



# PRESEK



- RAČUNOVODSKO PRAVILO
- UKRIVLJEN ODSEV NA RAVNI POVRŠINI
- VELIK USPEH SLOVENSKE EKIPE
- METODE ZA REŠEVANJE NELINEARNIH ENAČB



# Sploščena Zemlja



Če opazujemo klasične papirnate zemljevide, se zdi, da je Grenlandija nenavadno razpotegnjena. Na spodnjem zemljevidu pa njena površina ustreza njenemu dejanskemu deležu glede na ostalo kopno, to je nekaj manj kot desetini Afrike. Ta zemljevid je narisana s pomočjo algebre, geometrije in trigonometrije, tako da predstavlja velikost in obliko kopna bolj verno kot ostale geografske projekcije, npr. Mercatorjeva. Žal tudi ta projekcija ni popolna. Katerakoli metoda, ki projicira sfero na ravnino, povzroči napake: noben ploščat zemljevid ne more natančno odražati vseh geometrijskih lastnosti površja Zemlje. Izdelovalci zemljevidov to vedo, zato se morajo vsakič odločiti, katera od lastnosti, recimo površina, oblika, smer ali razdalja, je za uporabnika pomembnejša, in katero lahko žrtvujejo. Mercatorjeva projekcija je, recimo, zelo primerna za mornarje, ker se vsaka ravna črta na zemljevidu ujema s podatki s kompasa; pri tem pa se napačno zdita npr. Grenlandija in Rusija večji od Afrike.

Zakaj torej ne olupimo globusa in ga prilepimo na list papirja? Najprej se zdi zamisel dobra, a kmalu ugotovimo, da bo treba olupek razrezati in sploščiti (poskusite z olupkom pomaranče). Čeprav je v matematiki praviloma zelo težko dokazati, da nekaj ni možno, obstaja dokaz, da ne obstaja popoln zemljevid, ki bi odražal vse lastnosti sfere. Kljub temu izdelovalci zemljevidov niso obupali. S pomočjo matematike razvijajo tehnike za izdelavo čim boljših zemljevidov, pri čemer znajo presoditi, do kolikšnih napak prihaja. Tako lahko razvijajo in primerjajo različne pristope.

Radovednejši bralec si lahko prebere članek *The Equal Earth Map Projection*, ki so ga B. Šavrič, T. Patterson in B. Jenny letos objavili v reviji *International Journal of Geographical Information Science*.



## Presek

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje letnik 47, šolsko leto 2019/2020, številka 2

**Uredniški odbor:** Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Mojca Čepič, Mirko Dobovišek, Vilko Domanjko, Bojan Golli, Andrej Guštin (astronomija), Marjan Jerman (matematika), Martin Juvan, Maja Klavžar, Damjan Kobal, Lucijana Kračun Berc (tekmovalnja), Peter Legiša (glavni urednik), Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Aleš Mohorič (odgovorni urednik), Marko Razpet, Jure Slak (računalništvo), Matjaž Vencelj, Matjaž Zaveršnik (tehnični urednik).

**Dopisi in naročnine:** DMFA-založništvo, Presek, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana, telefon (01) 4766 633, telefaks (01) 4232 460, 2517 281.

**Internet:** [www.presek.si](http://www.presek.si)

**Elektronska pošta:** [presek@dmfa.si](mailto:presek@dmfa.si)

**Naročnina** za šolsko leto 2019/2020 je za posamezne naročnike 22,40 EUR – posamezno naročilo velja do preklica, za skupinska naročila učencev šol 19,60 EUR, posamezna številka 6,00 EUR, stara številka 4,00 EUR, letna naročnina za tujino pa znaša 30 EUR.

Transakcijski račun: 03100-1000018787.

**List sofinancira** Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih poljudno-znanstvenih periodičnih publikacij.

**Založilo** DMFA-založništvo

**Oblikovanje** Tadeja Šekoranja

**Tisk** Collegium Graphicum, Ljubljana

**Naklada** 1100 izvodov

© 2019 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije - 2102

ISSN 2630-4317 (Online)

ISSN 0351-6652 (Tiskana izd.)

Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana.

## NAVODILA SODELAVCEM PRESEKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Presek objavlja poljudne in strokovne članke iz matematike, fizike, astronomije in računalništva. Poleg člankov objavlja Priказe novih knjig s teh področij in poročila z osnovnošolskih in srednješolskih tekmovanj v matematiki in fiziki. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, učencem višjih razredov osnovnih šol in srednješolcem.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev) in sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo). Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Slike v elektronski obliki morajo biti visoke kakovosti (jpeg, tiff, eps ...), velikosti vsaj 8 cm pri ločljivosti 300 dpi. V primeru slabše kakovosti se slika primerno pomanjša ali ne objavi. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Zaželena velikost črk je vsaj 12 pt, razmak med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku na naslov uredništva DMFA-založništvo, Uredništvo revije Presek, p. p. 2964, 1001 Ljubljana ali na naslov elektronske pošte [presek@dmfa.si](mailto:presek@dmfa.si).

Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki oceni primernost članka za objavo. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem uredništvo prosi avtorja za izvorne datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejalnikov TeX oziroma LaTeX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

# Kazalo

## MATEMATIČNI TRENUTKI

- 2** Sploščena Zemlja

## MATEMATIKA

- 4-8** MaRS 2019  
(*Simon Brezovnik*)

## FIZIKA

- 9-15** Ukrivljen odsev na ravni površini  
(*Jože Rakovec*)

## ASTRONOMIJA

- 19-22** Velik uspeh slovenske ekipe na letošnji mednarodni astronomski olimpijadi  
(*Andrej Guštin*)
- 22** Popravek  
(*Andrej Guštin*)

## RAČUNALNIŠTVO

- 23-29** Metode za reševanje nelinearnih enačb  
(*Jure Korbar*)

## RAZVEDRILLO

- 16-17** Nagradna križanka  
(*Marko Bokalič*)
- 19** Poizkuševalnica doma - Magneti 2  
(*Mojca Čepič*)
- 30** Rešitev nagradne križanke Presek 47/1  
(*Marko Bokalič*)
- 31** Naravoslovna fotografija - Neznani letечи predmeti  
(*Peter Legiša*)

## TEKMOVANJA

- priloga** Tekmovanje srednješolcev v znanju fizike - šolsko tekmovanje
- priloga** 29. tekmovanje iz razvedrilne matematike - šolsko tekmovanje

**SLIKA NA NASLOVNICI:** Neznani letечи predmeti. Podrobneje je slika opisana v rubriki naravoslovna fotografija.



# MaRS 2019



SIMON BREZOVNIK

→ Med 28. julijem in 3. avgustom 2019 je na Pohorju potekal štirinajsti zaporedni matematični tabor za srednješolce MaRS (Matematično Raziskovalno Srečanje). Udeležilo se ga je petindvajset dijakinj in dijakov iz različnih srednjih šol iz vse Slovenije. Za uspešno krmarjenje po vesolju je skrbelo deset članov posadke: Simon Brezovnik, Klara Drogenik, David Gajser, Žan Hafner Petrovski, Rok Havlas, Petra Podlogar, Jakob Jurij Snoj, Jakob Svetina, Tjaša Vrhovnik in Nejc Zajc, v oporo pa nam je bil tudi Vid Kocijan.



SLIKA 1.

Lovci, levi in blondinke

Glavni del tabora je zaznamovalo projektno delo. MaRSovci smo se na podlagi svojih interesov razdelili v skupine po dva oziroma tri člane, vsaki skupini pa je bil dodeljen eden od mentorjev. Vsak mentor je svoji skupini predstavil zanimiv matematični problem, s katerim smo se spopadali. V času bivanja na MaRSu smo se naučili uporabljati program  $\LaTeX$ , ki omogoča pregledno pisanje matematičnih besedil. S



SLIKA 2.

Del posadke na letošnjem MaRSu: Petra, Jakob Jurij, Jakob in David.

pridobljenim znanjem smo v vsaki skupini do konca tabora oblikovali kratek članek, v katerem smo predstavili svoje matematične probleme. Letos so se dijaki pri projektih ukvarjali z: maRSovsko geometrijo, konstruktibilnimi števili, eliptičnimi krivuljami, verižnimi ulomki, Cayleyjevimi izreki, Polyevovo teorijo, centralnim limitnim izrekom, teorijo grafov in teorijo odločanja.

V nadaljevanju predstavljamo nekaj nalog, ki smo jih med našim raziskovanjem uspeli rešiti. Vabimo, nadebudneže, da se z nekaterimi tudi sami spopadejo. Za dodatno pomoč si lahko pomagata z našimi članki, ki so objavljeni na spletni strani [MaRS.dmfa.si/projekti/](http://MaRS.dmfa.si/projekti/).

**Problem 1.** Že stari Grki so vedeli, da se tako težišnice kot višine in simetrale kotov sekajo v eni točki. Giovanni Ceva, italijanski matematik iz Univerze v Pisi, je po raziskovanju trikotnikov objavil izrek. Ta izrek je danes znan kot Cevov izrek, ki pravi, da imajo daljice, ki povezujejo oglišča z nasprotnimi stranicami trikotnika skupno presečišče le pod določenim pogojem. Ali morda poznate ta pogoj?





SLIKA 3.

Del posadke na letošnjem MaRSu: Klara, Tjaša, Simon in Nejc.



SLIKA 4.

Delo v Tjašini projektni skupini

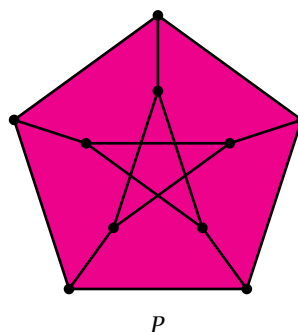
**Problem 2.** Trije matematiki potujejo po vesolju in se ustavijo na planetu, na katerem je le drevo z okusnimi sadeži in prijazen vesoljec. Pred spanjem matematiki naberejo sadeže, jih zložijo na kup in se odpravijo spat. Ob polnoči se zbudi prvi matematik, razdeli sadeže na tri enake kupe, a ostane mu en sadež, ki ga podari vesoljcu. En kup skrije, preostala dva združi v enega, ga vrne nazaj ter se odpravi spat.

Ob enih se zbudi drugi in stori enako. Ob dveh tretji in tudi on stori enako. Zjutraj vstanejo in razdelijo preostale sadeže na tri enake dele, a jim spet ostane en, ki ga podarijo vesoljcu. Kolikšno je najmanjše število sadežev, s katerimi so začeli?

**Problem 3.** Predstavljajte si, da morate naenkrat vreči 1000 kovancev. Zanima nas, kolikšna je verjetnost, da pade grb med 750 in 800-krat. Nasvet za reševanje tega problema je, da se najprej poučite o centralnem limitnem izreku.

Na MaRSu smo se ukvarjali tudi z zanimivimi problemi iz teorije grafov, natančneje z igro Lopov in policisti. Igralno polje igre je neusmerjen enostaven graf (primer takega grafa prikazuje slika 5). Igra se začne, ko prvi igralec določi vozlišča, ki jih bodo zasedli policisti. Nato drugi igralec določi vozlišče lopovu, s čimer se zaključi 0. krog. V vsakem nadaljnjem krogu se najprej premaknejo policisti in nato lopov. Policisti in lopov se lahko v vsakem krogu premaknejo na sosednje vozlišče ali pa ta krog počivajo (ostanejo na istem mestu). Za policiste velja tudi, da se lahko naenkrat premakne poljubna podmnožica policistov, prav tako pa lahko več policistov zasede isto vozlišče. Igra se konča, ko policist zasede isto vozlišče kot lopov. Če se to nikoli ne more zgoditi, pravimo, da je zmagovalec lopov.

**Problem 4.** Najmanjše število policistov, ki jih potrebujemo, da na grafu zagotovo ujamemo lopova, imenujemo policijsko število grafa. Poskusi poiskati policijsko število grafa na sliki 5.



SLIKA 5.

Neusmerjen graf  $G$ , v smislu teorije grafov

→ **Problem 5.** Astronavt želi poleteti na MaRS, kamor ga lahko pelje ena od treh vesoljskih ladij.

- Prva bo odletela čez eno uro in potrebuje dve uri, da pride do Lune. Tam bo z verjetnostjo 0,8 postanek za gorivo, ki traja pet ur. Od Lune do MaRsa gre vesoljska ladja lahko po dveh poteh. Prva je daljša in traja 15 ur, druga pa krajša in traja 10 ur. Na krajši poti obstaja 0,3 verjetnost, da bodo asteroidi, kar ladjo upočasni za 10 ur.
- Druga vesoljska ladja bo odletela čez tri ure in potrebuje do Lune enako časa kot prva. Na Luni pa bo imela postanek za gorivo z verjetnostjo 0,5, ki bo trajal štiri ure. Od Lune naprej ima enake pogoje kot prva.
- Tretja vesoljska ladja bo odletela čez pet ur. Postanek na Luni bo imela z verjetnostjo 0,1 in bo trajal pet ur. Od Lune pa bo šla do MaRsa le po krajši poti.

Na katero vesoljsko ladjo naj se astronavt vrca, če želi biti na MaRSu v čim krajšem času?

Tipičen maRSovski dan se je pričel z maRSovskim zajtrkom in telovadbo. Ob dopoldnevih smo se udeležili različnih delavnic. Dr. Primož Moravec s Fakultete za matematiko in fiziko, univerze v Ljubljani nam je v tridnevnem sklopu približal grupe. Spoznali smo definicijo grupe in nekaj osnovnih primerov grup. Govorili smo tudi o preslikavah med grupami, delovanju grup na množicah, orbitah in stabilizatorjih ter si ogledali več zgledov. Vsak dan smo MaRSovci dobili list z domačimi nalogami, kdor pa jih je naveč pravilno rešil, je dobil nagrado.

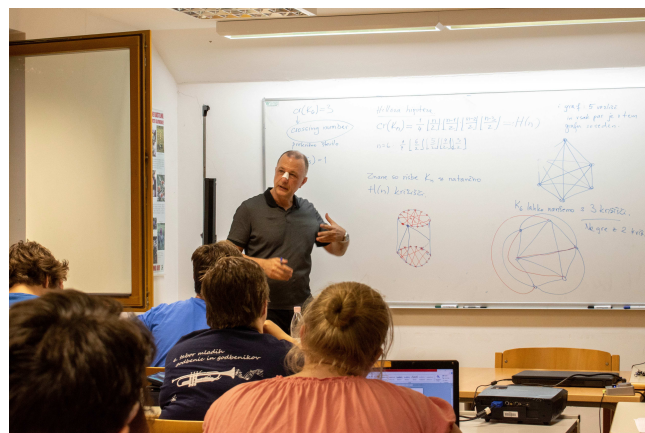
Poleg zgoraj omenjenih delavnic so potekale tudi delavnice iz programiranja in urejanja matematičnih besedil. Nejc nas je naučil osnov programskega jezika Python ter uporabe programa Latex, s katerim smo na koncu izdelali članke in predstavitve. Ob popoldnevih smo čas posvečali predvsem projektne delu.

Ob večerih smo bili deležni zanimivih predavanj odličnih profesorjev. Prvi dan se nam je preko Skype-a iz Kalifornije oglasila gostja dr. Marinka Žitnik, postdoktorska raziskovalka na Stanfordu. Predavala je o umetni inteligenci in analizi velikih podatkov, kar je tudi njeno raziskovalno področje. Razlagala nam je o strojnem učenju, predstavitvi podatkov s pomočjo omrežij in grafov ter razložila nekaj algoritmov strojnega učenja. Razlago je popestrila s kon-



**SLIKA 6.** Delavnica o grupah, ki jo je vodil dr. Moravec.

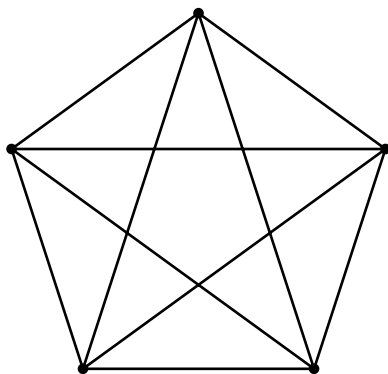
kretnimi primeri (npr. določanje potencialnih prijateljev na družbenih omrežjih, uporaba v medicini). V ponedeljek zvečer smo prisluhnili gostu dr. Bojanu Moharju z Univerze Simon Fraser v Vancouveru v Kanadi, prejemniku prestižnih matematičnih nagrad. Spregovoril nam je o risanju grafov in prekrzičnih številih.



**SLIKA 7.** Izsek iz predavanja dr. Bojana Moharja

Njegovo predavanje nas je močno pritegnilo. Enega od problemov, ki smo jih obravnavali na predavanju, objavljamo tudi tukaj.

**Problem 6.** Ali znaš narisati graf, ki ga prikazuje slika 8, tako da se povezave tega grafa sekajo največ enkrat?



$K_5$

#### SLIKA 8.

Polni graf na petih vozliščih

V četrtek zvečer smo bili priča predavanju »Odprto – zaprto?« dr. Iztoka Baniča, profesorja na Fakulteti za naravoslovje in matematiko Univerze v Mariboru. Spoznavali smo odprte in zaprte množice ter se seznanili s topologijo, pomembno matematično vejo, ki je tudi predavateljevo raziskovalno področje. Njegovo predavanje nas je navdušilo, saj je bilo v njem ves čas čutiti strast do matematike. Vsak dan je bila MaRSovcem postavljena uganka dneva. Tisti, ki je uganko prvi pravilno rešil, je prejel posebno MaRSovsko nagrado. Objavljamo nekaj ugank, ki so vam lahko v izziv naslednjih nekaj minut (ali ur).

**Problem 7.** Pet piratov je na svojem plenilskem pohodu našlo veliko skrinjo s 100 zlatniki. Pirati si bodo ta zaklad razdelili tako, da bo delitev najprej predlagal kapitan Andres. Če se bodo ostali strinjali z njim, potrdijo njegov predlog, sicer ga zavrnejo. Če se vsaj polovica piratov (šteje tudi glas kapitana) strinja s predlogom, je predlog sprejet, sicer je zavrnjen, kapitan mora v morje, nova kapitanka pa postane piratka Beatrice. Za njo bi postal kapitan Carlos, za njim Dominica, ostane še pirat Eduardo. Pirati se strinjajo s predlogom le, če nikakor ne bodo mogli dobiti več denarja; če pa bi v dveh primerih lahko dobili enako denarja, bodo izbrali možnost, pri kateri bo umrlo več piratov. Noben kapitan ne bo predlagal delitve, pri kateri bo umrl, če se temu lahko izogne.

Vsi kapitani so dobri logiki in vedo, da so to tudi ostali, poleg tega pa en drugemu ne zaupajo, zato ne sklepajo nikakršnih zavezništev med seboj. Kakšno delitev mora predlagati Andres, da ostane živ, in koliko zlata bo dobil?

**Problem 8.** Nezemljani so prišli na Zemljo, a žal niso preveč miroljubni. Po nekajtedenskem potovanju in neokusni hrani, jim ljudje zelo dišimo, vendar pa je proti njihovim načelom jesti inteligentna bitja, zato skupini desetih ljudi predstavijo nalogo: postavili jih bodo v vrsto od največjega do najmanjšega, tako da vsak vidi le vse manjše od sebe. Obračanje nazaj ni dovoljeno. Vsakemu bodo naključno dodelili belo ali črno kapo. Število belih ali črnih kap ni znano. Vsak lahko reče le BELA ali ČRNA, vsaj devet oseb pa mora uganiti barvo svoje kape. Ugibati začne najvišji, potem so na vrsti vedno nižji člani skupine. Na voljo imajo pet minut, da se dogovorijo, kako preživeti. V primeru kakršnegakoli goljufanja, umrejo vsi člani skupine. Vsak lahko reče le bela ali črna, ničesar ne sme sporočiti z načinom, kako to besedo pove (npr. da bi podaljšal kakšen zlog ali spremenil višino glasu). Kap tudi ne smejo sneti in si jih ogledati.

**Problem 9.** Tvoj bogat, malce poseben stric je umrl in napisal oporoko. Imaš še 99 drugih sorodnikov, vendar pa si bil ti edini, ki se je rad družil s stricem in prisluhnil njegovim zgodbam. Stric je želel vse svoje premoženje zapustiti tebi, vendar pa je vedel, da bi bili vsi ostali sorodniki v tem primeru zelo jezni, zato je oporoko zapisal kot uganko, pri tem pa dodal, če vsi skupaj sodelujete in odkrijete rešitev uganke, si njegovo premoženje enakomerno razdelite. Če pa kdo ugotovi rešitev uganke sam, lahko sam poskusi odpreti sef. Če mu uspe, je vse premoženje njegovo, če se zmoti, ne dobi ničesar. Na branju oporoke je odvetnik vsakemu sorodniku izročil ključ s številko od 1 do 100. Potem ste vsi skupaj odšli v skrito sobo, kjer je stric postavil 100 oštevilčenih omaric. Odvetnik je dal nadaljnja stričeva navodila. Ključ s številko 1 odpre vse omarice, ključ s številko 2 zapre vsako drugo omarico, ključ s številko 3 spremeni stanje vsake tretje omarice (zapre odpre, odpre zapre), ključ s številko 4 spremeni stanje vsake četrte omarice itd. Kodo sefa dobiš tako, da sešteješ vsa števila na omaricah, ki ostanejo odprta ob koncu odklepanja. Kakšna je koda?





Da pa so člani posadke poskrbeli tudi za našo fizično kondicijo, smo bili na taboru deležni različnih športnih dejavnosti, na primer igranja košarke in nogometa, družabnega programa in izletov. Tako smo se MaRSovci v sredo odpravili na maRSovski izlet do hotela Bellevue, kjer smo uživali ob razgledu na celoten Maribor in uživali ob kartanju in razvajanju s sladoledom.

V četrtek je sledila še maRSovska pustolovščina, ki nas je vodila po poti mimo Framskega slapu. Na pustolovščini so nas čakale različne spretnostne in miselne uganke, v nekaterih pa se lahko preizkusite tudi sami.

**Problem 10.** Poskusite najti napako v spodnjem dokazu. Dokaz, da slon tehta toliko kot komar:

- $x$  ... slonova masa,
- $y$  ... komarjeva masa.

Recimo, da je vsota obeh tež enaka  $2v$ . Potem velja

- $x + y = 2v$ ,
- $-y = x - 2v$ ;     $x = -y + 2v$ .

Pomnožimo prvo enačbo z  $x$  in drugo z  $-y$  ter izenačimo:

- $x^2 - 2vx = y^2 - 2vy$ .

Prištejemo  $v^2$ :

- $x^2 - 2vx + v^2 = y^2 - 2vy + v^2$ ,
- $(x - v)^2 = (y - v)^2$ ,
- $x - v = y - v$ ,
- $x = y$ .

**Problem 11.** V vrsto postavite osem kovancev tako, da si sledijo v zaporedju: cifra - mož - cifra - mož - cifra - mož - cifra - mož. Vaša naloga je preurediti vrstni red kovancev tako, da bodo vse cifre na eni in vsi možje na drugi strani. Kovance je dovoljeno premikati le v trojicah, in sicer tako, da hkrati zgrabite po tri sosednje in jih prestavite na začetek ali konec vrste, ne da bi pri tem njihov vrstni red zamenjali. Poskusite rečiti problem v čtirih potezah.

Vsako večer smo se MaRSovci pomerili v igranju družabnih iger, ki so kdaj pa kdaj trajale tudi ponoč. Na voljo smo imeli več kot 30 različnih vrst družabnih iger, tako da je bil izbor res težek.

Večeri so ponujali tudi priložnost za spletnje novih prijateljstev in uživanje v sproščenem vzdušju.

Zadnji večer smo imeli tradicionalni maRSovski piknik. Prišli so stari MaRSovci, tako da smo skupaj pojedli kakšno dobroto iz žara in delili spomine na pretekla maRSovska potovanja.

Da smo naše potovanje zaključili v stilu, smo glavne ugotovitve svojega raziskovalnega dela predstavili tudi našim staršem in ostalim MaRSovcem.

Kot vsako leto je tudi letos tabor prehitro minil in komaj čakamo prihodnje leto, da skupaj spet vedočeljno poletimo v vesolje!



**SLIKA 9.** Ena od skupin na Klarini kontrolni točki četrtkove pustolovščine



**SLIKA 10.** Predstavitve projekta ene od skupin

# Ukrivljen odsev na ravni površini

UKRIVLJEN ODSEV V DVIGALU V STAVBI FIZIKE NA  
FAKULTETI ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

↓↓↓

JOŽE RAKOVEC

→ Na Fakulteti za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani v stavbi na Jadranski 19 (Fizika) je na kovinskih notranjih stenah dvigala vzorec; izmenjujejo se majhni zglajeni, svetleči se kvadrati in enako veliki motni kvadrati. Stena nasproti vhoda v dvigalo je stekleno zrcalo, na njej je vodoravna svetleča se prečka. Na stropu dvigala so štiri svetilke.

V steklenem zrcalu in na sosednjih pravokotnih stenah (levo in desno od zrcala) se zrcalijo slike kovinske prečke (slika 1). Najbolj je seveda izrazita slika v zrcalu na isti steni, kot je prečka. Na sosednjih pravokotnih stenah se zrcalita tako prečka kot njena slika v zrcalu – torej še po dve ravni sliki prečke (na levi in na desni steni). Na vsaki od stranskih sten pa odseva, če gledamo od zgoraj, še manj svetli in rahlo motni ukrivljeni sliki prečke. Čim nižje gledamo, tem manj sta ti sliki ukrivljeni; če počepnemo, tako da so naše oči v višini prečke, je tudi ta slika ravna.

Vse slike na stranskih stenah nastanejo ob odbojih na »kvadratih«, ki so ornament kovinske stene dvigala. Na zglajenih kvadratih prihaja do močnega zrcalnega odboja in zato do ravnih slik prečke, hrapavi kvadrati okrog njih pa so temnejši. Od hrapavih, motnih kvadratkov je odboj od različno nagnjenih manjših površin razpršen. Ukrivljena slika ni kaj dosti razmazana. To pomeni, da odboj od hrapavih kvadratkov ni enako močan na vse strani, ampak v neke smeri močnejši kot v druge. Zato nekateri od hrapavih kvadratkov »svetijo«  
proti opazovalcu, drugi pa ne.



SLIKA 1.

Svetleča se kovinska prečka, njena slika v steklenem ogledalu, ravni sliki obeh na levi kovinski pravokotni steni ter nekoliko motna in manj svetla, a še vedno dobro vidna ukrivljena slika prečke.

## Podobnost z zgornjim tangentnim lokom hala

Kaj pa, če posvetimo z lučko na steno? Pokažejo se ukrivljeni odsevi (slika 2), ki močno spominjajo na del hala, ki ga včasih vidimo na kristalčkih ledu v cirusnih oblakih na nebu, in sicer na zgornji tangentni lok hala, ki se dotika kroga s premerom  $22^\circ$  (slika 3).

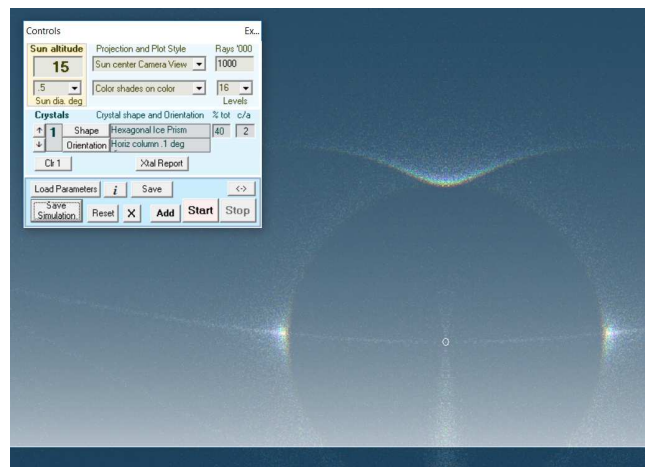




**SLIKA 2.**

Bolj ali manj konkavna slika lučke na steni dvigala; zgoraj lučka nižje (in/ali bliže steni), spodaj lučka višje (in/ali dlje od stene).

Ker je o halu Presek že večkrat pisal, o njem le na kratko. Halo se na nebu vidi, kadar Sonce sije skozi cirusne oblake. V njih so kristalčki vode (ledu), na katerih se svetloba odbija in lomi. Kristalčki so skoraj vedno heksagonalne prizme, od nizkih šesterorobnih ploščic do višjih stebričkov, le včasih nastajajo tudi razvejane »zvezdice« ali pa piramide in še kaj. Pri nas je halo viden nekajkrat letno. Smer žarkov od sonca se pri prehodu skozi dve ne-sosednji stranski ploskvi prizem, med katerima je kot  $\alpha = 60^\circ$ , seveda spremeni. Za prehod v ravnini, ki je pravokotna na glavno os kristalčkov, največ svetlobe spremeni smer za okrog  $22^\circ$ . Če so ledeni stebrički povsem naključno orientirani, vidimo samo krog hala. Tangentni lok hala se pokaže takrat, kadar je večina heksagonalnih kristalčkov ledu orientirana bolj ali manj horizontalno (osi prizem so blizu vodoravnici). Osrednji del tangentnega loka se dotika kroga hala, stranski deli loka pa se blizu sredine ukrivljajo navzgor, dlje od sredine pa nazaj navzdol (slika 3).



**SLIKA 3.**

Računalniška simulacija hala s programom HaloSim ([www.atoptics.co.uk/halo/download.htm](http://www.atoptics.co.uk/halo/download.htm)). Lega sonca v sredi kroga hala je samo označena, sicer bi bilo mnogo bolj svetlo. V nastavitvenem oknu je mogoče nastaviti marsikaj, obliko in orientacijo kristalov ledu, razpon teh orientacij, višino sonca na nebu. Za to sliko je izbrano, da je sonce  $15^\circ$  visoko nad obzorjem, da so vsi kristalčki heksagonalne prizme, od teh jih je 25 % naključno orientiranih (na teh nastane krog). Drugi so bolj ali manj horizontalno orientirani: 40 % v horizontalni smeri s standardno deviacijo  $\sigma = 0,1^\circ$ , 20 % horizontalno s  $\sigma = 8^\circ$  in 15 % horizontalno s  $\sigma = 5^\circ$ . Slika je rezultat prehoda žarkov od Sonca skozi tisoč kristalčkov na nebu. Če so kristalčki morda druge oblike ali pa drugače orientirani, ima halo tudi druge loke. Čim nižje je Sonce na nebu, tem bolj je spodnji rob zgornjega tangentnega loka hala konkaven.

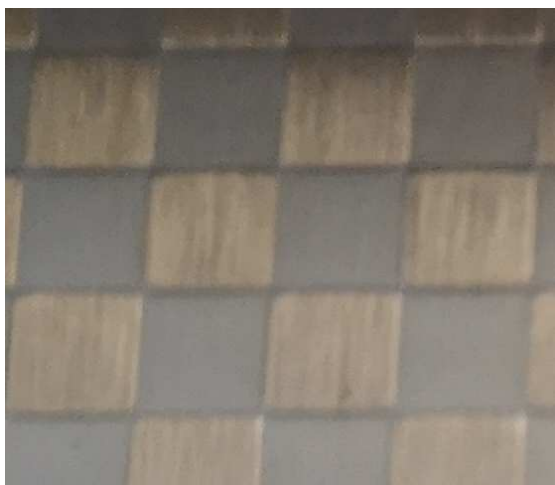
Za to, da ustvarimo sliko hala z računalnikom, je prosto na razpolago nekaj simulacijskih programov, npr. HaloSim ([www.atoptics.co.uk/halo/download.htm](http://www.atoptics.co.uk/halo/download.htm)). S tem programom je narejena slika 3.

Pri programu HaloSim je torej mogoče izbirati, kako visoko na nebu je Sonce in predvsem s tem se oblika zgornjega tangentnega loka močno spreminja. Slika 2 pokaže, da je tudi z odsevom lučke tako. Čim bliže steni je lučka in od čim bolj visoko gledamo, tem bolj konkavno-konveksna je slika. Če je lučka dlje od stene, pa je slika vse bolj konkavna. Ob pogledu z višine lučke pa, kot smo že rekli za prečko, vidimo tudi to sliko ravno.

Kaj se torej naučimo iz primerjave med slikami na steni dvigala s tangentnim lokom hala? To, da morajo biti za izraziti tangentni lok vsi odsevi (pri



halu točneje, dvakratni lomi svetlobe) na približno enako orientiranih kristalih (prizme so »drobna zrcalca«). Ali kaj podobnega velja tudi za hrapave kvadratke v dvigalu? Če pogledamo steno dvigala prav od blizu, vidimo, da je hrapavost motnih kvadratkov dosežena z vertikalnimi praskami. Ker so priske velike v primerjavi z valovno dolžino svetlobe, ne gre za uklonski pojav, ampak za odsev na teh kvadratkih – na navpičnih vdolbinah in izboklinah v kovini. Torej gre tudi pri dvigalu za izrazito orientirana »drobna zrcalca« na kovini.



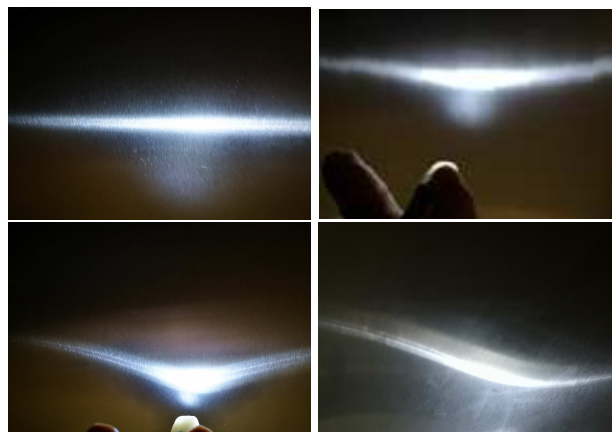
**SLIKA 4.**

Motnost kvadratkov na steni dvigala je narejena z brušenjem, z navpičnimi praskami v kovini. Slika je narejena ob osvetlitvi od stani, zato se svetloba od gladkih kvadratkov ne odbija proti opazovalcu in zato le-ti izgledajo temni.

Zdi se, da smo bistveno pojasnili: ker so vertikalne raze na brušenih odbojnih ploskvicah stene dvigala vse orientirane v isto smer, dobimo pri odboju na njih sliko, podobno zgornjemu tangencialnemu loku hala na ledenih kristalčkih cirusnih oblakov, ki so tudi orientirani pretežno vsi v isto smer.

### Isti pojav na večji brušeni ploskvi

Če so res raze vse v isti smeri, bi morali videti nekaj podobnega na vsaki zrcalni površini z brazdami. Dandanes ima marsikateri prenosnik ali kuhinjski aparat pokrov ali vrata iz brušene svetleče se kovine. Pa poglejmo!



**SLIKA 5.**

Odsevi svetlobe lučke od brušene plošče nerjavečega jekla  
Zgoraj levo: pogled z iste višine, kot je lučka.  
Zgoraj desno: pogled nekoliko od zgoraj.  
Spodaj levo: lučka bliže jeklu.  
Spodaj desno: pogled nekoliko od zgoraj in od strani.

### Nekaj razlage

Zdi se, da je prvi objavljen obsežen opis odbojev svetlobe od valovite ali brazdaste površine knjiga Light and Watter iz leta 1903 barona Sira Montagu-Pollocka: [archive.org/details/lightwaterstudy00montuoft/page/n8](http://archive.org/details/lightwaterstudy00montuoft/page/n8). V njej je veliko slik odsevov na blago valoviti vodni površini pri različnih smereh valov glede na vir svetlobe (ponavadi Sonce). Valove na spodnji desni strani slike 6 je povzročil čoln, iz katerega je bila posneta fotografija.



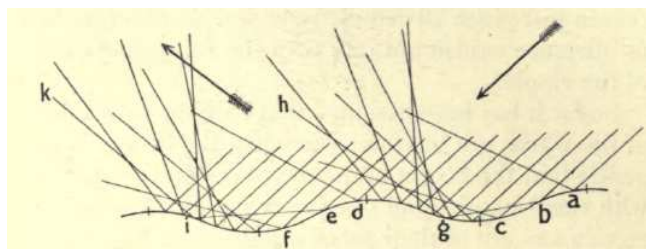
**SLIKA 6.**

Rahlo valovanje na jezeru Como pri Bellagiu, slika XVII iz Montagu-Pollockove knjige iz leta 1903.



Pollock smeri odsevov od različno nagnjenih delov valov nazorno razloži z risanjem odbojev in grafično pokaže, da gre v neke smeri več svetlobe kot v druge.

Zanimivo je, da se po prvem odboju pol žarkov odbije bolj strmo, pol pa manj strmo navzgor kot pri odboju od ravne površine. Ker pa se nekateri žarki ob prvem odboju preusmerijo tudi navzdol, se le-ti ob odboju na sosednjem valu preusmerijo nazaj navzgor. Zato se od zmerno valovite površine več žarkov odbija bolj strmo in le nekaj bolj položno, kot bi se jih z ravne površine.



**SLIKA 7.**

Risba odbojev z rahlo valovite vodne površine v najrazličnejše smeri. Opazovalec seveda vidi samo tiste, ki se preusmerijo proti njemu. Slika je iz Montagu-Pollockove knjige iz leta 1903.

Ali bi morda tudi sami poskusili določati smeri odbojev z rahlo valovite površine? Za deset ali dvajset odbojev vzdolž valovne dolžine, recimo na vsakih  $2\pi/10$  ali  $2\pi/20$ ? Določanje nagibov sinusne funkcije res ni težko, tudi določanje nagibov pravokotnic nanjo ne – so za  $90^\circ$  večji. Ko poznamo smeri pravokotnic, tudi določanje smeri prvič odbitih žarkov ni težko. Malo več pazljivosti pa je potrebno pri določanju morebitnih drugih odbojev. Do teh lahko pride pri tistih prvih odbojih blizu vrhov in dolin valov, ko se žarki preusmerijo nekoliko navzdol. Treba je ugotoviti, kje tak žarek zadene sosednji val. Kam gre drugi odboj, pa je spet odvisno od smeri pravokotnice na tistem mestu.

V Montagu-Pollockovi knjigi je opisan in narisani tudi eksperiment, ki v laboratoriju ponazarja opažanja iz narave, in sicer s slikami odsevov na šipi, ki leži na mizi pred prižgano svečo. Čez šipo, na-

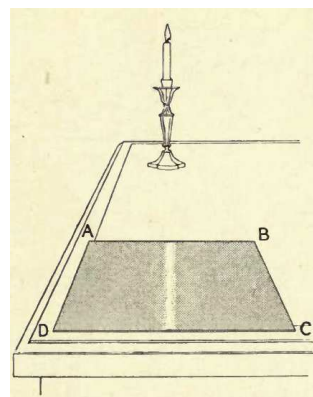


Fig. 17a. Reflexion of a candle flame in greased glass (lines of grease parallel to AB).

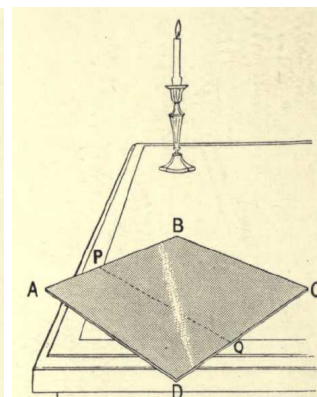


Fig. 17b. Glass turned round horizontally through  $45^\circ$ .

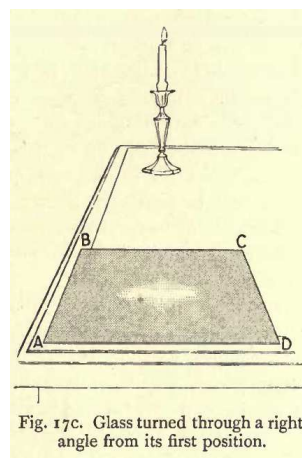


Fig. 17c. Glass turned through a right angle from its first position.

**SLIKA 8.**

Odsevi sveče na šipi s črtami iz vazelina iz knjige M. Pollocka (1903): levo zgoraj – črte pravokotne na smer pogleda proti sveči, desno zgoraj – zasukane za  $45^\circ$  in spodaj – črte v smeri pogleda proti sveči.

mazano z vazelinom, položimo kos blaga in ga potegnemo preko šipe. Na ta način nastanejo vzdolž potega tanke ravne vzporedne brazde. Če so le-te pravokotne na pogled proti sveči (slika 8, levo zgoraj), je odsev od sveče raven in naravnost proti nam. Kadar je šipa nekoliko zavrtena (slika 8, desno zgoraj), se tudi odsevu spremeni smer. Če pa so črte vzdolž pogleda proti sveči, je odsev tudi približno pravokoten in nekoliko razmazan (slika 8, spodaj).

Pomembno je poudariti, da se ob zavrtitvi šipe smer odseva spremeni za dosti manj od kota zavrtitve. Ta poskus s črtami na šipi je po Montagu-Pollocku v svoji knjigi *Light and Color in the Outdoor* (1974), ki sicer opisuje še mnoge druge pojave v zvezi s svetlobo v naravi, povzel tudi Marcel Minnaert, ki pa še leta 1974 pravi, da vse podobnosti tega pojava še niso pojasnjene, a da bistvo vseeno razumemo.

Leta 2011 so David K. Lynch, David S. P. Dearborn in James A. Lock opisali različne odseve svetlobe na morski površini, med njimi tudi fotografijo in računalniško simulacijo ukrivljenega odseva od sonca. Tudi oni so upoštevali več kot 100 let stare slike in razlage iz Pollocka in tako kot on razlagajo pojav odboja na blagih sinusnih valovih na vodi z največjo strmino valov  $\alpha$ . Pokažejo, da gredo vsi odbiti žarki pri poševnem vpadu v razpon kotov, širok  $4\alpha$ . Pri pravokotnem vpadu je to od  $-2\alpha$  do  $+2\alpha$ , pri poševnem pa od  $\alpha_0$  do  $\alpha_0 + 4\alpha$ . Njihova fotografija kaže odsev nizkega Sonca, ki je v daljavi raven (od povsem neurejenih valov). Blizu opazovalca, ki pluje na čolnu, so valovi od premca čolna dokaj urejeni in klinasto odklonjeni od smeri plutja čolna (torej podobno kot pri Pollockovi sliki z jezera Como). Poleg te fotografije pa je še slika, dobljena z računalniško simulacijo. Tam, kjer se pojavijo urejeni valovi, se odblesk sonca na morski gladini ukrivi. Spet so torej vzrok za ukrivljanje slike urejene brazde - v tem primeru valovi. Če torej računalniška simulacija verno ponazori prizor iz narave, potem so v njej zagotovo upoštevani pravi algoritmi. Svetloba se odbija v različne smeri, ampak samo v vpadni ravnini, ker so valovi (brazde) dolgi.



**SLIKA 9.**

Fotografija ukrivljenega odseva na morski površini.



**SLIKA 10.**

Računalniška simulacija tega pojava, iz Lynch in sod. (2011), dosegljivo tudi na [engagedscholarship.csuohio.edu/sciphysics\\_facpub/104/](http://engagedscholarship.csuohio.edu/sciphysics_facpub/104/). Sliki 9 in 10 sta objavljene z dovoljenjem prvega avtorja D. Lyncha.

## Še enkrat o halu

Prve omembe hala so že iz antike, zelo natančno pa je pojav hala v Sant Petersburgu 18. junija 1790 opisal Tobias Lowitz. Petdeset let kasneje je halo opisal, razložil in podal nekatere glavne enačbe o njem Auguste Bravais, fizik in pomemben mineralog v svoji obširni razpravi iz leta 1847 ([www.ursa.fi/blogi/ice-crystal-halos/an\\_old\\_halo\\_book\\_available/](http://www.ursa.fi/blogi/ice-crystal-halos/an_old_halo_book_available/)). Že takrat je med drugim vpeljal prilagojeni lomni količnik  $n' = \sqrt{n^2 - \cos^2 \theta} / \sin \theta$  za prehode žarkov skozi ledeni kristal v ravnini, ki ni pravokotna na glavno os kristala, kar še danes uporabljajo, npr. tudi Walter Tape za analitično obravnavo oblik hala (1980). Walter Tape obravnava različno orientirane prizmatične kristale ledu in za vsakega







definira smer glavne osi  $\mathbf{O}$  (to je smer, pravokotna na osnovno ploskev prizme), smer proti Soncu  $\mathbf{S}$  ter smer normalne  $\mathbf{n}$  na vpadno ploskev prizme ter kote med temi smermi, npr. kot  $\theta$  med  $\mathbf{S}$  in  $\mathbf{O}$ , vpadni kot, itd. Nabor vrednosti vseh kotov je omejen, saj pri nekaterih vpadih žarek na izstopni ploskvi ne more ven iz kristala (mejni kot totalnega odboja). Če so torej intervali vseh možnih vrednosti kotov omejeni, je omejena tudi možnost spremembe smeri žarkov  $\Delta$ , ki torej tudi obsega samo omejeno območje vrednosti. Kako je potem Tape to območje  $\Delta$  »preslikal« na nebesno kroglo, pa presega običajno težavnost opisov v Preseku. Seveda pa so danes na razpolago tudi numerične simulacije, kakršna je že omenjena HaloSim.

## Še nekaj odsevov svetlobe

Če nimate pri hiši nobene ravne ploskve iz brušene kovine, bi morda lahko pogledali odsev luči na pravnem rešetkastem kovinskem predpražniku, toda le na takšnem, ki ima vzdolžne brazde. Če bi bile kovinske palice predpražnika idealno gladke (brezhibno zrcalo), bi namreč odboja vstran sploh ne bi bilo. Ker ima površina palic pri predpražniku na sliki 12 brazde (da na njih manj drsi), njegove od svetilke osvetljene palice svetijo tudi v druge smeri.

Če ni v vaši bližini nobenega takšnega predpražnika, pa lahko občudujete sliko na kakšnih rahlo upognjenih kovinskih žaluzijah na svoji ali sosednji hiši. A le težko boste našli tako lep odsev, kot je s stene stavbe, prekrite z žaluzijami na sliki 13.

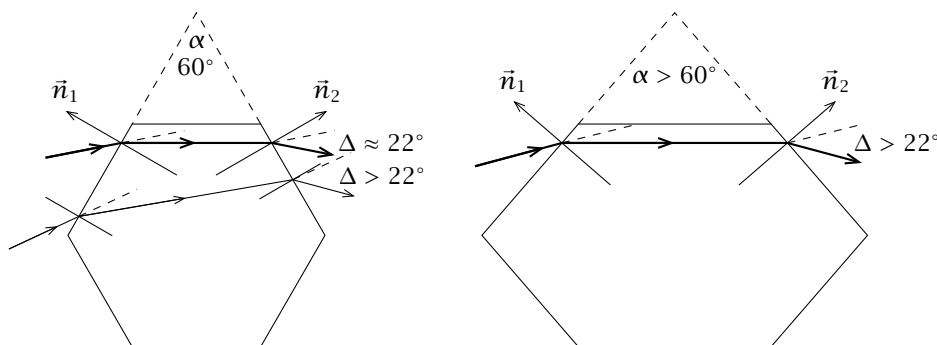
### Zakaj ima glavni krog hala polmer $22^\circ$ ?

Prehod žarkov skozi kristal ledu, skozi heksagonalno prizmo, je najpreprosteje opisati za prehod v ravnini, ki je pravokotna na glavno os kristala. V tej ravnini je presek kristala enakostranični šestekotnik. Pri različnih vpadnih kotih se sicer žarki preusmerjajo v različne smeri (leva slika 11), a največ se jih v približno isto smer preusmeri pri simetričnem prehodu, zato gre v to smer največ svetlobe (debelejše označeni žarek na levi sliki 11). Pri tem je sprememba smeri žarkov najmanjša, in sicer malo manj kot  $22^\circ$ . Tak je torej pri povsem naključno orientiranih heksagonalnih ledenih prizmah tudi polmer notranjega roba obroča hala. Zaradi lomov ob drugačnih vpadnih kotih krog ni tanka črta, ampak obroč z ostrim notranjim robom. Lahko je pre-

hod sicer pravokoten na os kristala, a nesimetričen (tanki žarek na levi sliki 11).

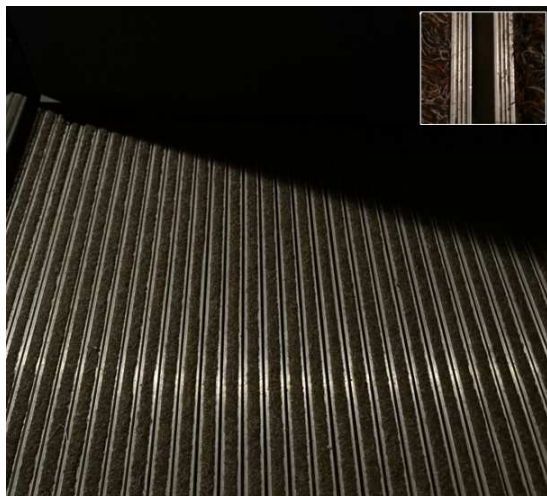
Pri »poševnem« preходу v kaki drugi ravnini, ki ni pravokotna na glavno os kristala, temveč kot med vstopnim žarkom in to glavno osjo kristala  $\theta \neq 90^\circ$ , je slika šesterokotnika prečno raztegnjena (desna slika 11). Zato je kot med dvema nesosednjima ploskvama večji od  $60^\circ$  in posledično tudi preusmeritev žarkov pri simetričnem prehodu večja od  $22^\circ$ .

Pri prehodu skozi eno stransko in eno osnovno ploskev prizme lahko nastane tudi krog s polmerom  $46^\circ$ . Ker so lahko kristali tudi še kako drugače orientirani ali pa niso heksagonalne prizme, ima včasih halo veliko dodatnih lokov in peg. Tak je bil npr. halo, ki ga je opisal Lowitz. In če se je kaj takega videlo na nebu, so ljudje rekli: »Znamenja so na nebu, vojska bo ...«.



**SLIKA 11.**

Lom svetlobe pri prehodu skozi šeststranično prizmo; levo - v ravnini, pravokotni na glavno os prizme in desno v ravnino poševno glede na glavno os prizme.



**SLIKA 12.**

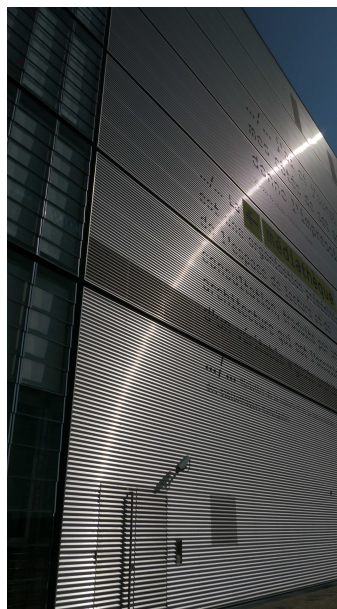
Ukriavljen odsev na predpražniku v veži ob odprtih vratih, skozi katera od leve zgoraj prihaja svetloba cestne svetilke, v okvirčku pa brazde na kovinskih palicah. Odsev opazujemo približno v smeri kovinskih letev predpražnika.

## Za konec

Naj povzamemo. Ponavljajoče se odsevne »črte«: raze, brazde ali valovi, imajo v svoji mikrostrukturi različne nagibe vdolbin in izboklin (ledeni kristalčki pa različne orientacije vpadnih in izstopnih ploskev). Zato odbijajo svetlobo glede na kot med vpadnim žarkom in normalo na to mikro odbojno ploskev. Do opazovalca pridejo iz nekega območja odsevne ravnine (na nebu pa iz nekega območja nebesne krogle) samo tisti žarki, katerih sprememba smeri je ravno pravšnja, da se preusmerijo proti opazovalcu. Zato so odsevi tudi iz ravnih ploskev s črtami pri pogledu od strani lahko ukriavljeni.

Pojav je v podrobnostih drugačen, kot je odboj od ukriavljenih površin. Rezultat pa je podoben: v vsaki smeri pogleda se namreč v vdolbinah ali na izboklinah brazd z različnimi nagibi najde kak nagib, ki je enak nagibu dela enakomerno ukriavljenih ploskve v tej isti smeri.

Tiskani viri, ki so posebej navedeni v nadaljevanju, so vsi dostopni tudi na spletu, a ne vsi brezplačno. Drugi, netiskani internetni viri so navedeni samo med tekstem. Do vseh smo dostopili 22. 6. 2019.



**SLIKA 13.**

Ukriavljeni odsev sonca na steni javne knjižnice v Strasbourgu, prekrte z nekoliko zaobljenimi žaluzijami ([www.paraselenne.de/?uk:127313](http://www.paraselenne.de/?uk:127313)). Objavljeno z dovoljenjem avtorice slike E. Seidenfaden.

## Literatura

- [1] A. Bravais, *Mémoire sur les Halos*, Extrait du Journal de l'École royale Polytechnique, XXXIe Cahier, xii+266pp+IVpl, 1847. [www.ursa.fi/blogi/ice-crystal-halos/an\\_old\\_halo\\_book\\_available/](http://www.ursa.fi/blogi/ice-crystal-halos/an_old_halo_book_available/).
- [2] D. K. Lynch, D. S. P. Deaborn in J. A. Lock, *Glitter and Glints on Water*, Appl. Opt. **50** 2011, 39–F49, [engagedscholarship.csuohio.edu/sciphysics\\_facpub/104/](http://engagedscholarship.csuohio.edu/sciphysics_facpub/104/).
- [3] M. Minnaert, *Light and Color in the Outdoors*, Springer; Corrected edition (April 13, 1995, 449 pp, [www.springer.com/gp/book/9780387979359](http://www.springer.com/gp/book/9780387979359)).
- [4] Sir Pollock-Montagu, *Light And Water: A Study Of Reflection And Color In River, Lake And Sea*, London, George Bell and Sons, xii+115 pp, 1903. Ponatis oktobra 2009 pri Kessinger Publishing, LLC, [archive.org/details/lightwaterstudy00montuoft/page/n8](http://archive.org/details/lightwaterstudy00montuoft/page/n8).
- [5] W. Tape, *Analytic foundations of halo theory*, J. Opt. Soc. Am. **70** 1980, 1175–1192, [www.osapublishing.org/josa/abstract.cfm?uri=josa-70-10-1175](http://www.osapublishing.org/josa/abstract.cfm?uri=josa-70-10-1175).

× × ×



# Nagradna križanka

							AVTOR MARKO BOKALIČ	POPIVANE POZNO V NOČ	ČEVELJ Z NIZOM KOLEŠKOV NA PODPLATU	RAZTOPINA BITUMNA ZA PREMAZ PROTI VLAGI	OTROŠKO IGRANJE Z ŽOGO	MERSKA PREDPONA ZA TRILIJONINO ENOTE	MESTO NA AZURNI OBALI	ŠPANSKI NOGOMETNI VRATAR CASILLAS	NAŠ OPERNI BASIST (SASA)					
							NAŠ POKOJNI MATEMATIK (FRANCE)													
							VEDA O ČLOVEKU PODOBNIH STROJIH								1					
							OBDOBJE TERCJARJA													
							MESTO V DELTI REKE VOLTE V GANI	2				STAREJŠI ROMUNSKI TERENEC BAVARSKO MESTO								
							SEATOV AVTO						NASPROTJE ZDRAVJA	VELIK OTOK PRED ZAHODNO OBALO SUMATRE	MAŠČEVANJE					
VELIK ELIPSAST KROŽNIK								5												
GRAFIČNO OBLIKOVANJE MATEVŽ BOKALIČ	ŽALJIVA BESEDA ZMERLJIVKA	AMERIŠKI JAZZOVSKI GLASBENIK (SAM)	PODROČJE OBLASTI ARABSKEGA KNEZA	DEL STOLA ALI KLOPI	SPLETNA DOMENA LITVE	AZIJSKA DRŽAVA	BODLJAJ CEVKA, KI SE VSTAVI V ŽILO	ŽENSKI SKAKALNI CENTER OB SAVINJI												
FUNKCIJA V ŠIRŠEM SMISLU								JAPONSKI FILMSKI REŽISER (JASUDŽIRO)	SEBIČNEŽ											
SOMERNICA								PIVO STARIH SLOVANOV STAROGRŠKI EP	RIBIŠKA VRVICA	VELIK UGLED SLOVES										
RIMSKI PESNIK					VEJA MATEMATIKE					JEZIKOVNI IZRAZ			10							
RELIGIJA	6				NAJVEČJA MORSKA ŽIVAL JULIJ NARDIN			RAZKOŠJE		SPODNJA PLOSKEV POSODE		DELOVNI, VELIKI, TIHI ?	OKRASNI GRM							
OSREDNJA FIGURA PRI SAHU						IT. MESTO OB REKI ADDI JV. OD MILANA	3		KORZO											
ANG. FIZIK, NOBELOVEC ZA KEMIJO (FRANCIS WILLIAM)						AVSTRIJ. SMUČARKA VEITH, PREJ FENNINGER			NAŠ POKOJNI FIZIK (JANEZ)	INDIJSKI BOG OGNJA NAŠ NEKD. PEVSKI TRIO			VASE ZAPRT, SAMOŠEN OTROK							
							PRIVLAČNA ZANIMIVOST					SLOVENSKI PRIMEK PRVE DAME ZDA	BRAZILSKA DRŽAVA ZVOK DOLOČENE VIŠINE							
							SPRETNOST, PRIPRAVNOST	8												
							ORIENTALSKA UTEŽNA MERA													
							TRETJA OSEBA MNOŽINE								OTRDELOST SKLEPA	AMERICIJ		9		
							SUROVINA ZA ČOKOLADO												OD "ZGORAJ" DOLOČEN POTEK ŽIVLJENJA	
							ANGLEŠKI ASTRONOM (JOHN COUCH)												REČ, ZADEVA	



$$\begin{matrix}
 1 & 2 & \dots & n \\
 \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ m \end{matrix} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}
 \end{matrix}$$

NEMŠKI GLASBENI ZAKONSKI PAR (ROBERT IN CLARA)	SLEPI TEBANSKI VIDEČ V GRŠKI MITOLOGIJ	RUDOLF MAISTER	PODRONOST	SUMERSKA BOGINJA LJUBEZNI	UMETNI DRAGULJI IZ SVINČENEGA STEKLA	PREBIVALEC HRIBOVIT. DELA SEVERNE ISTRE	SEDMA GRŠKA ČRKA	
TEMPERATURA PREHODA V TRDNO STANJE								
SPOJINA ZELEZA IN OGLJIK, ZELEZOV KARBID				12				
HELENA JAVORNIK		STRELSKA TABLA	BELOCVET. GOZDNO DREVO					
LJUBLJANSKA PAMETNA KARTICA						IZSREDNIK	ITALIJAN. PEVEC (ADRIANO)	
SAMEC SVINJE								
AMERIŠKI BOKSAR (MOHAMED)								
KOLEŠAR POGAČAR	AMEA	VESNA FABJAN	GRŠKI BOG VINA	ATOMSKA SKUPINA Z ELEKTRIČNIM NABOJEM	ZBIRALEC HROŠEV	JAPONSKI PISATELJ NOBELOVEC (KENZABURO)	AMERIŠKI DIRIGENT (LORIN) VPIS PODATKOV	
							11	
INHALATOR							PEVKA ALENKA ŠMID	KARL ERJAVEC
							DANSKI OTOK	
NOG. KLUB IZ FIRENC							NAŠ RADIJEV (RADO) MESNI IZDELEK	14
GLASBENA OZNAKA ZA POČASI							LETOVIŠČE PRI CRIKVENICI	
	NEZAVEDNI JAZ ID				OKRAJŠAN IZRAZ ZA ORANJE		RUS. VELEPOSESTNIK	
	PISATELJ CANETTI				ALBERT EINSEIN	AVSTRIJ. PESNIK IN PISATELJ (ERNST)	MUZEJ NA PROSTEM	16
				NOSILNI OKVIR VOZILA				
				ŠPORTNO DRUŠTVO				
						VISOKA VALJASTA POSODA Z ROČAJEM		
						TUR	IGRALKA FURLAN	NIKOLA TESLA
							IGRALKA IN KNEGINJA KELLY	ITALIJAN. IGRALEČ TOGNAZZI
RAZKOŠJE, SIJAJ (STAR.)	4							HIŠICA NA VRTU
HINKO NUČIČ								
						SESTAVLJANKA IZ LIKOV		DEDNA OSNOVA V CELICI
						IZKORISČEVALEČ		
		SPODNJA POVRŠINA ZAPRTEGA PROSORA		IZKOPAN ALI NARAVEN PODZEMNI PREHOD				MAKEDON. LJUDSKI PLES V OBLIKI KOLA
				MATEMATIK VIDAV	DOSEG KLICA			
					ŠTIBASTA OBVODNA VRBA			
ZALEZOVANJE DIVJADI	SLAVNOSTNA PESEM	PROSTI BRANILEC V ŠPORTU					SELEN	
		OBLAČILO MULSIMANK					GLAS PRI SPAHOVANJU	
								ALUMINIJ
						TEKSTILNI IZDELEK NA MIZI		
						SOSEDI ČRKE Š		
	7							
		VEDA O ZVOČNIH IN DRUGIH VALOVNIH POJAVIH						
		NAŠ JEZIKOSLOVEC (RAJKO)						

### NAGRADNI RAZPIS

→ Črke iz oštevilčenih polj vpišite skupaj z osebnimi podatki v obrazec na spletni strani

[www.presek.si/krizanka](http://www.presek.si/krizanka)

ter ga oddajte do **1. decembra 2019**, ko bomo izžrebali tri nagrajence, ki bodo prejeli **knjižno nagrado**.

× × ×

# Magneti 2

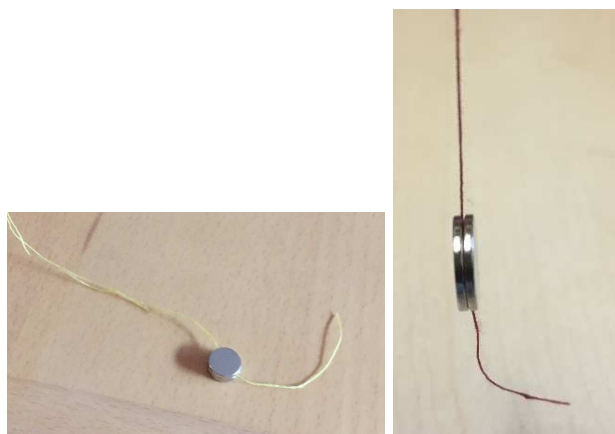


MOJCA ČEPIČ

→ V prejšnjem prispevku [1] smo se seznanili s ploščatimi cilindričnimi neodimskimi magneti. Z igranjem z njimi nadaljujemo; tokrat poskusimo poiskati odgovore še na nekaj vprašanj. Naj spomnimo, da izhajamo iz del Leoša Dvoraka iz Karlove univerze v Pragi [2–4]. Razlogom za opažanja pa se bomo posvetili v naslednji številki Preseka.

Najprej iz dveh neodimskih magnetov izdelajmo magnetno nihalo. Kot magnetno nihalo uporabimo magneta na vrvi, kot smo že predlagali v prejšnjem prispevku (slika 1). Sukanec povlecite med dva magneta ali pa prilepite en magnet na lepilni trak, letega pa na mizo, preko položite sukanec in ga pokrijte z drugim enakim neodimskim magnetom. Lepilni trak bo poskrbel, da magnet z mize ne bo pobegnil k svojemu bratu in pozabil na sukanec. Lepilni trak nato odtrgate in magnetno nihalo je narejeno.

Sukanec dvignimo, da magnet prosto obvisi. Kako je usmerjena simetrijska os magnetov?



SLIKA 1.

Zgoraj: priprava magnetnega nihala, spodaj: Prosto viseče magnetno nihalo. Natančen pogled pokaže, da sta viseča magneta nekoliko nagnjena.

Z magnetom na sukancu hodite naokoli po prostoru. Kako je dvojec magnetov usmerjen? Kateri predmeti lahko spremenijo smer visečega magneta?

Magnet na sukancu tudi pogosto sučno niha. Raziščite, kaj vpliva na frekvenco nihanja. V bližini drugih magnetov niha drugače, kot kadar drugih magnetov ni v bližini. Sestavite še en dvojec magnetov in raziščite, kako morate dvojec magnetov postaviti, da bo magnet na sukancu v njegovi bližini nihal z večjo ali manjšo frekvenco. Ugotovite, kako se frekvenca sučnega nihanja spreminja z oddaljenostjo od dvojca magnetov na mizi ter z medsebojno orientacijo visečega dvojca in dvojca na mizi. Poskusite najti takšno postavitev obeh magnetov, da magnet na sukancu ne bo nihal, temveč se bo vrtil.

## Literatura

- [1] M. Čepič, *Magneti 1*, Presek: list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje, 2019/2020, 47, 1, 18–20.
- [2] Dvořák L., *O magnetu, magnetických těleších a velikém magnetu Zemi*, In: Dílny Heuréky 2016/Heureka Workshops 2016. Sborník konference projektu Heuréka. E.: V. Koudelková. Matfyzpress Praha 2017. ISBN 978-80-7378-338-9 (PDF, v češtině), str. 7–23. Dostopno na [kdf.mff.cuni.cz/heureka/sborniky/DilnyHeureky\\_2017.pdf](http://kdf.mff.cuni.cz/heureka/sborniky/DilnyHeureky_2017.pdf), ogled 6. 8. 2019. Pripomba: Naslov je mogoče prevesti v angleščino kot *On the Magnet, Magnetic Bodies, and the Great Magnet the Earth* kar spominja na znamenito knjigo W. Gilberta.)
- [3] Dvořák L., *Magnets and magnetic field around them: what can we learn from simple experiments*, sprejeto v objavo v zbornik konference GIREP v Dublinu 2017.
- [4] Dvořák L., *O magnetech II* (On magnets II) In: Dílny Heuréky 2017/Heureka Workshops 2017. Sborník konference projektu Heuréka. Ed.: V. Koudelková. MatfyzPress, Praha, 2018, ISBN 978-80-7378-359-4 (PDF, v češtině) str. 7–21. Dostopno na [kdf.mff.cuni.cz/heureka/sborniky/DilnyHeureky\\_2017.pdf](http://kdf.mff.cuni.cz/heureka/sborniky/DilnyHeureky_2017.pdf), ogled 6. 8. 2019.



# Velik uspeh slovenske ekipe na letošnji mednarodni astronomski olimpijadi



ANDREJ GUŠTIN

→ Slovenski srednješolci, ki so se letos od 2. do 10. avgusta udeležili 13. mednarodne olimpijade iz astronomije in astrofizike (MOAA) v mestu Keszthely ob madžarskem jezeru Balaton, so se domov vrnili s srebrnima medaljama in pohvalo. Udeležba na olimpijadi je bila rekordna po številu držav (47), na njej pa je tekmovalo več kot 250 mladih astronomov s celega sveta. Tekmovanje je bilo zelo zahtevno, saj so srednješolce čakale različne preizkušnje (teoretične, opazovalne ter analiza podatkov).

Letošnjo olimpijsko ekipo so sestavljali: Ema Mlinar (Gimnazija Vič), Marko Čmrlec (Gimnazija Bežigrad), Jon Judež (Gimnazija Novo mesto), Vito Levstik (II. gimnazija Maribor), Matej Mali (Gimnazija in srednja šola Rudolfa Maistra Kamnik). Izbrani so bili izmed najboljših uvrščenimi srednješolci na tekmovanju iz znanja astronomije za Dominkovo priznanje, ki ga od mednarodnega leta astronomije 2009 prireja Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije (DMFA Slovenije).

Izbor ekipe je potekal vse leto, saj so se srednješolci preizkusili tudi v opazovalnem tekmovanju Messierov maraton, sanktpeterburškem astronomskem tekmovanju in izbirnem postopku, v olimpijsko ekipo pa je bilo izbranih samo najboljših pet.

Izbrana ekipa se je v poletnih mesecih udeležila Tekmovanja treh dežel, kjer se je preizkusila z ekipama s Hrvaške in Madžarske, ter priprav, ki so jih vodili mentorji prof. dr. Andreja Gomboc (Univerza v

Novi Gorici), dr. Dunja Fabjan (Fakulteta za matematiko in fiziko), Katja Bricman (Univerza v Novi Gorici), Krištof Skok in Rok Kovač (študenta na Fakulteti za matematiko in fiziko) in Andrej Guštin (DMFA Slovenije).

Slovenija je na olimpijadi nastopila sedmič, pri tem sta člana ekipe Marko Čmrlec in Ema Mlinar osvojila srebrni medalji, Jon Judež pa pohvalo. Ekipo so spremljali glavni mentor Andrej Guštin ter študenta Rok Kovač in Krištof Skok.



SLIKA 1.

Slovenska ekipa po podelitvi na 13. MOAA. Od leve proti desni: Vito, Jon (pohvala), Matej, Marko (srebro), Ema (srebro) ter mentorji Rok, Krištof, Andrej in Dunja.







V nadaljevanju objavljamo nekaj najzanimivejših teoretičnih nalog 13. MOAA.

### 1. Slavni astronomski dogodki

Razvrsti naslednje astronomske dogodke po kronološkem vrstnem redu od najstarejšega do najnovejšega. Zapiši številko dogodka (med 1 in 11).

1. Izstrelitev Hubblovega teleskopa.
2. Sondi Viking prispeta na Mars.
3. Odkritje Fobosa in Deimosa.
4. Zadnje prisončje kometa 1/P Halley.
5. Odkritje Ceresa (asteroid / pritlikavi planet).
6. Odkritje Urana (planet).
7. Prva uspešna meritev paralakse zvezde.
8. Odkritje prve planetarne meglice.
9. Odkritje zvezdnih populacij I in II.
10. Prva identifikacija kvazarja z optičnimi opazovanji.
11. Odkritje širjenja vesolja.

### 2. Odklon radijskih valov v gravitacijskem polju telesa našega Osončja

A. Eddington in F. Dyson z otoka Principe ter C. Davidson in A. Crommelin iz Sobrala (Brazilija) so izmerili odklon svetlobe zvezd, ki so bile med popolnim Sončevim mrkom leta 1919 navidezno blizu Sonca. Meritve so se skladale s teoretično napovedjo  $1,75''$ .

Svetlobni curek (ali foton), ki leti na razdalji  $d$  od središča Sonca, se odkloni za kot

$$\Delta\theta \propto \frac{4GM_{\odot}}{dc^2}.$$

Današnja ločljivost sistema anten VLBI (Very Long Baseline Interferometry) v območju radijskih valov je  $0,1$  mas (kotne milisekunde). Ali je z VLBI mogoče zaznati odklon radijskih valov kvazarja zaradi gravitacijskega vpliva (a) Jupitra, (b) Lune? Oцени kot odklona za oba primera.

### 3. Supermasivni črni luknji v središču naše Galaksije in galaksije M 87

Prvo sliko črne luknje je pred kratkim sestavila mednarodna ekipa programa Event Horizon Telescope (EHT). Fotografirano območje obdaja supermasivno črno luknjo v središču galaksije M 87. Opazovanja za končno sliko so izvedli pri valovni dolžini  $\lambda = 1,3$  mm, kjer medzvezdna ekstinkcija ni prevelika.

- Kolikšen mora najmanj biti premer teleskopa, da bi z njim razločili senco supermasivne črne luknje v središču galaksije (polmer ujetja fotonov je trikrat večji od polmera dogodkovnega horizonta)? Zapiši rezultat kot funkcijo razdalje  $d$  in mase  $M$  črne luknje.
- Rezultat podaj v enotah polmera Zemlje za
  - supermasivno črno luknjo v središču M 87 ( $d_{\text{BH-M87}} = 5,5 \cdot 10^7$  svetlobnih let,  $M_{\text{BH-M87}} = 6,5 \cdot 10^9 M_{\odot}$ );
  - in Sgr A\*, supermasivno črno luknjo v središču naše Galaksije ( $d_{\text{Sgr A*}} = 8,3$  kpc,  $M_{\text{Sgr A*}} = 3,6 \cdot 10^6 M_{\odot}$ ).
- Katero tehnologijo potrebujemo, da ustvarimo tako napravo?
  - Gravitacijsko lečenje zaradi temne snovi.
  - Interferometrija z mrežo radijskih teleskopov.
  - Upočasnitev fotonov v gostem mediju.
  - Zmanjševanje učinka popačenja vpadnih valovnih front.
  - Fokusiranje nevtrinov z močnimi elektromagnetnimi polji.

### 4. Nadgradnja reflektorskega teleskopa

Učenec ima Cassegrainov teleskop povprečne kvalitete s primarnim in sekundarnim zrcalom, ki imata aluminijasto prevleko z odbojnostjo  $\epsilon_1 = 91\%$ .

- Kolikšna bo izboljšava mejne magnitude teleskopa, če učenec zamenja prevleko zrcala z bolj kakovostno prevleko z  $\epsilon_2 = 98\%$ ?
- Učenec ima v fokuserju teleskopa z zrcali z odbojnostjo  $\epsilon_1$  še diagonalno z odbojnostjo  $\epsilon_1$ . Kolikšna je izboljšava, če zamenja diagonalno z modelom z odbojnostjo  $\epsilon_3 = 99\%$ , zrcali teleskopa pa z modeloma z odbojnostjo  $\epsilon_2$ ? (Diagonala je ravno zrcalo, ki je nagnjeno za  $45^\circ$  na optično os.)

- Ali je ta razlika očitno opazna s človeškim očesom? Upoštevaj celotno območje vidnih valovnih dolžin in zanemari kakršnekoli odvisnosti od valovne dolžine in geometrijske efekte.

## 5. Pečica na prasevanje

Človeško telo je v glavnem sestavljeno iz vode, zato je dober absorber za mikrovalove. Privzemi, da je astronautovo telo popoln sferičen absorber z maso  $m = 60$  kg in s povprečno gostoto ter toplotno kapaciteto kot voda, torej  $\rho = 1000$  kg m<sup>-3</sup> in  $C = 4200$  J kg<sup>-1</sup> K<sup>-1</sup>.

- Kolikšno moč prasevanja v wattih bi astronaut absorbiral v medgalaktičnem prostoru? Za spekter prasevanja lahko privzameš spekter črnega telesa s temperaturo  $T_{\text{CMB}} = 2,728$  K.
- Približno koliko fotonov prasevanja astronaut absorbira vsako sekundo?
- Če zanemariš ostalo prejeto in oddano energijo, koliko časa je potrebno, da se astronautovo telo ogreje za  $\Delta T = 1$  K?

## 6. Višina dimnika elektrarne Tiszaújváros

Program European Copernicus Earth-observation upravlja z dvema satelitoma Sentinel-2. Ta satelita krožita okoli Zemlje na polarnih orbitah, sinhronih s Soncem, na višini približno 800 km. Do preleta nekega dela površja pride vsakih nekaj dni in takrat vsakič ob istem lokalnem času posnameta fotografije površja (na nekaj minut natančno). Kamere so občutljive na 13 različnih spektralnih pasov v vidnem in bližnjem IR delu spektra. Ločljivost fotografij je 10 metrov.

Tretja največja zgradba na Madžarskem je dimnik elektrarne blizu mesta Tiszaújváros. V nadaljevanju sta natisnjeni dve fotografiji s satelitov Sentinel-2 v nepravih barvah, posneti leta 2016. Sliko 2a so posneli 29. junija, sliko 2b pa 16. decembra, torej blizu poletnega in zimskega solsticija. Orientacija fotografij je taka, da je sever zgoraj, vzhod pa desno.

Ocenjeni dolžini senc na slikah sta  $x_1 = 125$  m in  $x_2 = 780$  m. Odgovori na naslednja vprašanja:

- Na kateri dan pričakujemo, da bo senca daljša?
  - 29. junija.
  - 16. decembra.

- V katerem delu dneva sta satelita Sentinel-2 letela čez to območje?
  - Zgodaj zjutraj.
  - Dopoldne.
  - Zgodaj popoldne.
  - Pozno popoldne.
- Na podlagi danih dolžin senc oceni višino dimnika. Za ta izračun (samo za ta izračun) privzemi, da sta satelita fotografije posnela ob lokalnem pol dnevu.
- Kaj bi lahko vplivalo na natančnost izračuna višine dimnika (možnih je več odgovorov)?
  - Oblika Zemlje je sploščeni sferoid.
  - Omejena ločljivost satelitskih posnetkov in nejasen rob sence.
  - Nadmorska višina spodnjega dela dimnika.
  - Razlike v nagnjenosti Zemljine rotacijske osi v različnih letnih časih.
  - Upoštevanje učinka atmosfere refrakcije.



SLIKA 2.

→ 7. Učinek Sončevih peg na izsev Sonca

Od leta 1978 dalje so detektorji na umetnih satelitih ves čas merili solarno konstanto. Te natančne meritve so pokazale variacije solarne konstante v mesecih, letnih časov, letih in še daljših obdobjih. Vzrok za variacije v letnih časih je periodično spreminjanje razdalje med Zemljo do Soncem, desetletja dolge in približno ciklične spremembe pa so v glavnem posledica ciklov Sončeve aktivnosti.

- Izračunaj vrednost solarne konstante (nad ozračjem) na razdalji 1 astronomske enote za »mirno Sonce«. Predpostavi, da Sonce seva kot idealno črno telo.
- Izračunaj vrednost solarne konstante (nad ozračjem) popolnoma mirnega Sonca v začetku januarja in v začetku julija ter določi njuno razmerje.
- Ponovno izračunaj solarno konstanto na oddaljenosti 1 a.e., če se blizu ekvatorja Sonca nahaja pega s povprečno temperaturo  $T_{sp} = 3300\text{ K}$  in premerom  $D_{sp} = 90\,000\text{ km}$ . Izračunaj razmerje vrednosti, če na Soncu ni peg ali pa je na v fotosferi Sonca taka pega.  
Pego obravnavaj kot krog in zanemari učinek sferične projekcije pege. Predpostavi tudi, da se Sonce vrti dovolj hitro, da je njegov izsev še vedno izotropen.
- V resnici pa Sonce ne seva izotropno. Izračunaj razmerje med obsevanostjo Zemlje, ko pega z Zemlje ni vidna, in v primeru, ko je vidna na sredini ploskvice Sonca.

× × ×

# Popravek



ANDREJ GUŠTIN

→ V 1. številki letošnjega Preseka je v članku Najdaljši čas trajanja Luninega zakritja zvezde Marjana Prosen napaka, na katero so nas opozorili naši zvesti bralci.

Luna ne zakrije zvezde zaradi vrtenja Zemlje, kot je to mogoče sklepati iz zadnjih odstavkov Prose-

novega članka, temveč zaradi navideznega gibanja Lune okoli Zemlje. Izračunajmo hitrost, s katero se torej Luna giblje glede na zvezde. Ker gre za grobo oceno časa zakritja zvezde, lahko predpostavimo, da je to gibanje enakomerno, ne upoštevamo deklinacije Lune in zvezd itd. Siderski obhodni čas Lune okoli Zemlje, torej glede na zvezde, je približno 27,3 dneva. To pomeni, da se Luna glede na zvezde giblje s kotno hitrostjo  $\omega = 360^\circ / 27,3\text{ dan} = 13,2^\circ / \text{dan} = 0,55^\circ / \text{h}$ . Pri najdaljšem zakritju Luna zvezdo prečka s premerom ploskvice. Navidezni zorni kot Lune na nebu je  $0,5^\circ$ , zato je najdaljši čas zakritja zvezde  $t_{maks} = 0,5^\circ / 0,55^\circ / \text{h} = 0,9\text{ h} = 54\text{ minut}$ . Groba ocena najdaljšega zakritja zvezde da vrednost okoli ene ure, ne pa dve minuti, kot je to zapisano v članku.

× × ×

# Barvni sudoku



→ V  $8 \times 8$  kvadratkov moraš vpisati začetna naravna števila od 1 do 8 tako, da bo v vsaki vrstici, v vsakem stolpcu in v kvadratih iste barve (pravokotnikih  $2 \times 4$ ) nastopalo vseh osem števil.

			6		5		8
4							3
1			2	6			
		6					
	5	2			7		
6		3		5			
3	4					2	
		8					4

× × ×



# Metode za reševanje nelinearnih enačb



JURE KORBAR

→ Nelinearne enačbe so enačbe, ki lahko vsebujejo linearne člene npr.  $(x, 2x, \frac{x}{3})$  in konstante, poleg tega pa vsebujejo še nelinearne člene npr.  $(x^2, x^3, \sin(x))$ . Primer linearne enačbe je

$$\blacksquare \frac{6x}{7} = 13, \quad (1)$$

primer nelinearne enačbe pa je

$$\blacksquare 3x^3 + 5x^2 = 4. \quad (2)$$

Če tako enačbo pretvorimo v funkcijo, je njen graf različen od premice. Vsako enačbo lahko pretvorimo v problem iskanja ničel funkcije tako, da vse člene enačbe prestavimo na eno stran in te člene zapišemo v funkciji  $f(x)$ . Tako pretvorjena enačba (1) nam da funkcijo

$$\blacksquare f(x) = \frac{6x}{7} - 13. \quad (3)$$

Sedaj rešujemo enačbo  $f(x) = 0$ . Rešitve te enačbe dobimo tako, da poiščemo *ničle* oz. *korene* funkcije  $f(x)$ .

Najbolj klasičen primer nelinearnih enačb so polinomi oz. iskanje ničel le-teh. Za iskanje ničel polinoma druge stopnje v srednji šoli spoznamo formulo za ničle kvadratne enačbe, za polinome višje stopnje pa nam predstavijo Hornerjev algoritem, ki pa je precej omejen, saj z gotovostjo najde le racionalne ničle. Kako pa bi se lotili reševanja spodnjih enačb?

$$\blacksquare \cos(x) = x \quad (4)$$

$$e^x = -x \quad (5)$$

Omenjeni enačbi spadata v kategorijo transcendentnih enačb<sup>1</sup>, zanje pa je značilno, da pogosto nimajo

<sup>1</sup>Primer transcendentnih funkcij so:  $\sin(x)$ ,  $\cos(x)$ ,  $e^x$ ,  $x^x$  ...; transcendentne enačbe vsebujejo transcendentne funkcije, lahko pa vsebujejo tudi člene algebrskih funkcij  $(x, x^2, x^{\frac{3}{2}}, \frac{x^3+5x}{3x^2-1} \dots)$ .

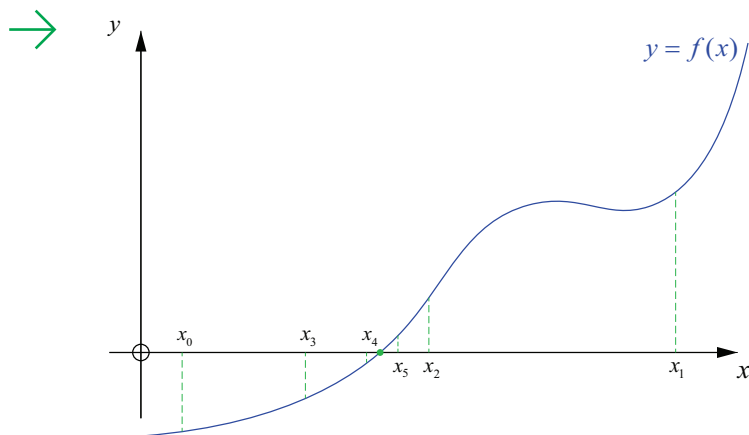
analitičnih rešitev, če v enačbi nastopa spremenljivka, tako v obliki transcendentne funkcije (leva stran enačb (4) in (5)) kot tudi v obliki algebrske funkcije (desna stran enačb (4) in (5)). Izjema tega pravila je npr. enačba  $\sin(x) = x$ , za katero vemo, da je rešitev enačbe  $x = 0$ , a si moramo priznati, da smo to rešitev uganili, saj vemo, da je vrednost obeh strani enačbe za primer  $x = 0$  enaka 0.

Kako pa se potem v praksi lotimo reševanja enačb (4) in (5)? Odgovor se skriva v numeričnih metodah; vsako enačbo bomo pretvorili v problem iskanja ničel funkcije. Začeli bomo z oceno ničle in nato iterativno iskali boljši približek. Začetni približek bomo določili z izrisom grafa funkcije in ocenili, kje se ničla nahaja, nato pa bo izbrana metoda iskanja ničle določila boljši približek z vsako iteracijo te metode. V praksi ta približek velikokrat poznamo ali pa ga določimo s kakšno drugo vrsto grobe aproksimacije. Najprej bomo predstavili teoretično ozadje metode in ob enačbah in grafih pokazali njihovo delovanje, predstavili njihove prednosti in slabosti, za konec pa bomo enačbi (4) in (5) rešili s predstavljenimi metodami.

## Bisekcijska metoda

Od vseh metod je najbolj preprosta in poznana bisekcijska metoda. Njeno delovanje je prikazano na sliki 1. Metoda temelji na dejstvu, da mora biti na intervalu, kjer zvezna funkcija spremeni predznak, vsaj ena ničla. Torej moramo pri tej metodi najprej definirati interval, na katerem se ničla pojavi (kjer funkcija spremeni predznak). Na sliki 1 je to interval  $[x_0, x_1]$ . Bisekcijska metoda ta interval razpolovi ( $x_2 = \frac{x_0+x_1}{2}$ ) in tako dobimo dva podintervala. Ničla se nahaja na podintervalu, na katerem pride do spremembe predznaka (interval  $[x_0, x_2]$ ). Tako dobimo nov, krajši interval, na katerem se nahaja ničla, in s tem je končana prva iteracija. V naslednji iteraciji





SLIKA 1.

Potek delovanja bisekcijske metode:  $f$  je funkcija, katere ničlo iščemo,  $x_0$  in  $x_1$  sta meji začetnega intervala, na katerem se ničla pojavi,  $x_2, x_3, x_4$  in  $x_5$  pa so točke, ki jih dobimo s to metodo.

uporabimo interval  $[x_0, x_2]$ . Nadaljevanje metode da intervale  $[x_3, x_2]$ ,  $[x_4, x_2]$ ,  $[x_4, x_5]$ .

### Ocena napake

Napaka, ki jo naredimo pri bisekcijski metodi (kot tudi pri ostalih metodah), je odvisna od števila iteracij in metode same. Največja začetna napaka je enaka velikosti začetnega intervala  $\Delta x = x_1 - x_0$ . Napako po  $n$ -ti iteraciji označimo z  $\varepsilon_n$ . Največja možna napaka po prvi iteraciji je enaka

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta x}{2},$$

po drugi iteraciji je napaka

$$\varepsilon_2 = \frac{\frac{\Delta x}{2}}{2} = \frac{\Delta x}{2^2},$$

po  $n$ -ti iteraciji pa je napaka

$$\varepsilon_n = \frac{\Delta x}{2^n}. \tag{6}$$

Ničlo moramo natančno izračunati, zato metodo po primernem številu iteracij ustavimo. Da dosežemo želeno natančnost  $\varepsilon$ , enačbo (6) obrnemo in logarit-

miramo:

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad 2^n &= \frac{\Delta x}{\varepsilon}, \\ n \ln 2 &= \ln \frac{\Delta x}{\varepsilon} \\ n &= \log_2 \frac{\Delta x}{\varepsilon}, \end{aligned} \tag{7}$$

pri čemer  $n$  zaokrožimo na naslednje celo število.

Prednost bisekcijske metode je ta, da spada med zaprte metode. To pomeni, da vedno najdemo ničlo, ki je znotraj začetnega intervala, in je nemogoče, da bi se iskanje ničle prestavilo v področje izven začetnega intervala. Ima pa tudi določene slabosti:

- konvergira relativno počasi (druge metode potrebujejo nižje število iteracij za primerljivo natančnost rezultata);
- ničel sode stopnje<sup>2</sup> s to metodo ne moremo najti, saj funkcija v tem primeru ne spremeni predznaka;
- metoda ne razlikuje med ničlo in polom, saj je vezana le na spremembo predznaka funkcije, ne preverja pa vrednosti funkcije v okolici potencialne ničle;
- na intervalu, ki vsebuje več ničel, le-teh ne razločimo in zaznamo samo eno izmed njih.

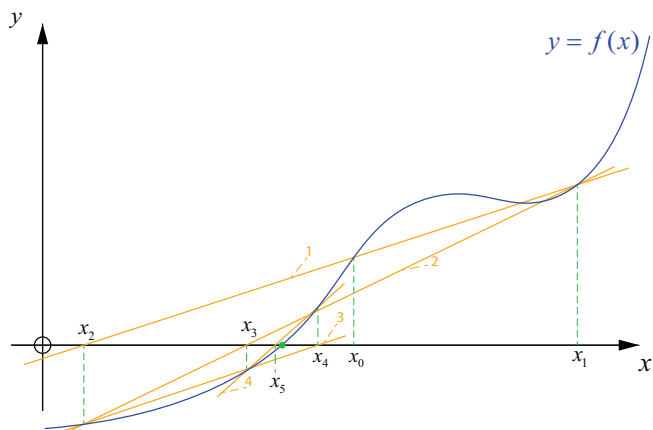
### Sekantna metoda

Sekantna metoda spada med odprte metode iskanja ničel. Najprej pojasnimo njeno delovanje, nato pa bomo na primeru iz slike 2 videli, da s to metodo zares lahko najdemo ničlo, ki ne leži znotraj začetnega intervala.

Tako kot pri bisekcijski metodi si moramo tudi pri sekantni izbrati začetni interval  $[x_0, x_1]$ , za katerega predvidevamo, da v njem leži ničla (toda ni nujno, da to drži). Nato vrišemo premico skozi točki  $f(x_0)$  in  $f(x_1)$  ter pogledamo, kje je presečišče premice oz. sekante (po čemer se metoda imenuje) z absciso. To točko označimo z  $x_2$ . Interval za iskanje ničle v naslednji iteraciji je  $[x_1, x_2]$ .

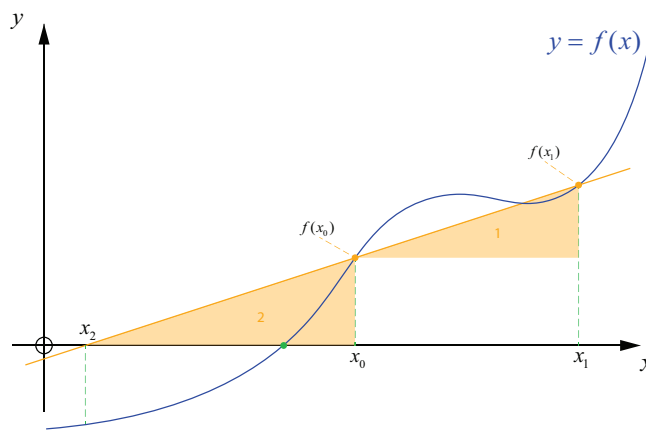
Na sliki 2 vidimo, da se po štirih iteracijah bolje približamo dejanski ničli kot pri bisekcijski metodi,

<sup>2</sup>Enačba ima lahko več rešitev, ki so si medsebojno enake; če je število ponovitev neke rešitve sodo, imamo opravka s sodo ničlo (enačba  $(x - 6)^2 = 0$  ima eno dvojno rešitev:  $x = 6$ ).



SLIKA 2.

Potek delovanja sekantne metode:  $f$  je funkcija, katere ničlo iščemo,  $x_0$  in  $x_1$  sta meji začetnega intervala, točke  $x_2, x_3, x_4$  in  $x_5$  pa so rezultat delovanja metode.



SLIKA 3.

Izpeljava enačbe za sekantno metodo:  $f(x_0)$  in  $f(x_1)$  sta vrednosti funkcije  $f$  v krajiščih začetnega intervala  $[x_0, x_1]$ ,  $x_2$  pa je točka, ki jo dobimo po prvi iteraciji.

čeprav v začetnem intervalu  $[x_0, x_1]$  ničla sploh ni bila vsebovana. Za boljšo predstavo so na sliki sekante oštevilčene glede na pripadajočo iteracijo.

Opisani postopek moramo sedaj prevesti v enačbe, da to metodo lahko dejansko uporabimo. Izbrali smo vrednosti  $x_0$  in  $x_1$  in poznamo vrednost funkcije v teh dveh točkah, zanima pa nas, kako določimo vrednost  $x_2$ . Pri tem si pomagamo s podobnimi trikotniki, kot je prikazano na sliki 3.

Vidimo, da sta trikotnika 1 in 2 podobna, torej je razmerje stranic za oba trikotnika enako. Iz te ugotovitve lahko zapišemo enačbo:

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_2}.$$

Enačbo obrnemo in izpostavimo  $x_2$ :

$$\begin{aligned} x_0 - x_2 &= f(x_0) \cdot \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)}, \\ x_2 &= x_0 - f(x_0) \cdot \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)}. \end{aligned} \quad (8)$$

V naslednji iteraciji v enačbi (8) za vrednost  $x_0$  uporabimo vrednost  $x_1$  iz prejšnje iteracije, za vrednost  $x_1$  pa uporabimo  $x_2$  iz prejšnje iteracije.

### Red konvergence

V procesu primerjave sekantne metode z bisekcijsko se pojavi vprašanje, katera se hitreje približuje ničli.

To hitrost narekuje red konvergence, ki nam pove, katera metoda bo potrebovala manj iteracij za izračun ničle z zadovoljivo natančnostjo. Red konvergence določimo tako, da primerjamo oceno napake iz prejšnje iteracije z oceno napake trenutne iteracije. To v splošnem zapišemo kot

$$\varepsilon_n = C \cdot \varepsilon_{n-1}^k, \quad (9)$$

kjer je  $C$  konstanta,  $k$  pa imenujemo red konvergence, ki bistveno vpliva na hitrost delovanja metode. Enačba (9) za bisekcijsko metodo je videti tako:

$$\varepsilon_n = \frac{1}{2} \varepsilon_{n-1}, \quad (10)$$

za sekantno metodo pa

$$\varepsilon_n = C \cdot \varepsilon_{n-1}^{1.618...} \quad (11)$$

Red konvergence sekantne metode je ravno zlati rez, a je takšen le pri dovolj lepah funkcijah. Ker je višji kot pri bisekcijski metodi, ta metoda v splošnem zahteva manjše število iteracij za želeno natančnost.

Druge prednosti sekantne metode so:

- metoda ne temelji na spremembi predznaka in uspe najti ničlo, tudi če je ta sode stopnje;
- preprosta implementacija; ne potrebujemo dodatnih informacij o funkciji, ki bi omejele uporabnost metode.



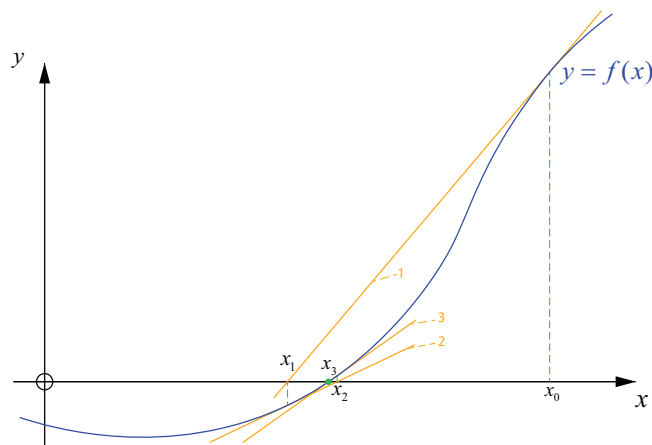


→ Tudi sekantna metoda ima določene slabosti:

- spada med odprte metode, zaradi česar lahko najde drugo ničlo od predvidene, odvisno od občutljivosti funkcije (zaradi lokalnih ekstremov lahko sekanta postane zelo položna, kar lahko popolnoma spremeni interval iskanja), lahko se tudi zacikla ali divergira v neskončnost;
- obstajajo metode, ki imajo še višji red konvergenca in so zato hitrejše od sekantne metode.

### Newton-Raphsonova metoda

To je ena izmed najbolj razširjenih metod (imenovana tudi Newtonova oz. tangentna metoda) za iskanje ničel. Tako kot sekantna metoda tudi ta spada med odprte metode. Za razliko od prej omenjenih metod si tu ne izberemo začetnega intervala ampak zgolj eno začetno točko. Metoda deluje tako, da pri izbrani vrednosti  $x$  na funkcijo postavi tangento in določi novi približek za ničlo tam, kjer ta tangenta seka absciso. To vrednost uporabimo tudi za naslednjo iteracijo. Potek delovanja je prikazan na sliki 4.



SLIKA 4.

Potek delovanja Newtonove metode:  $f$  je funkcija, katere ničlo iščemo,  $x_0$  je začetni približek iskane ničle,  $x_1, x_2$  in  $x_3$  pa so izboljšani približki ničle dobljeni s to metodo.

Da pa lahko v dani točki na funkcijo postavimo tangento, moramo poznati točko, v kateri se tangenta dotika funkcije, prav tako pa moramo poznati njen naklon. Naklon tangente matematično opišemo z odvodom funkcije. Odvod funkcije  $f$  označimo

kot  $f'$ . Vrednost  $f'(x)$  odvoda funkcije  $f$  v točki  $x$  pove, kakšen je smerni koeficient tangente na funkcijo  $f$  v točki  $x$ . Tu se ne bomo ukvarjali z izračunom odvoda; vedeti moramo le, da odvod potrebujemo, če želimo uporabiti Newtonovo metodo, saj zanjo potrebujemo naklonske koeficiente tangent.

Na sliki 4 vidimo, da v tem primeru že po dveh iteracijah pridemo zelo blizu ničle, s tretjo iteracijo pa se približamo toliko, da na tej sliki ne razločimo razlike med ničlo in rezultatom tretje iteracije. Newtonova metoda ima namreč kvadratični red konvergenca, zaradi česar je zelo priljubljena.

Ob sliki 5 izpeljemo še enačbo za Newtonovo metodo. Začetno oceno ničle kot ponavadi označimo z  $x_0$ , v točki  $f(x_0)$  pa postavimo tangento z naklonom  $f'(x_0)$ . Naklon tangente v točki  $x_0$  je definiran kot

$$f'(x_0) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} \quad (12)$$

Iz enačbe (12) izpostavimo  $x_1$  in dobimo enačbo za določitev ničle po Newton-Raphsonovi metodi:

$$x_0 - x_1 = \frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}. \quad (13)$$

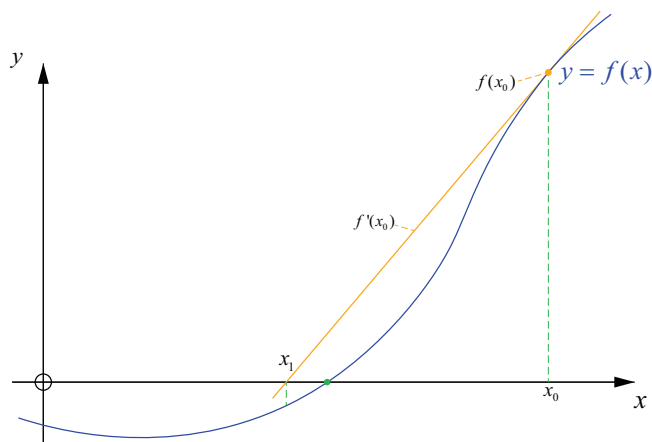
Prednost Newtonove metode je predvsem red konvergenca. Metoda zato hitreje najde boljši približek ničle. Kot vse metode pa ima tudi ta svoje slabosti:

- metoda ima kvadratični red konvergenca dejansko samo v bližnji okolici enostavne ničle (če je ničla višjega reda, je konvergenca nižja);
- spada med odprte metode in se, tako kot sekantna metoda, lahko oddalji od ničle, če naletimo na okolico lokalnega ekstrema;
- lahko divergira, če so začetni približki slabi.

### Ostale metode

Poleg navedenih metod poznamo še druge, npr. Mullerjeva metoda, Ridderjeva metoda in metoda *regula falsi* (v dobesednem prevodu to pomeni *metoda napačnega pravila*).

Mullerjeva metoda je podobna sekantni, a namesto dveh začetnih točk izberemo tri, skoznje pa namesto premice teče parabola (s tremi točkami namreč lahko enolično določimo parabolo).



**SLIKA 5.**

Izpeljava enačbe za Newtonovo metodo:  $x_0$  je začetni približek ničle,  $f(x_0)$  je vrednost funkcije  $f$  v točki  $x_0$ ,  $f'(x_0)$  je vrednost smernega koeficienta tangente na funkcijo  $f$  v točki  $x_0$ ,  $x_1$  pa je rezultat prve iteracije metode.

Ridderjeva metoda deluje podobno kot bisekcijska metoda, le da po izračunu srednje vrednosti to vrednost uporabi v posebni formuli. S tem dobi boljši približek, s katerim prvotni interval razdelimo na dva dela, potem pa kot pri bisekcijski metodi pogledamo, v katerem intervalu pride do spremembe predznaka.

Metoda *regula falsi* pa je skupek sekantne in bisekcijske metode. Je zaprta metoda, torej mora biti ničla vedno znotraj začetnega intervala. Nato po postopku sekantne metode določimo nov približek ničle, interval za naslednjo iteracijo pa je tam, kjer funkcija spremeni predznak.

### Rešitev uvodnih problemov

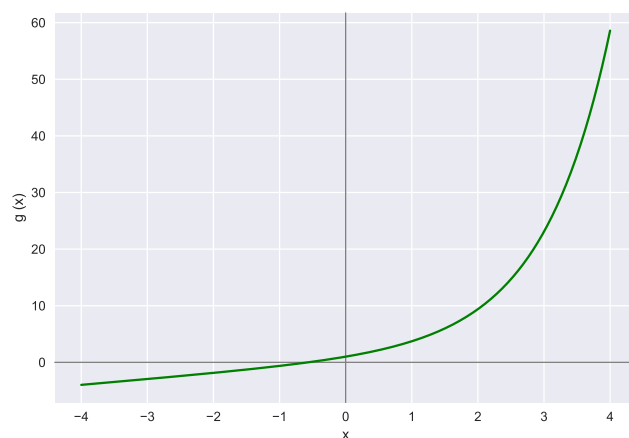
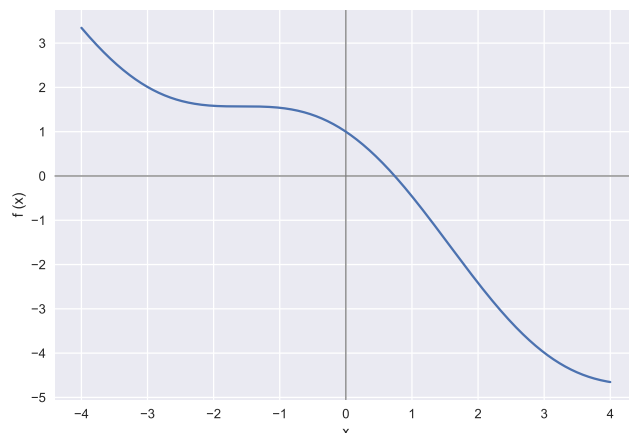
Lotimo se še problemov iz uvoda. Te bomo rešili s predstavljenimi metodami. Najprej pretvorimo enačbo (4) v funkcijo  $f(x)$  in enačbo (5) v funkcijo  $g(x)$ :

▪  $f(x) = \cos(x) - x,$  (14)

$g(x) = e^x + x.$  (15)

Sedaj iščemo ničle teh dveh funkcij. Pomagajmo si z grafi na sliki 6.

Iz grafa na sliki 6 zgoraj vidimo, da je ničla nekje na intervalu  $0 < x < 1$ . Ta podatek bomo uporabili



**SLIKA 6.**

Grafa funkcij  $f(x)$  in  $g(x)$

za začetni vrednosti pri bisekcijski metodi. Za začetno vrednost sekantne in Newtonove metode uporabimo vrednost  $x = 0$ . Sekantna metoda potrebuje dva začetna približka, tako kot metoda bisekcije. V tem primeru potrebujemo samo en začetni približek, saj ničlo iščemo s paketom *scipy* v okolju *python*, ta pa sam določi drugo vrednost intervala. Newtonova metoda potrebuje odvod funkcije  $f(x)$ , ki je

▪  $f'(x) = -\sin(x) - 1.$  (16)

V tabeli 1 so prikazani rezultati iskanja ničel s temi tremi metodami na 14 decimalnih mest natančno.

Vidimo, da je Newtonova metoda konvergirala že pri četrti iteraciji, sekantna metoda je konvergirala pri sedmi, bisekcijska metoda pa po desetih iteracijah še ni uspela doseči primerljive natančnosti. Le-to





iteracija	bisekcija	sekantna	Newtonova
1	0,50000000000000	0,99995000250029	0,75036386784024
2	0,50000000000000	0,68508231592328	0,73911289091136
3	0,62500000000000	0,73629993134121	0,73908513338528
4	0,68750000000000	0,73911934458885	0,73908513321516
5	0,71875000000000	0,73908511214521	0,73908513321516
6	0,73437500000000	0,73908513321500	0,73908513321516
7	0,73437500000000	0,73908513321516	0,73908513321516
8	0,73828125000000	0,73908513321516	0,73908513321516
9	0,73828125000000	0,73908513321516	0,73908513321516
10	0,73828125000000	0,73908513321516	0,73908513321516

**TABELA 1.**

Prvih 10 iteracij iskanja ničle funkcije  $f(x)$

je dosegla šele pri 44. iteraciji. S tem smo našli zeleni približek za rešitev enačbe (4).

Rešimo še enačbo (5). Iz grafa na sliki 6 spodaj razberemo, da ničla leži nekje na intervalu  $-1 < x < 0$ . Spet bosta ti dve vrednosti predstavljali začetni interval za bisekcijsko metodo, za sekantno in Newtonovo metodo pa uporabimo za začetni približek vrednost  $x = -1$ . Odvod funkcije  $g(x)$ , ki ga potrebujemo za uporabo Newtonove metode je:

▪  $g'(x) = e^x + 1.$  (17)

Pokažimo še, da zgornji predpis  $g'$  res podaja smerni koeficient tangente na funkcijo  $e^x + x$ . Na sliki 7 je na funkcijo  $g$  postavljena tangenta v točki  $x = 0$ . Vrednost funkcije v tej točki je

▪  $g(0) = e^0 + 0 = 1,$

vrednost odvoda funkcije pa je po enačbi (17) enaka

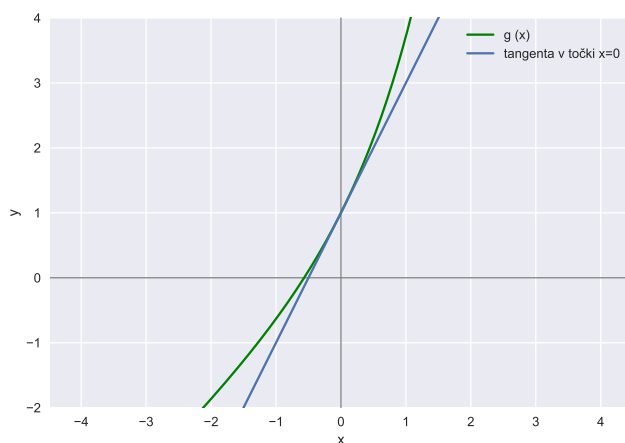
▪  $g'(0) = e^0 + 1 = 2.$

Če v enačbo za premico  $y = kx + n$  vstavimo vrednosti  $x, y$  in  $k$  lahko izračunamo vrednost  $n$  in tako dobimo enačbo za tangento.

▪  $y = kx + n,$   
 $1 = 0 \cdot x + n,$   
 $n = 1.$

Enačba tangente se tako glasi:

▪  $y = 2x + 1.$  (18)



**SLIKA 7.**

Graf funkcije  $g(x)$  in tangenta na funkcijo  $g$  v točki  $x = 0$

Iz grafa na sliki 7 vidimo, da enačba (18) zares drži.

Ponovimo postopek še za vrednost  $x = 1$ . Vrednost funkcije  $g$  je tu enaka

▪  $g(1) = e^1 + 1 = e + 1,$

vrednost odvoda v tej točki pa je enaka

▪  $g'(1) = e^1 + 1 = e + 1.$

Izračunajmo še začetno vrednost  $n$  tangente v tej točki:

▪  $y = kx + n,$   
 $e + 1 = (e + 1) \cdot 1 + n,$   
 $n = 0.$



iteracija	bisekcija	sekantna	Newtonova
1	-1,0000000000000000	-0,53787041498982	-0,53788284273999
2	-0,7500000000000000	-0,56929601628683	-0,56698699140541
3	-0,6250000000000000	-0,56715474022392	-0,56714328598912
4	-0,6250000000000000	-0,56714328595119	-0,56714329040978
5	-0,5937500000000000	-0,56714329040979	-0,56714329040978
6	-0,5781250000000000	-0,56714329040978	-0,56714329040978
7	-0,5703125000000000	-0,56714329040978	-0,56714329040978
8	-0,5703125000000000	-0,56714329040978	-0,56714329040978
9	-0,5683593750000000	-0,56714329040978	-0,56714329040978
10	-0,5673828125000000	-0,56714329040978	-0,56714329040978

**TABELA 2.**  
Prvih 10 iteracij iskanja ničle funkcije  $g(x)$

Enačba tangente v točki  $x = 1$  je tako

$$y = (e + 1) \cdot x, \tag{19}$$

graf na sliki 8 pa potrjuje, da smo pravilno izračunali enačbo tangente.

Rezultati 10 iteracij teh metod za funkcijo  $g(x)$  so predstavljeni v tabeli 2, prav tako na 14 decimalnih mest natančno.

Ponovno je najhitreje konvergirala Newtonova metoda, sekantna metoda je bila tudi zelo hitra, metoda bisekcije pa je za tako natančen rezultat potrebovala 48 iteracij.

Poglejmo si še, kako v nekaj vrsticah v *python*-u pridemo do rezultata z modulom *scipy* na primeru funkcije  $f(x)$ :

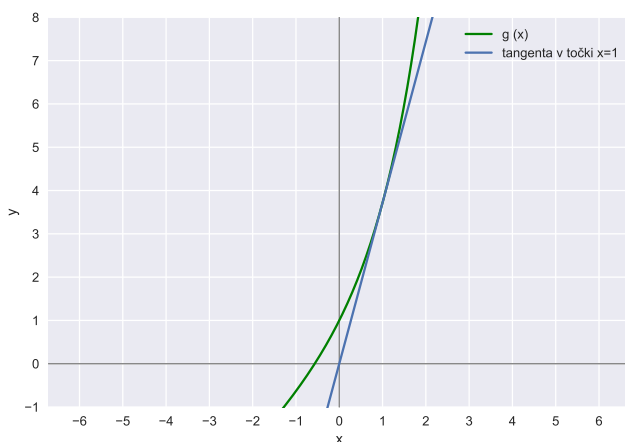
```
import numpy as np
import scipy
from scipy.optimize import bisect, newton

def f(x):
    return np.cos(x) - x

def df(x):
    return -np.sin(x) - 1

print(bisect(f, 0, 1))
print(newton(f, 0))
print(newton(f, 0, df))
```

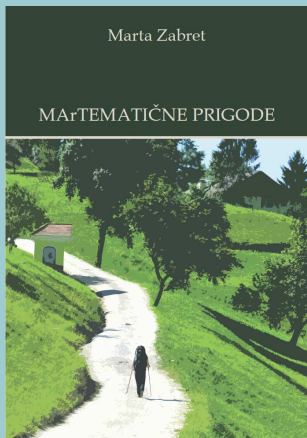
Na ta način torej rešujemo nelinearne enačbe, za katere nimamo eksplicitnih formul ali pa so te pre-zapletene, da bi jih splečalo uporabljali. Če modulu *newton* ne podamo odvoda funkcije, ta izvede sekantno metodo. S predstavljenimi metodami pa lahko iščemo tudi ničle polinomov, kar je zelo ugodno, saj za delovanje teh metod ni pomembno, kakšni so koeficienti polinoma (za Hornerjev algoritem so koeficienti ključnega pomena). Pri uporabi teh metod pa moramo biti pazljivi, saj ima vsaka določene slabosti, ki lahko vplivajo na rezultat. Proces iskanja ničel moramo zato prilagoditi glede na funkcijo in ničlo, ki jo iščemo.



**SLIKA 8.**  
Graf funkcije  $g(x)$  in tangenta na funkcijo  $g$  v točki  $x = 1$

× × ×

# MaRtematične prigode



Marta Zabret

**MArTEMATIČNE PRIGODE**

146 strani

format 14 × 20 cm

12,50 EUR

Izšla je nova knjiga *MaRtematične prigode*. Avtorica Marta Zabret je profesorica matematike in specialistka matematičnega izobraževanja. Knjiga je množica kratkih zgodb, v katerih so strnjene mnoge izkušnje s področja poučevanja in spremljajočih aktivnosti na srednjih šolah.

Jedro knjige so zanimivi zapisi o njenih dijakinjah in dijakih. Besedila so napisana lepo in strnjeno, v njih je tudi precej humorja. Zgodbe lahko beremo samostojno; nekatere so prav kratke. Knjiga ima tudi nekaj čisto matematične vsebine, denimo v obliki originalno predstavljenih problemov na srednješolskem nivoju.



Za lepo zunanjo in notranjo obliko knjige so poskrbele tri nekdanje Martine dijakinje: Neža Vavpetič, Ariana Godicelj in Ana Hafner.

Poleg omenjene lahko v naši ponudbi najdete še veliko drugih knjig. Podrobnejše predstavitve so na spodnjem naslovu, kjer lahko starejše knjige tudi naročite s popustom:


<http://www.dmfa-zaloznistvo.si/cenik/>

Dodatne informacije lahko dobite v uredništvu Preseka po telefonu (01) 4766 633.



IZVIRNA PRIGODA: <b>5</b> V PRIGODI V KAZEN PRIGODI PRIGODE B. ER. A. B. I. O. P. S. I. J. A. G. L. E. D. A. L. I. Š. Č. E.		IZVIRNA PRIGODA: <b>16</b> V PRIGODI V KAZEN PRIGODI PRIGODE R. O. M. B. O. L. A. S. I. L. S. O. C. I. A. L. I. Z. E. M. P. O. G. R. E. B. V. A. G. O. N. P. O. G. L. A. V. J. E. R. J. A. V. O. K. O. Ž. E. C. I. N. Š.		IZVIRNA PRIGODA: <b>10</b> V PRIGODI V KAZEN PRIGODI PRIGODE A. N. J. A. T. R. A. T. N. I. K. I. Z. S. O. L. K. A. N. A. M. A. J. D. A. Š. I. M. I. Č. I. Z. K. O. P. R. A.	
IZVIRNA PRIGODA: <b>6</b> V PRIGODI V KAZEN PRIGODI PRIGODE J. U. R. E. K. A. R. O. I. Z. O. R. E. H. O. V. E. V. A. S. I. K. R. N. I. T. E. V. E. V. A. L. D. A. N. A. N. D. R. A. Z. O. D. E. T. J. E.		IZVIRNA PRIGODA: <b>12</b> V PRIGODI V KAZEN PRIGODI PRIGODE A. N. J. A. T. R. A. T. N. I. K. I. Z. S. O. L. K. A. N. A. M. A. J. D. A. Š. I. M. I. Č. I. Z. K. O. P. R. A.		IZVIRNA PRIGODA: <b>20</b> V PRIGODI V KAZEN PRIGODI PRIGODE A. N. J. A. T. R. A. T. N. I. K. I. Z. S. O. L. K. A. N. A. M. A. J. D. A. Š. I. M. I. Č. I. Z. K. O. P. R. A.	
IZVIRNA PRIGODA: <b>4</b> V PRIGODI V KAZEN PRIGODI PRIGODE S. A. A. R. E. M. A. A. T. L. E. T. L. I. S. C. A. E. K. O. D. U. K. T. A. L. O. N. Z. A.		IZVIRNA PRIGODA: <b>15</b> V PRIGODI V KAZEN PRIGODI PRIGODE A. N. J. A. T. R. A. T. N. I. K. I. Z. S. O. L. K. A. N. A. M. A. J. D. A. Š. I. M. I. Č. I. Z. K. O. P. R. A.		IZVIRNA PRIGODA: <b>10</b> V PRIGODI V KAZEN PRIGODI PRIGODE A. N. J. A. T. R. A. T. N. I. K. I. Z. S. O. L. K. A. N. A. M. A. J. D. A. Š. I. M. I. Č. I. Z. K. O. P. R. A.	



**REŠITEV NAGRADNE KRIŽANKE PRESEK 47/1**

→ Pravilna rešitev nagraadne križanke iz prve številke Preseka je **Poimenujmo eksoplanet**. Izmed pravilnih rešitev so bili izžrebani ANJA TRATNIK iz Solkana, MAJDA ŠIMIČ iz Kopra in JURE KARO iz Orehove vasi, ki bodo razpisane nagrade prejeli po pošti.

# Neznani leteči predmeti



PETER LEGIŠA

→ Kaj predstavlja fotografija na naslovnici, posneta v zadnjih sončnih žarkih nekega oktobrskega večera? Celo avtor fotografije je bil skrajno presenečen in zmeden nad rezultatom in »neznanimi letečimi predmeti«.

Gre za majhen izrez iz večje slike, torej gre za precejšnjo povečavo originala. Od daleč, z močnim teleobjektivom, je bilo slikano nekaj, kar je bilo videti kot roj mušic, vrteč se na bolj ali manj istem mestu. Ogleđ v živo od bliže bi lahko žuželke razpršil.

Biolog, ki je videl sliko, je takoj vprašal, kako dolga je bila ekspozicija. Kamere danes vse obeležijo in izkazalo se je, da je bil čas osvetlitve 1/30 sekunde. Ker v naravi miniaturne leteče preproge težko srečamo, je edino mogoče, da je vsaka taka preproga sled leta mušice v času 1/30 sekunde. Kakšno je v resnici gibanje kril mušice, lahko s slik le ugibamo. Če mušica leti vodoravno, imajo v enem zamahu krila dvakrat vertikalno hitrost 0. Takrat pustijo močnejši odtis na sliki. Morda so le v eni od teh leg krila tudi močno odbijala sončno svetlobo. Če preštejemo število teh močnih odsevov na tiru vsake od mušic, je to nekako od 18 do 20. Sklepamo torej, da mušica s krili zamahne kakih 300-krat ali pa 600-krat na sekundo. Z drugimi besedami, s krili maha s frekvenco okrog 300 Herzov ali pa 600 Hz. Tako visoka številk je bila za avtorja spet presenečenje. A dr. Tomi Trilar iz Prirodoslovnega muzeja Slovenije ga je poučil, da je po literaturi frekvenca mahanja s krili pri žuželkah od 50 do 2000 Hz.

Fotografija je bila posneta s sorazmerno poceni »superzoom« kamero z malim tipalom velikosti nekaj več kot 7 mm × 5 mm. Na tem prostoru je nagnetenih 12 milijonov pikslov. Vsak od teh pikslov je zelo majhen in nanj pade v šibki svetlobi bolj malo fotonov. Vsak nezaželen vpliv – šum – ima tako precejšen škodljiv vpliv, še posebno če signal ojačimo. Že pri ojačitvi na 400 ISO je šuma veliko. Kamera skuša šum zgladiti. Rezultat pa je, da je slika razmazan in komajda uporaben »akvarel«.

Zato je fotograf imel občutljivost nastavljeno na 100 ISO, kar je ob pojemajoči svetlobi dalo dolg čas osvetlitve.

Nekatere fotografije so bile neostre, a na predstavljeni sliki je avtomatično ostrenje kljub gibajočim se subjektom delovalo. Fotografija na naslovnici je bila posneta iz roke, brez stojala, z zaslonko odprto maksimalno, na vrednost 2,8. Goriščna razdalja je bila 108 mm. Če upoštevamo, da tipalo na kameri polnega formata meri približno 36 mm × 24 mm, torej so dimenzije približno petkrat večje, bi to ustrezalo goriščni razdalji kakih 550 mm na kameri polnega formata. Pravimo, da je bila slika narejena z ekvivalentom goriščne razdalje 550 mm.

Za kamere polnega formata velja, da mora biti ekspozicija inverzna vrednost goriščne razdalje ali krajša, če ne želimo stresene slike. Pri standardni goriščni razdalji 50 mm moramo torej slikati z 1/50 sekunde ali s še krajšim časom. Seveda tudi potem ni rečeno, da bo vsaka slika ostra. (Ljudje imamo različno mirne roke in avtor članka se počuti kolikor toliko varen šele, če pri goriščni razdalji 50 mm slika z 1/125 s.)

Pri (ekvivalentu) 550 mm bi torej morali slikati z 1/500 sekunde ali manj. Slika se je posrečila, ker je v objektivu vgrajen stabilizator. Del optike objektiv je giblivo vpet in elektronika kompenzira tresenje kamere s premikanjem tega sestava leč (po možnosti majhnega in lahkega). Običajno tak stabilizator omogoča kake »tri zaslonke« boljše vrednosti, torej  $2^3 = 8$ -krat daljši čas osvetlitve. Namesto 1/500 sekunde lahko tako uporabimo 1/60 s. Če smo prisiljeni uporabiti še počasnejšo ekspozicijo, pa naredimo veliko posnetkov in morda bomo tudi v tem primeru dobili kako ostro sliko. Tako je bilo v našem primeru.

Na več kamerah z izmenljivimi objektivimi imamo stabilizacijo tipala. Senzor je giblivo vpet in spet kompenzira tresenje kamere. Lahko to celo dela v spregi s stabilizacijo v objektivu, kar poveča učinkovitost.

× × ×



# Matematični kenguru

Osnovna naloga tekmovanja Kenguru je popularizacija matematike. Zanimiv, zabaven in igriv način zastavljanja matematičnih problemov je pripomogel, da se je tekmovanje kmalu razširilo po vsej Evropi, hkrati pa so se v tekmovanje vključevali tudi otroci in mladostniki iz drugih držav sveta. Tekmovanje je preseglo evropske okvire in postalo Mednarodni matematični kenguru. Leta 2016 se ga je udeležilo več kot 6 milijonov tekmovalcev iz več kot 60 držav sveta. V Sloveniji Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije organizira tekmovanje za učence od prvega razreda osnovne šole do četrtega letnika srednje šole. Poseben izbor je pripravljen za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol, za dijake srednjih poklicnih šol ter za študente.

Naloge, zbrane v teh knjigah, so najboljše možno gradivo za pripravo na prihodnja tekmovanja. Predvsem zato, ker je vsaki nalogi dodana podrobno razložena rešitev, ki bralca vodi v logično mišljenje in spoznavanje novih strategij reševanja. Marsikatera naloga, ki je sprva na videz nerešljiva, postane tako dosegljiv iskriv matematični izziv.



18,74 EUR



14,50 EUR



23,00 EUR

Pri DMFA-založništvo je v Presekovi knjižnici izšlo že pet knjig Matematičnega kenguruja. Na zalogi so še:

- *Mednarodni matematični kenguru 2005-2008,*
- *Mednarodni matematični kenguru 2009-2011,*
- *Mednarodni matematični kenguru 2012-2016.*

Poleg omenjenih ponujamo tudi druga matematična, fizikalna in astronomska dela. Podrobnejše predstavitve so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse publikacije tudi naročite:

<http://www.dmfa-zaloznistvo.si/>

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA Slovenije, dijaki in študentje imate ob naročilu starejših zbirk nalog pri DMFA-založništvo 20 % popusta na zgornje cene – izkoristite ga!