3)}{\sqrt{13}} = \frac{11}{\sqrt{13}}.$$

Obrat izreka 1.3.5 ne velja (iz obstoja smernih odvodov v poljubni smeri v splošnem ne sledi, da je funkcija diferenciabilna, niti ne zvezna). Za ilustracijo si poglejmo naslednji primer.

Primer 1.3.9. (vir: [7]) Naj bo

$$f(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2} \quad \text{za} \quad (x,y) \neq (0,0) \quad \text{in} \quad f(0,0) = 0.$$

Potem f ni zvezna v točki $(0,0)$ in zato tudi ni diferenciabilna v točki $(0,0)$. Za poljuben enotski vektor $\vec{e} = (e_1, e_2), e_2 \neq 0$ pa velja, da je

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(te_1, te_2) - f(0,0)}{t} = \frac{e_1^2}{e_2}.$$

1.3.2 Parcialni odvodi višjega reda

Definicija 1.3.6. Naj bo $D \subset \mathbb{R}^n$ odprta množica in $f : D \to \mathbb{R}$ parcialno odvedljiva funkcija. **Parcialni odvodi drugega reda** v točki $(a_1, \ldots, a_n) \in D$ so definirani kot parcialni odvodi prvih parcialnih odvodov, torej

$$f_{x_ix_j}(a_1, \ldots, a_n) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a_1, \ldots, a_n) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(a_1, \ldots, a_n)$$

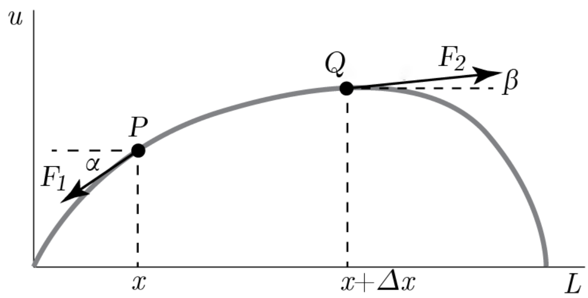
za $i,j = 1, \ldots, n$. **Parcialne odvode višjih redov** definiramo analogno (oz. iterativno z nadaljnjim parcialnim odvajanjem). Pravimo, da je f n-krat parcialno odvedljiva na D, če vsi parcialni odvodi do vključno n-tega reda obstajajo v vsaki točki iz D.

Krajše oznake za višje parcialne odvode, ki jih pogosto uporabljamo:

$f_x, f_y, f_{xx}, f_{yy}, f_{xy}, f_{yx}, f_{xxx}, \ldots$

Parcialna diferencialna enačba je enačba, v katerih nastopa funkcija večih (vsaj dveh) spremenljivk in/ali njeni parcialni odvodi (prvega ali višjih redov). Poglejmo si zanimiv fizikalni primer iz [5].

Primer 1.3.10. Valovna enačba. Modelirajmo vibrajočo struno. Želimo izpeljati enačbo (parcialno diferencialno enačbo), ki bo modelirala majhne transverzalne vibracije elastične strune, kot je na primer violinska struna. Struno položimo na abscisno os, jo raztegnemo na dolžino $L > 0$ in pripnemo na koncih pri $x = 0$ in $x = L$. Problem, ki nas zanima, je določitev vibracij strune, to pomeni izračun odmika $u(x,t)$ v točki $x \in [0,L]$ in ob poljubnem času $t > 0$. Odmik $u(x,t)$ je rešitev parcialne diferencialne enačbe, ki jo bomo v tem primeru izpeljali. Ker ne želimo, da bi bila ta enačba prezapletena privzamemo določene fizikalne poenostavitve, kar pomeni, da bo izračunana rešitev tako dober model za dejansko naravno situacijo, kolikor je v konkretni situaciji tem poenostavitvam zadoščeno. Privzamemo naslednje fizikalne poenostavitve oziroma predpostavke:
1. Masa strune na enoto dolžine je konstantna ("homogena struna"). Struna je popolnoma elastična in se ne upira upogibanju.
2. Napetost, nastala zaradi raztezanja strune pred vpenjanjem na obeh koncih, je tako velika, da lahko vpliv gravitacijske sile na struno ("ki struno vleče navzdol") zanemarimo.
3. Struna izvaja majhna transverzalna gibanja v vertikalni smeri, to je, vsak delček strune se premika strogo vertikalno na način, da sta odmik in naklon v vsaki točki strune majhna po absolutni vrednosti.



Za izpeljavo valovne enačbe analizirajmo sile, ki delujejo na majhen delček strune, kar je tipičen pristop v mehaniki in drugje. Levo krajišče majhnega delčka označimo s $P(x,y)$, desno pa s $Q(x + h, y + k)$, $h = \Delta x$ in $k = \Delta y$ sta "majhni" pozitivni števili. Ker se struna ne upira upogibanju, sila deluje tangencialno na krivuljo, ki določa obliko strune v vsaki točki. Naj bosta F_1 in F_2 zaporedoma velikosti sil v krajiščih P in Q. Ti točki se po predpostavki gibljeta le vertikalno, torej ni gibanja v horizontalni smeri. Torej morata biti horizontalni komponenti konstantni, to pozitivno konstanto označimo z oznako

F. Na silo gledamo formalno kot na vektor in v izpeljavi primerjamo ustrezne komponente sil v točkah P in Q. Z α označimo kot med tangento in vzporednico z abscisno osjo v točki P, z β pa označimo kot med tangento in vzporednico z abscisno osjo v točki Q. Sledi, da je

$$F_1 \cos\alpha = F_2 \cos\beta = F.$$

Vertikalni komponenti sil sta $-F_1 \sin\alpha$ in $F_2 \sin\beta$. Po 2. Newtonovem zakonu je velikost vertikalne komponente rezultante približno enaka produktu mase ρl in pospeška $u_{tt}(x_1,t)$, kjer je $x_1 \in [x, x+h]$. Tu ρ označuje konstantno dolžinsko gostoto in l označuje dolžino delčka nepremaknjene strune (geometrijsko jasno je, da $l \to 0$ in $(x_1,t) \to (x,t)$, ko $h \to 0$, $k \to 0$ in tedaj tudi $\frac{h}{l} \to 1$ zaradi fizikalne predpostavke, da je naklon strune majhen). Torej je

$$F_2 \sin\beta - F_1 \sin\alpha = \rho l u_{tt}(x_1,t).$$

Po deljenju zgornje enačbe s $F_1 \cos\alpha = F_2 \cos\beta = F$ in z l dobimo

$$\frac{\tan\beta - \tan\alpha}{l} = \frac{\rho}{F} u_{tt}(x_1, t).$$

Tangens kota, ki ga tangenta na struno v dani točki oklepa z abscisno osjo, je enak parcialnemu odvodu odmika po spremenljivki x. Če označimo $c = \sqrt{F/\rho}$, sledi

$$\frac{u_x(x+h,t) - u_x(x,t)}{l} = c^2 u_{tt}(x_1,t).$$

Če dodatno predpostavimo, da je u dvakrat parcialno zvezno odvedljiva, potem iz Lagrangeovega izreka sledi, da za nek $x_2 \in [x, x+h]$ velja

$$\frac{u_{xx}(x_2,t)h}{l} = c^2 u_{tt}(x_1,t).$$

Pošljemo $h \to 0$, $k \to 0$ in dobimo

$$u_{xx}(x,t) = c^2 u_{tt}(x,t).$$

Ta enačba je znana kot enorazsežna valovna enačba in jo bomo v nadaljevanju rešili z D'Alembertovo metodo.

Primer 1.3.11. Naj bo $f(x,y,z) = x^2 y + x\sin(x^3)z^2 + y\sqrt{2z+1}$ za $x,y \in \mathbb{R}$ in $z > -\frac{1}{2}$. Potem je

$$\begin{aligned}
f_x(x,y,z) &= 2xy + \sin(x^3)z^2 + 3x^3\cos(x^3)z^2,\\
f_y(x,y,z) &= x^2 + \sqrt{2z+1},\\
f_z(x,y,z) &= 2x\sin(x^3)z + \frac{y}{\sqrt{2z+1}},\\
f_{xx}(x,y,z) &= 2y + 12x^2\cos(x^3)z^2 - 9x^5\sin(x^3)z^2,\\
f_{yy}(x,y,z) &= 0,\\
f_{xy}(x,y,z) &= 2x,\\
f_{yx}(x,y,z) &= 2x,\\
f_{zz}(x,y,z) &= 2x\sin(x^3) - y(2z+1)^{-3/2},\\
f_{yz}(x,y,z) &= (2z+1)^{-1/2},\\
f_{zy}(x,y,z) &= (2z+1)^{-1/2},\\
f_{xz}(x,y,z) &= 2z\sin(x^3) + 6x^3\cos(x^3)z,\\
f_{zx}(x,y,z) &= 2z\sin(x^3) + 6x^3\cos(x^3)z,\\
f_{xyz}(x,y,z) &= 0,\\
f_{xyx}(x,y,z) &= 2,\\
f_{zzz}(x,y,z) &= 3y(2z+1)^{-5/2}.
\end{aligned}$$

V zgornjem primeru opazimo, da se zgodi, da sta enaka mešana odvoda f_{xy} in f_{yx} in da sta enaka mešana odvoda f_{yz} in f_{zy}, podobno velja tudi za mešana odvoda f_{xz} in f_{zx}. Bralcu se je morda postavilo vprašanje, ali se to zgodi vedno, ko mešani odvodi obstajajo. Odgovor na to vprašanje je negativen, kot ilustrira naslednji primer iz [7].

Primer 1.3.12. Naj bo

$$f(x,y) = \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} \quad \text{za} \quad (x,y) \neq (0,0) \quad \text{in} \quad f(0,0) = 0.$$

Funkcija f je zvezna na $\mathbb{R}^2$. Za $(x,y) \neq (0,0)$ je

$$\begin{aligned}
f_x(x,y) &= \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2},\\
f_y(x,y) &= \frac{x^5 - 4x^3y^2 - xy^4}{(x^2+y^2)^2},
\end{aligned}$$

$f_x(0,0) = 0$ in $f_y(0,0) = 0$. Funkciji f_x in f_y sta zvezni na vsej ravnini $\mathbb{R}^2$. Toda

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_x(0,h) - f_x(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h^5}{h^5} = -1$$

in

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_y(h,0) - f_y(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^5}{h^5} = 1.$$

V zgornjem primeru sta $f_{xy}(0{,}0)$ in $f_{yx}(0{,}0)$ različna. Razlog za to je, da vsaj ena izmed funkcij f_{xy} in f_{yx} ni zvezna funkcija v $(0{,}0)$, kar sledi iz naslednjega izreka, ki ga je mogoče dokazati z netrivialno uporabo Lagrangeovega izreka.

Izrek 1.3.7. (vir: [12], [16, str. 101]) Naj bo $D \subset \mathbb{R}^n$ odprta množica, $f : D \to \mathbb{R}$ dvakrat parcialno odvedljiva funkcija, $(a_1, \ldots, a_n) \in D$ in $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$. Če sta $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ in $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ zvezni funkciji v točki $(a_1, \ldots, a_n)$, potem je

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a_1, \ldots, a_n) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a_1, \ldots, a_n).$$

Opomba. Analogno velja tudi za višje odvode.

Opomba. Lahko bi se prepričali, da v primeru 1.3.12 limita v $(0{,}0)$ funkcije f_{xy} (in tudi funkcije f_{yx}) ne obstaja. Zato funkciji f_{xy} in f_{yx} v tem primeru nista zvezni v $(0{,}0)$ (kar sledi tudi iz izreka 1.3.7, kot smo že omenili).

1.3.3 Parcialno odvajanje sestavljenih funkcij (verižno pravilo).

Sestavljeno funkcijo dveh spremenljivk $F(x{,}y) = f(u(x{,}y), v(x{,}y))$ pri primernih predpostavkah parcialno odvajamo na naslednji način:

$$F_x(x{,}y) = f_u(u(x{,}y), v(x{,}y))u_x(x{,}y) + f_v(u(x{,}y), v(x{,}y))v_x(x{,}y),$$

$$F_y(x{,}y) = f_u(u(x{,}y), v(x{,}y))u_y(x{,}y) + f_v(u(x{,}y), v(x{,}y))v_y(x{,}y)$$

oziroma zapisano na kratko in manj natančno:

$$F_x = f_u u_x + f_v v_x,$$

$$F_y = f_u u_y + f_v v_y.$$

Naslednji natančen izrek o parcialnem odvajanju sestavljenih funkcij je znan tudi kot verižno pravilo.

Izrek 1.3.8. Naj bosta $n, m \in \mathbb{N}$, naj bosta $G \subset \mathbb{R}^n$ in $H \subset \mathbb{R}^m$ odprti množici in naj bodo $f : G \to \mathbb{R}$ in $u_1, \ldots, u_n : H \to \mathbb{R}$ diferenciabilne funkcije. Naj za vse $(x_1, \ldots, x_m) \in H$ velja

$$(u_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, u_n(x_1, \ldots, x_m)) \in G.$$

Definiramo $F : H \to \mathbb{R}$ s

$$F(x_1, \dots, x_m) = f(u_1(x_1, \dots, x_m), \dots ,u_n(x_1, \dots, x_m)).$$

Potem je $F : H \to \mathbb{R}$ diferenciabilna funkcija in za vse $(x_1, \dots, x_m) \in H$ in vsak $i \in \{1, \dots, m\}$ velja

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_m) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial u_k}(u_1(x_1, \dots, x_m), \dots ,u_n(x_1, \dots, x_m))\frac{\partial u_k}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_m).$$

Če so $f : G \to \mathbb{R}$ in $u_1, \dots, u_n : H \to \mathbb{R}$ parcialno zvezno odvedljive funkcije, potem je tudi $F : H \to \mathbb{R}$ parcialno zvezno odvedljiva funkcija.

Dokaz. Navedimo le osnovno idejo dokaza za $m = n = 2$, ideja dokaza za splošna $n, m \in \mathbb{N}$ je podobna.
V ta namen naj bodo $f : G \to \mathbb{R}$, $u : H \to \mathbb{R}$ in $v : H \to \mathbb{R}$ diferenciabilne funkcije in naj bo funkcija $F : H \to \mathbb{R}$ definirana s $F(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$.
Za majhne h,k,t,s iz diferenciabilnosti funkcij sledi

$$u(x + h, y + k) \approx u(x,y) + u_x(x,y)h + u_y(x,y)k,$$

$$v(x + h, y + k) \approx v(x,y) + v_x(x,y)h + v_y(x,y)k,$$

$$f(u + t, v + s) \approx f(u,v) + f_u(u,v)t + f_v(u,v)s.$$

Sledi

$$\begin{aligned} F(x + h,y + k) &= f(u(x + h,y + k), v(x + h,y + k)) \\ &\approx f(u(x,y) + u_x(x,y)h + u_y(x,y)k, v(x,y) + v_x(x,y)h + v_y(x,y)k) \\ &\approx f(u(x,y), v(x,y)) + f_u(u(x,y), v(x,y))(u_x(x,y)h + u_y(x,y)k)+ \\ &\quad +f_v(u(x,y), v(x,y))(v_x(x,y)h + v_y(x,y)k) \\ &\approx F(x,y) + h(f_u(u(x,y), v(x,y))u_x(x,y) + f_v(u(x,y), v(x,y))v_x(x,y)) \\ &\quad +k(f_u(u(x,y), v(x,y))u_y(x,y) + f_v(u(x,y), v(x,y))v_y(x,y)). \end{aligned}$$

Iz enoličnosti diferenciala $DF_{(x,y)}(h,k)$ sledita želeni formuli

$$F_x(x,y) = f_u(u(x,y), v(x,y))u_x(x,y) + f_v(u(x,y), v(x,y))v_x(x,y),$$

$$F_y(x,y) = f_u(u(x,y), v(x,y))u_y(x,y) + f_v(u(x,y), v(x,y))v_y(x,y).$$

Če so $f : G \to \mathbb{R}$ in $u,v : H \to \mathbb{R}$ parcialno zvezno odvedljive funkcije, potem iz izpeljanih formul sledi, da je tudi $F : H \to \mathbb{R}$ parcialno zvezno odvedljiva funkcija. $\square$

Primer 1.3.13. Naj bo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(u,v) \mapsto f(u,v)$ dvakrat zvezno parcialno odvedljiva funkcija in $u(x,y) = xy$ in $v(x,y) = x - y$. Definirajmo

$$F(x,y) = f(u(x,y), v(x,y)) = f(xy, x - y)$$

in izračunajmo $F_{xy}(x,y)$ (izrazimo ga s parcialnimi odvodi funkcije f in z $u(x,y)$ in $v(x,y)$).
Po verižnem pravilu je

$$F_x(x,y) = f_u(xy, x - y)y + f_v(xy, x - y).$$

Nadalje je

$$\begin{aligned}F_{xy}(x,y) = &(f_{uu}(xy, x - y)x + f_{uv}(xy, x - y)(-1))y \\ &+ f_u(xy, x - y) + f_{vu}(xy, x - y)x + f_{vv}(xy, x - y)(-1).\end{aligned}$$

Ker je pri zgornjih predpostavkah $f_{uv} = f_{vu}$, je

$$\begin{aligned}F_{xy}(x,y) = &f_{uu}(u(x,y), v(x,y))u(x,y) + f_{uv}(u(x,y), v(x,y))v(x,y) \\ &+ f_u(u(x,y), v(x,y)) - f_{vv}(u(x,y), v(x,y)).\end{aligned}$$

Izračune, podobne zgornjemu, pogosto srečamo pri reševanju različnih fizikalnih parcialnih diferencialnih enačb, ko z vpeljavo novih koordinat in uporabo verižnega pravila enačbo preoblikujemo v preprostejšo obliko.

Poglejmo si zanimiv primer uporabe verižnega pravila, znan tudi kot D'Alembertova rešitev valovne enačbe [5].

Primer 1.3.14. Naj bosta a in b realni števili, $L > 0$, $c > 0$ in u dvakrat parcialno zvezno odvedljiva funkcija, ki zadošča enodimenzionalni valovni (parcialni diferencialni) enačbi

$$u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t) \qquad \text{za } \ x \in [0,L] \ \text{ in } \ t \geq 0.$$

Spomnimo se, da $u(x,t)$ lahko interpretiramo kot odmik strune v točki x ob času t. Privzemimo robna pogoja $u(0,t) = u(L,t) = 0$ za $t \geq 0$ (struna je vpeta v obeh krajiščih) in začetna pogoja $u(x,0) = f(x)$ in $u_t(x,0) = g(x)$, kjer je f dvakrat in g enkrat zvezno odvedljiva funkcija na $[0,L]$ ($f(x)$ predstavlja začetni odmik in $g(x)$ začetno hitrost v točki $x \in [0,L]$).
Vpeljemo novi "koordinatni funkciji" $v = v(x,t) = x + ct$ in in $w = w(x,t) = x - ct$ (razlog za to se skriva v metodi karakteristik, ki je v splošnem ne bomo obravnavali v tem učbeniku). Definiramo tako novo funkcijo U, da bo veljalo $u(x,t) = U(v(x,t), w(x,t))$. Torej izračunamo $x = \frac{1}{2}(v + w)$ in $t = \frac{1}{2c}(v - w))$ in dobimo

$$U(v,w) = u\left(\frac{1}{2}(v + w), \frac{1}{2c}(v - w)\right).$$

Uporabimo verižno pravilo, poenostavimo in dobimo:

$$u_x(x,t) = U_v(v(x,t), w(x,t)) + U_w(v(x,t), w(x,t)),$$

$$u_t(x,t) = U_v(v(x,t), w(x,t))c + U_w(v(x,t), w(x,t))(-c),$$
$$u_{xx}(x,t) = U_{vv}(v(x,t), w(x,t)) + 2U_{vw}(v(x,t), w(x,t)) + U_{ww}(v(x,t), w(x,t)),$$
$$u_{tt}(x,t) = c^2 \left(U_{vv}(v(x,t), w(x,t)) - 2U_{vw}(v(x,t), w(x,t)) + U_{ww}(v(x,t), w(x,t))\right).$$

Izračunano vstavimo v valovno enačbo $u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t)$, poenostavimo in dobimo, da je

$$U_{vw}(v(x,t), w(x,t)) = 0 \qquad \text{za } x \in [0,L] \text{ in } t \geq 0.$$

Zadošča torej rešiti parcialno diferencialno enačbo $U_{vw}(v, w) = 0$. Pri fiksnem v integriramo po w in dobimo $U_v(v, w) = h(v)$. Pri fiksnem w integriramo po v in po osnovnem izreku analize dobimo

$$U(v,w) = \int_0^v h(s)ds + \psi(w).$$

Označimo $\varphi(v) = \int_0^v h(s)ds$, od koder sledi

$$U(v,w) = \varphi(v) + \psi(w),$$

kjer sta φ in ψ poljubni dvakrat zvezno odvedljivi funkciji, definirani na primerni domeni. Z upoštevanjem $u(x,t) = U(v(x,t), w(x,t))$ sledi, da je splošna rešitev valovne enačbe enaka

$$u(x,t) = \varphi(x + ct) + \psi(x - ct) \qquad \text{za } x \in [0,L] \text{ in } t \geq 0.$$

Z upoštevanjem začetnih pogojev $u(x,0) = f(x)$ in $u_t(x,0) = g(x)$ se lahko z detajlnim, a ne pretirano težavnim izračunom prepričamo, da je

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(f(x + ct) + f(x - ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds$$

za vse $x \in [0,L]$ in $t \geq 0$. Ta rešitev je znana kot D'Alembertova rešitev valovne enačbe. Pozoren bralec je opazil, da je ta rešitev neodvisna od robnih pogojev (torej je veljavna tudi, v kolikor struna ni vpeta v obeh krajiščih).
V kolikor upoštevamo tudi robna pogoja $u(0,t) = u(L,t) = 0$ za $t \geq 0$ in še dodatno privzamemo, da je $g = 0$ (struna je vpeta v obeh krajiščih in na začetku opazovanja miruje), se lahko prepričamo v naslednje: rešitev je oblike

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(f(x + ct) + f(x - ct)\right)$$

za vse $x \in [0,L]$ in $t \geq 0$. V kolikor razširimo funkcijo f do funkcije $\tilde{f}$, ki je definirana na vsem $\mathbb{R}$, iz privzetih robnih pogojev sledi, da mora $\tilde{f}$ biti liha funkcija, ki ima periodo $2L$.

1.3.4 Taylorjeva formula

Poglejmo si **Taylorjevo formulo** za funkcije dveh spremenljivk, ki sledi iz Taylorjeve formule za funkcije ene spremenljivke ([14], [17]). Taylorjeva formula je temelj za številne inženirske računske postopke in numerične metode. V praksi je tako pogosto uporabljena za računanje primernih aproksimacij, poleg tega pa je tudi pomembno formalno matematično orodje. Na podoben način, kot bomo orisali spodaj, lahko izpeljemo tudi Taylorjevo formulo za funkcije več spremenljivk ([7]), vendar se tudi zaradi jasnosti in nazornosti omejimo le na primer funkcije dveh spremenljivk.

Naj bo $D \subset \mathbb{R}^2$ odprta množica, $(a,b) \in D$ in $f : D \to \mathbb{R}$ $(n+1)$-krat zvezno parcialno odvedljiva funkcija. Naj bosta $h, k \in \mathbb{R}$ takšna, da je $(a+h, b+k) \in D$. Na primerno majhni odprti okolici definiramo $(n+1)$-krat zvezno odvedljivo funkcijo ene spremenljivke

$$F(t) = f(a+th, b+tk).$$

Opazimo, da je $F(0) = f(a,b)$ in $F(1) = f(a+h, b+k)$ in da točke $(a+th, b+tk)$ za $t \in [0,1]$ ležijo na daljici med točkama (a,b) in $(a+h, b+k)$ v ravnini $\mathbb{R}^2$. Uporabimo Taylorjevo formulo za funkcijo F, razvito okoli $t_0 = 0$ ([14], [17]):

$$F(t) = F(0) + tF'(0) + \frac{t^2}{2!}F''(0) + \cdots + \frac{t^n}{n!}F^{(n)}(0) + R_n(t),$$

kjer je ostanek $R_n(t)$ enak

$$R_n(t) = \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}F^{(n+1)}(c)$$

za nek c oblike $c = \gamma t$ za neko število $\gamma \in [0,1]$ (torej za nek c, ki leži na intervalu med 0 in t). Odvode funkcije F izračunamo s pomočjo verižnega pravila. Sledi

$$F'(t) = f_x(a+th, b+tk)h + f_y(a+th, b+tk)k$$

in torej

$$F'(0) = f_x(a,b)h + f_y(a,b)k.$$

Za višje odvode nadaljujemo analogno (nadaljujemo z odvajanjem, uporabimo verižno pravilo in vstavimo $t = 0$ vse do n-tega odvoda, v $(n+1)$-vi odvod pa vstavimo c). Dobimo na primer,

$$F''(0) = f_{xx}(a,b)h^2 + 2f_{xy}(a,b)hk + f_{yy}(a,b)k^2,$$

kjer smo v izpeljavi tudi upoštevali, da sta mešana odvoda enaka $f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$. V Taylorjevo formulo za F vstavimo izračunane vrednosti

$$F(0), F'(0), \ldots, F^{(n)}(0), F^{(n+1)}(c).$$

Vstavimo tudi $t = 1$ (saj nas zanima formula za $F(1) = f(a+h, b+k)$) in označimo $a+h = x$ in $b+k = y$, torej je $h = x-a$, $k = y-b$ in $f(x,y) = f(a+h, b+k) = F(1)$. S tem smo orisali izpeljavo spodnjega izreka.

Izrek 1.3.9. (**Taylorjeva formula**) Naj bo $D \subset \mathbb{R}^2$ odprta množica, $(a,b) \in D$ in $f : D \to \mathbb{R}$ $(n+1)$-krat zvezno parcialno odvedljiva funkcija. Za $(x,y) \in D$ velja

$$f(x,y) = T_n(x,y) + R_n(x,y),$$

kjer je

$$\begin{aligned} T_n(x,y) &= f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) + \\ &+ \frac{1}{2!}\left[f_{xx}(a,b)(x-a)^2 + 2f_{xy}(a,b)(x-a)(y-b) + f_{yy}(a,b)(y-b)^2\right] \\ &+ \cdots + \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-k}\partial y^k}(a,b)\ (x-a)^{n-k}(y-b)^k \end{aligned}$$

in

$$R_n(x,y) = \frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-k}\partial y^k}(\sigma,\mu)\ (x-a)^{n+1-k}(y-b)^k,$$

kjer je (σ,μ) neka točka na daljici med točkama (a,b) in (x,y), torej je $(\sigma,\mu) = (a + \gamma(x-a), b + \gamma(y-b))$ za nek $\gamma \in [0,1]$.

Polinome $T_n(x,y)$ dveh spremenljivk imenujemo **Taylorjevi polinomi**, stopnje n razviti okrog točke (a,b). Oznaka $\binom{n}{k}$ označuje binomski simbol

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 1}.$$

Binomski simboli tvorijo dobro znani Pascalov trikotnik in velja

$$\binom{n}{0} = 1,\ \binom{n}{1} = n,\ \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},\ \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}.$$

Število $\binom{n}{k}$ je enako številu načinov, na katere lahko iz množice n elementov izberemo podmnožico s k elementi. Zakaj ta števila nastopajo v Taylorjevi formuli? Razlog je v tem, ker ravno sovpadajo s številom enakih primernih mešanih parcialnih odvodov funkcije f.

Če je f poljubno mnogokrat zvezno parcialno odvedljiva in je $\lim_{n\to\infty} R_n(x,y) = 0$ za vse (x,y) iz neke odprte okolice točke (a,b), potem rečemo, da je na tej okolici funkcija f analitična funkcija, saj je enaka svoji **Taylorjevi vrsti**, razviti okrog točke (a,b):

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) + \\ &+ \frac{1}{2!}\left[f_{xx}(a,b)(x-a)^2 + 2f_{xy}(a,b)(x-a)(y-b) + f_{yy}(a,b)(y-b)^2\right] + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-k}\partial y^k}(a,b)(x-a)^{n-k}(y-b)^k\right). \end{aligned}$$

1.4 Ekstremi funkcij več spremenljivk

Lokalni ekstremi primerne funkcije več spremenljivk so, intuitivno, "vrhovi" in "dna vrtač" grafa funkcije, podobno kot pri funkciji ene spremenljivke. Gradient funkcije več spremenljivk bo v teh točkah ničelni vektor. V primeru funkcije dveh spremenljivk je tangentna ravnina grafa funkcije v teh točkah vodoravna. V primeru lokalnega maksimuma, bodo točke v dovolj majhni okolici imele vrednost, ki je manjša ali enaka vrednosti, kot jo imajo v maksimumu samem (in obratno, ki je večja ali enaka vrednosti, kot v minimumu).

Vsekakor iskanje lokalnih ekstremov spada med najbolj uporabne aplikacije infinitezimalnega računa.

- Recimo, da želimo optimizirati zračni upor pri oblikovanju letala. Če obliko modeliramo kot funkcijo n parametrov in konstruiramo funkcijo, ki vrne skupno upornost glede na parametre, nas zanimajo (lokalni) minimumi te funkcije.
- Pri strojnem učenju, ki ima prostor spremenljivk tipično izjemno velik, model naučimo tako, da minimiziramo stroškovno funkcijo.
- Pri oblikovanju artikla imamo lahko več parametrov (spremenljivk) različnih pomenov (količina materiala, čas izdelave, operativni stroški,...), tipično želimo minimizirati stroškovno funkcijo, ki je odvisna teh parametrov. Lahko pa nas morda zanima tudi maksimum funkcije zanesljivosti izdelka.

V tem poglavju bomo spoznali, kako takšne ekstremne vrednosti dane funkcije izračunamo in kako jih karakteriziramo.

Definicija 1.4.1. Naj bo $D \subset \mathbb{R}^n$, $(a_1, \ldots, a_n) \in D$ in $f : D \to \mathbb{R}$. Funkcija f ima **globalni maksimum** v točki $(a_1, \ldots, a_n)$, če je $f(x_1, \ldots, x_n) \leq f(a_1, \ldots, a_n)$ za vse točke $(x_1, \ldots, x_n) \in D$.
Funkcija f ima **globalni minimum** v točki $(a_1, \ldots, a_n)$, če je $f(x_1, \ldots, x_n) \geq f(a_1, \ldots, a_n)$ za vse točke $(x_1, \ldots, x_n) \in D$.

Definicija 1.4.2. Naj bo $D \subset \mathbb{R}^n$ odprta množica, $(a_1, \ldots, a_n) \in D$ in $f : D \to \mathbb{R}$. Funkcija f ima **lokalni maksimum** v točki $(a_1, \ldots, a_n)$, če obstajata takšen $r > 0$ in takšna odprta krogla $O((a_1, \ldots, a_n),r)$, da je $f(x_1, \ldots, x_n) \leq f(a_1, \ldots, a_n)$ za vse točke $(x_1, \ldots, x_n) \in O((a_1, \ldots, a_n),r)$.
Funkcija f ima **lokalni minimum** v točki $(a_1, \ldots, a_n)$, če obstajata takšen $r > 0$ in takšna odprta krogla $O((a_1, \ldots, a_n),r)$, da je $f(x_1, \ldots, x_n) \geq f(a_1, \ldots, a_n)$ za vse točke $(x_1, \ldots, x_n) \in O((a_1, \ldots, a_n),r)$.

Lokalne maksimume in lokalne minimume funkcije imenujemo **lokalni ekstremi**.

Definicija 1.4.3. Naj bo $D \subset \mathbb{R}^n$ odprta množica, $(a_1, \dots, a_n) \in D$ in $f : D \to \mathbb{R}$ zvezno parcialno odvedljiva funkcija. Funkcija f ima v točki $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ **stacionarno točko**, kadar so vsi prvi parcialni odvodi funkcije f v tej točki enaki nič:

$$f_{x_i}(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0 \text{ za } i = 1,2,3,\dots,n,$$

oziroma $\operatorname{grad} f(a_1, a_2, \dots, a_n) = \vec{0}$.

Izrek 1.4.4. (vir: [2, str. 388]) Naj bo $D \subset \mathbb{R}^n$ odprta množica, $(a_1, \dots, a_n) \in D$ in $f : D \to \mathbb{R}$ zvezno parcialno odvedljiva funkcija. Če ima f v točki $(a_1, \dots, a_n)$ lokalni ekstrem, potem je $(a_1, \dots, a_n)$ stacionarna točka funkcije f.

Stacionarno točko funkcije f, ki ni lokalni ekstrem imenujemo **sedlo** funkcije f. Stacionarna točka je lahko torej ali lokalni ekstrem (lokalni maksimum ali lokalni minimum) funkcije f ali pa sedlo.

Naj bo $D \subset \mathbb{R}^2$ odprta množica in $f : D \to \mathbb{R}$ zvezno parcialno odvedljiva funkcija dveh spremenljivk. Točka (x_0, y_0) je stacionarna točka funkcije f natanko tedaj, ko je

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 0 \;\text{ in }\; \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0.$$

Za stacionarno točko (x_0,y_0) velja, da je tangentna ravnina na graf funkcije f v točki $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ vodoravna, torej vzporedna xy ravnini. Stacionarne točke dvakrat zvezno parcialno odvedljive funkcije f klasificiramo s pomočjo drugih parcialnih odvodov

$$f_{xx}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y), \quad f_{xy}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y), \quad f_{yy}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$$

in z determinanto Hessejeve matrike

$$\mathcal{H}f(x,y) = \begin{bmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{bmatrix}$$

funkcije f, kar pove naslednji izrek, ki sledi iz Taylorjeve formule.

Izrek 1.4.5 (klasifikacija stacionarnih točk funkcije dveh spremenljivk). (vir: [12]) Naj bo (x_0, y_0) stacionarna točka dvakrat zvezno parcialno odvedljive funkcije f. Če je

- $\det \mathcal{H}f(x_0,y_0) > 0$ in $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) < 0$, potem je (x_0, y_0) lokalni maksimum,
- $\det \mathcal{H}f(x_0,y_0) > 0$ in $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) > 0$, potem je (x_0, y_0) lokalni minimum,
- $\det \mathcal{H}f(x_0,y_0) < 0$, potem je (x_0, y_0) sedlo,

- $\det \mathcal{H}f(x_0,y_0) = 0$, potem je kriterij nesklepčen (točka (x_0, y_0) je lahko lokalni maksimum, lokalni minimum ali sedlo funkcije f).

Za klasifikacijo stacionarnih točk funkcije več spremenljivk, moramo spoznati pojem negativne in pozitivne definitnosti matrike.

Naj bo M kvadratna matrika. Z D_k označimo poddeterminanto zgornje leve $k \times k$ podmatrike matrike M. Število D_k imenujemo tudi glavni k-minor matrike M. Simetrični matriki pravimo, da je **pozitivno definitna**, če ima vse glavne k-minorje (poddeterminante) D_k pozitivne. Simetrični matriki pravimo, da je **negativno definitna**, če so vsi lihi glavni minorji negativni, vsi sodi glavni minorji pa pozitivni, $D_1 < 0$, $D_2 > 0$, $D_3 < 0, \ldots$.

Za dvakrat zvezno parcialno odvedljivo funkcijo f n spremenljivk je njej pripadajoča $n \times n$ Hessejeva matrika $\mathcal{H}f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ enaka

$$\begin{bmatrix} f_{x_1x_1}(x_1,x_2,\ldots,x_n) & f_{x_1x_2}(x_1,x_2,\ldots,x_n) & \cdots & f_{x_1x_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n) \\ f_{x_2x_1}(x_1,x_2,\ldots,x_n) & f_{x_2x_2}(x_1,x_2,\ldots,x_n) & \cdots & f_{x_2x_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{x_nx_1}(x_1,x_2,\ldots,x_n) & f_{x_nx_2}(x_1,x_2,\ldots,x_n) & \cdots & f_{x_nx_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n) \end{bmatrix}.$$

Izrek 1.4.6 (klasifikacija lokalnih ekstremov funkcije več spremenljivk)**.** (vir: [12]) Naj bo $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ stacionarna točka dvakrat zvezno parcialno odvedljive funkcije f.

- Če je $\mathcal{H}f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ negativno definitna, potem je v tej točki lokalni maksimum,
- če je $\mathcal{H}f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ pozitivno definitna, potem je v tej točki lokalni minimum funkcije f.

Primer 1.4.1. Funkcija $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ naj bo dana z

$$f(x,y) = y^2 - x^2y - xy\,.$$

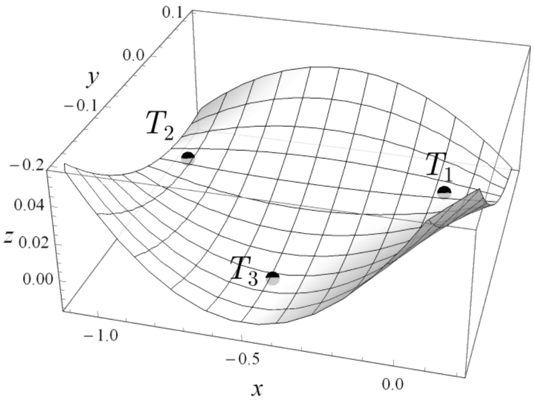
Poiščimo stacionarne točke funkcije $f(x,y)$. Izenačimo parcialna odvoda z 0

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= -2xy - y = 0, \\ f_y(x,y) &= 2y - x^2 - x = 0, \end{aligned}$$

izrazimo y iz druge enačbe in vstavimo v prvo. Dobimo

$$-x(x^2+x) - (x^2+x)/2 = -x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x = 0\,.$$

Stacionarne točke so $T_1(0,0)$, $T_2(-1,0)$ in $T_3(-1/2,-1/8)$. Iz Hessejeve matrike $\mathcal{H}f(x,y) = \begin{bmatrix} -2y & -2x-1 \\ -2x-1 & 2 \end{bmatrix}$ lahko ugotovimo, da je T_3 lokalni minimum, ostali dve točki sta sedli, kot prikazuje slika.



Graf funkcije $f(x,y) = y^2 - x^2y - xy$.

Primer 1.4.2. Za funkcijo s predpisom $f(x,y,z) = e^{x^2}+(x+y+1)^2+z^2$ poiščimo stacionarne točke in določimo njihov tip. Za stacionarno točko mora veljati

$$\begin{aligned} f_x(x,y,z) &= 2xe^{x^2} + 2(x+y+1) = 0 \\ f_y(x,y,z) &= 2(x+y+1) = 0 \\ f_z(x,y,z) &= 2z = 0 \end{aligned}$$

Rešitev sistema enačb je točka $x_0 = 0$, $y_0 = -1$, $z_0 = 0$.
Izračunajmo še Hessejevo matriko funkcije f:

$$\mathcal{H}f(x,y,z) = \begin{bmatrix} f_{xx}(x,y,z) & f_{xy}(x,y,z) & f_{xz}(x,y,z) \\ f_{yx}(x,y,z) & f_{yy}(x,y,z) & f_{yz}(x,y,z) \\ f_{zx}(x,y,z) & f_{zy}(x,y,z) & f_{zz}(x,y,z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2} + 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

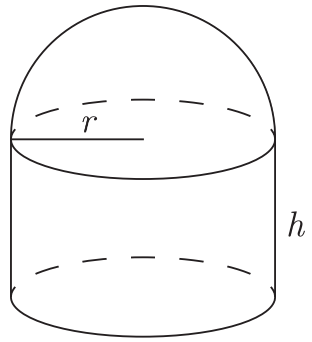
Izračunajmo še Hessejevo matriko v stacionarni točki:

$$\mathcal{H}f(0,-1,0) = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Glavni minorji so pozitivni, $D_1 = 4$, $D_2 = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4$, $D_3 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8$, torej je matrika pozitivno definitna in imamo pri $x_0 = 0$, $y_0 = -1$, $z_0 = 0$ lokalni minimum.

1.4.1 Vezani ekstremi

Postaviti želimo silos s polkrožno streho, ki bo imel volumen $1000m^3$. Kakšne naj bodo dimenzije silosa, če želimo porabiti kar se da malo materiala? V kolikor znaša cena strehe (hemisfere) 50 EUR na kvadratni meter, cena navpičnih sten (valja) pa 20 EUR na kvadratni meter, kolikšne naj bodo dimenzije, da bo cena čim nižja [1]?



Naj r označuje polmer silosa, h pa višino valja. Površina sfere je $P_{sf} = 4\pi r^2$, volumen sfere je $V_{sf} = \frac{4}{3}\pi r^3$, sledi, da je površina silosa dana z enačbo

$$P(r,h) = 2\pi rh + 2\pi r^2,$$

volumen pa je dan z enačbo

$$V(r,h) = \pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi r^3.$$

Želimo torej poiskati minimum funkcije $P(r,h)$ pri pogoju $V(r,h) = 1000$. V drugem primeru pa želimo poiskati minimum funkcije $C(r,h) = 20 \cdot 2\pi rh + 50 \cdot 2\pi r^2$, pri istem pogoju $V(r,h) = 1000$.

Takšno nalogo najbolj elegantno rešimo z **metodo vezanih ekstremov** (v literaturi je znana tudi kot metoda Lagrangeovih množiteljev).

Metoda Langrangeovih množiteljev temelji na naslednjem izreku.

Izrek 1.4.7. (vir: [12]) Naj bo $D \subset \mathbb{R}^2$ odprta množica in naj bosta $f : D \to \mathbb{R}$ in $g : D \to \mathbb{R}$ zvezno parcialno odvedljivi funkciji. Potem enačba $g(x,y) = 0$ določa krivuljo v območju D.
Kandidati za lokalne ekstreme funkcije $f(x,y)$ vzdolž krivulje (vezi) $g(x,y) = 0$ so stacionarne točke **Lagrangeove funkcije**

$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y).$$

Izrek torej pravi, da je dovolj poiskati rešitve sistema enačb $\operatorname{grad} F = 0$:

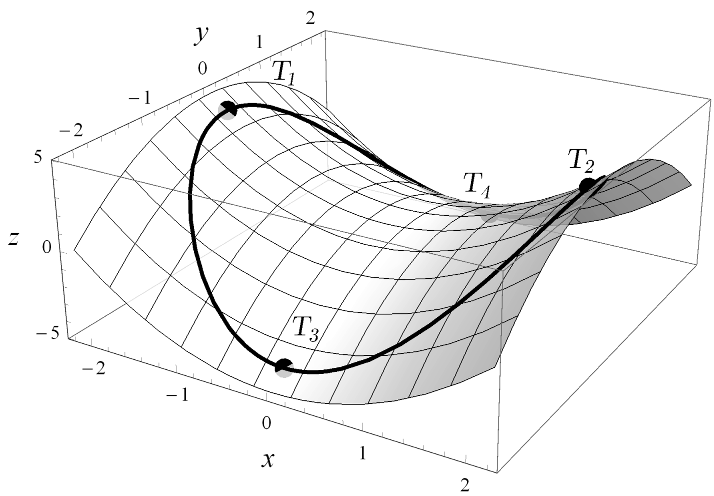
$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,\lambda) = 0,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,\lambda) = 0,$$
$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}(x,y,\lambda) = -g(x,y) = 0,$$

za Lagrangeovo funkcijo F.

Funkcijo $f : D \to \mathbb{R}$ iz zgornjega izreka včasih imenujemo **kriterijska funkcija.**

V naslednjem poglavju bomo pokazali, kako za dano stacionarno točko Lagrangeove funkcije pokažemo, da je tudi v resnici vezani ekstrem.

Primer 1.4.3. Poiščimo vezane ekstreme funkcije $f(x,y) = x^2 - y^2$ pri pogoju $x^2 + y^2 = 4$.



Graf funkcije $f(x,y) = x^2 - y^2$ in njegov presek s ploskvijo $x^2 + y^2 = 4$.

Na sliki vidimo, da pogoju ustreza sklenjena krivulja na grafu funkcije f. Iz slike opazimo tudi, da imamo štiri vezane ekstreme. Res, zapišimo Lagrangeovo funkcijo

$$F(x,y,\lambda) = x^2 - y^2 - \lambda(x^2 + y^2 - 4)$$

in izračunajmo parcialne odvode funkcije F:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,\lambda) = 2x - 2\lambda x = 0,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,\lambda) = -2y - 2\lambda y = 0,$$
$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}(x,y,\lambda) = -(x^2 + y^2 - 4) = 0.$$

Iz prve enačbe sledi $x = 0$ ali $\lambda = 1$. Če $x = 0$, iz tretje enačbe sledi $y = \pm 2$. Če $\lambda = 1$, potem iz druge enačbe sledi $y = 0$, iz 3. enačbe pa nato dobimo $x = \pm 2$. Imamo torej štiri kandidate za ekstreme: $T_{1,2}(0, \pm 2)$ in $T_{3,4}(\pm 2, 0)$.

Primer 1.4.4. Oglejmo si problem s silosom na začetku poglavja. Želimo torej poiskati lokalni minimum funkcije

$$P(r,h) = 2\pi rh + 2\pi r^2,$$

pri pogoju

$$g(r,h) = \pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi r^3 - 1000 = 0.$$

Napeljemo torej Lagrangeovo funkcijo

$$F(r,h,\lambda) = 2\pi rh + 2\pi r^2 - \lambda(\pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi r^3 - 1000).$$

Iščemo torej rešitve sistema enačb grad $F = 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial r}(r,h,\lambda) &= 2\pi h + 4\pi r - \lambda(2\pi rh + 2\pi r^2) = 0\\
\frac{\partial F}{\partial h}(r,h,\lambda) &= 2\pi r - \lambda\pi r^2 = 0\\
\frac{\partial F}{\partial \lambda}(r,h,\lambda) &= -(\pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi r^3 - 1000) = 0
\end{aligned}$$

Dobimo rešitev $r = 5\sqrt[3]{\frac{12}{\pi}}$ in $h = 0$. Vidimo torej, da najmanj materiala porabimo, če postavimo samo hemisfero brez sten valja.
V primeru minimizacije stroškov pa želimo poiskati minimum funkcije $C(r,h) = 40\pi rh + 100\pi r^2$ pri pogoju

$$g(r,h) = \pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi r^3 - 1000 = 0.$$

Napeljemo Lagrangeovo funkcijo

$$\bar{F}(r,h,\lambda) = 40\pi rh + 100\pi r^2 - \lambda(\pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi r^3 - 1000).$$

Sistem enačb grad $\bar{F} = 0$ nam sedaj da rešitev

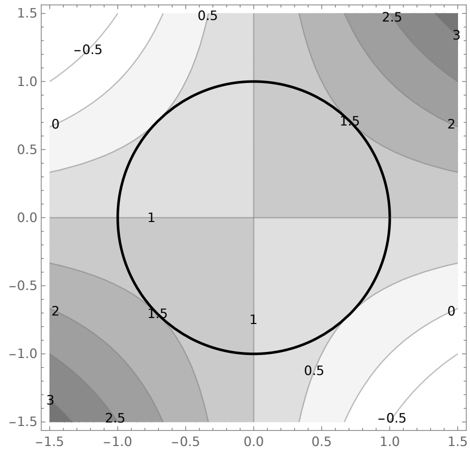
$$r = \sqrt[3]{\frac{3000}{11\pi}} \approx 4{,}43 \qquad \text{in} \qquad h = \sqrt[3]{\frac{81000}{11\pi}} \approx 13.28.$$

Polmer silosa torej znaša približno $4{,}43m$, višina valja pa približno $13.28m$. Iz

$$C\left(\sqrt[3]{\frac{3000}{11\pi}}, \sqrt[3]{\frac{81000}{11\pi}}\right) \approx 1040$$

sledi, da znaša cena izdelave silosa približno 1040 EUR.

Primer 1.4.5. Temperatura v točki $T(x,y)$ na enotski krožnici (v ravnini $\mathbb{R}^2$ s središčem v izhodišču) je podana z enačbo $f(x,y) = 1 + xy$. Poiskati želimo točke z najnižjo in najvišjo temperaturo.
Na spodnji sliki je vidna enotska krožnica in nivojnice funkcije f.



Iščemo kandidate za lokalne ekstreme funkcije $f(x,y) = 1 + xy$ pri pogoju $x^2 + y^2 - 1 = 0$.
Napeljemo Lagrangeovo funkcijo

$$F(x,y,\lambda) = 1 + xy - \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Rešiti moramo sistem enačb

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,\lambda) = y - 2\lambda x = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,\lambda) = x - 2\lambda y = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}(x,y,\lambda) = -(x^2 + y^2 - 1) = 0$$

Iz prvih dveh pogojev vidimo, da mora veljati $\lambda = \pm\frac{1}{2}$, iz česar sledi $x = \pm y$. Če $x = y$, iz tretje enakosti dobimo točki $T_{1,2}(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$, če $x = -y$, iz tretje enakosti dobimo še točki $T_{3,4}(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \mp\frac{1}{\sqrt{2}})$. Iz slike lahko opazimo tudi, da so vezani ekstremi ravno v točkah, kjer je tangenta na krivuljo, ki jo določa pogoj, ravno vzporedna nivojnicam kriterijske funkcije, oziroma, kjer je tangenta pravokotna na gradient kriterijske funkcije. To velja v splošnem.

Metodo vezanih ekstremov je mogoče posplošiti tudi na funkcije več spremenljivk.

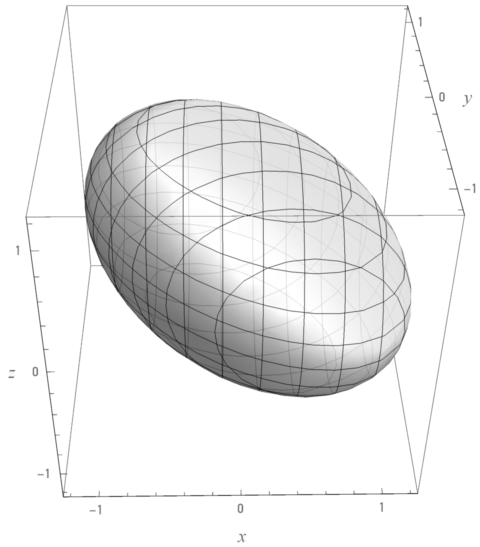
Izrek 1.4.8. (vir: [12]) Naj bo $D \subset \mathbb{R}^n$ odprta množica in $g : D \to \mathbb{R}$ zvezno parcialno odvedljiva funkcija. Naj bo dana še zvezno parcialno odvedljiva **kriterijska** funkcija $f : D \to \mathbb{R}$.

Kandidati za lokalne ekstreme funkcije $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ vzdolž krivulje (vezi) $g(x_1,x_2,\ldots,x_n) = 0$ so stacionarne točke **Lagrangeove funkcije**

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_n,\lambda) = f(x_1,x_2,\ldots,x_n) - \lambda g(x_1,x_2,\ldots,x_n).$$

Primer 1.4.6. Dan je zavrten elipsoid z enačbo

$$x^2 + xy + y^2 + z^2 = 1.$$



Poiščimo točke, ki so najmanj in najbolj oddaljene od koordinatnega izhodišča. Za poljubno točko (x,y,z) velja, da je njena oddaljenost od izhodišča dana z $d(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Za kriterijsko funkcijo lahko vzamemo funkcijo $f(x,y,z) = d(x,y,z)^2 = x^2+y^2+z^2$, saj doseže razdalja minimum natanko takrat, ko doseže minimum njen kvadrat.
Napeljemo Lagrangeovo funkcijo

$$F(x,y,z,\lambda) = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda(x^2 + xy + y^2 + z^2 - 1),$$

sistem enačb

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z,\lambda) &= 2x - \lambda(2x+y) = 0,\\
\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z,\lambda) &= 2y - \lambda(x+2y) = 0,\\
\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z,\lambda) &= 2z - \lambda(2z) = 0,\\
\frac{\partial F}{\partial \lambda}(x,y,z,\lambda) &= -(x^2 + xy + y^2 + xz + z^2 - 1) = 0
\end{aligned}$$

ima rešitve $T_{1,2}(\pm 1, \mp 1, 0)$, $T_{3,4}(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$ in $T_{5,6}(0,0,\pm 1)$.

Izračunamo lahko še razdalje od izhodišča:

$$d(T_1) = d(T_2) = \sqrt{2}, \quad d(T_3) = d(T_4) = \sqrt{\frac{2}{3}} \quad \text{in} \quad d(T_5) = d(T_6) = 1.$$

Sklepamo, da so polosi elipsoida $\sqrt{2}$, $\sqrt{\frac{2}{3}}$ in 1. Točki $T_{1,2}$ sta lokalna maksimuma, točki $T_{3,4}$ sta lokalna minimuma, točki $T_{5,6}$ pa sta sedli.

1.5 Izrek o implicitni funkciji

Implicitna funkcija je osnovno orodje za proučevanje stacionarnih točk zvezno parcialno odvedljivih funkcij. Enačba oblike

$$F(x,y) = c \tag{1.5.1}$$

lahko definira eno spremenljivko, na primer y, kot funkcijo druge spremenljivke x. V tem primeru pravimo, da je y **implicitno podana funkcija** spremenljivke x.

Izrek 1.5.1 (o implicitni funkciji za dve spremenljivki)**.** (vir: [4]) Naj bo $F : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, zvezno parcialno odvedljiva funkcija in naj bo $(x_0, y_0) \in D$ takšna točka, da velja

$$F(x_0, y_0) = c \qquad \text{in} \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0,$$

potem obstajata odprta intervala $U, V \subseteq \mathbb{R}$, kjer $x_0 \in U$ in $y_0 \in V$ ter takšna enolična zvezno odvedljiva funkcija $f : U \to V$, da velja

$$F(x, f(x)) = c$$

in

$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,f(x))} \tag{1.5.2}$$

za vsak $x \in U$. V posebnem, velja tudi

$$f'(x_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)}.$$

Opomba. Očitno velja analogna različica izreka za spremenljivko y, če velja $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$. Pri tem se vlogi obeh spremenljivk zamenjata.

Opomba. V literaturi velikokrat zasledimo različico izreka, kjer je $c = 0$. Gre za ekvivalenten izrek, saj lahko iz enakosti $F(x,y) = c$ vedno skonstruiramo funkcijo $G(x,y) = F(x,y) - c$, kjer sta pogoja $F(x,y) = c$ in $G(x,y) = 0$ ekvivalentna.

Če odvajamo enakost 1.5.2, dobimo formulo za izračun drugega odvoda v točki x_0, ki se glasi:

$$f''(x_0) = -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial x}(x_0,y_0) + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) f'(x_0) + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y}(x_0,y_0)(f'(x_0))^2}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)}.$$

Izrek o implicitni funkciji lahko posplošimo na funkcijo več spremenljivk. V spodnjem izreku n-terico $(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ na kratko označimo z (x,y), kjer je $x = (x_1, \ldots, x_{n-1})$ in $y = x_n$.

Izrek 1.5.2 (o implicitni funkciji za več spremenljivk). (vir: [4]) Naj bo $F : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, zvezno parcialno odvedljiva funkcija. Označimo $(x,y) = (x_1, \ldots, x_{n-1}, y) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^n$. Naj bo $(x_0, y_0) \in D$ takšna točka, da velja

$$F(x_0, y_0) = c \qquad \text{in} \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0,$$

potem obstajata odprti okolici $U \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ točke x_0 in $V \subseteq \mathbb{R}$ točke y_0 ter takšna enolična zvezno parcialno odvedljiva funkcija $f : U \to V$, da velja

$$F(x, f(x)) = c$$

in

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(x,f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,f(x))}, \quad i = 1, \ldots, n-1. \tag{1.5.3}$$

za vsak $x = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in U$. V posebnem, velja tudi

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_0,y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)}, \quad i = 1, \ldots, n-1.$$

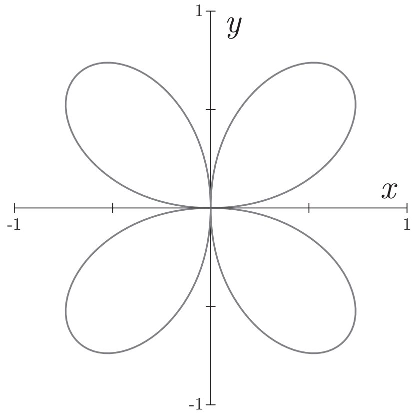
Če odvajamo enakost 1.5.3, dobimo formule za mešane parcialne odvode funkcije f v točki x_0, ki se glasijo:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = -\frac{1}{\frac{\partial F}{\partial x_n}(x_0,y_0)}\Bigg(&\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(x_0,y_0) + \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_n}(x_0,y_0)\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) \\ &+ \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_n}(x_0,y_0)\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) + \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_n}(x_0,y_0)\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)\Bigg)\end{aligned}$$

Primer 1.5.1. Poiščimo enačbo tangente na krivuljo štiriperesne deteljice na spodnji sliki, dane z enačbo

$$(x^2 + y^2)^3 - 4x^2y^2 = 0, \tag{1.5.4}$$

v točki $T(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4})$.



Štiriperesna deteljica.

Označimo $F(x,y) = (x^2+y^2)^3 - 4x^2y^2$ in najprej preverimo, da točka $T(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4})$ res zadošča enačbi $F(x,y) = 0$. Izračunajmo parcialni odvod $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 6y(x^2+y^2)^2 - 8x^2y$, v točki T je enak: $\frac{\partial F}{\partial y}(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}) = -\frac{9\sqrt{3}}{32} \neq 0$. Po izreku o implicitni funkciji lahko sedaj sklepamo, da obstaja okolica U števila $\frac{3}{4}$ in funkcija $f : U \to \mathbb{R}$ tako, da velja $F(x,f(x)) = 0$ za vsak $x \in U$. Ker je parcialni odvod funkcije F po spremenljivki x enak $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 6x(x^2+y^2)^2 - 8xy^2$, lahko po izreku izračunamo tudi odvod funkcije f v dani točki:

$$f'\left(\frac{3}{4}\right) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4})}{\frac{\partial F}{\partial y}(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4})} = \frac{5}{\sqrt{3}}.$$

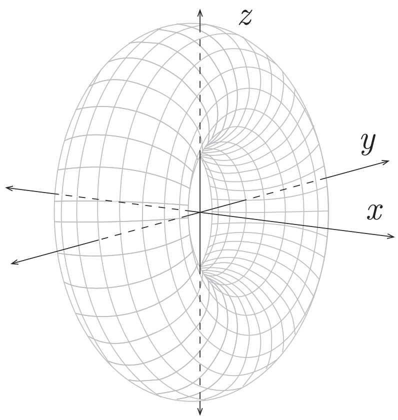
Zapišemo enačbo tangente na krivuljo v točki T:

$$y = \frac{5}{\sqrt{3}}x - \sqrt{3}.$$

Primer 1.5.2. Implicitno podana ploskev, določena z enačbo

$$\left(b - \sqrt{y^2+z^2}\right)^2 + x^2 = a^2,$$

predstavlja pokončen torus (torus si predstavljamo kot cev (ali plašč valja), ki smo jo ustrezno zvili in njena konca staknili skupaj). Tu je a polmer cevi in b razdalja med središčem cevi do središča torusa (natančneje, b je razdalja od osrednje krožnice cevi (osi valja) do središča te krožnice). Seveda mora veljati $0 < a < b$. Preverimo, da ima izmed vseh točk na torusu točka $A(0,0,b+a)$ največjo vrednost z-koordinate.



Pokončni torus.

Označimo $F(x,y,z) = \left(b - \sqrt{y^2+z^2}\right)^2 + x^2$, kjer se hitro lahko prepričamo, da velja $F(A) = a^2$. Izračunamo parcialne odvode:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) = 2x,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) = 2y\left(1 - \frac{b}{\sqrt{y^2+z^2}}\right),$$
$$\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = 2z\left(1 - \frac{b}{\sqrt{y^2+z^2}}\right).$$

Ker velja $\frac{\partial F}{\partial z}(A) = 2(a+b)(1 - \frac{b}{a+b}) > 0$, lahko po izreku o implicitni funkciji sklepamo, da obstajata taka okolica U točke $(0,0)$ in taka funkcija $f\colon U \to \mathbb{R}$, da velja $F(x,y,f(x,y)) = a^2$ za vsak $(x,y) \in U$. Iz $\frac{\partial F}{\partial x}(A) = \frac{\partial F}{\partial y}(A) = 0$ lahko sklepamo, da ima funkcija f v točki $(0,0)$ stacionarno točko. Izračunajmo še druge parcialne odvode funkcije f:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(0,0) = -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial x}(A)}{\frac{\partial F}{\partial z}(A)} = -\frac{1}{a},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(A)}{\frac{\partial F}{\partial z}(A)} = 0,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(0,0) = -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y}(A)}{\frac{\partial F}{\partial z}(A)} = -\frac{1}{a+b}.$$

Ker velja $\det \mathcal{H} f(0,0) = \frac{1}{a(a+b)} > 0$ in $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(0,0) < 0$, hitro ugotovimo, da ima funkcija f v točki $(0,0)$ res lokalni maksimum, ki je tudi globalni maksimum. Podobno se lahko prepričamo, da ima ploskev v točkah $B(0,0,b-a)$ in $C(0,0,a-b)$ sedli in v točki $D(0,0,-a-b)$ lokalni (in globalni) minimum.

1.6 Naloge

Naloga 1.6.1. Dan je predpis

$$f(x,y) = \ln(x^2 + y^2 - 7) \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

Določite definicijsko območje funkcije f in izračunajte gradient funkcije f v točki $(2, -2)$.

Rešitev. Definicijsko območje je enako $D_f = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 > 7,\ x \neq 0\}$, gradient funkcije f v točki $(2, -2)$ pa je enak $\operatorname{grad} f(2, -2) = (-\pi, \pi)$.

Naloga 1.6.2. Dana je zvezno odvedljiva funkcija $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ ene spremenljivke. Definirajmo funkcijo

$$F(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{x-y}} \cdot f\left(\frac{(x+y)^2}{2(x-y)}\right)$$

za $x > y$. Izračunajte

$$F_x(x,y) + F_y(x,y).$$

Rešitev. S parcialnim odvajanjem in uporabo formule za odvajanje sestavljene funkcije ene spremenljivke izračunamo

$$F_x(x,y) + F_y(x,y) = \frac{x+y}{(x-y)^{3/2}} \cdot f'\left(\frac{(x+y)^2}{2(x-y)}\right).$$

Naloga 1.6.3. Parcialno zvezno odvedljivi funkciji f in g dveh spremenljivk naj za vse (x,y) zadoščata enačbi

$$f(x,y)g^2(x,y) - 3e^{f(x,y)} = g(x,y).$$

Izrazite $g_x(x,y)$ s $f(x,y)$, $g(x,y)$ in $f_x(x,y)$ za vse tiste (x,y), za katere je $f(x,y)g(x,y) \neq \frac{1}{2}$.

Rešitev. S parcialnim odvajanjem enačbe po x izračunamo

$$g_x(x,y) = \frac{f_x(x,y)(3e^{f(x,y)} - g(x,y)^2)}{2f(x,y)g(x,y) - 1}.$$

Naloga 1.6.4. Dana je dvakrat zvezno parcialno odvedljiva funkcija treh spremenljivk $(s,t,v) \mapsto f(s,t,v)$. Definiramo funkcijo

$$g(x,y) = f(x^3 - y^3, x^2 - y^2, x - y)$$

in označimo $s(x,y) = x^3 - y^3$, $t(x,y) = x^2 - y^2$ in $v(x,y) = x - y$. Izrazite

$$g_x(x,y) + g_y(x,y)$$

s parcialnimi odvodi funkcije f in s $s = s(x,y)$, $t = t(x,y)$ in $v = v(x,y)$.

Rešitev. Z uporabo verižnega pravila izračunamo

$$g_x(x,y) + g_y(x,y) = 3tf_s(s,t,v) + 2vf_t(s,t,v).$$

Naloga 1.6.5. Dana je zvezno parcialno odvedljiva funkcija treh spremenljivk $(u,v,w) \mapsto f(u,v,w)$. Naj bo

$$F(t) = f(\cos t, \sin^2 t, e^t \cos t)$$

za vse $t \in \mathbb{R}$. Izračunajte $F'(0)$ in $F'(\frac{\pi}{2})$ (izrazite ju z f_u, f_v in f_w).

Rešitev. Z uporabo verižnega pravila dobimo

$$\begin{aligned} F'(t) =& - f_u(\cos t, \sin^2 t, e^t \cos t) \sin t + f_v(\cos t, \sin^2 t, e^t \cos t) 2 \sin t \cos t \\ & + f_w(\cos t, \sin^2 t, e^t \cos t)(e^t \cos t - e^t \sin t). \end{aligned}$$

Vstavimo:

$$\begin{aligned} F'(0) &= f_w(1,0,1) \\ F'(\pi/2) &= -f_u(0,1,0) - f_w(0,1,0)e^{\pi/2}. \end{aligned}$$

Naloga 1.6.6. Naj dvakrat zvezno parcialno odvedljiva funkcija dveh spremenljivk $(x,t) \mapsto u(x,t)$ zadošča valovni enačbi $c^2 u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t)$, kjer je c realno število. Za funkcijo

$$U(x,y) = u(x, cy)$$

izračunajte $U_{yy}(x,y) - U_{xx}(x,y)$.

Rešitev. Z uporabo verižnega pravila izračunamo $U_{yy}(x,y) - U_{xx}(x,y) = 0$.

Naloga 1.6.7. Naj bo $(s,t,u) \mapsto g(s,t,u)$ dvakrat parcialno zvezno odvedljiva funkcija treh spremenljivk. Za $s(x) = x^2$, $t(x,y) = x - y$ in $u(x,y) = xe^y$, kjer je $x > 0$ in $y \in \mathbb{R}$, definiramo funkcijo

$$F(x,y) = g(s(x), t(x,y), u(x,y)).$$

Izračunajte $F_{xx}(x,y)$ in ga izrazite s parcialnimi odvodi funkcije g ter s funkcijami s, t in u.

Rešitev. Za krajši zapis označimo $s = s(x)$, $t = t(x,y)$ in $u = u(x,y)$. Z dvakratno uporabo verižnega pravila izračunamo

$$\begin{aligned} F_{xx}(x,y) =& 4sg_{ss}(s,t,u) + 4\sqrt{s}g_{st}(s,t,u) + 4ug_{su}(s,t,u) + 2\frac{u}{\sqrt{s}}g_{ut}(s,t,u) \\ & + 2g_s(s,t,u) + g_{tt}(s,t,u) + \frac{u^2}{s}g_{uu}(s,t,u). \end{aligned}$$

Naloga 1.6.8. Naj bo s zvezno odvedljiva funkcija ene spremenljivke in $(u,v) \mapsto$

$g(u,v)$ dvakrat zvezno parcialno odvedljiva funkcija dveh spremenljivk. Definiramo

$$F(x,y) = g(x, s(y)).$$

Izračunajte $F_{xy}(x,y)$ (izrazite ga z g, s, parcialnimi odvodi funkcije g in odvodom funkcije s).

Rešitev. Odvajajmo parcialno po x in nato še po y:

$$F_x(x,y) = g_u(x,s(y)) + g_v(x,s(y)) \cdot 0 = g_u(x,s(y))$$

$$F_{xy}(x,y) = g_{uu}(x,s(y)) \cdot 0 + g_{uv}(x,s(y)) \cdot s'(y) = g_{uv}(x,s(y)) \cdot s'(y)$$

Naloga 1.6.9. Dana je dvakrat zvezno parcialno odvedljiva funkcija treh spremenljivk $(s,t,v) \mapsto f(s,t,v)$. Definiramo funkcijo

$$h(x,y) = f(x-y, x+y, x^2-y^2)$$

in označimo $s(x,y) = x - y$, $t(x,y) = x + y$ in $v(x,y) = x^2 - y^2$. Izrazite

$$h_x(x,y) + h_y(x,y) \text{ in } h_{xx}(x,y) + h_{yx}(x,y)$$

s parcialnimi odvodi funkcije f in s $s(x,y)$, $t(x,y)$ in $v(x,y)$.

Rešitev. Odvajajmo

$$\begin{aligned}
h_x(x,y) =& f_s(s(x,y),t(x,y),v(x,y)) + f_t(s(x,y),t(x,y),v(x,y)) \\
&+ f_v(s(x,y),t(x,y),v(x,y))(s(x,y) + t(x,y)), \\
h_y(x,y) =& - f_s(s(x,y),t(x,y),v(x,y)) + f_t(s(x,y),t(x,y),v(x,y)) \\
&+ f_v(s(x,y),t(x,y),v(x,y))(s(x,y) - t(x,y)).
\end{aligned}$$

Dobimo

$$h_x(x,y) + h_y(x,y) = 2f_t(s(x,y),t(x,y),v(x,y)) + 2f_v(s(x,y),t(x,y),v(x,y))s(x,y).$$

To enakost parcialno odvajamo še po x in dobimo

$$\begin{aligned}
h_{xx}(x,y) + h_{yx}(x,y) =& 2(f_{ts}(s(x,y),t(x,y),v(x,y)) + f_{tt}(s(x,y),t(x,y),v(x,y)) \\
&+ f_{tv}(s(x,y),t(x,y),v(x,y))(s(x,y) + t(x,y))) \\
&+ 2(f_{vs}(s(x,y),t(x,y),v(x,y)) + f_{vt}(s(x,y),t(x,y),v(x,y)) \\
&+ f_{vv}(s(x,y),t(x,y),v(x,y))(s(x,y) + t(x,y)))s(x,y)
\end{aligned}$$

Naloga 1.6.10. Zapišite splošno rešitev parcialne diferencialne enačbe

$$F_{yx}(x,y) + xF_y(x,y) = 0.$$

Rešitev. Vzemimo pomožno funkcijo $g(x,y) = F_y(x,y)$. Tedaj parcialna diferencialna enačba preide v

$$g_x(x, y) + xg(x, y) = 0,$$

kar je homogena linearna diferencialna enačba 1. reda, ki jo lahko rešimo z metodo ločljivih spremenljivk. Dobimo rešitev

$$g(x,y) = C_1(y)e^{-x^2/2}.$$

Zaključimo

$$F(x,y) = \int g(x,y)\,dy = C_2(y)e^{-x^2/2} + C_3(x).$$

Naloga 1.6.11. Zapišite splošno rešitev parcialne diferencialne enačbe

$$f_{yyxz}(x, y, z) + 4f_{yxz}(x, y, z) + 3f_{xz}(x, y, z) = 0.$$

Rešitev. Vzemimo pomožno funkcijo $g(x,y,z) = f_{xz}(x,y,z)$. Tedaj parcialna diferencialna enačba preide v

$$g_{yy}(x, y, z) + 4g_y(x, y, z) + 3g(x, y, z) = 0,$$

kar je homogena linearna diferencialna enačba 2. reda s konstantnimi koeficienti, ki ima rešitev

$$g(x,y,z) = C_1(x,z)e^{-3y} + C_2(x,z)e^{-y}.$$

Označimo

$$\int g(x,y,z)\,dz = C_3(x,z)e^{-3y} + C_4(x,z)e^{-y} + C_5(x,y)$$

in zaključimo

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= \int \int g(x,y,z)\,dz\,dx \\ &= \int \Big(C_3(x,z)e^{-3y} + C_4(x,z)e^{-y} + C_5(x,y)\Big)\,dx \\ &= C_6(x,z)e^{-3y} + C_7(x,z)e^{-y} + C_8(x,y) + C_9(y,z). \end{aligned}$$

Naloga 1.6.12. Poiščite in klasificirajte vse stacionarne točke funkcije

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 16xy.$$

Rešitev.
Stacionarne točke so rešitve sistema enačb

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 4(x^2 + y^2)x - 16y = 0, \\ f_y(x,y) &= 4(x^2 + y^2)y - 16x = 0. \end{aligned}$$

Če pomnožimo prvo enačbo z y in drugo z x ter enačbi odštejemo, dobimo rešitev $x = \pm y$. Enakost vstavimo v eno od enačb in dobimo rešitve $x_1 = 0, x_{2,3} = \pm\sqrt{2}$.

Imamo torej tri stacionarne točke, $T_1(0{,}0)$, $T_2(\sqrt{2},\sqrt{2})$ in $T_3(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$.
V stacionarnih točkah izračunamo determinanto Hessejeve matrike $Hf(x{,}y) = 4\begin{bmatrix} 3x^2+y^2 & 2xy-4 \\ 2xy-4 & x^2+3y^2 \end{bmatrix}$ in sklepamo, da je točka T_1 sedlo, točki T_2 in T_3 pa sta lokalna minimuma.

Naloga 1.6.13. Dani sta funkciji treh spremenljivk

$$f(x,y,z) = 2z \qquad \text{in} \qquad g(x,y,z) = 2x^2 - 3y^2 + z^2 - 2xz.$$

Poiščite vse možne vezane ekstreme funkcije f pri pogoju $g(x,y,z) = 3$.

Rešitev.
Vzemimo Lagrangeovo funkcijo

$$F(x{,}y{,}z{,}\lambda) = 2z - \lambda(2x^2 - 3y^2 + z^2 - 2xz - 3)$$

in rešimo sistem enačb $\operatorname{grad} F(x{,}y{,}z{,}\lambda) = 0$:

$$\begin{aligned}
F_x(x{,}y{,}z{,}\lambda) &= -\lambda(4x-2z) &&= 0,\\
F_y(x{,}y{,}z{,}\lambda) &= 6\lambda y &&= 0,\\
F_z(x{,}y{,}z{,}\lambda) &= 2-\lambda(2z-2x) &&= 0,\\
F_\lambda(x{,}y{,}z{,}\lambda) &= -(2x^2-3y^2+z^2-2xz-3) &&= 0.
\end{aligned}$$

Iz druge enačbe sledi $y = 0$ ali $\lambda = 0$, slednja enakost pa je v protislovju s tretjo enačbo. Ker je torej $\lambda \neq 0$, iz prve enačbe izračunamo $z = 2x$. Iz zadnje enačbe nato sledi $x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$. Možna vezana ekstrema sta torej točki $(\sqrt{\frac{3}{2}}, 0, \sqrt{6})$ in $(-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0, -\sqrt{6})$.

Naloga 1.6.14. Izračunajte možne vezane ekstreme funkcije treh spremenljivk

$$f(x,y,z) = x^2 - y^2$$

pri pogoju $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$.

Rešitev. Vzemimo Lagrangeovo funkcijo

$$F(x{,}y{,}z{,}\lambda) = x^2 - y^2 - \lambda(x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 1)$$

Rešitve sistema enačb $\operatorname{grad} F(x{,}y{,}z{,}\lambda) = 0$:

$$\begin{aligned}
F_x(x{,}y{,}z{,}\lambda) &= 2x - 2\lambda x &&= 0,\\
F_y(x{,}y{,}z{,}\lambda) &= -2y - 4\lambda y &&= 0,\\
F_z(x{,}y{,}z{,}\lambda) &= -6\lambda z &&= 0,\\
F_\lambda(x{,}y{,}z{,}\lambda) &= -(x^2+2y^2+3z^2-1) &&= 0,
\end{aligned}$$

so točke $T_{1,2}(0{,}0, \pm\frac{1}{\sqrt{3}})$, $T_{3,4}(0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}{,}0)$ in $T_{5,6}(\pm 1, 0{,}0)$.

Naloga 1.6.15. (vir: [10]) Za dane pozitivne konstante a, b, c, d naj bo funkcija $F : (0,\infty) \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ definirana s

$$F(x, y) = c \ln x - d \cdot x + a \ln y - b \cdot y.$$

Za točko $(x_0, y_0) = (x_0, a/b)$ naj velja $F(x_0, y_0) = \alpha$ in $x_0 > c/d$. Pokažite, da v okolici točke y_0 obstaja funkcija $g(y)$, da velja $g(y_0) = x_0$ in $F(g(y), y) = \alpha$. Pokažite, da ima g v točki y_0 lokalni maksimum.

Rešitev.
Parcialni odvod F po spremenljivki x mora biti neničeln:

$$\begin{aligned} F_x(x,y) &= c/x - d \\ F_x(x_0, a/b) &= c/x_0 - d \neq 0. \end{aligned}$$

Kar drži, saj $x_0 > c/d$. Po izreku o implicitni funkciji takšna funkcija g obstaja. Izračunamo še

$$\begin{aligned} g'(y) &= -\frac{F_y(x,y)}{F_x(x,y)} &&= -\frac{a/y - b}{c/x - d} \\ g'(a/b) &= -\frac{F_y(x_0,a/b)}{F_x(x_0,a/b)} = -\frac{0}{c/x_0 - d} &&= 0. \end{aligned}$$

Torej ima g v y_0 res stacionarno točko. Izračunajmo še drugi odvod:

$$\begin{aligned} g''(y) &= -\frac{F_{yy}(x,y) + 2F_{xy}(x,y)g'(y) + F_{xx}(x,y)(g'(y)^2)}{F_x(x,y)} \\ g''(a/b) &= \frac{b^2/a}{c/x_0 - d} < 0. \end{aligned}$$

Zadnjo neenakost dobimo iz podatkov $a > 0, b > 0, d > 0$ in $x_0 > c/d \Rightarrow c/x_0 < d$.

Naloga 1.6.16. Dana je funkcija treh spremenljivk

$$f(x, y, z) = 3zy^2 - z^3 e^{xz} + 2x^2 z.$$

Utemeljite, da obstaja taka okolica V točke $(1, -3)$ in taka funkcija $h : V \to \mathbb{R}$, da je $h(1, -3) = 0$ in $f(h(y, z), y, z) = 18$ za vse $(y, z) \in V$. Izračunajte tudi $h_z(1, -3)$.

Rešitev.
Izračunajmo $f_x(x,y,z) = -z^4 e^{xz} + 4xz$. Iz $f(0,1,-3) = 18$ in $f_x(0,1,-3) = -81 \neq 0$ po izreku o implicitni funkciji sledi, da takšna funkcija h res obstaja. Izračunajmo

$$\begin{aligned} h_z(y,z) &= -\frac{f_z(h(y,z),y,z)}{f_x(h(y,z),y,z)} \\ h_z(1,-3) &= -\frac{8}{27}. \end{aligned}$$

1.7 Povzetek

- Naj bosta $D \subseteq \mathbb{R}^n$ in $B \subset \mathbb{R}$ poljubni neprazni množici. Preslikavo $f : D \to B$ imenujemo **realna funkcija** n **realnih spremenljivk**. Za vsak $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$ torej obstaja natanko en $x_{n+1} \in \mathbb{R}$, da velja $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_{n+1}$.

- Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta množica in $(a_1,a_2, \ldots, a_n) \in D$. Pravimo, da je $L \in \mathbb{R}$ **limita funkcije** $f : D \to \mathbb{R}$ v točki $(a_1,a_2, \ldots, a_n)$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da za vse točke $(x_1, \ldots, x_n) \in O((a_1,a_2, \ldots, a_n), \delta)$, $(x_1, \ldots, x_n) \neq (a_1,a_2, \ldots, a_n)$ velja, da je $f(x_1, \ldots, x_n) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ (oziroma enakovredno, da je $|f(x_1, \ldots, x_n) - L| < \varepsilon$). Tu označimo limito L z

  $$L = \lim_{(x_1,\ldots,x_n)\to(a_1,\ldots,a_n)} f(x_1, \ldots, x_n).$$

  Pravimo, da je funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ zvezna v točki $(a_1,a_2, \ldots, a_n) \in D$, če limita

  $$\lim_{(x_1,\ldots,x_n)\to(a_1,\ldots,a_n)} f(x_1, \ldots, x_n)$$

  obstaja in je enaka $f(a_1,a_2, \ldots, a_n)$. Pravimo tudi, da je f zvezna na D, če je zvezna v vsaki točki $(a_1, \ldots, a_n) \in D$.

- Naj bo $D \subset \mathbb{R}^n$ odprta množica, $(a_1, \ldots, a_n) \in D$, $f : D \to \mathbb{R}$, $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto f(x_1, \ldots, x_n)$ funkcija n spremenljivk in $i \in \{1, \ldots, n\}$. Pravimo, da je f parcialno odvedljiva po i-ti spremenljivki v točki $(a_1, \ldots, a_n)$, če obstaja limita

  $$\lim_{h\to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_n)}{h}.$$

  V tem primeru to limito označimo s $f_{x_i}(a_1, \ldots, a_n)$ ali s $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \ldots, a_n)$ in jo imenujemo **parcialni odvod** funkcije f po i-ti spremenljivki x_i v točki $(a_1, \ldots, a_n)$.

  Pravimo tudi, da je f **parcialno odvedljiva na** D, če je parcialno odvedljiva v vseh točkah $(a_1, \ldots, a_n) \in D$.

- Naj bo $D \subset \mathbb{R}^n$ odprta množica, $(a_1, \ldots, a_n) \in D$, $f : D \to \mathbb{R}$, $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto f(x_1, \ldots, x_n)$ funkcija n spremenljivk. Pravimo, da je f **diferenciabilna** v točki $(a_1, \ldots, a_n)$, če obstaja tak vektor $(A_1, \ldots, A_n) \in \mathbb{R}^n$, da velja

  $$\lim_{(h_1,\ldots,h_n)\to(0,\ldots,0)} \frac{f(a_1 + h_1, \ldots, a_n + h_n) - f(a_1, \ldots, a_n) - (A_1h_1 + \ldots + A_nh_n)}{\sqrt{h_1^2 + \cdots + h_n^2}} = 0.$$

  Funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ je **diferenciabilna na** D, če je diferenciabilna v vsaki točki $(a_1, \ldots, a_n) \in D$.

  Diferenciabilne funkcije na D so zvezne na D. Zvezno parcialno odvedljive funkcije na D so diferenciabilne na D.

- **Diferencial (totalni diferencial)** $Df_{(a_1,\ldots,a_n)}(h_1,\ldots,h_n)$ diferenciabilne funkcije f v točki $(a_1,\ldots,a_n)$, izračunan na vektorju $(h_1,\ldots,h_n)$, je definiran z

$$Df_{(a_1,\ldots,a_n)}(h_1,\ldots,h_n) = f_{x_1}(a_1,\ldots,a_n)h_1 + \cdots + f_{x_n}(a_1,\ldots,a_n)h_n.$$

- Naj bo $G \subset \mathbb{R}^n$ odprta množica, $(a_1,\ldots,a_n) \in G$ in $f : G \to \mathbb{R}$. Naj bo $\vec{e} = (e_1,\ldots,e_n)$ enotski vektor ($|\vec{e}| = \sqrt{e_1^2 + \cdots + e_n^2} = 1$). Definiramo funkcijo ene spremenljivke

$$F(t) = f(a_1 + te_1, a_2 + te_2, \ldots, a_n + te_n)$$

na odprti okolici $t = 0$. Če je F odvedljiva v $t = 0$, potem $F'(0)$ imenujemo **smerni odvod** funkcije f v točki $(a_1,\ldots,a_n)$ v smeri vektorja $\vec{e}$ in ga označimo z $\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(a_1,\ldots,a_n)$. Velja torej

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(a_1,\ldots,a_n) = F'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{F(t) - F(0)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f(a_1 + te_1,\ldots,a_n + te_n) - f(a_1,\cdots,a_n)}{t}.$$

- Naj bo $G \subset \mathbb{R}^n$ odprta množica in $(a_1,\ldots,a_n) \in G$. Če je funkcija $f : G \to \mathbb{R}$ diferenciabilna v točki $(a_1,\ldots,a_n)$, potem ima f smerni odvod v smeri poljubnega enotskega vektorja $\vec{e} = (e_1,\ldots,e_n)$ in velja

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(a_1,\ldots,a_n) = Df_{(a_1,\ldots,a_n)}(e_1,\ldots,e_n) = \mathrm{grad}\, f(a_1,\ldots,a_n) \cdot \vec{e}$$

$$= f_{x_1}(a_1,\ldots,a_n)e_1 + \cdots + f_{x_n}(a_1,\ldots,a_n)e_n,$$

kjer je **gradient** funkcije f v točki $(a_1,\ldots,a_n)$ enak

$$\mathrm{grad}\, f(a_1,\ldots,a_n) = (f_{x_1}(a_1,\ldots,a_n),\ldots,f_{x_n}(a_1,\ldots,a_n)).$$

- Naj bo $D \subset \mathbb{R}^n$ odprta množica in $f : D \to \mathbb{R}$ parcialno odvedljiva funkcija. **Parcialni odvodi drugega reda** v točki $(a_1,\ldots,a_n) \in D$ so definirani kot parcialni odvodi prvih parcialnih odvodov, torej

$$f_{x_ix_j}(a_1,\ldots,a_n) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a_1,\ldots,a_n) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(a_1,\ldots,a_n).$$

Parcialne odvode višjih redov definiramo analogno (oz. iterativno z nadaljnim parcialnim odvajanjem).

- **Verižno pravilo.** Naj bosta $n, m \in \mathbb{N}$, naj bosta $G \subset \mathbb{R}^n$ in $H \subset \mathbb{R}^m$ odprti množici in naj bodo $f : G \to \mathbb{R}$ in $u_1,\ldots,u_n : H \to \mathbb{R}$ diferenciabilne funkcije. Naj za vse točke $(x_1,\ldots,x_m) \in H$ velja

$$(u_1(x_1,\ldots,x_m),\ldots,u_n(x_1,\ldots,x_m)) \in G.$$

Definiramo funkcijo $F : H \to \mathbb{R}$ s

$$F(x_1, \ldots, x_m) = f(u_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, u_n(x_1, \ldots, x_m)).$$

Potem je $F : H \to \mathbb{R}$ diferenciabilna funkcija in za vse $(x_1, \ldots, x_m) \in H$ in vsak $i \in \{1, \ldots, m\}$ velja

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial u_k}(u_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, u_n(x_1, \ldots, x_m)) \frac{\partial u_k}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_m).$$

Če so $f : G \to \mathbb{R}$ in $u_1, \ldots, u_n : H \to \mathbb{R}$ parcialno zvezno odvedljive funkcije, potem je tudi $F : H \to \mathbb{R}$ parcialno zvezno odvedljiva funkcija.

- Za primerno definirane diferenciabilne funkcije dveh spremenljivk f, u, v je tudi funkcija, definirana z $F(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$, diferenciabilna in velja

$$F_x(x,y) = f_u(u(x,y), v(x,y))u_x(x,y) + f_v(u(x,y), v(x,y))v_x(x,y),$$

$$F_y(x,y) = f_u(u(x,y), v(x,y))u_y(x,y) + f_v(u(x,y), v(x,y))v_y(x,y)$$

oziroma zapisano na kratko in manj natančno:

$$F_x = f_u u_x + f_v v_x,$$

$$F_y = f_u u_y + f_v v_y.$$

- **Taylorjeva formula.** Naj bo $D \subset \mathbb{R}^2$ odprta množica, $(a,b) \in D$ in $f : D \to \mathbb{R}$ $(n+1)$-krat zvezno parcialno odvedljiva funkcija. Za $(x,y) \in D$ velja

$$f(x,y) = T_n(x,y) + R_n(x,y),$$

kjer je

$$\begin{aligned} T_n(x,y) &= f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) + \\ &+ \frac{1}{2!}\left[f_{xx}(a,b)(x-a)^2 + 2f_{xy}(a,b)(x-a)(y-b) + f_{yy}(a,b)(y-b)^2\right] \\ &+ \cdots + \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-k}\partial y^k}(a,b)\,(x-a)^{n-k}(y-b)^k \end{aligned}$$

in

$$R_n(x,y) = \frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-k}\partial y^k}(\sigma,\mu)\,(x-a)^{n+1-k}(y-b)^k,$$

kjer je (σ,μ) neka točka na daljici med točkama (a,b) in (x,y), torej je $(\sigma,\mu) = (a+\gamma(x-a), b+\gamma(y-b))$ za nek $\gamma \in [0,1]$. Polinome $T_n(x,y)$ dveh spremenljivk imenujemo **Taylorjevi polinomi** stopnje n, razviti okrog točke (a,b). Oznaka $\binom{n}{k}$ označuje binomski simbol

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 1}.$$

- Če je f poljubno mnogokrat zvezno parcialno odvedljiva in je $\lim_{n\to\infty} R_n(x,y)=0$ za vse točke (x,y) iz neke odprte okolice U točke (a,b), potem rečemo, da je f analitična funkcija na U, saj je enaka svoji **Taylorjevi vrsti**, razviti okrog točke (a,b):

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)+ \\ &+\frac{1}{2!}\Big[f_{xx}(a,b)(x-a)^2+2f_{xy}(a,b)(x-a)(y-b)+f_{yy}(a,b)(y-b)^2\Big]+\cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-k}\partial y^k}(a,b)(x-a)^{n-k}(y-b)^k. \end{aligned}$$

- **Stacionarne točke** funkcije dveh spremenljivk $f:(x,y)\to f(x,y)$ so točke, v katerih je gradient ničelni vektor (oziroma takšne točke (x_0,y_0), da je tangentna ravnina v $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ vodoravna, torej vzporedna xy ravnini). Ekvivalentno, (x_0,y_0) je stacionarna točka funkcije f natanko tedaj, ko je

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=0 \ \text{ in } \ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0.$$

  Stacionarna točka je lahko lokalni ekstrem (lokalni maksimum ali lokalni minimum) funkcije f ali pa sedlo. Stacionarne točke funkcije f klasificiramo s pomočjo drugih parcialnih odvodov

$$f_{xx}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y),\quad f_{xy}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y),\quad f_{yy}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$$

  in determinanto Hessejeve matrike

$$\mathcal{H}f(x,y)=\begin{bmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y)\end{bmatrix}$$

  funkcije f.

- **Klasifikacija stacionarnih točk funkcije dveh spremenljivk.** Naj bo (x_0,y_0) stacionarna točka dvakrat zvezno parcialno odvedljive funkcije f. Če je
  - $\det\mathcal{H}f(x_0,y_0)>0$ in $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)<0$, potem je (x_0,y_0) lokalni maksimum,
  - $\det\mathcal{H}f(x_0,y_0)>0$ in $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)>0$, potem je (x_0,y_0) lokalni minimum,
  - $\det\mathcal{H}f(x_0,y_0)<0$, potem je (x_0,y_0) sedlo,
  - $\det\mathcal{H}f(x_0,y_0)=0$, potem je kriterij nesklepčen (točka (x_0,y_0) je lahko lokalni maksimum, lokalni minimum ali sedlo funkcije f).

- Naj bo $D\subset\mathbb{R}^n$ odprta množica in $g:D\to\mathbb{R}$ zvezno parcialno odvedljiva funkcija. Naj bo dana še zvezno parcialno odvedljiva **kriterijska** funkcija $f:D\to\mathbb{R}$.

  Kandidati za lokalne ekstreme funkcije $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ vzdolž krivulje (vezi) $g(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0$ so stacionarne točke **Lagrangeove funkcije**

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_n,\lambda)=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)-\lambda g(x_1,x_2,\ldots,x_n).$$

- **Izrek o implicitni funkciji za dve spremenljivki**. Naj bo $F : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, zvezno parcialno odvedljiva funkcija in naj bo $(x_0, y_0) \in D$ takšna točka, da velja

$$F(x_0, y_0) = c \qquad \text{in} \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0,$$

potem obstajata odprta intervala $U, V \subseteq \mathbb{R}$, kjer $x_0 \in U$ in $y_0 \in V$ ter takšna enolična zvezno odvedljiva funkcija $f : U \to V$, da velja

$$F(x, f(x)) = c$$

in

$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,f(x))} \tag{1.7.1}$$

za vsak $x \in U$. V posebnem, velja tudi

$$f'(x_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)}.$$

- **Izrek o implicitni funkciji več spremenljivk**. Naj bo $F : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, zvezno parcialno odvedljiva funkcija. Označimo $(x,y) = (x_1, \ldots, x_{n-1}, y) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^n$. Naj bo $(x_0, y_0) \in D$ takšna točka, da velja

$$F(x_0, y_0) = c \qquad \text{in} \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0,$$

potem obstajata odprti okolici $U \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ točke x_0 in $V \subseteq \mathbb{R}$ točke y_0 ter takšna enolična zvezno parcialno odvedljiva funkcija $f : U \to V$, da velja

$$F(x, f(x)) = c$$

in

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(x,f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,f(x))}, \quad i = 1, \ldots, n-1. \tag{1.7.2}$$

za vsak $x = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in U$. V posebnem, velja tudi

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_0,y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)}, \quad i = 1, \ldots, n-1.$$

2 Osnove diferencialne geometrije in vektorske analize

2.1 Uvod.

Diferencialna geometrija in vektorska analiza predstavljata osnovno orodje za inženirja, ki želi realne fizikalne probleme reševati na analitični način. To vključuje analitični opis krivulj in ploskev v prostoru ter računanje pretokov vektorskih polj po krivuljah in skozi ploskve. Lahko pomislimo na primer na gibanje delca po trajektoriji (ki določa krivuljo) skozi gravitacijsko ali elektro-magnetno vektorsko polje ali pa na pretok fluida skozi membrano (ki določa ploskev). Osrednja rezultata vektorske analize sta Gaussov izrek za računanje pretokov vektorskih polj skozi sklenjene ploskve in Stokesov izrek za računanje pretokov vektorskih polj po sklenjenih krivuljah, ki ju bomo spoznali v zaključku tega poglavja. S svojimi posledicami tvorita "obvezno opremo" za reševanje problemov iz zgoraj orisanih področij.

Osnovno matematično orodje v tem kontekstu predstavlja integral realne funkcije več spremenljivk, ki ga bomo spoznali v prvem razdelku tega poglavja. Integral realne funkcije več spremenljivk bomo vpeljali z naravno posplošitvijo idej, ki funkcionirajo za integrale funkcije ene spremenljivke (glej npr. [15], [17]).

Naj bo f dovolj lepa (na primer zvezna) funkcija dveh spremenljivk, definirana na dovolj lepem povezanem območju D v ravnini. V takem primeru graf funkcije f določa "neraztrgano" ploskev $\mathcal{S}$, ki leži v prostoru. Predpostavimo sedaj, da je $f \geq 0$ na D, torej $\mathcal{S}$ leži v zgornjem polprostoru, določenim s pogojem $z \geq 0$. Integral

$$\int_D f(x,y)\, dxdy$$

bomo definirali na tak način, da bo v tem primeru enak volumnu V območja G, ki je omejen z grafom $\mathcal{S}$, območjem D in vsemi navpičnicami nad robom območja D. V kolikor bi bila $f \leq 0$ na D, bi graf $\mathcal{S}$ ležal v spodnjem polprostoru, določenim s pogojem $z \leq 0$. Integral $\int_D f(x,y)\, dxdy$ je v takem primeru enak nasprotni vrednosti prej opisanega območja (to je $-V$). Uporabljali bomo tudi oznako

$$\int_D f(x,y)\,dxdy = \iint_D f(x,y)\,dxdy,$$

s čimer poudarimo, da gre za dvojni integral.

Z integralom funkcij dveh ali več spremenljivk lahko opišemo tudi številne druge fizikalne količine, kot so npr. masa nehomogenega telesa, težišče nehomogenega telesa, vztrajnostni moment nehomogenega telesa in deviacijski moment nehomogenega telesa (glejte razdelek 2.2.3).

Naslednji netrivialen primer iz teorije fluidov bomo znova srečali v zaključku tega poglavja.

Primer 2.1.1. (vir: [6]) Naj bo

$$\vec{v}(x,y,z) = (v_1(x,y,z), v_2(x,y,z), v_3(x,y,z))$$

hitrostno vektorsko polje fluida, torej $\vec{v}(x,y,z)$ predstavlja vektor hitrosti fluida v točki (x,y,z). Naj bo $\rho(x,y,z)$ gostota fluida v točki (x,y,z). Naj bo $\varphi(x,y,z)$ potencial vektorskega polja $\vec{v}(x,y,z)$, to je takšna funkcija treh spremenljivk, za katero velja

$$\vec{v} = \operatorname{grad}(\varphi) = (\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z).$$

Kinetična energija fluida v območju G je enaka trojnemu integralu

$$W = \frac{1}{2}\int_G |\vec{v}|^2 \rho\,dxdydz = \frac{1}{2}\iiint_G |\vec{v}|^2 \rho\,dxdydz.$$

V zaključku tega poglavja bomo s pomočjo Gaussovega izreka (enega osrednjih izrekov vektorske analize) izpeljali, da je W enaka ploskovnemu integralu 1. vrste (ki bo vpeljan v nadaljevanju)

$$W = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{S}} \rho\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{N}}\,dS,$$

kjer sklenjena ploskev $\mathcal{S}$ ograjuje območje G in je $\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{N}}$ smerni odvod potenciala φ v smeri zunanje enotske normale $\vec{N}$ ploskve $\mathcal{S}$.

2.2 Integrali funkcij več spremenljivk

V tem poglavju bomo obravnavali dvojni integral

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy,$$

kjer je D območje v xy ravnini, in trojni integral

$$\iiint_G f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,$$

kjer je G telo v prostoru $\mathbb{R}^3$.

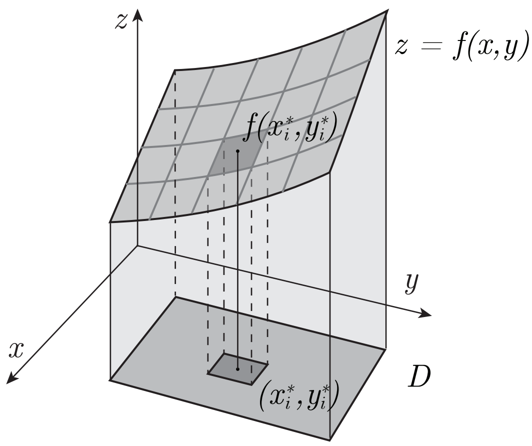
Naj bo $f : D \to \mathbb{R}$ omejena pozitivna funkcija dveh spremenljivk nad pravokotnikom $D = [a,b] \times [c,d]$. Dvojni integral

$$\iint_D f(x,y)\, dx\, dy$$

funkcije f bomo definirali na tak način, da bo enak volumnu (prostornini) telesa pod grafom funkcije f, torej telesa

$$G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in D, z \in [0,f(x,y)]\},$$

kot je prikazano na spodnji sliki.



2.2.1 Dvojni integral

Definirajmo **dvojni integral** omejene funkcije $f : D \to \mathbb{R}$ dveh spremenljivk nad pravokotnikom $D = [a,b] \times [c,d]$.

Interval $[a,b]$ razdelimo na n podintervalov, interval $[c,d]$ pa razdelimo na m podintervalov. Naredimo torej particijo (delitev) P_1 intervala $[a,b]$:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots x_{n-1} < x_n = b$$

in particijo P_2 intervala $[c,d]$:

$$c = y_0 < y_1 < x_2 < \cdots y_{m-1} < y_m = d.$$

Območje D smo tako razdelili na nm manjših pravokotnikov, ki jih označimo z

$$D_{ij} = [x_{i-1},x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$$

za $i = 1,\ldots,n$ in $j = 1,\ldots,m$. Ploščina p_{ij} pravokotnika D_{ij} je enaka $p_{ij} = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$. Particijo pravokotnika D na pravokotnike D_{ij} označimo s P. Označimo naslednje natančne zgornje in spodnje meje:

$$M_{ij} = \sup_{(x,y)\in D_{ij}} f(x,y), \quad m_{ij} = \inf_{(x,y)\in D_{ij}} f(x,y).$$

Definicija 2.2.1. Naj bo dana particija P. Zgornja (Darbouxova) vsota je

$$S_P = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} M_{ij} p_{ij},$$

spodnja (Darbouxova) vsota je

$$s_P = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} m_{ij} p_{ij}.$$

Označimo

$$S = \inf S_P, \quad s = \sup s_P,$$

kjer vzamemo **infimum** (natančno spodnjo mejo) in **supremum** (natančno zgornjo mejo) po vseh particijah P pravokotnika D.

Definicija 2.2.2. Pravimo, da je omejena funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ na pravokotniku $D = [a,b] \times [c,d]$ (Riemanovo oziroma Darbouxovo) integrabilna, če je $S = s$. V tem primeru definiramo njen dvojni integral z

$$\int_D f(x,y)\, dx\, dy = \iint_D f(x,y)\, dx\, dy = S = s.$$

Opomba. (vir: [4]) Omejena funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ je na pravokotniku $D = [a,b] \times [c,d]$ integrabilna natanko tedaj, ko za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja taka particija P pravokotnika D, za katero je $S_P - s_P \leq \varepsilon$.

Izrek 2.2.3. (vir: [4]) Vsaka zvezna funkcija na pravokotniku $D = [a,b] \times [c,d]$ je integrabilna.

Zgornjo definicijo pripisujemo Darbouxu, spodnji enakovreden pristop pa je vpeljal Riemann. V vsakem pravokotniku D_{ij} izberemo točko (x_i^*, y_j^*) in izračunamo Riemannove vsote

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(x_i^*, y_j^*) p_{ij}.$$

Z d_{ij} označimo premer (dolžino diagonale) pravokotnika D_{ij}, torej je

$$d_{ij} = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_j - y_{j-1})^2}.$$

Z $d(P)$ označimo maksimalni premer pravokotnikov D_{ij} pri particiji P.

Izrek 2.2.4. (vir: [4]) Omejena funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ je na pravokotniku $D = [a,b] \times [c,d]$ integrabilna natanko tedaj, če obstaja takšno realno število $I(f)$, ki ima naslednjo lastnost: za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da je

$$|I(f) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(x_i^*, y_j^*)p_{ij}| \leq \varepsilon$$

za poljubno particijo P pravokotnika D z $d(P) \leq \delta$ in za poljuben izbor točk $(x_i^*, y_j^*) \in D_{ij}$. Tedaj je

$$I(f) = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy.$$

Velja torej, da je

$$I(f) = \lim_{d(P)\to 0} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(x_i^*, y_j^*)p_{ij}$$

za poljuben izbor točk $(x_i^*, y_j^*) \in D_{ij}$.

Opomba. Za katerokoli particijo in poljuben izbor točk (x_i^*, y_j^*) torej Riemannova vsota

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(x_i^*, y_j^*)p_{ij}$$

predstavlja približek za izračun integrala $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$. Numerično metodo, ki temelji na tej ideji, včasih imenujemo Monte Carlo metoda za približen izračun integrala.

Če je $D = D_1 \cup \cdots \cup D_n$ unija končno mnogo pravokotnikov (ki si paroma delijo kvečjemu rob) in je f integrabilna na vseh pravokotnikih D_i, potem definiramo:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy + \cdots + \iint_{D_n} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Za dvojni integral velja naslednja lastnost.

Izrek 2.2.5. (vir: [4]) Naj bo $D = [a,b] \times [c,d]$ pravokotnik v $\mathbb{R}^2$ in naj bosta $f : D \to \mathbb{R}$, $g : D \to \mathbb{R}$ integrabilni funkciji. Potem za poljubni realni konstanti α in β velja **linearnost**:

$$\iint_D (\alpha f(x,y) + \beta g(x,y))\,dx\,dy = \alpha \iint_D f(x,y)\,dx\,dy + \beta \iint_D g(x,y)\,dx\,dy.$$

Fubinijev izrek pove, da lahko dvojni integral izračunamo s pomočjo enojnega integrala.

Izrek 2.2.6 (Fubinijev izrek). (vir: [4]) Naj bo $D = [a,b] \times [c,d]$ pravokotnik v $\mathbb{R}^2$ in $f : D \to \mathbb{R}$ integrabilna funkcija. Tedaj velja

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy$$

in

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx.$$

Opomba. Za splošnejša omejena območja $D \subset \mathbb{R}^2$ in omejeno funkcijo $f : D \to \mathbb{R}$ se integrabilnost in integral definira na naslednji način. Ker je D omejeno, obstaja pravokotnik Q, za katerega velja $D \subset Q$. Definiramo (karakteristično) funkcijo $g : Q \to \mathbb{R}$ z $g(x,y) = f(x,y)$ za $(x,y) \in D$ in $g(x,y) = 0$ za $(x,y) \in Q \setminus D$. Pravimo, da je f integrabilna na D, če je g integrabilna na Q in v tem primeru definiramo

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_Q g(x,y)\,dx\,dy.$$

Izkaže se, da je zgornja definicija neodvisna od izbora pravokotnika Q in da za primerne (Jordanovo merljive) množice D veljajo analogni rezultati, kot smo jih navedli zgoraj. Več podrobnosti si bralec lahko prebere v [4].

Poglejmo si na primer še dva primera Fubinijevega izreka za nekoliko bolj splošna območja.

Izrek 2.2.7. (vir: [4]) Naj bosta na intervalu $[a,b]$ definirani omejeni zvezni funkciji $\varphi_1, \varphi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$, za kateri velja $\varphi_1(x) \le \varphi_2(x)$ za vsak $x \in [a,b]$. Označimo še $D = \{(x,y) \in [a,b] \times \mathbb{R} \mid \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$. Tedaj za zvezno funkcijo $f : D \to \mathbb{R}$ velja enakost

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

Analogno, naj bosta na intervalu $[c,d]$ definirani omejeni zvezni funkciji $\psi_1, \psi_2 : [c,d] \to \mathbb{R}$, za kateri velja $\psi_1(y) \le \psi_2(y)$ za vsak $y \in [c,d]$. Na novo označimo $D = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times [c,d] \mid \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\}$. Tedaj za zvezno funkcijo $f : D \to \mathbb{R}$ velja enakost

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

Primer 2.2.1. Izračunajmo volumen telesa G, med paraboloidom $z = x^2 + y^2$ in trikotnikom T v xy ravnini, ki ga določajo točke $A(0,0)$, $B(2,-1)$ in $C(2,2)$. Natančneje lahko telo G zapišemo kot

$$G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 2, -\frac{x}{2} \leq y \leq x, 0 \leq z \leq x^2 + y^2\}.$$

Volumen območja G lahko sedaj izračunamo s pomočjo Fubinijevega izreka 2.2.7:

$$\begin{aligned} V(G) &= \iint_T (x^2 + y^2)\, dx\, dy = \int_0^2 \left(\int_{-\frac{x}{2}}^{x} (x^2 + y^2)\, dy \right) dx \\ &= \int_0^2 \left((x^2 y + \frac{1}{3} y^3) \Big|_{y=-\frac{x}{2}}^{x} \right) dx = \int_0^2 \frac{15}{8} x^3\, dx = \frac{15}{2}. \end{aligned}$$

Pri bolj zapletenih območjih smo pogosto območje prisiljeni razdeliti na več delov.

Primer 2.2.2. Izračunajmo volumen telesa G pod ravnino $x + y + z = 4$ in trikotnikom T v xy ravnini, ki ga določajo točke $A(0,0)$, $B(1,-1)$ in $C(2,2)$. Trikotnik T lahko razdelimo na dva dela $T_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, -x \leq y \leq x\}$ in $T_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 2, -4 + 3x \leq y \leq x\}$.
Po Fubinijevemu izreku sledi:

$$\begin{aligned} V(G) &= \iint_T (4 - x - y)\, dx\, dy \\ &= \int_0^1 \left(\int_{-x}^{x} ((4 - x - y))\, dy \right) dx + \int_1^2 \left(\int_{-4+3x}^{x} ((4 - x - y))\, dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(-2x^2 + 8x \right) dx + \int_1^2 \left(6x^2 - 24x + 24 \right) dx = \frac{10}{3} + 2 = \frac{16}{3}. \end{aligned}$$

Včasih je integral lažje izračunati, če **zamenjamo vrstni red integriranja**, kot nakazuje naslednji primer.

Primer 2.2.3. Izračunajmo vrednost dvojnega integrala

$$\int_0^4 \left(\int_{\sqrt{x}}^{2} \sqrt{1 + y^3}\, dy \right) dx.$$

Notranjega integrala ne znamo izračunati, zato poskusimo zamenjati vrstni red integriranja:

$$\int_0^4 \left(\int_{\sqrt{x}}^{2} \sqrt{1 + y^3}\, dy \right) dx = \int_0^2 \left(\int_0^{y^2} \sqrt{1 + y^3}\, dx \right) dy = \int_0^2 y^2 \sqrt{1 + y^3}\, dy = \frac{52}{9},$$

pri zadnjem koraku smo si pomagali s substitucijo $t^2 = 1 + y^3$.

2.2.2 Trojni integral

Naj bo $G = [a,b] \times [c,d] \times [e,g]$ kvader in $f : G \to \mathbb{R}$ omejena funkcija treh spremenljivk. Integrabilnost in trojni integral lahko z razrezom na manjše podkvadre definiramo na podoben način, kot smo to storili v prejšnjem podrazdelku. Na primer, Riemannov pristop bi nas pripeljal do definicije

$$I(f) = \iiint_G f(x,y,z)\,dxdydz = \lim_{d(P)\to 0} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{l} f(x_i^*, y_j^*, z_k^*) p_{ijk}$$

za poljuben izbor točk (x_i^*, y_j^*, z_k^*) iz manjših kvadrov G_{ijk}, ki določajo delitev P kvadra G. Pri tem je $d(P)$ maksimalna dolžina telesne diagonale kvadrov G_{ijk} pri delitvi P, p_{ijk} pa volumen kvadra G_{ijk}. Tudi razširitev teorije integrabilnosti in trojnega integrala na splošnejša območja poteka na analogen način kot pri funkcijah dveh spremenljivk. Podobno velja za funkcije n spremenljivk.

Podobno kot pri dvojnem integralu velja Fubinijev izrek (in posplošeni Fubinijev izrek) tudi pri trojnem integralu. Integral integrabilne funkcije f na kvadru $G = [a,b] \times [c,d] \times [e,g]$ lahko izračunamo kot vgnezdeni integral:

$$\iiint_G f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_e^g \left(\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y,z)\,dx \right) dy \right) dz.$$

Pri tem vrstni red integriranja ni pomemben. Včasih uporabljamo naslednji zapis

$$\iiint_G f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_e^g dz \int_c^d dy \int_a^b f(x,y,z)\,dx = \int_c^d dy \int_e^g dz \int_a^b f(x,y,z)\,dx$$
$$= \int_a^b dx \int_e^g dz \int_c^d f(x,y,z)\,dy = \cdots .$$

2.2.3 Uporaba dvojnega in trojnega integrala

Sledi nekaj zgledov uporabe dvojnega in trojnega integrala.

1. **Ploščino območja** D v ravnini lahko izračunamo s formulo
$$\mathrm{pl}(D) = \iint_D 1\,dx\,dy.$$

2. **Maso ploskve**, ki leži na območju $D \subseteq \mathbb{R}^2$ z gostoto $\rho : D \to \mathbb{R}$ izračunamo s formulo
$$m = \iint_D \rho(x,y)\,dx\,dy.$$

3. **Težišče** (x_T, y_T) ploskve v xy ravnini dobimo s formulo
$$x_T = \frac{\iint_D x\rho(x,y)\,dx\,dy}{\iint_D \rho(x,y)\,dx\,dy}, \qquad y_T = \frac{\iint_D y\rho(x,y)\,dx\,dy}{\iint_D \rho(x,y)\,dx\,dy},$$

4. **Prostornino telesa** $G \subseteq \mathbb{R}^3$ izračunamo s formulo

$$V(G) = \iiint_G 1\,dx\,dy\,dy.$$

5. **Maso** telesa $G \subseteq \mathbb{R}^3$ z gostoto $\rho : G \to \mathbb{R}$ izračunamo s formulo

$$m = \iiint_G \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

6. **Težišče** (x_T, y_T, z_T) telesa G dobimo s formulami

$$x_T = \frac{\iiint_G x\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{\iiint_D \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}, \quad y_T = \frac{\iiint_G y\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{\iiint_D \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz},$$

$$z_T = \frac{\iiint_G z\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{\iiint_D \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}.$$

7. **Masni vztrajnostni momenti** I_{xx} (okrog x osi), I_{yy} (okrog y osi) in I_{zz} (okrog z osi) telesa G so enaki

$$I_{xx} = \iiint_G x\rho(x,y,z)(y^2 + z^2)\,dx\,dy\,dz,$$

$$I_{yy} = \iiint_G y\rho(x,y,z)(x^2 + z^2)\,dx\,dy\,dz,$$

$$I_{zz} = \iiint_G z\rho(x,y,z)(x^2 + y^2)\,dx\,dy\,dz.$$

8. **Deviacijski momenti** D_{xy} (okrog z osi), D_{xz} (okrog y osi) in D_{yz} (okrog x osi) so enaki

$$D_{xy} = \iiint_G xy\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,$$

$$D_{xz} = \iiint_G xz\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,$$

$$D_{yz} = \iiint_G yz\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

Primer 2.2.4. Izračunajmo maso kvadra, danega z $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 3$, $0 \leq z \leq 2$, ki ima gostoto $\rho(x,y,z) = x^2 y$. Maso dobimo s trojnim integralom

$$m = \int_0^2 \int_0^3 \int_0^1 x^2 y\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{3} \int_0^2 \int_0^3 (x^3 y)\Big|_{x=0}^1 dy\,dz = \frac{1}{3} \int_0^2 \int_0^3 y\,dy\,dz$$
$$= \frac{1}{6} \int_0^2 y^2\Big|_{y=0}^3 dz = \frac{9}{6} \int_0^2 dz = \frac{9}{6} z\Big|_0^2 = 3.$$

2.3 Splošna formula za uvedbo novih koordinat

Naj bo dan dvojni integral v kartezičnih koordinatah x, y zvezne funkcije f nad območjem D,

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy,$$

ki ga želimo zapisati v novih spremenljivkah u, v.

Bijektivna transformacija med spremenljivkami,

$$x = \varphi(u,v) \qquad \text{in} \qquad y = \psi(u,v),$$

je določena z bijektivno zvezno odvedljivo funkcijo $(\varphi, \psi) : D' \to D$, kjer je $D' \subseteq \mathbb{R}^2$ območje novih koordinat.

Jacobijeva matrika te transformacije je matrika

$$J = \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u,v)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v} \end{bmatrix}$$

Izkaže se, da sta produkta diferencialov starih in novih spremenljivk tesno povezana z **determinanto Jacobijeve matrike**. Velja enakost

$$dx\,dy = |\det(J)| \cdot du\,dv.$$

Natančneje, velja splošna formula za uvedbo novih koordinat dvojnega integrala ([4]):

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D'} f(\varphi(u,v), \psi(u,v))|\det(J)|\,du\,dv,$$

kjer je D' območje koordinat u,v.

Podobno ravnamo v primeru trojnega integrala. Naj relacijo med spremenljivkami x,y,z in spremenljivkami u,v,w določa bijektivna transformacija

$$x = \varphi(u,v,w), \qquad y = \psi(u,v,w) \qquad \text{in} \qquad z = \chi(u,v,w),$$

dana z bijektivno zvezno odvedljivo funkcijo $(\varphi,\psi,\chi) : G' \to G$.

Jacobijeva matrika te transformacije je

$$J = \frac{\partial(\varphi, \psi, \chi)}{\partial(u,v,w)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v} & \frac{\partial\varphi}{\partial w} \\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v} & \frac{\partial\psi}{\partial w} \\ \frac{\partial\chi}{\partial u} & \frac{\partial\chi}{\partial v} & \frac{\partial\chi}{\partial w} \end{bmatrix}$$

Trojni integral zvezne funkcije f v novih in starih koordinatah sta povezana preko determinante Jacobijeve matrike ([4]):

$$\iint_G f(x,y)\,dx\,dy\,dz = \iint_{G'} f(\varphi(u,v,w), \psi(u,v,w), \chi(u,v,w))|\det(J)|\,du\,dv\,dw,$$

kjer je G' območje koordinat u,v,w.

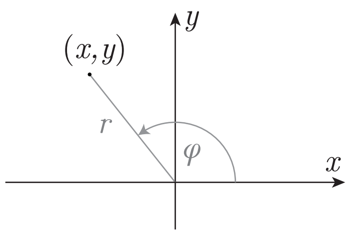
Primer 2.3.1. Izračunajmo ploščino elipse E z enačbo $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq 1$. Uvedimo koordinate $x = au, y = bv$. Območje koordinat u,v je enotski krog E'. Determinanta pripadajoče Jacobijeve matrike je $\det(J) = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} = ab > 0$. Ploščino dobimo z integriranjem po območju elipse:

$$P = \iint_E dx\,dy = \iint_{E'} ab\,du\,dv = ab \iint_{E'} du\,dv = ab\pi,$$

kjer smo upoštevali, da je ploščina enotskega kroga enaka π.

2.3.1 Polarne koordinate

Kartezične koordinate vsake točke (x,y) v ravnini lahko izrazimo s **polarnima koordinatama** (r,φ), kjer je r razdalja točke (x,y) od koordinatnega izhodišča $(0,0)$, φ pa kot, ki ga daljica s krajiščema $(0,0)$ in (x,y) oklepa z abscisno osjo.



Torej je $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ in $\tan\varphi = \frac{y}{x}$. Obratno je

$$x = r\cos\varphi \;\text{ in }\; y = r\sin\varphi.$$

Determinanta Jacobijeve matrike te transformacije je

$$\det J = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r.$$

Če je območje, po katerem integriramo, krog ali del kroga, si pri integriranju pogosto pomagamo z uvedbo polarnih koordinat. Npr., enotski krog

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

lahko v polarnih koordinatah zapišemo kot pravokotnik

$$D' = \{(r,\varphi) \mid 0 \leq \varphi < 2\pi,\ 0 \leq r \leq 1\}.$$

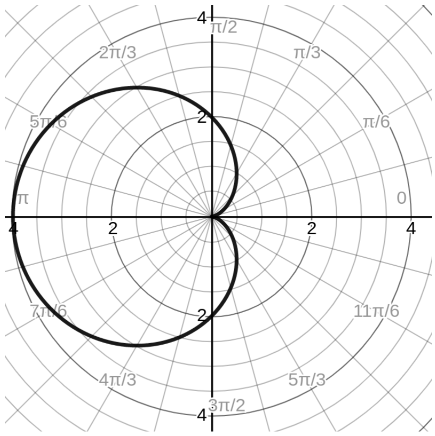
Potem je

$$\int_D f(x,y)\ dx\ dy = \int_{D'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\ dr\ d\varphi,$$

kjer je v splošnem D' območje, ki ga dobimo z bijektivno transformacijo območja D v polarne koordinate.

Primer 2.3.2. Izračunajmo ploščino območja, ki jo v ravnini omejuje srčnica (kardioida), ki jo določa enačba

$$r(\varphi) = 2a(1 - \cos\varphi).$$



Srčnica za $a = 1$.

Dobimo

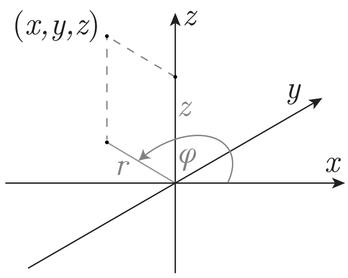
$$\begin{aligned} P &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2a(1-\cos\varphi)} r\, dr\, d\varphi \\ &= 2a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos\varphi)^2\, d\varphi \\ &= 2a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi)\, d\varphi \\ &= 2a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos\varphi + \frac{1}{2}(1 + \cos(2\varphi))\, d\varphi \\ &= 2a^2 \left(\frac{3}{2}\varphi - 2\sin\varphi + \frac{1}{4}\sin(2\varphi) \right) \Big|_0^{2\pi} \\ &= 6\pi a^2. \end{aligned}$$

2.3.2 Cilindrične koordinate

Pri integraciji po valju (cilindru) ali podobnem telesu lahko uporabimo **cilindrične koordinate** (r, φ, z), ki so posplošitev polarnih koordinat

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z,$$

kjer $r \in [0,\infty), \varphi \in [0,2\pi)$ in $z \in \mathbb{R}$.



Determinanta Jacobijeve matrike ustrezne bijektivne transformacije je

$$\det(J) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

Dobimo

$$\int_G f(x,y,z)\ dx\ dy\ dz = \int_{G'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\, r\ dr\ d\varphi\ dz,$$

kjer je G' območje, ki ga dobimo z bijektivno transformacijo območja G s cilindričnimi koordinatami.

Primer 2.3.3. Izračunajmo vztrajnostni moment okoli osi z preseka valja z osjo z, polmerom 2 in osnovnima ploskvama na ravninah $z = 0$ in $z = 3$, s polprostorom $y \geq 0$, natančneje, telesa, podanega z

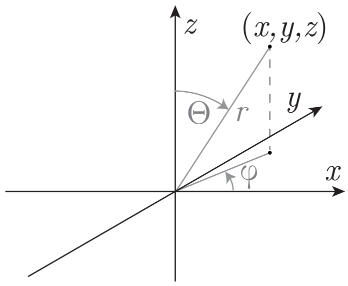
$$G = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 3, y \geq 0\}.$$

Gostota naj bo podana s predpisom $\rho(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2}$.
V cilindričnih koordinatah je gostota torej $\rho^*(r,\varphi,z) = r$. Izračunamo

$$\begin{aligned} I_{zz} &= \iiint_G z \cdot \rho(x,y,z) \cdot (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz \\ &= \int_0^\pi \left(\int_0^3 \left(\int_0^2 z \cdot r \cdot r^2 \cdot r\, dr \right) dz \right) d\varphi \\ &= \pi \cdot \frac{z^2}{2}\bigg|_{z=0}^{3} \cdot \frac{r^5}{5}\bigg|_{r=0}^{2} = \frac{144\pi}{5}. \end{aligned}$$

2.3.3 Krogelne koordinate

V primeru, ko integriramo po krogli, delu krogle ali podobnem telesu, lahko uporabimo krogelne (sferične) koordinate. Kartezične koordinate točke (x,y,z) izrazimo s sferičnimi koordinatami (r, θ, φ), kjer r označuje oddaljenost točke (x,y,z) od koordinatnega izhodišča, θ je kot, ki ga z os oklepa z daljico s krajiščema $(0,0,0)$ in (x,y,z), φ pa je kot, ki ga daljica s krajiščema $(0,0,0)$ in $(x,y,0)$ (projekcija točke na xy ravnino) oklepa z abscisno osjo.



Veljajo zveze

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta,$$

kjer $r \in [0,\infty), \varphi \in [0,2\pi)$ in $\theta \in [0,\pi]$.

Determinanta Jacobijeve matrike ustrezne bijektivne transformacije je

$$\det(J) = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = r^2\sin\theta.$$

Trojni integral funkcije f na območju G je enak

$$\begin{aligned} &\int_G f(x,y,z)\; dx\; dy\; dz = \\ &= \int_{G'} f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)\, r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi, \end{aligned}$$

kjer je G' območje, ki ga dobimo z bijektivno transformacijo območja G v krogelne koordinate.

Primer 2.3.4. Izračunajmo maso dela krogle $x^2+y^2+z^2 \leq 1$, ki leži v 1. oktantu in ima gostoto podano s formulo $\rho(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

Zanima nas torej masa telesa

$$G = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \geq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}.$$

V krogelnih koordinatah je gostota torej podana z $\rho^*(r,\varphi,\theta) = \frac{1}{r}$. Izračunamo

$$\begin{aligned} m &= \iiint_G \rho(x,y,z)\, dx\, dy\, dz \\ &= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^1 \frac{1}{r}\cdot r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi \\ &= \frac{\pi}{2}\cdot(-\cos\theta)\Big|_{\theta=0}^{\pi/2}\cdot\frac{r^2}{2}\Big|_{r=0}^{1} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

2.4 Skalarna in vektorska polja, vektorske funkcije

V tem podrazdelku bomo razširili pojma realne funkcije ene spremenljivke in realne funkcije več spremenljivk (glejte npr. [14], [15], [11], [16]). Obravnavali bomo namreč vektorske funkcije in vektorska polja. Pojmi, kot sta zveznost in odvedljivost, se na naraven način razširijo v to splošnejšo situacijo (glej tudi [17], [18] za podobno obravnavo snovi nadaljnjih razdelkov).

Najprej se dogovorimo za naslednje poimenovanje.

Definicija 2.4.1. Naj bo G podmnožica v $\mathbb{R}^n$ in $f : G \to \mathbb{R}$

$$(x_1,x_2,\dots,x_n) \mapsto f(x_1,x_2,\dots,x_n)$$

funkcija, definirana na G. Takšno funkcijo f imenujemo tudi **skalarno polje**.

Skalarno polje je torej le drugo poimenovanje za pojem realne funkcije več spremenljivk, ki je bil obravnavan v prvem poglavju tega učbenika (glej tudi [16], [11], [17], [18]).

Primer 2.4.1. Razdalja d v prostoru $\mathbb{R}^3$ med dano točko $A(x_0, y_0, z_0)$ in točko $T(x,y,z)$, podana z

$$d(x,y,z) = |\overrightarrow{AT}| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$$

je primer skalarnega polja $d : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.
Bolj splošno, razdalja d v prostoru $\mathbb{R}^n$ med dano točko $A(a_1,\dots,a_n)$ in točko $T(x_1,\dots,x_n)$ podana z

$$d(x_1,x_2,\dots,x_n) = |\overrightarrow{AT}| = \sqrt{(x_1-a_1)^2 + \dots + (x_n-a_n)^2}$$

je primer skalarnega polja $d : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Primer 2.4.2. Naj bo $G \subset \mathbb{R}^3$ območje v prostoru in $[0,t_0]$ časovni interval, kjer je $t_0 > 0$. S $T(x,y,z,t)$ označimo temperaturo v točki $(x,y,z) \in G$ ob času $t \in [0,t_0]$ in $D = G \times [0,t_0]$. Potem je $T : D \to \mathbb{R}$ skalarno polje.

Definicija 2.4.2. Naj bo G podmnožica v $\mathbb{R}^n$. **Vektorsko polje** $\vec{F}$ na G je preslikava $\vec{F} : G \to \mathbb{R}^m$,

$$\vec{F}(x_1,\dots,x_n) = (F_1(x_1,\dots,x_n),\dots,F_m(x_1,\dots,x_n)),$$

kjer so $F_1,F_2,\dots,F_m$ skalarna polja na G.

Primer 2.4.3. S predpisom $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{F}(x,y,z) = (x,y,z)$ je podano vektorsko polje, ki ga včasih imenujemo radialno vektorsko polje. Lahko ga interpretiramo na naslednji način. Polje $\vec{F}$ vsaki točki $T(x,y,z)$ v prostoru priredi njen krajevni vektor (ki ima iste koordinate kot točka T).

Primer 2.4.4. Pomembna primera vektorskih polj sta npr. tangentno vektorsko polje neke krivulje (ki ga tvorijo tangentni vektorji primerne krivulje) in pa normalno vektorsko polje neke ploskve (ki ga tvorijo normalni vektorji primerne ploskve).

Primer 2.4.5. Naj bo $G \subseteq \mathbb{R}^3$ območje v prostoru in $[0,t_0]$ interval, kjer je $t_0 > 0$. Na območju G opazujemo fluid v časovnem intervalu $[0,t_0]$. Z $\vec{v}(x,y,z,t)$ označimo vektor hitrosti fluida v točki (x,y,z) ob času t. Preslikava

$$\vec{F}(x,y,z,t) = \vec{v}(x,y,z,t) = (v_1(x,y,z,t), v_2(x,y,z,t), v_3(x,y,z,t))$$

torej podaja (dinamično) hitrostno vektorsko polje fluida. Vsaka izmed koordinatnih funkcij $v_i : G \times [0,t_0] \to \mathbb{R}$ za $i = 1,2,3$ je skalarno polje.

Primer 2.4.6. (vir: [5]) Naj bo $\vec{F}(x,y,z)$ gravitacijska sila med različnima masnima točkama $T_0(x_0, y_0, z_0)$ in $T(x, y, z)$. Z $\vec{r}$ označimo vektor $\vec{r} = \overrightarrow{T_0T}$ in z r njegovo dolžino

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}.$$

Potem je vektorsko polje $\vec{F}$ enako

$$\vec{F}(x,y,z) = -\frac{c}{r^3}\vec{r} = -c\left(\frac{x - x_0}{r^3}, \frac{y - y_0}{r^3}, \frac{z - z_0}{r^3}\right)$$

za $c = gm_1m_2$, kjer je g gravitacijski pospešek, m_1 in m_2 pa masi točk T_0 in T.

Naj bo $I \subseteq \mathbb{R}$. Preslikavo $\vec{r} : I \to \mathbb{R}^n$,

$$\vec{r} : t \mapsto \vec{r}(t), \quad \vec{r}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$$

imenujemo **vektorska funkcija**.

Definicija 2.4.3. Pravimo, da ima vektorska funkcija $\vec{r}$ **limito** $\vec{L}$ v točki t_0, če je $\vec{r}(t)$ definirana na punktirani okolici točke t_0 in če je

$$\lim_{t \to t_0} |\overrightarrow{r}(t) - \vec{L}| = 0.$$

Spomnimo se (glejte npr. [14]), da je punktirana okolica točke t_0 oblike $(t_0 - \delta, t_0 + \delta) \setminus \{t_0\}$ za nek $\delta > 0$.

Definicija 2.4.4. Pravimo, da je vektorska funkcija $\vec{r}$ **zvezna** v točki t_0, če je

$\vec{r}(t)$ definirana na okolici točke t_0 ter limita $\lim_{t\to t_0}\vec{r}(t)$ obstaja in zanjo velja

$$\lim_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\vec{r}(t_0).$$

Vektorska funkcija $\vec{r}(t)$ je zvezna na $I\subseteq\mathbb{R}$, če je zvezna v vsaki točki iz I.

Velja, da je vektorska funkcija $\vec{r}(t)=(x_1(t),\ldots,x_n(t))$ zvezna v točki t_0 natanko tedaj, ko so vse koordinatne funkcije $x_1(t),\ldots,x_n(t)$ zvezne v točki t_0.

Podobno pravimo, da je za $G\subset\mathbb{R}^n$ vektorsko polje $\vec{F}:G\to\mathbb{R}^m$,

$$\vec{F}(x_1,\ldots,x_n)=(F_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,F_m(x_1,\ldots,x_n))$$

zvezno v točki $(x_1,\ldots,x_n)\in G$, če so vsa skalarna polja $F_1,F_2,\ldots,F_m$ zvezna v točki $(x_1,\ldots,x_n)\in G$. Vektorsko polje je zvezno na G, če je zvezno v vsaki točki $(x_1,\ldots,x_n)\in G$.

Definicija 2.4.5. (vir: [5]) Vektorska funkcija $\vec{r}$ je **odvedljiva v točki** t, če je definirana na okolici točke t in če obstaja naslednja limita

$$\vec{r}\,'(t)=\lim_{h\to 0}\frac{\vec{r}(t+h)-\vec{r}(t)}{h}.$$

Vektor $\vec{r}\,'(t)$ imenujemo odvod $\vec{r}(t)$ v točki t.
Vektorska funkcija je **odvedljiva na intervalu** $I\subset\mathbb{R}$, če je odvedljiva v vsaki točki $t\in I$. Vektorska funkcije je **odvedljiva**, če je odvedljiva na celotnem definicijskem območju.

Za odvedljivo vektorsko funkcijo $\vec{r}(t)=(x_1(t),\ldots,x_n(t))$ velja

$$\vec{r}\,'(t)=(x_1'(t),\ldots,x_n'(t)).$$

Primer 2.4.7. V prostoru $\mathbb{R}^3$, ki smo ga opremili s (pravokotnim) koordinatnim sistemom, lahko gibanje točkastega delca od točke A do točke B opišemo z množico krajevnih vektorjev (oziroma vektorsko funkcijo)

$$\vec{r}(t)=(x_1(t),x_2(t),x_3(t)),$$

pri čemer je $t\in[a,b]\subset\mathbb{R}$ (lahko si predstavljamo, da parameter t označuje čas),

$$\begin{aligned} t &\mapsto x_1(t)=x(t)\\ t &\mapsto x_2(t)=y(t)\\ t &\mapsto x_3(t)=z(t)\end{aligned}$$

so realne funkcije spremenljivke t, kjer je $\vec{r}(a)=(x_1(a),x_2(a),x_3(a))$ krajevni vektor točke A in $\vec{r}(b)=(x_1(b),x_2(b),x_3(b))$ krajevni vektor točke B.

Če je vektorska funkcija $\vec{r}$ odvedljiva, potem je **vektor hitrosti** delca ob času t enak

$$\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t) = (x_1'(t), x_2'(t), x_3'(t)).$$

Če je tudi vektorska funkcija $\vec{r}\,'$ odvedljiva, je **vektor pospeška** delca ob času t enak

$$\vec{a}(t) = \vec{v}\,'(t) = \vec{r}\,''(t) = (x_1''(t), x_2''(t), x_3''(t)).$$

Naj bo $c \in \mathbb{R}$ in naj bodo $\vec{u}$, $\vec{v}$ in $\vec{w}$ odvedljive vektorske funkcije. Potem veljajo naslednja pravila za množenje s skalarjem, vsoto, skalarni produkt, vektorski produkt in mešani produkt ([5]):

$$\begin{aligned}
(c\vec{u})' &= c\vec{u}\,', \\
(\vec{u} + \vec{v})' &= \vec{u}\,' + \vec{v}\,', \\
(\vec{u} \cdot \vec{v})' &= \vec{u}\,' \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{v}\,', \\
(\vec{u} \times \vec{v})' &= \vec{u}\,' \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{v}\,', \\
(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})' &= (\vec{u}\,', \vec{v}, \vec{w}) + (\vec{u}, \vec{v}\,', \vec{w}) + (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\,').
\end{aligned}$$

2.5 Krivulje v prostoru

2.5.1 Parametrizacija krivulje

Naj bo

$$\mathcal{K} = \{(x(t), y(t), z(t)) \mid t \in [a, b]\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

krivulja v prostoru, pri čemer je vektorska funkcija $\vec{r} : [a,b] \to \mathcal{K}$, podana z $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, zvezna (vse koordinatne funkcije so zvezne funkcije). Vektorsko funkcijo $\vec{r} : [a,b] \to \mathcal{K}$ imenujemo **parametrizacija krivulje** $\mathcal{K}$, če je surjektivna preslikava. Če so $x(t)$, $y(t)$ in $z(t)$ zvezno odvedljive, potem je $\vec{r}\,'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ **tangentni vektor** v točki $\vec{r}(t)$ na krivuljo $\mathcal{K}$. Pravimo, da je krivulja $\mathcal{K}$ **gladka**, če so $x(t)$, $y(t)$ in $z(t)$ zvezno odvedljive funkcije in je $\vec{r}\,'(t) \neq \vec{0}$ za vse $t \in [a,b]$. Pravimo, da je krivulja **odsekoma gladka**, če je gladka povsod razen v končno mnogo točkah. Krivulja je **sklenjena**, če je $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$. Sklenjena krivulja je **enostavna**, če nima samopresečišč (razen morebiti začetne in končne točke, torej dovoljujemo, da je lahko $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$). Sklenjena krivulja je enostavna natanko tedaj, ko je zožitev njene parametrizacije $[a,b) \to \mathcal{K} \setminus \{\vec{r}(b)\}$, $t \mapsto \vec{r}(t)$ bijektivna preslikava. Nesklenjeno krivuljo $\mathcal{K}$ imenujemo enostavna, če ima bijektivno parametrizacijo $\vec{r} : [a,b] \to \mathcal{K}$.

V primeru, ko je parameter kar abscisna kartezična koordinata x, je parametrizacija podana s predpisom $\vec{r}(x) = (x, y(x), z(x))$.

Primer 2.5.1. Zapišimo parametrizacijo dela krožnice, ki je presek sfere, podane z enačbo $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, ravnine $z = 1$ in prvega oktanta.
Izračunamo $x^2 + y^2 + 1 = 9$ in $y = \sqrt{8 - x^2}$. Torej je (ena možna) parametrizacija izbrane krivulje podana z $\vec{r}(x) = (x, \sqrt{8 - x^2}, 1)$, $x \in [0, \sqrt{8}]$.

Primer 2.5.2. Naj bo $R > 0$. Parametrizacijo krožnice, podane z enačbo $x^2 + y^2 = R^2$, lahko podamo s pomočjo polarnih koordinat $x(\varphi) = R\cos\varphi$, $y(\varphi) = R\sin\varphi$ za $\varphi \in [0,2\pi)$. Torej je $\vec{r}(\varphi) = (R\cos\varphi, R\sin\varphi)$ za $\varphi \in [0,2\pi]$.

Zgornji primer lahko posplošimo na naslednji način.

Primer 2.5.3. Naj bo $a > 0$ in $b > 0$. Parametrizacijo elipse, podane z enačbo $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, lahko podamo s pomočjo eliptičnih koordinat $x(\varphi) = a\cos\varphi$, $y(\varphi) = b\sin\varphi$ za $\varphi \in [0,2\pi]$. Torej je $\vec{r}(\varphi) = (a\cos\varphi, b\sin\varphi)$ za $\varphi \in [0,2\pi]$.

2.5.2 Krivulje v mehaniki, hitrost, pospešek

Krivulje imajo bistveno vlogo v mehaniki, saj služijo kot trajektorije (poti) premikajočih (točkastih) teles. V tem kontekstu pogosto parameter t pomeni čas. Privzamemo, da odvodi, ki nastopajo v nadaljevanju, obstajajo. Kot smo že omenili zgoraj, je tangentni vektor $\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ v tem primeru **vektor hitrosti**, njegova dolžina (hitrost) ob času t je enaka

$$|\vec{v}(t)| = |\vec{r}\,'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}.$$

Drugi odvod $\vec{a}(t) = \vec{v}\,'(t) = \vec{r}\,''(t) = (x''(t), y''(t), z''(t))$ je **vektor pospeška** ob času t. Njegova dolžino $|\vec{a}(t)|$ imenujemo pospešek gibanja ob času t.

Vektor hitrosti je vedno tangencialen na trajektorijo gibanja, vektor pospeška pa ima lahko drugačno smer. Zapišemo $\vec{a}(t) = \vec{a}_{\text{tan}}(t) + \vec{a}_{\text{norm}}(t)$, kjer je $\vec{a}_{\text{tan}}(t)$ **tangencialna komponenta** vektorja pospeška ob času t in in $\vec{a}_{\text{norm}}(t)$ **normalna komponenta** vektorja pospeška ob času t, ki je pravokotna na smer gibanja. Pri tem upoštevamo dogovor, da je ničelni vektor hkrati tangenten in pravokoten na smer gibanja.

Iz formule za projekcijo enega vektorja na drugega sledi ($\cdot$ označuje skalarni produkt), da je

$$|\vec{a}_{\text{tan}}(t)| = \frac{\vec{a}(t)\cdot\vec{v}(t)}{|\vec{v}(t)|}, \quad \vec{a}_{\text{tan}}(t) = \frac{\vec{a}(t)\cdot\vec{v}(t)}{|\vec{v}(t)|^2}\vec{v}(t)$$

in $\vec{a}_{\text{norm}}(t) = \vec{a}(t) - \vec{a}_{\text{tan}}(t)$.

Naslednji primer govori o centripetalni in centrifugalni sili.

Primer 2.5.4. (vir:[5]) Naj bosta $\omega > 0$ in $R > 0$. Poglejmo si parametrizacijo

$$\vec{r} : [0, 2\pi/\omega] \to \mathcal{K}, \quad \vec{r}(t) = (R\cos(\omega t), R\sin(\omega t)),$$

krožnice $\mathcal{K}$ s središčem $(0,0)$ in polmerom R, ki leži v xy ravnini. Parametrizacija opisuje gibanje točkastega telesa po krožnici $\mathcal{K}$ v pozitivni smeri. Vektor hitrosti je enak

$$\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t) = (-R\omega\sin(\omega t), R\omega\cos(\omega t)),$$

njegova dolžina (hitrost) pa je enaka $|\vec{v}(t)| = R\omega$, torej je konstantna. Količino ω imenujemo **kotna hitrost**. Pospešek je enak

$$\vec{a}(t) = \vec{v}\,'(t) = (-R\omega^2 \cos(\omega t), -R\omega^2 \sin(\omega t)) = -\omega^2 \vec{r}(t).$$

Torej je pospešek usmerjen proti središču (0,0) in ga imenujemo **centripetalni pospešek** gibanja. Njegova dolžina je konstantna: $|\vec{a}(t)| = R\omega^2$, torej se vektor hitrosti spreminja konstantno. **Centripetalna sila** je enaka $m\vec{a}(t)$, **centrifugalna sila** pa $-m\vec{a}(t)$, kjer m označuje maso telesa. V vsakem trenutku sta sili v ravnovesju. Ker je pospešek v tem primeru pravokoten na smer gibanja, je tangencialna komponenta pospeška ničelna.

2.5.3 Dolžina loka krivulje

Dolžina loka l gladke krivulje $\mathcal{K}$, podane s parametrizacijo $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a,b]$ (t je parameter, za katerega ni nujno, da ga interpretiramo kot čas), je enaka (glejte tudi [15])

$$l = \int_a^b |\vec{r}\,'(t)|\, dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt.$$

V primeru, ko je $\vec{r}(x) = (x, y(x), z(x))$, $x \in [a,b]$, je

$$l = \int_a^b \sqrt{(1 + (y'(x))^2 + (z'(x))^2}\, dx.$$

Primer 2.5.5. (vir: [7]) Izračunajmo dolžino loka krivulje, podane s parametrizacijo

$$\vec{r}(t) = \left(\frac{e^t}{2}, \frac{e^{-t}}{2}, \frac{t\sqrt{2}}{2}\right), \quad t \in [0,1].$$

Potem je

$$l = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{e^{2t} + e^{-2t} + 2}\, dt.$$

Spomnimo se hiperboličnih funkcij $\sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ in $\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$. Torej je

$$l = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{2\cosh(2t) + 2}\, dt.$$

Ker je $\cosh^2(t) = \frac{1}{2}(1 + \cosh(2t))$, je

$$l = \int_0^1 \cosh(t)\, dt = \sinh(t)|_0^1 = \sinh(1) = \frac{1}{2}(e - e^{-1}).$$

2.5.4 Ločni parameter

Če v formuli za dolžino krivulje zgornjo mejo integrala, b, nadomestimo s spremenljivko t, dobimo definicijo **funkcije ločne dolžine** s ali, na kratko, definicijo **ločnega parametra** s. Torej

$$s(t) = \int_a^t |\vec{r}\,'(w)|\,dw = \int_a^t \sqrt{(x'(w))^2 + (y'(w))^2 + (z'(w))^2}\,dw.$$

Integracijsko spremenljivko smo tu označili z w, saj je tu parameter t zgornja meja integracije. Geometrijsko gledano, je $s(t_0)$ za nek $t_0 > a$ dolžina loka krivulje $\mathcal{K}$ med točkama, določenima s parametroma a in t_0. Izbira a je poljubna; zamenjava a pomeni spremembo vrednosti funkcije s za konstanto. Funkcija s torej ni enolično določena, temveč je določena le do aditivne konstante natančno.

Iz osnovnega izreka analize oz. osnovnega izreka integralskega računa (glejte npr. [15]) sledi, da je

$$s'(t) = |\vec{r}\,'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}.$$

Pogosto uporabimo s kot parameter krivulje. Iz zgornje enačbe sledi, da je $|\vec{r}\,'(s)| = \frac{ds}{ds} = 1$, torej je enotski tangentni vektor $\vec{u}(s)$ krivulje $\mathcal{K}$ pri parametru s enak

$$\vec{u}(s) = \vec{r}\,'(s).$$

Primer 2.5.6. (vir:[5]) Vijačnica je podana s parametrizacijo

$$\vec{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, ct),$$

kjer je $a > 0$. Če je $c > 0$, potem govorimo o desni vijačnici, če $c < 0$ pa o levi vijačnici. Z odvajanjem izračunamo

$$\vec{r}\,'(t) = (-a\sin t, a\cos t, c).$$

Torej je

$$|\vec{r}\,'(t)|^2 = \vec{r}\,'(t)\cdot\vec{r}\,'(t) = a^2 + c^2$$

konstanta, ki jo označimo s K^2. Natančneje, $K = \sqrt{a^2+c^2}$. Sledi, da je $s = s(t) = Kt$. Torej je parametrizacija vijačnice, podana z ločnim parametrom s enaka

$$\vec{r}_*(s) = \vec{r}\left(\frac{s}{K}\right) = (a\cos\frac{s}{K}, a\sin\frac{s}{K}, \frac{cs}{K}).$$

Če je $c = 0$, dobimo parametrizacijo krožnice s središčem (0,0) in radijem a, podane z ločnim parametrom:

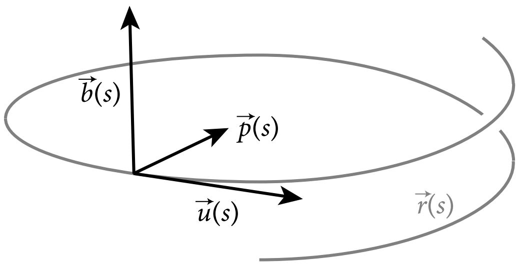
$$\vec{r}_*(s) = \vec{r}\left(\frac{s}{a}\right) = (a\cos\frac{s}{a}, a\sin\frac{s}{a}).$$

2.5.5 Ukrivljenost krivulj, upognjenost in zvitost

Naj bo $\vec{u}(s) = \vec{r}\,'(s)$ enotski tangentni vektor na krivuljo $\mathcal{K}$ pri ločnem parametru s (v točki P s krajevnim vektorjem $\vec{r}(s)$). **Upognjenost** ali **fleksijska ukrivljenost** $\kappa(s)$ krivulje $\mathcal{K}$ v točki P je definirana s

$$\kappa(s) = |\vec{u}\,'(s)| = |\vec{r}\,''(s)|,$$

torej meri hitrost spreminjanja tangentnega vektorja $\vec{u}(s)$ v točki P.



Frenetova baza krivulje, podane z $\vec{r}(s)$.

Zvitost ali **torzijska ukrivljenost** $\tau(s)$ krivulje $\mathcal{K}$ v P meri hitrost spreminjanja ravnine $\mathcal{O}$, ki jo napenjata $\vec{u}(s)$ in $\vec{u}\,'(s)$. Hitrost tega spreminjanja meri tudi odvod $\vec{b}\,'(s)$ enotskega normalnega vektorja $\vec{b}(s)$ na $\mathcal{O}$, ki je enak

$$\vec{b}(s) = \vec{u}(s) \times (\frac{1}{\kappa(s)})\vec{u}\,'(s) = \vec{u}(s) \times \vec{p}(s).$$

Tu smo označili

$$\vec{p}(s) = \left(\frac{1}{\kappa(s)}\right)\vec{u}\,'(s),$$

ki ga imenujemo **enotski glavni normalni vektor** krivulje $\mathcal{K}$ v točki P. Vektor $\vec{b}(s)$ pa imenujemo **enotski binormalni vektor** krivulje $\mathcal{K}$ v točki P. Tu privzamemo, da je $\kappa(s) \neq 0$, torej je $\kappa(s) > 0$. Absolutna vrednost zvitosti je definirana z

$$|\tau(s)| = |\vec{b}\,'(s)|.$$

Ker je upognjenost vedno nenegativna, je praktično zvitosti "definirati predznak", za kar potrebujemo nekaj dodatnih izračunov. Binormalni vektor $\vec{b}(s)$ je enotski, torej ima konstantno dolžino 1, $|\vec{b}(s)|^2 = \vec{b}(s) \cdot \vec{b}(s) = 1$. Z odvajanjem po s sledi, $2\vec{b}(s) \cdot \vec{b}\,'(s) = 0$. Ker je torej

$$\vec{b}(s) \cdot \vec{b}\,'(s) = 0,$$

je $\vec{b}(s)$ pravokoten na $\vec{b}\,'(s)$. Podobno sta tudi vektorja $\vec{u}(s)$ in $\vec{p}(s)$ pravokotna. Po definiciji vektorskega produkta je vektor $\vec{b}(s)$ pravokoten tudi na vektorja $\vec{u}(s)$ in $\vec{p}(s)$ (torej po definiciji $\vec{p}(s)$ tudi na vektor $\vec{u}\,'(s)$). Velja torej

$$0 = (\vec{b}(s) \cdot \vec{u}(s))' = \vec{b}\,'(s) \cdot \vec{u}(s) + \vec{b}(s) \cdot \vec{u}(s)\,' = \vec{b}\,'(s) \cdot \vec{u}(s) + 0,$$

od koder sledi, da je $\vec{b}\,'(s) \cdot \vec{u}(s) = 0$. Vektor $\vec{b}\,'(s)$ je pravokoten torej na vektorja $\vec{u}(s)$ in $\vec{b}(s)$. Če je $\vec{b}\,'(s) \neq 0$, sta torej vektorja $\vec{b}\,'(s)$ in $\vec{p}(s)$ kolinearna, torej velja $\vec{b}\,'(s) = -\tau(s)\vec{p}(s)$ (negativen predznak je stvar dogovora). Če enačbo množimo skalarno s $\vec{p}(s)$ in upoštevamo, da je $|\vec{p}(s)| = 1$, sledi, da je

$$\tau(s) = -\vec{p}(s) \cdot \vec{b}\,'(s).$$

Minus v definiciji **zvitosti** $\tau(s)$ je izbran tako, da je zvitost desne vijačnice pozitivna in zvitost leve vijačnice negativna.

Z uporabo enakosti $\vec{b}(s) = \vec{u}(s) \times \vec{p}(s)$ sledi, da je

$$\tau(s) = (\vec{u}(s), \vec{p}(s), \vec{p}\,'(s)) = \frac{1}{\kappa^2(s)}(\vec{r}\,'(s), \vec{r}\,''(s), \vec{r}\,'''(s)).$$

Veljajo tudi **Frenetove formule**:

$$\vec{u}\,'(s) = \kappa(s)\vec{p}(s), \quad \vec{p}\,'(s) = -\kappa(s)\vec{u}(s) + \tau(s)\vec{b}(s), \quad \vec{b}\,'(s) = -\tau(s)\vec{p}(s).$$

Če je krivulja $\mathcal{K}$ podana s poljubnim parametrom t, potem sta upognjenost in zvitost enaki

$$\kappa(t) = \frac{\left(|\vec{r}\,'(t)|^2\,|\vec{r}\,''(t)|^2 - (\vec{r}\,'(t) \cdot \vec{r}\,''(t))^2\right)^{1/2}}{|\vec{r}\,'(t)|^3},$$

$$\tau(t) = \frac{(\vec{r}\,'(t), \vec{r}\,''(t), \vec{r}\,'''(t))}{(\vec{r}\,'(t) \cdot \vec{r}\,'(t))(\vec{r}\,''(t) \cdot \vec{r}\,''(t)) - (\vec{r}\,'(t) \cdot \vec{r}\,''(t))^2}.$$

V primeru ravninske krivulje, podane kot graf funkcije $y = f(x)$, sledi

$$\kappa(x) = \frac{|f''(x)|}{(1 + (f'(x))^2)^{3/2}}.$$

2.6 Ploskve

2.6.1 Parametrizacija ploskve

Naj bo $D \subset \mathbb{R}^2$ (območje parametrov) in

$$\mathcal{S} = \{(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \in \mathbb{R}^3 : (u,v) \in D\}$$

ploskev v prostoru, pri čemer je preslikava $\vec{r} : D \to \mathcal{S}$, podana z

$$\vec{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)),$$

bijektivna in zvezna (vse koordinatne funkcije so zvezne funkcije) preslikava. Preslikavo $\vec{r} : D \to \mathcal{S}$ imenujemo **parametrizacija ploskve** $\mathcal{S}$. Če so $x(u,v)$, $y(u,v)$

in $z(u,v)$ zvezno parcialno odvedljive, potem sta vektorja (dobljena s parcialnim odvajanjem)

$$\vec{r}_u(u,v) = (x_u(u,v), y_u(u,v), z_u(u,v))$$

in

$$\vec{r}_v(u,v) = (x_v(u,v), y_v(u,v), z_v(u,v))$$

tangentna vektorja v točki $(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ na krivulji, podani zaporedoma s parametrizacijama $u \mapsto \vec{r}(u,v)$ in $v \mapsto \vec{r}(u,v)$.

V naslednjih dveh primerih bomo uporabili kar sferične in cilindrične koordinate.

Primer 2.6.1. Naj bo $R > 0$. Zapišimo parametrizacijo sfere $\mathcal{S}$, podane z enačbo $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, s pomočjo sferičnih koordinat:

$$x(\varphi, \theta) = R\cos\varphi\sin\theta, \quad y(\varphi, \theta) = R\sin\varphi\sin\theta, \quad z(\varphi, \theta) = R\cos\theta$$

za $\varphi \in [0,2\pi)$ in $\theta \in [0, \pi]$. Torej je $D = [0,2\pi) \times [0, \pi]$ in $\vec{r} : D \to \mathcal{S}$,

$$\vec{r}(\varphi, \theta) = (R\cos\varphi\sin\theta, R\sin\varphi\sin\theta, R\cos\theta).$$

Graf preslikave $[0, 2\pi) \to \mathcal{S}$, $\varphi \to \vec{r}(\varphi, \theta_0)$ pri fiksnem $\theta_0 \in [0,\pi]$ imenujemo vporednik. Na primer, pri $\theta_0 = 0$ je graf točka $(0, 0, R)$ (severni pol), pri $\theta_0 = \pi$ je graf točka $(0, 0, -R)$ (južni pol) in pri $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ je graf krožnica v xy-ravnini, podana z $x^2 + y^2 = R^2$ (ekvator).
Podobno premislimo, da je preslikava

$$\theta \to \vec{r}(\varphi_0, \theta)$$

za $\theta \in [0,\pi]$ in pri fiksnem $\varphi_0 \in [0,2\pi)$, parametrizacija poldnevnika, ki poteka od severnega do južnega pola.

Primer 2.6.2. Naj bo $\mathcal{S}$ plašč valja (brez osnovnih ploskev) s polmerom $R > 0$ in višino $v > 0$. Natančneje,

$$\mathcal{S} = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 = R^2, z \in [0,v]\}.$$

Parametrizacijo plašča $\mathcal{S}$ lahko podamo s cilindričnimi koordinatami

$$\vec{r}(\varphi, z) = (R\cos\varphi, R\sin\varphi, z)$$

za $\varphi \in [0, 2\pi)$ in $z \in [0,v]$.
Kako pa lahko podamo parametrizaciji obeh osnovnih ploskev valja? Eno izmed možnih parametrizacij spodnjega kroga

$$\mathcal{S}_1 = \{(x,y,0) \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

smo že omenili v primeru 2.6.1. Naravno parametrizacijo $\mathcal{S}_1$ podamo s pomočjo polarnih koordinat:

$$\vec{r}_1(r, \varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, 0)$$

za $r \in [0, R]$ in $\varphi \in [0, 2\pi)$. Podobno je parametrizacija zgornjega kroga

$$\mathcal{S}_2 = \{(x,y,v) \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

podana z

$$\vec{r}_2(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, v),$$

$r \in [0, R]$ in $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Pravimo, da je ploskev $\mathcal{S}$ **gladka**, če so koordinatne funkcije njene parameterizacije $x(u,v)$, $y(u,v)$ in $z(u,v)$ zvezno parcialno odvedljive funkcije in sta $\vec{r}_u(u,v)$ in $\vec{r}_v(u,v)$ neničelna vektorja za vse $(u,v) \in D$. Gladka ploskev $\mathcal{S}$ je **orientabilna**, če je vektorski produkt $\vec{r}_u(u,v) \times \vec{r}_v(u,v) \neq (0,0,0)$ za vse $(u,v) \in D$. Normalna (pravokotna) vektorja na orientabilno ploskev $\mathcal{S}$ v točki $(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ sta enaka

$$\vec{n}(u,v) = \pm\, \vec{r}_u(u,v) \times \vec{r}_v(u,v),$$

torej sta enotski normali (enotska normalna vektorja) enaki

$$\vec{N}(u,v) = \pm \frac{\vec{r}_u(u,v) \times \vec{r}_v(u,v)}{|\vec{r}_u(u,v) \times \vec{r}_v(u,v)|}.$$

Pravimo, da izbor predznaka v izbiri normale (normalnega vektorja) določa **orientacijo** orientabilne ploskve $\mathcal{S}$.

Pravimo, da je ploskev **odsekoma gladka**, če je unija končno mnogo gladkih ploskev z odsekoma gladkim robom.

Če je ploskev $\mathcal{S}$ graf zvezno parcialno odvedljive funkcije $f : D \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto f(x,y)$, torej $\mathcal{S} = \{(x,y,f(x,y)) \mid (x,y) \in D\}$, lahko za parametra izberemo kar kartezični koordinati x in y. Potem lahko njeno parametrizacijo podamo z $\vec{r} : D \to \mathcal{S}$,

$$\vec{r}(x,y) = (x,y, f(x,y)).$$

Tedaj je

$$\vec{r}_x(x,y) = (1,0, f_x(x,y))$$

in

$$\vec{r}_y(x,y) = (0,1, f_y(x,y)).$$

Ni težko izračunati, da sta pripadajoči normali v točki $(x,y, f(x,y))$ enaki

$$\vec{n}(x,y) = \pm\, \vec{r}_x(x,y) \times \vec{r}_y(x,y) = \pm\, (-f_x(x,y), -f_y(x,y), 1)$$

in zato sta enotski normali enaki

$$\vec{N}(x,y) = \pm\, \frac{(-f_x(x,y), -f_y(x,y), 1)}{\sqrt{(f_x(x,y))^2 + (f_y(x,y))^2 + 1}}.$$

Če je ploskev $\mathcal{S}$ podana **implicitno** z enačbo $F(x,y,z) = 0$, kjer je F zvezno parcialno odvedljiva funkcija, potem sta pripadajoči normali v točki (x,y,z) podani z

$$\vec{n} = \pm(F_x(x,y,z), F_y(x,y,z), F_z(x,y,z)).$$

Ploskvi, ki obdaja telo $G \subset \mathbb{R}^3$ pravimo, da je **sklenjena**. Natančneje, ploskev je sklenjena, če je kompaktna (jo lahko trianguliramo s končno mnogimi trikotniki) in nima roba (jo ne obdaja krivulja).

2.6.2 Površina ploskve

Površina P ploskve $\mathcal{S}$, podane s parametrizacijo $\vec{r} : D \to \mathcal{S}$, $\vec{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, je enaka

$$P = \int_D |\vec{r}_u(u,v) \times \vec{r}_v(u,v)|\, dudv.$$

Dolžina vektorskega produkta $|\vec{r}_u(u,v) \times \vec{r}_v(u,v)|$ je enaka

$$\begin{aligned} |\vec{r}_u(u,v) \times \vec{r}_v(u,v)| &= \sqrt{|\vec{r}_u(u,v)|^2 \cdot |\vec{r}_v(u,v)|^2 - (\vec{r}_u(u,v) \cdot \vec{r}_v(u,v))^2} \\ &= \sqrt{E(u,v)G(u,v) - F^2(u,v)}, \end{aligned}$$

kjer je

$$\begin{aligned} E(u,v) &= |\vec{r}_u(u,v)|^2 = \vec{r}_u(u,v) \cdot \vec{r}_u(u,v) = x_u^2(u,v) + y_u^2(u,v) + z_u^2(u,v), \\ G(u,v) &= |\vec{r}_v(u,v)|^2 = \vec{r}_v(u,v) \cdot \vec{r}_v(u,v) = x_v^2(u,v) + y_v^2(u,v) + z_v^2(u,v), \\ F(u,v) &= \vec{r}_u(u,v) \cdot \vec{r}_v(u,v) \\ &= x_u(u,v)x_v(u,v) + y_u(u,v)y_v(u,v) + z_u(u,v)z_v(u,v). \end{aligned}$$

Torej je

$$P = \int_D \sqrt{E(u,v)G(u,v) - F^2(u,v)}\, dudv.$$

Funkcije $E(u,v)$, $G(u,v)$ in $F(u,v)$ imenujemo **koeficienti 1. fundamentalne forme**.

Če je ploskev $\mathcal{S}$ graf zvezno parcialno odvedljive funkcije $f : D \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto f(x,y)$, potem površino ploskve $\mathcal{S}$ izračunamo po formuli

$$P = \int_D \sqrt{f_x^2(x,y) + f_y^2(x,y) + 1}\, dxdy.$$

> **Primer 2.6.3.** Naj bo $R > 0$. Izpeljimo dobro znano formulo, da je površina sfere
>
> $$\mathcal{S} = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$$

enaka $P = 4\pi R^2$. Uporabimo parametrizacijo

$$\vec{r}(\varphi, \theta) = (R\cos\varphi\sin\theta, R\sin\varphi\sin\theta, R\cos\theta)$$

za $\varphi \in [0,2\pi)$ in $\theta \in [0, \pi]$. Potem je

$$\vec{r}_\varphi(\varphi, \theta) = (-R\sin\varphi\sin\theta, R\cos\varphi\sin\theta, 0),$$

$$\vec{r}_\theta(\varphi, \theta) = (R\cos\varphi\cos\theta, R\sin\varphi\cos\theta, -R\sin\theta)$$

in $E(\varphi, \theta) = R^2\sin^2\theta$, $G(\varphi, \theta) = R^2$, $F(\varphi, \theta) = 0$. Torej je

$$P = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sqrt{R^4\sin^2\theta}\, d\theta = 2\pi R^2 \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta = 4\pi R^2.$$

2.7 Krivuljni integral

Naj bo $\mathcal{K}$ odsekoma gladka enostavna krivulja, podana s parametrizacijo

$$\vec{r} : [a,b] \to \mathcal{K}, \quad \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$

Naj bo g zvezno skalarno polje, definirano na neki okolici G krivulje $\mathcal{K}$ in naj bo $\vec{F}$ zvezno vektorsko polje, definirano na G. **Krivuljni integral skalarnega polja** g (**krivuljni integral I. vrste**) vzdolž krivulje $\mathcal{K}$ je definiran z

$$\int_{\mathcal{K}} g\, ds = \int_a^b g(\vec{r}(t))\, |\vec{r}\,'(t)|\, dt.$$

Krivuljni integral vektorskega polja $\vec{F}$ (**krivuljni integral II. vrste**) vzdolž krivulje $\mathcal{K}$ je definiran z

$$\int_{\mathcal{K}} \vec{F}\, d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\, dt,$$

kjer $\cdot$ označuje skalarni produkt. Če je krivulja $\mathcal{K}$ sklenjena, potem ta krivuljni integral imenujemo **cirkulacija vektorskega polja** $\vec{F}$ vzdolž krivulje $\mathcal{K}$.

Primer 2.7.1. Izračunajmo krivuljni integral skalarnega polja $g(x,y,z) = \sqrt{2 + 9x^2\sqrt{yz}}$ in krivuljni integral vektorskega polja $\vec{F}(x,y,z) = (x - z, 2y, z^2)$ vzdolž krivulje $\mathcal{K}$, podane s parametrizacijo $\vec{r}(t) = (t, t^3,t)$, $t \in [0,1]$. Potem je $\vec{r}\,'(t) = (1,3t^2, 1)$, $|\vec{r}\,'(t)| = \sqrt{2 + 9t^4}$, $g(\vec{r}(t)) = \sqrt{2 + 9t^4}$ in zato je

$$\int_{\mathcal{K}} g\, \mathrm{d}s = \int_0^1 (2 + 9t^4) dt = 3{,}8.$$

Ker je $\vec{F}(\vec{r}(t)) = \vec{F}(t, t^3, t) = (0, 2t^3, t^2)$, je

$$\int_{\mathcal{K}} \vec{F}\, d\vec{r} = \int_0^1 (0, 2t^3, t^2) \cdot (1,3t^2, 1)\, dt = \int_0^1 (6t^5 + t^2)\, dt = \frac{4}{3}.$$

Primer 2.7.2. Izračunajmo **delo** A **sile** $\vec{F}(x,y) = (-3x^2, 2xy)$, ki deluje na masno točko, ki se giblje vzdolž ravninske krivulje $\mathcal{K}$, podane z enačbo $y = -x^2$, od točke $T_1(1,-1)$ do točke $T_2(2,-4)$. Parabolo $\mathcal{K}$ od točke T_1 do točke T_2 lahko parametriziramo kar s kartezično koordinato x. Parametrizacija je podana z $\vec{r}(x) = (x, -x^2)$, $x \in [1,2]$. Potem je $\vec{r}\,'(x) = (1, -2x)$ in $\vec{F}(\vec{r}(x)) = \vec{F}(x, -x^2) = (-3x^2, -2x^3)$. Delo je enako krivuljnemu integralu $A = \int_{\mathcal{K}} \vec{F}\, d\vec{r}$, torej je

$$A = \int_1^2 (-3x^2, -2x^3) \cdot (1, -2x)\, dx = \int_1^2 (-3x^2 + 4x^4)\, dx = \frac{89}{5} = 17{,}8.$$

Pravimo, da je vektorsko polje $\vec{F} : G \to \mathbb{R}^3$, $G \subseteq \mathbb{R}^3$ **potencialno**, če je gradient nekega skalarnega polja $u : G \to \mathbb{R}$, torej

$$\vec{F}(x,y,z) = \operatorname{grad} u(x,y,z) = \nabla u(x,y,z) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,y,z), \frac{\partial u}{\partial y}(x,y,z), \frac{\partial u}{\partial z}(x,y,z)\right).$$

V tem primeru skalarno polje u imenujemo **potencial** vektorskega polja $\vec{F}$. Tipični primeri potencialnih vektorskih polj so **gravitacijska polja**, **hitrostna vektorska polja fluidov** in **elektromagnetna polja**. Potencialna polja včasih imenujemo tudi **konzervativna**, saj se v takem vektorskem polju energija ohranja, torej nič energije se ne izgubi ali pridobi pri premikanju telesa od točke T do neke druge točke in nazaj v T (oziroma nič naboja se ne izgubi v primeru električnih polj). Takšna vektorska polja so osrednja polja v fiziki in inženirstvu.

Primer 2.7.3. (vir: [5]) Naj bo $\vec{F}(x,y,z)$ gravitacijska sila med različnima masnima točkama $T_0(x_0, y_0, z_0)$ in $T(x, y, z)$. Z $\vec{r}$ označimo vektor $\vec{r} = \overrightarrow{T_0T}$ in z r njegovo dolžino

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}.$$

Potem je

$$\vec{F}(x,y,z) = -\frac{c}{r^3}\vec{r} = -c\left(\frac{x - x_0}{r^3}, \frac{y - y_0}{r^3}, \frac{z - z_0}{r^3}\right).$$

Velja

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2)^{-1/2}\right) \\ &= -\frac{x - x_0}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2)^{3/2}} = -\frac{x - x_0}{r^3},\end{aligned}$$

in podobno

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{y - y_0}{r^3}, \quad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{z - z_0}{r^3}.$$

Od tod sledi, da skalarno polje

$$u(x,y,z) = \frac{c}{r} = \frac{c}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}}$$

zadošča $\vec{F} = \operatorname{grad} u = \nabla u$, torej je $\vec{F}$ potencialno (konzervativno) vektorsko polje, u pa njegov **potencial**.

Izrek 2.7.1. (vir: [5]) Če je $\vec{F}$ potencialno vektorsko polje, potem je krivuljni integral $\int_{\mathcal{K}} \vec{F}\, d\vec{r}$ odvisen le od potenciala v začetni točki $A(x(a), y(a), z(a))$ in v končni točki $B(x(b), y(b), z(b))$, in sicer

$$\int_{\mathcal{K}} \vec{F}\, d\vec{r} = u(B) - u(A) = u(x(b), y(b), z(b)) - u(x(a), y(a), z(a)).$$

V primeru, ko je vektorsko polje potencialno, je torej krivuljni integral neodvisen od krivulje $\mathcal{K}$ same, zato ga označimo z $\int_A^B \vec{F}\, d\vec{r}$.

Primer 2.7.4. Naj bo $\mathcal{K}$ gladka enostavna krivulja med točkama $A(1{,}0{,}2)$ in $B(0{,}1{,}3)$ in naj bo $\vec{F}(x{,}y{,}z) = (x^2, y^2, z^2)$. Vektorsko polje $\vec{F}$ je potencialno na $\mathbb{R}^3$, saj je $\vec{F}(x{,}y{,}z) = \operatorname{grad} u(x{,}y{,}z)$ za $u(x{,}y{,}z) = \frac{1}{3}(x^3 + y^3 + z^3)$ in vse $(x{,}y{,}z) \in \mathbb{R}^3$ in zato je

$$\int_{\mathcal{K}} \vec{F}\, d\vec{r} = \int_A^B \vec{F}\, d\vec{r} = u(0{,}1{,}3) - u(1{,}0{,}2) = \frac{28}{3} - \frac{9}{3} = \frac{19}{3}.$$

Primer 2.7.5. Naj bo $\mathcal{K}$ gladka enostavna krivulja med točkama $A(1{,}0{,}2)$ in $B(e{,}1{,}-3)$ in naj bo $\vec{F}(x{,}y{,}z) = (\ln x, y^3 z, \frac{y^4}{4} + 4z)$ za $x > 0$, $y \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{R}$. Izračunajmo $\int_{\mathcal{K}} \vec{F}\, d\vec{r}$. Tudi v tem primeru bomo ugotovili, da je polje $\vec{F}$ potencialno, vendar je potencial težje uganiti kot v prejšnjem primeru, zato ga izračunajmo. Iz enakosti

$$\vec{F}(x{,}y{,}z) = \operatorname{grad} u(x{,}y{,}z) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x{,}y{,}z), \frac{\partial u}{\partial y}(x{,}y{,}z), \frac{\partial u}{\partial z}(x{,}y{,}z)\right)$$

dobimo dovolj preprost sistem parcialnih diferencialnih enačb

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x{,}y{,}z) = \ln x, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x{,}y{,}z) = y^3 z, \quad \frac{\partial u}{\partial z}(x{,}y{,}z) = \frac{y^4}{4} + 4z.$$

Prvo enačbo integriramo po x, drugo po y in tretjo po z. Iz prve enačbe (metoda per-partes) sledi $u(x{,}y{,}z) = x \ln x - x + C_1(y{,}z)$, iz druge $u(x{,}y{,}z) = \frac{y^4}{4}z + C_2(x{,}z)$ in iz tretje $u(x{,}y{,}z) = \frac{y^4}{4}z + 2z^2 + C_3(x{,}y)$. S primerjavo izračunanega dobimo, da je skalarno polje

$$u(x{,}y{,}z) = x \ln x - x + \frac{y^4}{4}z + 2z^2$$

potencial vektorskega polja $\vec{F}$. Sledi

$$\int_{\mathcal{K}} \vec{F}\, d\vec{r} = u(e{,}1{,}-3) - u(1{,}0{,}2) = \frac{41}{4} = 10{,}25.$$

Naslednja trditev sledi iz definicije gradienta in uporabe običajnih pravil za odvajanje po koordinatah.

Trditev 2.7.2. Naj bosta u in v parcialno odvedljivi skalarni polji in $n \in \mathbb{R}$. Potem velja

$$\operatorname{grad}(u^n) = n u^{n-1} \operatorname{grad}(u),$$
$$\operatorname{grad}(uv) = u \operatorname{grad}(v) + v \operatorname{grad}(u),$$
$$\operatorname{grad}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{1}{v^2}(v \operatorname{grad}(u) - u \operatorname{grad}(v)).$$

V formulaciji enega osrednjih izrekov vektorske analize (Stokesovega izreka), ki ga bomo spoznali v nadaljevanju, nastopa **rotor** rot$\vec{F}$ vektorskega polja $\vec{F} : G \to \mathbb{R}^3$, $G \subseteq \mathbb{R}^3$, ki je prav tako vektorsko polje. Rotor zvezno parcialno odvedljivega vektorskega polja $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ je definiran simbolično z vektorskim produktom

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}\vec{F}(x,y,z) &= \left(\frac{\partial\cdot}{\partial x}, \frac{\partial\cdot}{\partial y}, \frac{\partial\cdot}{\partial z}\right) \times (F_1, F_2, F_3) \\ &= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right).\end{aligned}$$

Velikost rotorja meri moč vrtinčenja vektorskega polja v neki točki, smer rotorja pa določa os največjega vrtinčenja.

Izrek 2.7.3. (vir: [5]) Zvezno parcialno odvedljivo vektorsko polje $\vec{F}$ je potencialno natanko tedaj, ko je rot$\vec{F} = (0,0,0)$.

Torej je rot(grad u) = (0,0,0) za vsako dvakrat zvezno odvedljivo skalarno polje u, česar ni težko preveriti z direktnim izračunom.

2.8 Ploskovni integral vektorskega polja

Kako integriramo realne funkcije vzdolž ploskev v $\mathbb{R}^3$? Naj bo $M \subset \mathbb{R}^3$ in $g : M \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija, skalarno polje. Če je gladka orientabilna ploskev $\mathcal{S} \subset M$, podana s parametrizacijo $\vec{r} : D \to \mathcal{S}$, je **ploskovni integral I. vrste** funkcije g vzdolž ploskve S definiran z

$$\int_{\mathcal{S}} g\, dS = \int_D g(\vec{r}(u,v))\, |\vec{r}_u(u,v) \times \vec{r}_v(u,v)|\, du\, dv.$$

V primeru, ko je ploskev $\mathcal{S}$ podana eksplicitno $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D$, je

$$\int_{\mathcal{S}} g\, dS = \int_D g(x,y,f(x,y))\, \sqrt{(f_x(x,y))^2 + (f_y(x,y))^2 + 1}\, dx\, dy.$$

Naj bo $\vec{F} :\ M \to \mathbb{R}^3$,

$$(x,y,z) \mapsto \vec{F}(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z)),$$

vektorska preslikava, vektorsko polje. V vsaki točki (x,y,z) ploskve $\mathcal{S}$ označimo njeno enotsko normalo z $\vec{N}(x,y,z)$. **Ploskovni integral II. vrste** vektorskega polja $\vec{F}$ vzdolž ploskve S z enotskimi normalami $\vec{N}$ je definiran z

$$\int_{\mathcal{S}} \vec{F} d\vec{S} = \int_{\mathcal{S}} \vec{F} \cdot \vec{N}\, dS,$$

kjer je na desni strani enačaja ploskovni integral I. vrste skalarne funkcije $(x,y,z) \mapsto \vec{F}(x,y,z) \cdot \vec{N}(x,y,z)$ in $\cdot$ označuje skalarni produkt. Ta integral se imenuje **pretok vektorskega polja $\vec{F}$** skozi ploskev $\mathcal{S}$, ki opisuje, koliko polja $\vec{F}$ "steče" pravokotno skozi ploskev $\mathcal{S}$. V nadaljevanju bomo privzeli, da so F_1, F_2 in F_3 zvezno parcialno odvedljive funkcije.

Naj bo gladka orientabilna ploskev $\mathcal{S}$ podana s parametrizacijo

$$\vec{r} : D \to \mathcal{S}, \quad (u,v) \mapsto \vec{r}(u,v).$$

Spomnimo se, da je

$$\vec{N}(u,v) = \pm \frac{\vec{r}_u(u,v) \times \vec{r}_v(u,v)}{|\vec{r}_u(u,v) \times \vec{r}_v(u,v)|},$$

kjer izbor predznaka v izbiri normale določa orientacijo ploskve $\mathcal{S}$. Torej je pretok vektorskega polja $\vec{F}$ skozi ploskev $\mathcal{S}$ enak

$$\int_{\mathcal{S}} \vec{F} d\vec{S} = \pm \int_D \vec{F}(\vec{r}(u,v)) \cdot (\vec{r}_u(u,v) \times (\vec{r}_v(u,v))\, dudv.$$

V zanimivem posebnem primeru, ko je $\mathcal{S}$ graf funkcije $f : D \to \mathbb{R}$, kjer je $D \subset \mathbb{R}^2$, je parametrizacija, podana z $\vec{r}(x,y) = (x,y, f(x,y))$ in je njena normala enaka

$$\vec{r}_x(x,y) \times \vec{r}_y(x,y) = (-f_x(x,y), -f_y(x,y), 1).$$

Torej je

$$\int_{\mathcal{S}} \vec{F} d\vec{S} = \pm \int_D \vec{F}(x,y,f(x,y)) \cdot (-f_x(x,y), -f_y(x,y), 1)\, dxdy =$$

$$\pm \int_D (-F_1(x,y,f(x,y)) f_x(x,y) - F_2(x,y,f(x,y)) f_y(x,y)) + F_3(x,y,f(x,y))\, dxdy.$$

Izbor $+$ zgoraj sovpada s pozitivno z koordinato normale in izbor $-$ sovpada z negativno z koordinato normale na ploskev $\mathcal{S}$.

Primer 2.8.1. Izračunajmo pretok vektorskega polja
$\vec{F}(x,y,z) = (2x, x-y, z)$ skozi ploskev $\mathcal{S}$, ki je presek ravnine $2x - 3y - z = 4$ in neskončnega valja, podanega s pogojem $x^2 + y^2 \leq 4$. Normala na ploskev $\mathcal{S}$ naj ima negativno z koordinato.
Enačbo ravnine preoblikujemo v $z = 2x - 3y - 4$. Torej je ploskev $\mathcal{S}$ graf funkcije $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 2x - 3y - 4$, kjer je D krog v xy ravnini s središčem $(0,0)$ in radijem 2, torej $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$. Izračunamo

$$\int_{\mathcal{S}} \vec{F} d\vec{S} = \int_D (2x, x-y, 2x-3y-4) \cdot (2,-3,-1)\, dxdy = \int_D (-x+6y+4)\, dxdy$$

V izračunu lahko uporabimo polarne koordinate in dobimo rezultat $\int_{\mathcal{S}} \vec{F} d\vec{S} = 16\pi$.

Divergenca $\mathrm{div}\vec{F}$ vektorskega polja $\vec{F} : G \to \mathbb{R}^3$, $G \subseteq \mathbb{R}^3$, je skalarno polje definirano z

$$\mathrm{div}\vec{F}(x,y,z) = \frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial F_3}{\partial z}(x,y,z).$$

Intuitivno, pozitivna divergenca meri moč izvora vektorskega polja v dani točki (negativna divergenca pa moč ponora). Bolj natančno, divergenca meri volumsko gostoto pretoka vektorskega polja navzven iz infinitezimalno majhne (neskončno majhne) okolice dane točke.

Primer 2.8.2. (vir: [7]) Naj bo $\vec{v}(x,y,z) = (v_1(x,y,z), v_2(x,y,z), v_3(x,y,z))$ hitrostno vektorsko polje fluida in naj bo $(x,y,z) \mapsto \rho(x,y,z)$ skalarno polje gostote fluida. Izrazimo divergenco $\mathrm{div}(\rho\vec{v})$ vektorskega polja $\rho\vec{v} = (\rho v_1, \rho v_2, \rho v_3)$ z gradientom skalarnega polja ρ in divergenco vektorskega polja $\vec{v}$.
Računamo

$$\begin{aligned}\mathrm{div}(\rho\vec{v}) &= \frac{\partial(\rho v_1)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_2)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_3)}{\partial z} \\ &= \frac{\partial \rho}{\partial x} v_1 + \rho \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial y} v_2 + \rho \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial \rho}{\partial z} v_3 + \rho \frac{\partial v_3}{\partial z} \\ &= \overrightarrow{\mathrm{grad}}\rho \cdot \vec{v} + \rho \mathrm{div}(\vec{v}),\end{aligned}$$

kjer $\cdot$ v prvem členu pomeni skalarni produkt.

Pravimo, da je vektorsko polje $\vec{F} : G \to \mathbb{R}^3$, $G \subseteq \mathbb{R}^3$, **vrtinčno** (solenoidalno), če je $\vec{F} = \mathrm{rot}\vec{R}$ za neko zvezno parcialno odvedljivo vektorsko polje $\vec{R}$. Zvezno parcialno odvedljivo vektorsko polje $\vec{F}$ je vrtinčno natanko tedaj, ko je $\mathrm{div}(\vec{F}) = 0$. Torej je $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\vec{R}) = 0$ za vsako dvakrat zvezno parcialno odvedljivo vektorsko polje $\vec{R}$, česar ni težko direktno preveriti. Elektromagnetna polja so tipični primer vrtinčnih polj.

Pravimo, da je vektorsko polje $\vec{F}$ Laplaceovo, če je vrtinčno in potencialno. Če je ρ potencial Laplaceovega vektorskega polja $\vec{F}$ (torej $\vec{F} = \mathrm{grad}\,\rho$), je

$$\mathrm{div}(\mathrm{grad}\rho) = 0 = \triangle\rho = \frac{\partial^2\rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\rho}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\rho}{\partial z^2}.$$

Zgornjo parcialno diferencialno enačbo imenujemo Laplaceova parcialna diferencialna enačba (njenim dvakrat zvezno parcialno odvedljivim rešitvam pa rečemo harmonične funkcije), torej je dvakrat zvezno parcialno odvedljivi potencial Laplaceovega vektorskega polja harmonična funkcija.

Nadaljujmo s primerom gravitacijskega vektorskega polja.

Primer 2.8.3. (vir: [5]) Naj bo $\vec{F}(x,y,z)$ gravitacijska sila med različnima masnima točkama $T_0(x_0, y_0, z_0)$ in $T(x, y, z)$. Z $\vec{r}$ označimo vektor $\vec{r} = \overrightarrow{T_0T}$ in z r njegovo dolžino

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}.$$

Spomnimo se, da je

$$\vec{F}(x,y,z) = -\frac{c}{r^3}\vec{r} = -c\left(\frac{x-x_0}{r^3}, \frac{y-y_0}{r^3}, \frac{z-z_0}{r^3}\right)$$

in $\vec{F} = \mathrm{grad}\,u = \nabla u$, kjer je potencial u enak

$$u(x,y,z) = \frac{c}{r} = \frac{c}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}}.$$

Vemo že, da je

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{x-x_0}{r^3}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{y-y_0}{r^3}, \quad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{z-z_0}{r^3}.$$

Izračunamo še, da je

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right) &= -\frac{1}{r^3} + \frac{3(x-x_0)^2}{r^5},\\
\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{r}\right) &= -\frac{1}{r^3} + \frac{3(y-y_0)^2}{r^5},\\
\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\right) &= -\frac{1}{r^3} + \frac{3(z-z_0)^2}{r^5}.
\end{aligned}$$

Sledi, da je

$$\triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

torej je gravitacijsko vektorsko polje $\vec{F}$ Laplaceovo.

Naslednji izrek je eden osrednjih izrekov vektorske analize.

Izrek 2.8.1. (Gaussov izrek, [5])
Naj bo $\mathcal{S}$ odsekoma gladka, orientabilna, sklenjena ploskev, ki obdaja telo G (pišemo tudi $\mathcal{S} = \partial G$) in naj bo $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ zvezno parcialno odvedljivo vektorsko polje, definirano na okolici telesa G. Potem je ploskovni integral polja $\vec{F}$ vzdolž ploskve S, v smeri zunanjih normal (normala je v vsaki točki ploskve usmerjena navzven), enak trojnemu integralu divergence tega polja po G:

$$\int_{\mathcal{S}} \vec{F} d\vec{S} = \int_G \operatorname{div}\vec{F}\, dx\, dy\, dz.$$

Če je polje $\vec{F}$ dodatno še vrtinčno (torej je $\operatorname{div}(\vec{F}) = 0$), potem je po zgornjem izreku pretok $\int_{\mathcal{S}} \vec{F} d\vec{S}$ enak 0 za vsako odsekoma gladko, orientabilno, sklenjeno ploskev $\mathcal{S}$.

Primer 2.8.4. Naj bo $\mathcal{S}_1$ spodnja polovica sfere s središčem (0,0,0) in polmerom R. Natančneje,

$$\mathcal{S}_1 = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2,\ z \leq 0\}.$$

Izračunajmo pretok $\int_{\mathcal{S}_1} \vec{F} d\vec{S}$ vektorskega polja $\vec{F}(x,y,z) = (x^2 y, xy, z^2+1)$, kjer naj imajo normale na $\mathcal{S}_1$ negativno z koordinato (kažejo navzdol).
Ker ploskev $\mathcal{S}_1$ ni sklenjena, ne moremo direktno uporabiti Gaussovega izreka. Zato dodamo krog $\mathcal{S}_2 = \{(x,y,0) \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$, s katerim $\mathcal{S}_1$ "zapremo". Unija obeh ploskev $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$ je sklenjena, zato lahko uporabimo Gaussov izrek:

$$\int_{\mathcal{S}_1} \vec{F} d\vec{S} + \int_{\mathcal{S}_2} \vec{F} d\vec{S} = \int_{\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2} \vec{F} d\vec{S} = \int_G \operatorname{div}\vec{F}\ dxdydz,$$

kjer smo z G označili telo, ki je omejeno s ploskvijo $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$, torej spodnjo polkroglo

$$G = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2,\ z \leq 0\}.$$

Sledi

$$\int_{\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2} \vec{F} d\vec{S} = \int_G \operatorname{div}\vec{F}\ dxdydz = \int_G (2xy + x + 2z)\ dxdydz =$$

$$\int_{\pi/2}^{\pi} d\theta \int_0^R dr \int_0^{2\pi} (2r^2 \cos\varphi \sin\varphi \sin^2\theta + r\cos\varphi \sin\theta + 2r\cos\theta) r^2 \sin\theta d\varphi,$$

kjer smo uporabili krogelne koordinate. Računamo dalje $\int_{\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2} \vec{F} d\vec{S} =$

$$\int_{\pi/2}^{\pi} d\theta \int_0^R dr \int_0^{2\pi} (2r^4 \cos\varphi \sin\varphi \sin^3\theta + r^3 \cos\varphi \sin^2\theta + 2r^3 \cos\theta \sin\theta) d\varphi,$$

$$= 0 + 0 + \frac{2R^4}{4} \cdot 2\pi \int_{\pi/2}^{\pi} \cos\theta \sin\theta d\theta = -\frac{R^4\pi}{2}.$$

Sedaj še izračunamo $\int_{\mathcal{S}_2} \vec{F}d\vec{S}$, ki ga bomo nato od zgornjega rezultata odšteli. Upoštevamo, da $\mathcal{S}_2$ leži v ravnini $z = 0$ in da je normala na $\mathcal{S}_2$, ki kaže iz telesa G, enaka $\vec{n} = (0,0,1)$, torej na $\mathcal{S}_2$ velja $\vec{F}(x,y,0)\cdot\vec{n} = (x^2y, xy, 0+1)\cdot(0,0,1) = 1$. Sledi

$$\int_{\mathcal{S}_2} \vec{F}d\vec{S} = \int_{\mathcal{S}_2} 1\, dxdy = \pi R^2.$$

Torej je

$$\int_{\mathcal{S}_1} \vec{F}d\vec{S} = \int_{\mathcal{S}_1\cup\mathcal{S}_2} \vec{F}d\vec{S} - \int_{\mathcal{S}_2} \vec{F}d\vec{S} = -\frac{R^4\pi}{2} - \pi R^2.$$

Primer 2.8.5. Izračunajmo pretok vektorskega polja $\vec{F}(x,y,z) = (x^2 - z^2, 2y + z^3, xy)$ skozi sfero $\mathcal{S}$, podano z $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$, pri čemer so normale usmerjene navzven.
Sfera obdaja kroglo K, podano s $x^2 + y^2 + (z-1)^2 \leq 1$. Uporabimo Gaussov izrek in v izračunu sferične koordinate:

$$\int_{\mathcal{S}} \vec{F}\, \mathrm{d}\vec{S} = \int_G \mathrm{div}\vec{F}\, dxdydz = \int_G (2x+2)\, dxdydz$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\cos\theta} (2r^3\cos\varphi\sin^2\theta + 2r^2\sin\theta)dr = 0 + \frac{8\pi}{3} = \frac{8\pi}{3}.$$

Nadaljujmo s primerom iz teorije fluidov iz uvoda tega poglavja.

Primer 2.8.6. (vir: [7]) Naj bo $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ Laplaceovo hitrostno vektorsko polje fluida, naj bo φ njegov potencial in naj bo $\rho : (x,y,z) \mapsto \rho(x,y,z)$ skalarno polje gostote fluida. Pokažimo, da je kinetična energija fluida

$$W = \frac{1}{2}\int_G |\vec{v}|^2 \rho\, dV$$

v območju G enaka

$$W = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{S}} \rho\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{N}}\, dS,$$

kjer sklenjena ploskev $\mathcal{S}$ obdaja območje G in je $\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{N}}$ smerni odvod potenciala φ v smeri zunanje enotske normale $\vec{N}$ ploskve $\mathcal{S}$.
Naj bo G_1 poljubno podobmočje v G in $\mathcal{S}_1$ sklenjena ploskev, ki obdaja G_1. Iz kontinuitetne enačbe (glejte npr. [5]) in Gaussovega izreka sledi, da je $-\int_{G_1}\frac{\partial\rho}{\partial t}\, dV = \int_{\mathcal{S}_1}\rho\vec{v}\, dS = \int_{G_1}\mathrm{div}(\rho\vec{v})\, dV$. Iz $\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$ sledi, da je $\mathrm{div}(\rho\vec{v}) = 0$ na G.
V primeru 2.8.2 smo izračunali

$$0 = \mathrm{div}(\rho\vec{v}) = \mathrm{grad}\rho\cdot\vec{v} + \rho\,\mathrm{div}(\vec{v})$$

in zato iz $\mathrm{div}(\vec{v}) = 0$ (polje je potencialno) sledi, da je $\mathrm{grad}\rho\cdot\vec{v} = 0$ na G. Torej je

$$W = \frac{1}{2}\int_G |\vec{v}|^2\rho\, dV = \frac{1}{2}\int_G \vec{v}\cdot\vec{v}\rho\, dV = \frac{1}{2}\int_G \rho\mathrm{grad}\varphi\cdot\vec{v}\, dV$$

$$= \frac{1}{2}\int_G (\rho \mathrm{grad}\varphi \cdot \vec{v} + \varphi \mathrm{grad}\rho \cdot \vec{v})\, dV = \frac{1}{2}\int_G \mathrm{grad}(\rho\varphi) \cdot \vec{v}\, dV$$

$$= \frac{1}{2}\int_G (\mathrm{grad}(\rho\varphi) \cdot \vec{v} + \rho\varphi \mathrm{div}\vec{v})\, dV = \frac{1}{2}\int_G \mathrm{div}(\rho\varphi\vec{v})\, dV.$$

Iz Gaussovega izreka, definicije ploskovnega integrala in iz $\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{N}} = \mathrm{grad}\varphi \cdot \vec{N} = \vec{v} \cdot \vec{N}$ sledi

$$W = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{S}} \rho\varphi\vec{v}\, d\vec{S} = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{S}} \rho\varphi\vec{v} \cdot \vec{N}\, dS = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{S}} \rho\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{N}}\, dS,$$

kar smo želeli dokazati.

Koordinatna neodvisnost divergence.

Divergenca je definirana s pomočjo koordinat, a bomo s pomočjo Gaussovega izreka izpeljali, da je neodvisna od izbora koordinat. Uporabili bomo tudi **izrek o povprečni vrednosti za trojni integral**, ki pravi, da za vsako zvezno funkcijo f, definirano na omejenem in enostavno povezanem območju ("povezano območje, ki nima lukenj") $G \subset \mathbb{R}^3$, obstaja točka $Q(x_0, y_0, z_0) \in G$, da je

$$\int_G f(x,y,z)\, dxdydz = f(x_0, y_0, z_0)V(G),$$

kjer je $V(G)$ volumen telesa G. Označimo s $\mathcal{S}(G)$ rob telesa G (to je $\mathcal{S}$ obdaja G), ploskev $\mathcal{S}(G)$ orientiramo v smeri zunanjih normal in postavimo $f = \mathrm{div}\vec{F}$ za neko vektorsko polje $\vec{F}$. Potem iz zgornje formule in Gaussovega izreka sledi

$$\mathrm{div}\vec{F}(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{V(G)}\int_G \mathrm{div}\vec{F}\, dxdydz = \frac{1}{V(G)}\int_{\mathcal{S}(G)} \vec{F} d\vec{S}.$$

Izberimo sedaj poljubno točko $T(x_1, y_1, z_1) \in G$ in skrčimo G proti točki T tako, da se maksimalna razdalja $d(G)$ točk iz G do T približuje 0. Potem se točke Q (ki so odvisne od izbire telesa G) približujejo točki T. Izpeljali smo naslednji izrek.

Izrek 2.8.2. (vir: [5]) Naj telo G zadošča predpostavkam Gaussovega izreka. Divergenca zvezno parcialno odvedljivega vektorskega polja $\vec{F}$ znotraj telesa G je neodvisna od izbora koordinat. Za vsako točko $T \in G$ velja

$$\mathrm{div}\vec{F}(T) = \lim_{d(G)\to 0} \frac{1}{V(G)}\int_{\mathcal{S}(G)} \vec{F} d\vec{S}.$$

Za Laplaceov operator $\triangle$, definiran z $\triangle f = \mathrm{div}(\mathrm{grad} f)$, velja podoben izrek. Če je f dvakrat zvezno parcialno odvedljivo skalarno polje na telesu G, označimo s $\vec{F} = \mathrm{grad} f$. Torej je $\triangle f = \mathrm{div}\vec{F}$. Velja tudi

$$\vec{F} \cdot \vec{N} = \vec{N} \cdot \vec{F} = \vec{N} \cdot \mathrm{grad} f = \frac{\partial f}{\partial \vec{N}},$$

kjer $\frac{\partial f}{\partial \vec{N}}$ označuje smerni odvod skalarnega polja f v smeri zunanje normale $\vec{N}$ ploskve $\mathcal{S}(G)$. Iz Gaussovega izreka sledi

$$\int_G \triangle f \, dxdydz = \int_{\mathcal{S}(G)} \frac{\partial f}{\partial \vec{N}} dS.$$

Z uporabo izreka o povprečni vrednosti za trojni integral na podoben način kot zgoraj sledi naslednji izrek.

Izrek 2.8.3. (vir: [5]) Naj telo G zadošča predpostavkam Gaussovega izreka in naj bo f dvakrat zvezno parcialno odvedljivo skalarno polje na telesu G. Potem je $\triangle f$ neodvisen od izbora koordinat. Za vsako točko $T \in G$ velja

$$\triangle f(T) = \lim_{d(G)\to 0} \frac{1}{V(G)} \int_{\mathcal{S}(G)} \frac{\partial f}{\partial \vec{N}} dS,$$

kjer $\frac{\partial f}{\partial \vec{N}}$ označuje smerni odvod skalarnega polja f v smeri zunanje normale $\vec{N}$ ploskve $\mathcal{S}(G)$.

V naslednjem primeru si oglejmo fizikalno interpretacijo izreka o neodvisnosti divergence od koordinat.

Primer 2.8.7. (vir: [5]) Oglejmo si tok nestisljivega fluida s konstantno gostoto $\rho = 1$, ki je stacionaren (se ne spreminja s časom). Tak tok je določen s hitrostnim vektorskim poljem fluida $\vec{v}$, torej $\vec{v}(T)$ je vektor hitrosti fluida v poljubni točki T. Naj bodo G, $\mathcal{S}(G)$ in $\vec{N}$ kot zgoraj. Potem je $\vec{v} \cdot \vec{N}$ normalna komponenta polja $\vec{v}$ v smeri $\vec{N}$ in $|\vec{v} \cdot \vec{N} dS|$ predstavlja maso fluida, ki zapušča telo G (če je $\vec{v} \cdot \vec{N} > 0$ v neki točki T) oziroma vstopa v telo G (če je $\vec{v} \cdot \vec{N} < 0$ v neki točki T) na časovno enoto v neki točki $T \in \mathcal{S}(G)$ skozi majhen del ploskve $\mathcal{S}(G)$ s površino dS. Potem je celotna masa fluida, ki teče iz telesa G skozi $\mathcal{S}(G)$, enaka

$$\int_{\mathcal{S}(G)} \vec{v} d\vec{S}.$$

Torej

$$\frac{1}{V(G)} \int_{\mathcal{S}(G)} \vec{v} d\vec{S}$$

predstavlja povprečni tok iz telesa G. Ker je tok stacionaren in fluid ni stisljiv, je tok navzven neprekinjen. Če je povprečni tok neničeln, potem ima tok izvore ali ponore v telesu G, torej točke, v katerih tok izvira ali izginja.
V kolikor telo G stisnemo v neko točko T, dobimo

$$\mathrm{div}\vec{v}(T) = \lim_{d(G)\to 0} \frac{1}{V(G)} \int_{\mathcal{S}(G)} \vec{v} d\vec{S}.$$

Torej je divergenca hitrostnega vektorskega polja $\vec{v}$ stacionarnega nestisljivega fluida enaka intenzivnosti toka fluida iz dane točke.

Naslednji izrek je še eden od osrednjih rezultatov vektorske analize.

Izrek 2.8.4. **(Stokesov izrek,** [5]**)** Krivuljni integral vektorskega polja $\vec{F}$ vzdolž odsekoma gladke, enostavne, sklenjene krivulje $\mathcal{K}$, ki obdaja ploskev $\mathcal{S}$ (pišemo tudi $\mathcal{K} = \partial\mathcal{S}$), je enak ploskovnemu integralu rotorja tega polja vzdolž ploskve $\mathcal{S}$, torej

$$\int_{\mathcal{K}} \vec{F}\mathrm{d}\vec{r} = \int_{\mathcal{S}} \mathrm{rot}\vec{F}d\vec{S}.$$

Pri tem smo predpostavili, da sta ploskev $\mathcal{S}$ in krivulja $\mathcal{K}$ orientirani tako, da je gledano z vrha normale na ploskev $\mathcal{S}$, krivulja $\mathcal{K}$ orientirana v pozitivni smeri (nasprotni smeri urinega kazalca). Natančneje, urejena trojica vektorjev (tangentni vektor krivulje, normalni vektor krivulje, normala na ploskev) določa pozitivno orientacijo prostora $\mathbb{R}^3$, kar lahko v praksi hitro preverimo s pravilom desnega vijaka.

Za ravninske sklenjene krivulje in ravninska vektorska polja sledi iz Stokesovega izreka pomembna posledica (Greenova formula). Če je torej $\vec{F}$ ravninsko vektorsko polje, ga lahko podamo v obliki $\vec{F} = (f, g, 0)$. Z direktnim izračunom dobimo $\mathrm{rot}\vec{F} = (0,0, \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y})$. Če je $\mathcal{K}$ ravninska krivulja, ki je enostavna, odsekoma gladka ter sklenjena (obdaja ravninsko območje D) in pozitivno orientirana, potem iz Stokesovega izreka sledi

$$\int_{\mathcal{K}} \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r} = \int_D (0,0, \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}) \cdot (0,0,1)\, dxdy = \int_D \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dxdy.$$

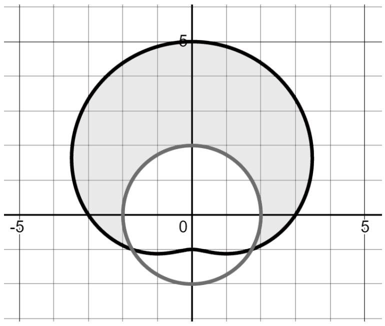
Izpeljali smo torej naslednji rezultat.

Posledica 2.8.5. **(Greenova formula)** Naj bo $\mathcal{K}$ pozitivno orientirana, enostavna, odsekoma gladka sklenjena krivulja v ravnini, ki omejuje območje D. Potem za zvezno parcialno odvedljivo vektorsko polje $\vec{F}(x,y) = (f(x,y), g(x,y))$ velja

$$\int_{\mathcal{K}} \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r} = \int_D \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dxdy.$$

2.9 Naloge

Naloga 2.9.1. Izračunajte ploščino lika zunaj krožnice s polmerom $r = 2$ in znotraj krivulje, podane z enačbo $r = 3+2\sin\varphi$ (v polarni obliki), kot je prikazano na sliki.



Rešitev. Enačimo parametrična zapisa obeh krivulj $2 = 3 + 2\sin\varphi$, in ugotovimo, da sta presečišči pri rešitvah $\varphi_1 = -\frac{\pi}{6}$ in $\varphi_2 = \frac{7\pi}{6}$. Izračunamo

$$P = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}} \int_{2}^{3+2\sin\varphi} r\,dr\,d\varphi = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}} \left((3+2\sin\varphi)^2 - 2^2\right) d\varphi = \frac{11\sqrt{3}}{2} + \frac{14\pi}{3}.$$

Naloga 2.9.2. Telo G naj bo oblike valjastega silosa s polmerom R, višino h valjastega dela in streho v obliki pokončnega stožca z naklonom $\pi/4$. V matematičnih oznakah je

$$G = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq h + R - \sqrt{x^2+y^2}.\}$$

Izračunajte $\int_G z(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$.

Rešitev. Vpeljimo cilindrične koordinate:

$$\begin{aligned}\int_G z(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz &= \int_0^{2\pi}\int_0^R\int_0^{h+R-r} zr^2\cdot r\,dz\,dr\,d\varphi \\ &= 2\pi\cdot\int_0^R r^3\frac{1}{2}(h+R-r)^2\,dr \\ &= \frac{1}{60}\pi R^4\left(15h^2+6hR+R^2\right)\end{aligned}$$

Naloga 2.9.3. Telo G dobimo tako, da kroglo, s središčem v $(0,0,1)$ in polmerom 1, izrežemo iz zgornje polkrogle s polmerom 2 in središčem v izhodišču. Natančneje

$$G = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leq 4, x^2+y^2+(z-1)^2 \geq 1, z \geq 0\}.$$

Izračunajte maso telesa G, če je njegova gostota enaka $\rho(x,y,z) = |z|$, torej izračunajte

$$m(G) = \int_G \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

Rešitev. Z vpeljavo krogelnih koordinat najprej izračunajmo maso spodnje polkrogle, kjer $\rho(x,y,z) = -z = -r\cos\theta$:

$$\begin{aligned} m_S &= -\int_{\pi/2}^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^2 r\cos\theta\cdot r^2\sin\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta \\ &= -\int_{\pi/2}^{\pi}\cos\theta\sin\theta\,d\theta\cdot\int_0^{2\pi}d\varphi\cdot\int_0^2 r^3\,dr = 4\pi \end{aligned}$$

Neenačba $x^2+y^2+(z-1)^2 \geq 1$ ima polarno obliko $r^2 \geq 2r\cos\theta$, torej za zgornji del telesa velja $2\cos\theta \leq r \leq 2$ in $\rho(x,y,z) = z = r\cos\theta$:

$$\begin{aligned} m_Z &= \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi}\int_{2\cos\theta}^2 r\cos\theta\cdot r^2\sin\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta \\ &= 2\pi\int_0^{\pi/2}\cos\theta\sin\theta\int_{2\cos\theta}^2 r^3\,dr\,d\theta = \frac{8\pi}{3} \end{aligned}$$

Torej $m(G) = m_S + m_Z = 4\pi + \frac{8\pi}{3} = \frac{20\pi}{3}$.

Naloga 2.9.4. Naj bo $\mathcal{K}$ daljica v prostoru $\mathbb{R}^3$ med točkama $A(1,-2,3)$ in $B(-1,2,4)$. Izračunajte krivuljni integral $\int_{\mathcal{K}}\vec{F}d\vec{r}$ za vektorsko polje $\vec{F}(x,y,z) = (x^2-y, z, 2y)$.

Rešitev. Parametrizacija daljice je $\vec{r}(t) = (1-2t, -2+4t, 3+t)$, $t \in [0,1]$, in

$$\int_{\mathcal{K}}\vec{F}d\vec{r} = \int_0^1 \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}\,'(t)\;dt = 13{,}\overline{3}.$$

Naloga 2.9.5. Izračunajte pretok vektorskega polja $\vec{F}(x,y,z) = (z, y-x, 2x-z)$ skozi graf $\mathcal{S}$ funkcije $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 - y$, kjer je $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1\}$. Naj imajo normale na $\mathcal{S}$ pozitivno z koordinato.

Rešitev. Po definiciji pretoka vektorskega polja izračunamo

$$\int_{\mathcal{S}}\vec{F}\,\mathrm{d}\vec{S} = \int_D (x^2-y, y-x, 2x-x^2+y)(-2x,1,1)\;dxdy$$

$$= \int_D(-2x^3+2xy+2y+x-x^2)\;dxdy = -\frac{\pi}{4},$$

kjer v izračunu uporabimo polarne koordinate.

Naloga 2.9.6. (vir: [10]) Ploskev naj bo dana s parametrizacijo

$$\vec{r}(u,v) = \left(uv, u\sqrt{1-v^2}, \frac{1}{2}(u^2-1)\right)$$

za $0 \leq u \leq 1$ in $-1 \leq v \leq 1$. Izračunajte enotsko normalo na ploskev v točki $(\sqrt{2}/4, \sqrt{2}/4, -3/8)$ in pretok vektorskega polja $\vec{F}(x,y,z) = (y,x,xy)$ skozi to ploskev.

Rešitev.

$$\vec{r}_u = (v,\sqrt{1-v^2},u) \qquad \text{in} \qquad \vec{r}_v = \left(u,-\frac{uv}{\sqrt{1-v^2}},0\right).$$

Sledi

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \left(\frac{u^2v}{\sqrt{1-v^2}},u^2,-\frac{u}{\sqrt{1-v^2}}\right).$$

Ugotovimo, da je

$$\vec{r}\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{2}}{4},-\frac{3}{8}\right).$$

Vstavimo točko in dobimo $(\vec{r}_u \times \vec{r}_v)(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}) = \left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Dolžina tega vektorja je $\sqrt{10}/4$, tako da je v dani točki enotska normala enaka

$$\vec{N} = \left(\frac{\sqrt{10}}{10},\frac{\sqrt{10}}{10},-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right).$$

Ker je

$$\vec{F}(\vec{r}(u,v)) \cdot (\vec{r}_u(u,v) \times \vec{r}_v(u,v)) = 2u^3v - u^3v = u^3v\,,$$

sledi

$$\int_{\mathcal{S}} \vec{F}\cdot d\vec{S} = \int_0^1 du \int_{-1}^1 u^3v\,dv = 0\,.$$

Naloga 2.9.7. (vir: [10]) Vektorsko polje naj bo dano z $\vec{F}(x,y,z) = (x,y,0)$. Ploskev $\mathcal{S}$ naj bo graf funkcije

$$f(x,y) = \sqrt{1-y^2}$$

na pravokotniku $-h \le x \le h$ in $-1 \le y \le 1$. Za normalo izberite vektorje s pozitivno z-komponento.

a. Izračunajte pretok vektorskega polja skozi vsakega od polkrogov, ki ležita v ravninah $x=-h$ in $x=h$, imata središči v točkah $(-h,0,0)$ in $(h,0,0)$, polmera $R=1$ in ležita nad xy-ravnino. Normala na prvi polkrog naj bo $(-1,0,0)$, normala na drugi polkrog pa $(1,0,0)$.

b. Izračunajte pretok $\vec{F}$ skozi ploskev, ki je graf funkcije $f(x,y)$.

Rešitev.

a. Na polkrogu pri $x=h$ je $\vec{n}=(1,0,0)$, torej je $\vec{F}\cdot\vec{n}=h$. Pretok je torej enak integralu konstantne funkcije h po polkrogu s polmerom 1, torej $h\cdot\pi/2$. Pretok skozi drugi polkrog pri $x=-h$ je prav tako enak $h\cdot\pi/2$.

b. Ugotovimo, da je $\mathrm{div}(\vec{F})=2$ in da je pretok skozi pravokotnik v xy-ravnini enak 0. Če polkrožni valj še "zapremo" s polovicama krogov na vsakem koncu, dobimo polovico valja V. Po Gaussovem izreku je

$$\int_{\partial V} \vec{F}\, d\vec{S} = \int_V \operatorname{div}(\vec{F})\, dx\, dy\, dz = 2\pi h\,.$$

Odštejemo še pretoka skozi polkroga, tako da je končni pretok enak πh.

Naloga 2.9.8. Naj bo $\mathcal{S}$ zgornja polovica sfere s središčem (0,0,0) in polmerom R. Natančneje,

$$\mathcal{S} = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2,\ z \geq 0\}.$$

Izračunajte pretok $\int_{\mathcal{S}} \vec{F} d\vec{S}$ vektorskega polja $\vec{F}(x,y,z) = (y,x, z+2)$, kjer naj imajo normale na ploskev $\mathcal{S}$ pozitivno z koordinato (kažejo navzgor).

Rešitev. Polsfero "zapremo" s krogom $\mathcal{S}_1 = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$ in označimo zgornjo polkroglo z G, torej

$$G = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2,\ z \geq 0\}.$$

Izračunamo $\operatorname{div}(\vec{F}) = 1$ in uporabimo Gaussov izrek:

$$\int_{\partial G} \vec{F} d\vec{S} = \int_G \operatorname{div}(\vec{F})\, dx\, dy\, dz = \int_G 1\, dx\, dy\, dz = \frac{2\pi R^3}{3}.$$

Izračunamo še pretok skozi krog $\mathcal{S}_1$ (pri tem upoštevamo, da krog leži v ravnini $z = 0$):

$$\int_{\mathcal{S}_1} \vec{F} d\vec{S} = \int_{\mathcal{S}_1} \vec{F} \cdot \vec{n}\ dS = \int_{\mathcal{S}_1} (y, x, 2) \cdot (0,0,-1)\ dS = \int_{\mathcal{S}_1} (-2)\ dS = -2\pi R^2,$$

ki ga odštejemo od zgoraj izračunanega pretoka skozi ∂G. Sledi, da je

$$\int_{\mathcal{S}} \vec{F} d\vec{S} = \frac{2\pi R^3}{3} + 2\pi R^2.$$

Naloga 2.9.9. Naj bo G stožec z višino $h > 0$ in osnovno ploskvijo, ki leži v $xy-$ravnini in ima središče $S(0,0,0)$ ter polmer $R > 0$. Natančneje,

$$G = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq h - \frac{h}{R}\sqrt{x^2 + y^2}\}\,.$$

Z oznako $\mathcal{S}$ označimo plašč stožca G (brez osnovne ploskve). Izračunajte pretok vektorskega polja $\vec{F}(x,y,z) = (y^2, xy, z)$ skozi $\mathcal{S}$. Za normalo v vsaki točki ploskve $\mathcal{S}$ vzemite vektor, ki kaže iz telesa.

Rešitev. Stožec "zapremo" s krogom $\mathcal{S}_1 = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$. Izračunamo $\operatorname{div}(\vec{F}) = x + 1$ in uporabimo Gaussov izrek:

$$\int_{\partial G} \vec{F} d\vec{S} = \int_G \operatorname{div}(\vec{F})\, dx\, dy\, dz = \int_G (x+1)\, dx\, dy\, dz.$$

Z uporabo cilindričnih koordinat izračunamo

$$\int_{\partial G} \vec{F} d\vec{S} = \int_0^R dr \int_0^{h-\frac{h}{R}r} dz \int_0^{2\pi} (r^2 \cos\varphi + r) d\varphi = \frac{\pi R^2 h}{3}.$$

Na krogu $\mathcal{S}_1$ velja

$$\vec{F} \cdot \vec{n} = (y^2, xy, 0) \cdot (0,0,-1) = 0,$$

zato je pretok skozi krog $\mathcal{S}_1$ enak 0. Sledi, da je

$$\int_{\mathcal{S}} \vec{F} d\vec{S} = \frac{\pi R^2 h}{3}.$$

2.10 Povzetek

- Vsaka zvezna funkcija na pravokotniku $D = [a,b] \times [c,d]$ je integrabilna.
- Omejena funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ je na pravokotniku $D = [a,b] \times [c,d]$ integrabilna natanko tedaj, če obstaja takšno realno število $I(f)$, ki ima naslednjo lastnost: za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da je

  $$|I(f) - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(x_i^*, y_j^*) p_{ij}| \leq \varepsilon$$

  za poljubno particijo P pravokotnika D z $d(P) \leq \delta$ in za poljuben izbor točk $(x_i^*, y_j^*) \in D_{ij}$. Tedaj je

  $$I(f) = \iint_D f(x,y)\, dx\, dy.$$

  Velja torej, da je

  $$I(f) = \lim_{d(P)\to 0} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(x_i^*, y_j^*) p_{ij}$$

  za poljuben izbor točk $(x_i^*, y_j^*) \in D_{ij}$.
- Naj bo $D = [a,b] \times [c,d]$ pravokotnik v $\mathbb{R}^2$ in $f : D \to \mathbb{R}$, $g : D \to \mathbb{R}$ integrabilni funkciji. Potem velja naslednja lastnost (**linearnost**):

  $$\iint_D (\alpha f(x,y) + \beta g(x,y))\, dx\, dy = \alpha \iint_D f(x,y)\, dx\, dy + \beta \iint_D g(x,y)\, dx\, dy,$$

  kjer sta α in β realni konstanti.
- Naj bo $D = [a,b] \times [c,d]$ pravokotnik v $\mathbb{R}^2$ in $f : D \to \mathbb{R}$ integrabilna funkcija. Tedaj velja

  $$\iint_D f(x,y)\, dx\, dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\, dx \right) dy$$

  in

  $$\iint_D f(x,y)\, dx\, dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\, dy \right) dx.$$

- Naj bosta na intervalu $[a,b]$ definirani omejeni zvezni funkciji $\varphi_1, \varphi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$, za kateri velja $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$ za vsak $x \in [a,b]$. Označimo še $D = \{(x,y) \in [a,b] \times \mathbb{R} \mid \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$. Tedaj za zvezno funkcijo $f : D \to \mathbb{R}$ velja enakost
$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$
Analogno, naj bosta na intervalu $[c,d]$ definirani omejeni zvezni funkciji $\psi_1, \psi_2 : [c,d] \to \mathbb{R}$, za kateri velja $\psi_1(y) \leq \psi_2(y)$ za vsak $y \in [c,d]$. Na novo označimo $D = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times [c,d] \mid \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$. Tedaj za zvezno funkcijo $f : D \to \mathbb{R}$ velja enakost
$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy.$$
- **Ploščino območja** D v ravnini lahko izračunamo s formulo
$$\mathrm{pl}(D) = \iint_D 1\,dx\,dy.$$
- **Maso ploskve**, ki leži na območju $D \subseteq \mathbb{R}^2$ z gostoto $\rho : D \to \mathbb{R}$ izračunamo s formulo
$$m = \iint_D \rho(x,y)\,dx\,dy.$$
- **Težišče** (x_T, y_T) plošče dobimo preko formule
$$x_T = \frac{\iint_D x\rho(x,y)\,dx\,dy}{\iint_D \rho(x,y)\,dx\,dy}, \qquad y_T = \frac{\iint_D y\rho(x,y)\,dx\,dy}{\iint_D \rho(x,y)\,dx\,dy},$$
- **Prostornino telesa** $G \subseteq \mathbb{R}^3$ izračunamo s formulo
$$V(G) = \iiint_G 1\,dx\,dy\,dz.$$
- **Maso** telesa $G \subseteq \mathbb{R}^3$ z gostoto $\rho : G \to \mathbb{R}$ dobimo preko formule
$$m = \iiint_G \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$
- **Težišče** (x_T, y_T, z_T) telesa G dobimo preko formul
$$x_T = \frac{\iiint_G x\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{\iiint_D \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}, \quad y_T = \frac{\iiint_G y\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{\iiint_D \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz},$$
$$z_T = \frac{\iiint_G z\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{\iiint_D \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}.$$

- **Masni vztrajnostni momenti** I_{xx} (okrog x osi), I_{yy} (okrog y osi) in I_{zz} (okrog z osi) telesa G so enaki

$$I_{xx} = \iiint_G x\rho(x,y,z)(y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz,$$

$$I_{yy} = \iiint_G y\rho(x,y,z)(x^2+z^2)\,dx\,dy\,dz,$$

$$I_{zz} = \iiint_G z\rho(x,y,z)(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz.$$

- **Deviacijski momenti** D_{xy} (okrog z osi), D_{xz} (okrog y osi) in D_{yz} (okrog x osi) so enaki

$$D_{xy} = \iiint_G xy\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,$$

$$D_{xz} = \iiint_G xz\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,$$

$$D_{yz} = \iiint_G yz\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

- Splošna formula za uvedbo novih koordinat dvojnega integrala:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D'} f(\varphi(u,v),\psi(u,v))|\det(J)|\,du\,dv,$$

kjer je D' območje koordinat u,v.

- Formula za uvedbo novih koordinat trojnega integrala zvezne funkcije f kot prej povezuje determinanta Jacobijeve matrike:

$$\iiint_G f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_{G'} f(\varphi(u,v,w),\psi(u,v,w),\chi(u,v,w))|\det(J)|\,du\,dv\,dw,$$

kjer je G' območje koordinat u,v,w.

- Kartezične koordinate vsake točke (x,y) v ravnini lahko izrazimo s **polarnima koordinatama** (r,φ), kjer je r razdalja točke (x,y) od koordinatnega izhodišča $(0,0)$, φ pa kot, ki ga daljica s krajiščema $(0,0)$ in (x,y) oklepa z abscisno osjo. Torej je $r=\sqrt{x^2+y^2}$ in $\tan\varphi = \frac{y}{x}$. Obratno je

$$x = r\cos\varphi \ \text{ in } \ y = r\sin\varphi.$$

Determinanta Jacobijeve matrike je

$$\det J = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r.$$

Potem je

$$\int_D f(x,y)\ dx\ dy = \int_{D'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\ dr\ d\varphi,$$

kjer je v splošnem D' območje, ki ga dobimo z bijektivno transformacijo območja D v polarnime koordinate.

- Pri integraciji po valju (cilindru) ali podobnem telesu, lahko uporabimo **cilindrične koordinate** (r, φ, z), ki so posplošitev polarnih koordinat

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z,$$

kjer $r \in [0,\infty), \varphi \in [0,2\pi)$ in $z \in \mathbb{R}$.

Determinanta Jacobijeve matrike je

$$\det(J) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

Dobimo

$$\int_G f(x,y,z)\ dx\ dy\ dz = \int_{G'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\, r\ dr\ d\varphi\ dz,$$

kjer je G' območje, ki ga dobimo z bijektivno transformacijo območja D v cilindrične koordinate.

- V primeru, ko integriramo po krogli, delu krogle ali podobnem telesu lahko uporabimo krogelne (sferične) koordinate. Kartezične koordinate točke (x,y,z) izrazimo s sferičnimi koordinatami (r, θ, φ), kjer r označuje oddaljenost točke (x,y,z) od koordinatnega izhodišča, θ je kot, ki ga z os oklepa z daljico med točkama $(0,0,0)$ in (x,y,z), φ pa je kot, ki ga daljica med $(0,0,0)$ in $(x,y,0)$ (projekcija točke na xy ravnino) oklepa z abscisno osjo.

Veljajo zveze

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta,$$

kjer $r \in [0,\infty), \varphi \in [0,2\pi)$ in $\theta \in [0,\pi]$. Absolutna vrednost determinante Jacobijeve matrike je

$$|\det(J)| = r^2\sin\theta.$$

Trojni integral funkcije f na območju G je enak

$$\int_G f(x,y,z)\ dx\ dy\ dz =$$
$$= \int_{G'} f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)\, r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi,$$

kjer je G' območje, ki ga dobimo z bijektivno transformacijo območja G v krogelne koordinate.

- **Površina** P **ploskve** $\mathcal{S}$, podane s parametrizacijo $\vec{r} : D \to \mathcal{S}$, $\vec{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, je enaka

$$P = \int_D |\vec{r}_u(u,v) \times \vec{r}_v(u,v)|\ dudv.$$

Velja tudi

$$P = \int_D \sqrt{E(u,v)G(u,v) - F^2(u,v)}\ dudv,$$

kjer so funkcije $E(u,v)$, $G(u,v)$ in $F(u,v)$ **koeficienti 1. fundamentalne forme**.

- Naj bo $\mathcal{K}$ odsekoma gladka enostavna krivulja, podana s parametrizacijo $\vec{r} : [a,b] \to \mathcal{K}$, $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Naj bo g zvezno skalarno polje, definirano na neki okolici G krivulje $\mathcal{K}$ in naj bo $\vec{F}$ vektorsko polje definirano na G. **Krivuljni integral skalarnega polja** g (**krivuljni integral I. vrste**) vzdolž krivulje $\mathcal{K}$ je definiran z

$$\int_{\mathcal{K}} g\,ds = \int_a^b g(\vec{r}(t))\,|\vec{r}\,'(t)|\,dt.$$

Krivuljni integral vektorskega polja $\vec{F}$ (**krivuljni integral II. vrste**) vzdolž krivulje $\mathcal{K}$ je definiran z

$$\int_{\mathcal{K}} \vec{F}\,d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\,dt,$$

kjer $\cdot$ označuje skalarni produkt.

- Pravimo, da je vektorsko polje $\vec{F} : G \to \mathbb{R}^3$ **potencialno vektorsko polje**, če je gradient nekega skalarnega polja $u : G \to \mathbb{R}$, torej

$$\vec{F}(x,y,z) = \operatorname{grad} u(x,y,z) = \nabla u(x,y,z) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,y,z), \frac{\partial u}{\partial y}(x,y,z), \frac{\partial u}{\partial z}(x,y,z)\right)$$

v (tem primeru skalarno polje u imenujemo **potencial** vektorskega polja $\vec{F}$). Tipični primeri potencialnih vektorskih polj so **gravitacijska polja**, **hitrostna vektorska polja fluidov** in **elektromagnetna polja**.

Če je $\vec{F}$ potencialno, potem je krivuljni integral $\int_{\mathcal{K}} \vec{F}\,d\vec{r}$ odvisen le od vrednosti potenciala v začetni točki A in končni točki B, in sicer

$$\int_{\mathcal{K}} \vec{F}\,d\vec{r} = u(B) - u(A) = u(x(b), y(b), z(b)) - u(x(a), y(a), z(a)).$$

V tem primeru, ko je vektorsko polje potencialno, je torej krivuljni integral neodvisen od krivulje $\mathcal{K}$ same, zato ga označimo z $\int_A^B \vec{F}\,d\vec{r}$.

- **Rotor** zvezno parcialno odvedljivega vektorskega polja $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ je definiran simbolično z vektorskim produktom

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}\vec{F}(x,y,z) &= \left(\frac{\partial\cdot}{\partial x}, \frac{\partial\cdot}{\partial y}, \frac{\partial\cdot}{\partial z}\right) \times (F_1, F_2, F_3) \\
&= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right).
\end{aligned}$$

Zvezno parcialno odvedljivo vektorsko polje $\vec{F}$ je potencialno natanko tedaj, ko je $\operatorname{rot}\vec{F} = (0,0,0)$.

- Naj bo $M \subset \mathbb{R}^3$ in $g : M \to \mathbb{R}$ zvezna skalarna funkcija, skalarno polje. Če je gladka orientabilna ploskev $\mathcal{S} \subset M$, podana s parametrizacijo $\vec{r} : D \to \mathcal{S}$, je **ploskovni integral I. vrste** funkcije g vzdolž ploskve $\mathcal{S}$ definiran z

$$\int_{\mathcal{S}} g\,dS = \int_D g(\vec{r}(u,v))\,|\vec{r}_u(u,v) \times \vec{r}_v(u,v)|\,du\,dv.$$

V primeru, ko je ploskev $\mathcal{S}$ podana eksplicitno z enačbo $z = f(x,y)$ za $(x,y) \in D$, je

$$\int_{\mathcal{S}} g\, dS = \int_D g(x,y,f(x,y)) \sqrt{(f_x(x,y))^2 + (f_y(x,y))^2 + 1}\, dx\, dy.$$

- Naj bo $\vec{F}: \ M \to \mathbb{R}^3$,

$$(x,y,z) \mapsto \vec{F}(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z)),$$

vektorska preslikava, vektorsko polje. V vsaki točki (x,y,z) ploskve $\mathcal{S}$ označimo njeno enotsko normalo z $\vec{N}(x,y,z)$. **Ploskovni integral II. vrste** vektorskega polja $\vec{F}$ vzdolž ploskve $\mathcal{S}$ z enotskimi normalami $\vec{N}$ je definiran z

$$\int_{\mathcal{S}} \vec{F} d\vec{S} = \int_{\mathcal{S}} \vec{F} \cdot \vec{N}\, \mathrm{d}S,$$

kjer je na desni strani enačaja ploskovni integral I. vrste skalarne funkcije $(x,y,z) \mapsto \vec{F}(x,y,z) \cdot \vec{N}(x,y,z)$, kjer $\cdot$ označuje skalarni produkt. Ta integral se imenuje **pretok vektorskega polja $\vec{F}$** skozi ploskev $\mathcal{S}$.

Naj bo gladka orientabilna ploskev $\mathcal{S}$ podana s parametrizacijo

$$\vec{r} : D \to \mathcal{S}, \quad (u,v) \mapsto \vec{r}(u,v).$$

Tedaj je pretok vektorskega polja $\vec{F}$ skozi $\mathcal{S}$ enak

$$\int_{\mathcal{S}} \vec{F} d\vec{S} = \pm \int_D \vec{F}(\vec{r}(u,v)) \cdot (\vec{r}_u(u,v) \times (\vec{r}_v(u,v))\, dudv.$$

V pomembnem posebnem primeru, ko je $\mathcal{S}$ graf funkcije $f : D \to \mathbb{R}$, kjer je $D \subset \mathbb{R}^2$, je parametrizacija, podana z $\vec{r}(x,y) = (x,y,f(x,y))$, in je normala ploskve enaka

$$\vec{r}_x(x,y) \times \vec{r}_y(x,y) = (-f_x(x,y), -f_y(x,y), 1).$$

Torej je

$$\int_{\mathcal{S}} \vec{F} d\vec{S} = \pm \int_D \vec{F}(x,y,f(x,y)) \cdot (-f_x(x,y), -f_y(x,y), 1)\, dxdy = \pm$$

$$\int_D (-F_1(x,y,f(x,y))f_x(x,y) - F_2(x,y,f(x,y))f_y(x,y)) + F_3(x,y,f(x,y))\, dxdy.$$

Izbor predznaka $+$ zgoraj sovpada s pozitivno z koordinato normale in izbor predznaka $-$ sovpada z negativno z koordinato normale na ploskev $\mathcal{S}$.

- **Gaussov izrek.** Ploskovni integral vektorskega polja $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ vzdolž odsekoma gladke, orientabilne, sklenjene ploskve $\mathcal{S}$, ki obdaja telo G (pišemo tudi $\mathcal{S} = \partial G$), v smeri zunanjih normal (normala je v vsaki točki ploskve usmerjena navzven) je enak trojnemu integralu divergence tega polja po G:

$$\int_{\mathcal{S}} \vec{F} d\vec{S} = \int_G \mathrm{div} \vec{F}\, dx\, dy\, dz.$$

- **Stokesov izrek.** Krivuljni integral vektorskega polja $\vec{F}$ vzdolž odsekoma gladke, enostavne, sklenjene krivulje $\mathcal{K}$, ki obdaja ploskev $\mathcal{S}$ (pišemo tudi $\mathcal{K} = \partial\mathcal{S}$), je enak ploskovnemu integralu rotorja tega polja po $\mathcal{S}$, torej

$$\int_{\mathcal{K}} \vec{F} \mathrm{d}\vec{r} = \int_{\mathcal{S}} \mathrm{rot} \vec{F} d\vec{S}.$$

  Pri tem smo predpostavili, da sta ploskev $\mathcal{S}$ in krivulja $\mathcal{K}$ orientirani tako, da je gledano iz vrha normale na ploskev $\mathcal{S}$, krivulja $\mathcal{K}$ orientirana v pozitivni smeri (nasprotni smeri urinega kazalca). Natančneje, urejena trojica vektorjev (tangentni vektor krivulje, normalni vektor krivulje, normala na ploskev) določa pozitivno orientacijo prostora $\mathbb{R}^3$, kar lahko v praksi hitro preverimo s pravilom desnega vijaka.

- **Greenova formula.** Naj bo $\mathcal{K}$ pozitivno orientirana, enostavna, odsekoma gladka sklenjena krivulja v ravnini, ki omejuje območje D. Potem za zvezno parcialno odvedljivo vektorsko polje $\vec{F}(x,y) = (f(x,y), g(x,y))$ velja

$$\int_{\mathcal{K}} \vec{F} \, \mathrm{d}\vec{r} = \int_{D} \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dxdy.$$

Literatura

[1] D. P. Cervone, F. J. Wicklin, *Calc III Labs*, Calculus III, Geometry Center, 1994.
http://www.geom.uiuc.edu/education/UMTYMP/CalcIII/1994/StudentLabs/.

[2] R. Jamnik, *Matematika*, DMFA, Ljubljana, 1994.

[3] T. Klinc, *Predavanja iz matematike*, 1. del, 3. izd., Fakulteta za strojništvo, Ljubljana, 1994.

[4] T. Klinc, *Predavanja iz matematike*, 2. del, 2. izd., Fakulteta za strojništvo, Ljubljana, 1997.

[5] E. Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics*, 10th ed.,Wiley, 2019.

[6] P. Mizori-Oblak, *Matematika za študente tehnike in naravoslovja, 1. del*, Fakulteta za strojništvo, Ljubljana, 2001.

[7] P. Mizori-Oblak, *Matematika za študente tehnike in naravoslovja, 2. del*, Fakulteta za strojništvo, Ljubljana, 1983.

[8] T. Novak, A. Peperko, D. Rupnik Poklukar, H. Zakrajšek, *Matematika 1, Naloge in postopki reševanja*, 2. dopolnjena izd., Fakulteta za strojništvo, Ljubljana, 2019.

[9] T. Novak, A. Peperko, D. Rupnik Poklukar, H. Zakrajšek, *Matematika 2, Naloge in postopki reševanja*, 1. popravljena izd., Fakulteta za strojništvo, Ljubljana, 2017.

[10] A. Peperko, M. Perman, D. Rupnik Poklukar, *Matematika 3, Naloge in postopki reševanja*, 2. dopolnjena izd., Fakulteta za strojništvo, Ljubljana, 2020.

[11] A. Turnšek, *Tehniška matematika*, 2. dopolnjena izd., Fakulteta za strojništvo, Ljubljana, 2007.

[12] I. Vidav, *Višja matematika 1*, 12. izd., DMFA, Ljubljana, 2008.

[13] I. Vidav, *Višja matematika 2*, DMFA, Ljubljana, 1975.

[14] J. Žerovnik, *Matematika 1*, 3. ponatis 1. izd., Fakulteta za strojništvo, Ljubljana, 2020.

[15] J. Žerovnik, *Matematika 2*, popravljena in dopolnjena 1. izd., Fakulteta za strojništvo, Ljubljana, 2017.

[16] J. Žerovnik, *Tehniška matematika 2*, Fakulteta za strojništvo, Ljubljana, 2010.

[17] J. Žerovnik, B. Gabrovšek, D. Rupnik-Poklukar, *Analiza in navadne diferencialne enačbe*, Fakulteta za strojništvo, Ljubljana, 2021.

[18] J. Žerovnik, B. Gabrovšek, T. Novak, A. Peperko, H. Zakrajšek, *Linearna algebra in vektorska analiza*, v pripravi, Fakulteta za strojništvo, Ljubljana, 2022.

Stvarno kazalo