

Univerza v Ljubljani
Pedagoška fakulteta



**STROKOVNO DIDAKTIČNE USMERITVE
ZA POUČEVANJE MATEMATIKE
V PRILAGOJENEM IZOBRAŽEVALNEM
PROGRAMU
Z NIŽJIM IZOBRAZBENIM STANDARDOM**

Marija Kavkler, Tatjana Hodnik

Ljubljana, julij 2022

**Strokovno didaktične usmeritve za poučevanje matematike v prilagojenem
izobraževalnem programu z nižjim izobrazbenim standardom**

Avtorici: izr. prof. dr. Marija Kavkler, prof. dr. Tatjana Hodnik

Recenzenta: dr. Marko Kalan, izr. prof. dr. Vida Manfreda Kolar

Jezikovni pregled: doc. dr. Darija Skubic

Izdajatelj: Univerza v Ljubljani, Pedagoška fakulteta

Za izdajatelja: prof. dr. Janez Vogrinc, dekan

Priprava preloma: prof. dr. Tatjana Hodnik

Oblikovanje naslovnice: izr. prof. dr. Jurij Selan

Dosegljivo na (URL): <http://pefprints.pef.uni-lj.si/>

© Univerza v Ljubljani, Pedagoška fakulteta, 2022

VSEBINA

VSEBINA	i
1 UVOD.....	1
2 SPECIALNO PEDAGOŠKA ZASNOVA POUKA MATEMATIKE V PRILAGOJENEM IZOBRAŽEVALNEM PROGRAMU Z NIŽJIM IZOBRAZBENIM STANDARDOM	5
2.1 Kakovostno poučevanje matematike	5
2.1.1 Strategije kakovostnega poučevanja.....	6
2.1.1.1 Direktno poučevanje	7
2.1.2 Vključevanje opor.....	10
2.1.2.1 Vrste opor.....	11
2.1.3 Življenjske situacije.....	13
2.1.4 Učenje matematičnega izrazja	14
2.1.4.1 Interaktivni zid besed	15
2.1.5 Prehod od konkretnih preko slikovno-grafičnih reprezentacij do abstrakcij	15
2.2 Specialno pedagoški elementi poučevanja nekaterih temeljnih matematičnih znanj	19
2.2.1 Občutek za števila in količine	19
2.2.2 Model učenja pojmov.....	20
2.2.2.1 Model učenja parov pojmov	22
2.2.3 Poučevanje štetja	23
2.2.4 Procesiranje matematičnih operacij in problemov	24
2.2.4.1 Poučevanje aritmetičnih operacij.....	24
2.2.4.2 Poučevanje matematičnih postopkov	26
2.2.4.3 Kognitivni računski model	28
2.2.4.4 Matematične besedilne naloge	30
2.2.5 Prilagoditev učnega okolja	32
3 Strokovno didaktična obravnava matematičnih vsebin po sklopih iz učnega načrta.....	35
3.1 Aritmetika in algebra.....	36
3.1.1 Naravna števila in število 0 ter cela števila	36
3.1.1.1 Predštevilsko obdobje	36
3.1.1.2 Uvajanje v štetje.....	37
3.1.1.3 Štetje do 20	38
3.1.1.4 Število 0	39
3.1.1.5 Urejanje števil.....	40

3.1.1.6	Števila do 100	40
3.1.1.7	Števila do 1000	42
3.1.1.8	Desetiške enote	42
3.1.1.9	Večja števila od 1000	44
3.1.1.10	Cela števila	46
3.1.2	Računske operacije in njihove lastnosti	46
3.1.2.1	Od konkretnega štetja do priklica aritmetičnih dejstev pri računanju v obsegu do 10 47	
3.1.2.2	Računanje s prehodom do 20	48
3.1.2.3	Računanje do 100	49
3.1.2.4	Računanje do 1000, pisno seštevanje in odštevanje	51
3.1.2.5	Poštevanka (10 x 10) – množenje in deljenje do 100	52
3.1.2.6	Ostanek pri deljenju	54
3.1.2.7	Pisno množenje in deljenje	55
3.1.2.8	Številski izrazi	56
3.1.2.9	Računski zakoni	57
3.1.2.10	Besedilne naloge	57
3.1.3	Enačbe in neenačbe	57
3.1.3.1	Enačbe	57
3.1.3.2	Neenačbe	60
3.1.4	Racionalna števila	60
3.1.4.1	Celota, deli celote	60
3.1.4.2	Ulomek, računanje delov celote	61
3.1.4.3	Računanje z ulomki	63
3.1.4.4	Desetiški ulomki	65
3.1.4.5	Seštevanje in odštevanje decimalnih števil	65
3.1.4.6	Odstotki	65
3.2	Geometrija in merjenje	66
3.2.1	Orientacija	66
3.2.2	Geometrijske oblike in geometrijski pojmi, uporaba geometrijskega orodja	66
3.2.2.1	Geometrijska telesa	67
3.2.2.2	Geometrijski liki	68
3.2.2.3	Skladnost likov	68
3.2.2.4	Črte, presečišče črt	69
3.2.2.5	Simboli v geometriji	69
3.2.2.6	Obseg likov	69

3.2.2.7	Ploščina likov	70
3.2.2.8	Mreža geometrijskega telesa	71
3.2.2.9	Kot	72
3.2.2.10	Geometrijsko orodje	73
3.2.2.11	Prostornina in površina geometrijskih teles.....	73
3.2.3	Merjenje	74
3.2.3.1	Metodični koraki pri učenju merjenja količin (dolžina, masa, ploščina ...)	75
3.2.3.2	Merjenje in odčitavanje časa.....	76
3.2.3.3	Pretvarjanje merskih enot.....	77
3.2.3.4	Računanje z merskimi količinami	78
3.2.3.5	Denarne enote	78
3.3	Druge vsebine	80
3.3.1	Logika in jezik	80
3.3.1.1	Razvrščanje in prikazi (Vennov in drevesni prikaz).....	81
3.3.1.2	Urejanje.....	81
3.3.1.3	Relacije med elementi množic, prirejanje eden – enemu	82
3.3.1.4	Vzorci.....	83
3.3.2	Obdelava podatkov	84
3.3.2.1	Figurni prikaz s stolpci, vrsticami.....	84
3.3.2.2	Figurni prikaz	85
3.3.2.3	Črtični, tortni prikaz.....	85
3.3.2.4	Preglednica.....	86
3.3.2.5	Kombinatorične situacije.....	87
3.3.2.6	Preprosta raziskava	88
4	Zaključek	89
5	LITERATURA.....	90

1 UVOD

V letu 2022 je Strokovni svet RS za splošno izobraževanje potrdil nov učni načrt za matematiko za prilagojeni izobraževalni program z nižjim izobrazbenim standardom. Ker nov učni načrt za prilagojen izobraževalni program z nižjim izobrazbenim standardom prinaša priložnost za določene vsebinske spremembe in matematično smiselno ter učencem ustrezno strukturirano nadgradnjo vsebin po razredih, smo vsebine in cilje v novem učnem načrtu in njihovo nadgrajevanje zasnovali na novejših specialno didaktičnih in didaktično matematičnih spoznanjih. Hkrati pa nov učni načrt ponuja tudi priložnost za oblikovanje smernic poučevanja, ki v čim večji meri upoštevajo posebne potrebe učencev in opolnomočijo učitelje za kakovostno vnašanje sprememb. Zato smo se v podporo razvoju inkluzivne šole odločili oblikovati strokovno didaktične usmeritve za poučevanje matematike v prilagojenem programu z nižjim izobraževalnim standardom, s katerimi želimo učiteljem, ki poučujejo matematiko v prilagojenem izobraževalnem programu z nižjim izobrazbenim standardom, kot tudi ostalim učiteljem, ki se v procesu poučevanja srečujejo z učenci z lažjo motnjo v duševnem razvoju, ponuditi specialno didaktične rešitve pri učenju matematičnih pojmov, strategij in veščin.

Matematika je univerzalen jezik, s katerim se v življenju srečujemo na vsakem koraku. Že vsakdanje življenjske situacije od nas zahtevajo poznavanje številnih matematičnih pojmov, dejstev in postopkov, analiziranje, opisovanje, predvidevanje, sklepanje ter razumevanje vzrokov in posledic pri reševanju nalog in problemov.

Učenci pri pouku matematike v prilagojenem izobraževalnem programu z nižjim izobrazbenim standardom (v nadaljevanju PP NIS):

- usvajajo temeljna matematična znanja,
- razvijajo matematično pismenost,
- izvajajo različne matematične postopke,
- kritično uporabljajo tehnologijo,
- spoznavajo uporabnost matematike v vsakdanjem življenju,
- spoznavajo matematiko kot proces,
- razvijajo natančnost in upoštevanje pravil,

- razvijajo zaupanje v lastne (matematične) sposobnosti, odgovornost, vlagajo trud v učenje in razvijajo pozitiven odnos do učenja matematike,
- spoznavajo pomen matematike kot univerzalnega jezika.

Pri učencih pa razvijamo tudi matematično pismenost, ki je v današnjem času aktualna, čeprav ne temeljna, lahko bi rekli pomembna obrobna, matematična vsebina, s katero matematiko bolj načrtno in osmišljeno povezujemo z različnimi, največkrat nematematičnimi konteksti. Matematična pismenost je zmožnost posameznika, da na osnovi matematičnega mišljenja in matematičnega znanja (projekt NA-MA POTI):

- zmore uporabljati matematične pojme, postopke in orodja v različno strukturiranih okoljih,
- analizira, utemeljuje in učinkovito sporoča svoje zamisli in rezultate pri oblikovanju, reševanju in interpretaciji matematičnih problemov v različno strukturiranih okoljih,
- zaznava in se zaveda vloge matematike v vsakdanjem in poklicnem življenju, jo povezuje z drugimi področji in sprejema odgovorne odločitve na osnovi matematičnega znanja ter je pripravljen sprejemati in soustvarjati zanj nova matematična spoznanja.

V osnovni šoli pri matematični pismenosti razvijamo:

1. matematično mišljenje, razumevanje in uporabo matematičnih pojmov, postopkov ter strategij, sporočanje kot osnovo matematične pismenosti, kar pomeni, da učenec:

- razume sporočila z matematično vsebino,
- pozna in uporablja strokovno izrazje in simboliko,
- predstavi, utemelji in vrednoti lastne miselne procese,
- prepozna, razume in uporablja matematične pojme v različnih okoliščinah,
- pozna in v različnih okoliščinah uporablja ustrezne postopke in orodja,
- napoveduje in presoja rezultate, utemeljuje trditve, postopke in odločitve,
- uporablja različne strategije pri reševanju matematičnih problemov,

2. reševanje problemov v raznolikih kontekstih (osebni, družbeni, strokovni, znanstveni), ki omogočajo matematično obravnavo, kar pomeni, da učenec:

- obravnava raznolike življenjske probleme (problemi, ki ne zahtevajo matematičnega modeliranja),

- razume matematične prakse v različnih kontekstih.

Predstavljen koncept matematične pismenosti učitelj ustrezno prilagodi zmožnostim in posebnim potrebam učencev. Prilagoditve so opredeljene v tem dokumentu pri razvijanju matematičnega znanja (1. gradnik), glede 2. gradnika matematične pismenosti pa učitelj izbira probleme in matematične prakse v različnih kontekstih glede na zmožnosti in interese učencev. Pri tem je učence treba spodbujati, da v situacijah iz vsakdanjega življenja prepoznajo tudi matematične vsebine in jih na matematičen način poskušajo tudi obravnavati (npr. vozni redi, ceniki, različne ponudbe, različna načrtovanja ipd.).

Učenci, vključeni v PP NIS, se soočajo s številnimi matematičnimi izzivi tako v procesu izobraževanja kot vključevanja v socialno okolje. Ta populacija učencev je zelo heterogena zaradi različnih kognitivnih, emocionalnih, socialnih in drugih značilnosti. Pri nekaterih učencih je učinkovitost učenja matematike še dodatno znižana zaradi sopojavljanja drugih motenj ali primanjkljajev (učenci z več motnjami). Vsak učenec ima edinstvene potrebe po pomoči in podpori, ker ima tudi edinstvena močna področja in omejitve osebnih kompetenc. ***Na močnih področjih osnovan model obravnave predstavlja konceptualni okvir za razumevanje in učinkovito poučevanje teh učencev, ker ni usmerjen v tisto, česar posameznik ne zmore narediti, ampak v tisto, kar lahko naredi z učinkovito podporo in pomočjo.*** Pretirana usmeritev v primanjkljaje ni učinkovit pristop. S potrpežljivostjo, vztrajnostjo in ustreznimi pristopi dvignemo učenčevo motivacijo za učenje matematike. Specialni in rehabilitacijski pedagog ali učitelj matematike z ustreznim izpopolnjevanjem (v nadaljevanju učitelj) mora učencu nuditi intenzivno pomoč in podporo že ob prvih neuspehih, še preden postanejo težave pri učenju matematike preveč izrazite in učenca spravljajo v čustveno stisko. Pomembna so visoka, a uresničljiva pričakovanja, ker imajo vsi učenci potenciale za učenje matematike (Elgart, 2017). Usvajanje že osnovnih matematičnih znanj in veščin pa je za učence v PP NIS dolgotrajen proces.

Učni načrt za matematiko za učence v PP NIS vključuje številne teme, ki jih zaradi omejenih možnosti v didaktičnih priporočilih ni mogoče vseh predstaviti. V didaktičnih priporočilih so zato predstavljeni različni pristopi za različne teme, ki jih je v poučevalni praksi mogoče prenesti na vsa tematska področja matematike v učnem načrtu. Temeljni specialno pedagoški pristopi, ki jih je nujno treba upoštevati pri poučevanju matematike učencev v PP NIS, niso podrobno predstavljeni. Več pozornosti pa je namenjene tistim učnim in poučevalnim pristopom, ki so manj pogosto omenjeni v praksi, prav tako pa tudi drobnim nasvetom, na katere

smo premalo pozorni, a pomembno vplivajo na uspešnost učenja matematike učencev v PP NIS. Didaktična priporočila je treba s kombinacijo različnih pristopov prilagoditi posebnim potrebam učencev in posameznim tematskim sklopom. V pričujočem dokumentu obravnavamo dva temeljna sklopa: 1) specialno pedagoško zasnovo pouka matematike v PP NIS in 2) strokovno didaktično obravnavo matematičnih vsebin po sklopih, kot so opredeljeni v učnem načrtu. V tem dokumentu nismo izčrpali teoretičnih izhodišč pouka matematike v celoti, izpostavili smo tista specialno pedagoška izhodišča in strokovno didaktične usmeritve pouka matematike, za katere smo presodili, da bodo bistveno pripomogli k dvigu kakovosti poučevanja. Tu mislimo na kakovost učiteljeve strokovno didaktične usposobljenosti za poučevanje matematike učencev v PP NIS, ki zahtevajo (tako kot tudi sicer vsi drugi učenci) za uspešno napredovanje v znanju kompetentnega učitelja, ki načrtovanje in izvedbo pouka izvaja v povezanosti znanj s področja učenja učenca, zakonitosti nadgrajevanja matematičnih pojmov in znanja didaktike matematike. Konkretno specialne pedagoške obravnave posameznih vsebin smo v besedilu rahlo obarvali.

Posebej poudarjamo, da smo v tem dokumentu poskušali čim bolj smiselno združiti dve temeljni področji, ki omogočata obravnavo omenjenih sklopov, in sicer spoznanja na področju didaktike matematike in specialno rehabilitacijske pedagogike. Poskušali smo čim bolje uskladiti strokovno izrazje obeh področij; kadar pri obravnavi tematike to ni bilo mogoče, smo ohranili specifične posameznega področja.

2 SPECIALNO PEDAGOŠKA ZASNOVA POUKA MATEMATIKE V PRILAGOJENEM IZOBRAŽEVALNEM PROGRAMU Z NIŽJIM IZOBRAZBENIM STANDARDOM

2.1 KAKOVOSTNO POUČEVANJE MATEMATIKE

Kakovosten proces poučevanja matematike omogoča socialno vključenost, uspešnost in participacijo pri učenju matematike učencev v PP NIS. Učitelj uresničuje kakovostno poučevanje z upoštevanjem inkluzivne kulture, jasnimi usmeritvami, visokimi pričakovanji do vseh učencev, z racionalnim upravljanjem z materialnimi in strokovnimi viri, učinkovitim timskim poučevanjem in sodelovalnim učenjem (Elgart, 2017).

Kakovostno poučevanje matematike pomembno vpliva na izobraževalne dosežke učencev v PP NIS. Ker je kakovost poučevanja matematike učencev odvisna od upoštevanja njihovih posebnih vzgojno-izobraževalnih potreb, mora biti proces poučevanja osnovan na dobri celostni diagnostični oceni ter sprotne ocenjevanju učenčevega matematičnega znanja, veščin in spretnosti z učencu posredovano ustrezno povratno informacijo, ki vključuje tako informacijo o napačnih rešitvah, možnosti izboljšav kot tudi informacijo o pravilnih rešitvah. Učitelj pri podajanju povratne informacije na spodbuden način učenca vodi k iskanju ustreznih rešitev. Na osnovi zbranih informacij postavi cilje, načrtuje dejavnosti, izbira učne in tehnične pripomočke za izvedbo procesa poučevanja, ki ga tudi sproti evalvira. Učenci vsakega razreda so v različnih obdobjih na različnih razvojnih stopnjah, imajo različne posebne potrebe in različne učne izkušnje, zato je nujna individualizacija in diferenciacija zahtev v procesu poučevanja matematike.

Učitelj oblikuje priložnosti za uspešno učenje vseh učencev v razredu tako, da učinkovito diferencira in individualizira proces poučevanja. V praksi so se kot učinkoviti splošni pristopi individualizacije in diferenciacije poučevanja matematike za učence v PP NIS izkazali naslednji dejavniki (NCCA – MILD, b. d.; NCCA – MODERATE, b. d.):

- prilagoditev matematičnih vsebin (obseg, zahtevnost, časovna obremenitev) za učenca v smislu vseživljenjske perspektive,
- na učenčevih močnih področjih osnovano poučevanje,
- spodbudno in za učenca prijazno razredno učno okolje,
- upoštevanje in preverjanje razumevanja matematičnega jezika z besediščem, simboli in orodji, ki se uporabljajo,

- konstantna raba enakih izrazov in simbolov v vseh razredih in okoljih (v šoli in doma),
- razvoj predpogojev (predznanj, veščin) za učenje novih matematičnih pojmov in postopkov,
- konkretni primeri v procesu učenja novih znanj in spretnosti, kjer je le mogoče, povezani z vsakodnevnimi življenjskimi izkušnjami učencev in z vključevanjem različnih socialnih situacij,
- sodelovalno učenje, ko je to smiselno oziroma ko so učenci opremljeni s takim znanjem, ki omogoča izmenjavo mnenj,
- različne reprezentacije glede na učni stil učenca in namen poučevanja,
- omejitev števila novih informacij v učni enoti,
- dovolj priložnosti za razumevanje nalog in dejavnosti, preden začne učenec samostojno reševati naloge,
- kratka in jasna navodila pri nalogah in dejavnostih,
- ustrezne povratne informacije učencu o njegovem napredovanju v znanju,
- izbira učnih dejavnosti in pripomočkov, ki so v skladu s starostjo in potrebami učencev,
- raba informacijske digitalne tehnologije,
- ustrezna učbeniška gradiva, prilagojena učencem in njihovim posebnim potrebam (ustrezna strokovna obravnava, zahtevnost nalog, ustrezno oblikovanje brez nepotrebnih podatkov oz. motečih dejavnikov za učenje),
- vključevanje iger v proces učenja matematike, ko je to smiselno,
- ustrezno sodelovanje s starši (povratne informacije, usklajevanje rabe pripomočkov in postopkov pri učenju)
- in še številni drugi učinkoviti pristopi.

Za učence v PP NIS je abstraktna raven matematike zelo zahtevna, zato jim je treba organizirati take možnosti učenja, da razumejo matematične pojme, postopke in probleme ter doživljajo uspeh pri učenju matematike (NCCA – MILD, b. d.). Za vsakega posameznega učenca morajo biti večje prilagoditve predvidene v individualiziranem programu.

2.1.1 Strategije kakovostnega poučevanja

Sistematično in dobro načrtovano poučevanje matematike znanstveno dokazano pozitivno vpliva na učinkovitejše učenje matematike učencev v PP NIS. Kakovostno poučevanje za učence v PP NIS je *direktno dobro strukturirano poučevanje z eksplicitnimi pristopi*, ki vključuje *rabo opor; poučevanje znanj in veščin v za posameznika pomembnih in zanimivih življenjskih situacijah; poglobljeno učenje matematičnega izrazja; sistematičen prehod od*

konkretnih preko slikovno-grafičnih¹ do simbolnih reprezentacij; rabo digitalne tehnologije ter drugih tehničnih in učnih pripomočkov; proces sistematičnega poučevanja matematičnih pojmov, dejstev, postopkov in reševanja problemov; aktivne oblike sodelovalnega učenja in še številni drugi pristopi (Ahlgrim - Delzell idr., 2009; Elgart, 2017). Nikoli ne zadostuje le en pristop, ampak mora učitelj izbirati in kombinirati tiste pristope in prilagoditve, ki so pri poučevanju matematike za določeno temo, posameznega učenca in razred najučinkovitejše. V nadaljevanju so predstavljeni nekateri ključni dejavniki kakovostnega poučevanja matematike za učence v PP NIS, ki so ilustrirani s primeri.

2.1.1.1 Direktno poučevanje

Direktno poučevanje (Aunio, 2019; Allsopp, Lovin in van Ingen, 2017; Kavkler, 2011) je ena od temeljnih metod poučevanja in učenja matematike, ker je strukturirano, sistematično in učinkovito poučevanje vseh učencev v PP NIS. Omogoča poučevanje matematičnih pojmov, postopkov, veščin, reševanja problemov, kompleksnih besedilnih nalog korak za korakom s specifičnim pristopom. Označujejo ga vodene, zelo strukturirane in organizirane učne ure; ustrezne ključne informacije in opore, ki vodijo proces poučevanja; kognitivno modeliranje; številne interakcije med učiteljem in učenci; takojšnje ustrezne povratne informacije; spodbujanje učencev; k uspešnosti pa prispevajo tudi številne vaje. Direktno poučevanje učitelj začne s kontinuiranim modeliranjem, nadaljuje z zmanjševanjem svoje vključenosti do samostojnega učenčevega izvajanja vaj in reševanja nalog. Učenci aktivno sodelujejo v procesu poučevanja in dobijo takojšnjo povratno informacijo o pravilnosti reševanja nalog. Učitelj sproti sistematično evalvira proces poučevanja.

Direktno poučevanje omogoča uresničevanje posebnih vzgojno-izobraževalnih potreb učencev z intenzivnim in kakovostnim poučevanjem zahtevnih matematičnih vsebin. Učenci so pri direktnem poučevanju pozornejši, ker izvajajo različne vaje na različne načine. Manj težav imajo tudi učenci, ki slabše obvladajo jezik poučevanja. Učitelj pa pridobi več povratnih informacij o znanju in veščinah učencev. Direktno poučevanje se lahko izvaja individualno, v mali skupini ali frontalno.

¹ V didaktiki matematike govorimo o treh vrstah reprezentacij: konkretna, grafična in simbolna. V teh priporočilih smo zaradi specifik obravnave matematike v PP NIS uporabili izraz slikovno-grafične reprezentacije. Slikovne reprezentacije predstavljajo vse reprezentacije, s katerimi učencem približamo matematične pojme (npr. reprezentiranje seštevanja, pojem števila ...), iz izrazom grafične reprezentacije pa imamo v mislih shematične prikaze, grafične opore (npr. podčrtovanje, obkroževanje, barvno označevanje ...). Vsekakor je mogoče uporabljati le termin grafične reprezentacije, saj z njim zajamemo vse opisane pomene.

Ključne značilnosti direktnega poučevanja so (Archer in Hughes, 2011, v Doabler in Fien, 2013):

- organizacija pestrih ur s primernim tempom dela (ustrezna količina snovi, dovolj časa za predelovanje informacij, načrtovanje in pripravo odgovora),
- usmerjenost v kritične vsebine (pojme, postopke, izraze, veščine itn.),
- ubeseditev miselnega procesa z jasnimi in jedrnatim jezikom (učiteljevo konsistentno in nedvoumno matematično izražanje, prilagojeno potrebam učencev),
- ciljno organizirane ure za optimalno izrabo časa z jasno predstavljenimi cilji in pričakovanji (če učenec pozna cilje, ve, kaj se bo naučil ter pozna pomen vsebine, ki se jo uči, so rezultati učenja boljši),
- preverjanje in poučevanje potrebnih predznanj in veščin pred obravnavo nove snovi,
- pomoč pri organizaciji znanj (povezava z že usvojenim znanjem naj bo jasno predstavljena),
- vodena in podporna praksa (poskrbeti za začetno uspešnost učenca in šele potem, povečevati zahtevnost nalog),
- poučevanje v logičnem zaporedju (najprej predpogoji, konkretne naloge pred abstraktnimi, enostavne pred zahtevnejšimi, naloge, povezane z znanimi vsebinami pred neznanimi itn.),
- razdelitev kompleksnih nalog, informacij, pojmov, veščin, postopkov na obvladljive dele, s čimer se zmanjša obremenitev delovnega spomina (razdelitev naloge na manjše enote, a kasneje sledi sinteza in trening celote),
- demonstracija dejavnosti ali nalog korak za korakom (učitelj je z glasnim opisovanjem ob izvajanju naloge model učencu),
- spraševanje in odgovarjanje (sistematično načrtovanje spraševanja, različna vprašanja z možnostjo različne predstavitve odgovorov predstavljajo povratno informacijo o učenčevih dosežkih učitelju in povečanje pozornosti učencu),
- organizacija številnih usmerjenih vaj (da učenec ve, npr. kdaj lahko uporabi določeno strategijo in kdaj ne),
- spremljanje učenčevega napredka,
- povratne informacije o pravilnosti opravljene naloge, da učenec ne utrjuje napak,

- raznolik in kumulativen trening (različne priložnosti za trening v različnih okoljih, povezovanje starih in novih znanj in strategij).

Postopek direktnega poučevanja matematike vključuje 4 elemente: modeliranje novega pojma, postopka, veščine ali reševanje problema; zagotavljanje priložnosti za vodene praktične dejavnosti; preverjanje učenčevega razumevanja s povratno informacijo in vključevanje učenca v samostojno reševanje nalog.

Prvi element direktnega poučevanja je **učiteljevo modeliranje**. Učiteljevo modeliranje (izraz učiteljevo modeliranje postavlja učitelja v vlogo "modela", nosilca znanja oz. v vlogo tistega, ki jasno posreduje znanje) vključuje jasno demonstracijo pojmov, postopkov, veščin, reševanja problemov, izvedenih na enak način, kot jih bo kasneje izvajal učenec pri reševanju nalog, in premišljeno učiteljevo razlago (v katero lahko vključi razgovor z učenci), ki mora biti jezikovno in vsebinsko prilagojena sposobnostim in spretnostim učencev v PP NIS. Z modeliranjem učitelj učencem pokaže, kaj se bodo učili, kako bodo izvedli npr. nek postopek, kako bodo reševali besedilne naloge, izvedli dejavnost oblikovanja likov na geoplošči, kako bodo znanje uporabili v praksi idr.). **Z učiteljevim modeliranjem se učenec izogne ugibanju, ker ve, kaj mora narediti in kako mora nalogo izvesti.** Ključni dejavniki za izboljšanje učinkovitosti učiteljevega modeliranja so: *uporaba enostavnega jezika; raba opor* (kartončki s formulami, poštevanko, smerjo reševanja računa, DA/NE-kartončki, koraki pri reševanju besedilnih nalog idr.), *premišljeno vključevanje učencev v učni proces na način, da ne moti jasnosti poteka učiteljevega modeliranja. Vključevanje učencev poveča interes učencev za učenje.* Učitelj premišljeno razporedi oz. vključi v obravnavo ustrezno število modelov demonstracij (odvisno od zahtevnosti pojma, naloge, predznanja učencev, povratne informacije o znanju, ki jo od učencev dobi učitelj).

Drugi element direktnega poučevanja je **vodena praksa**. Strategije za izboljšanje učinkovitosti vodene prakse so: *določanje in učenje predpogojev* (veščin, znanj, strategij) za uspešno usvajanje novih pojmov, postopkov in veščin (formalne in neformalne oblike odkrivanja potrebnih predpogojev in poučevanje predpogojev, ki mora biti izvedeno pred učenjem nove snovi); *izbira in ustrezna razporeditev raznolikih primerov* (najprej enostavnejši primeri in nato stopnjevanje zahtevnosti – kompleksni primeri na začetku obravnave nove teme niso primerni), da je učencem povsem jasno, kaj se učijo in kako poteka vsak korak postopka; *uporaba verbalnih opor* (učitelj učencem postavi vprašanja, na katera v razgovoru z vrstniki ali učiteljem iščejo odgovore); *raba raznolikih reprezentacij* (ponazoritev) matematičnih idej (od

konkretnih, slikovno-grafičnih do simbolnih); *povzetek* že usvojenih znanj ali veščin (tako se učenci spomnijo znanj in veščin, ki so jih že pridobili in jih lažje povežejo z novimi; *premišljen prehod od zadostnega števila vodenih do zadostnega števila samostojnih vaj*, s katerimi učencu omogočamo usvojitev pojmov in tekočo izvedbo postopkov, veščin itn.

Tretji element direktnega poučevanja je izobraževalna **povratna informacija**. Na tej stopnji učitelj pravočasno posreduje učencu povratno informacijo, in sicer takoj, ko se pojavi napaka (npr. z rabo DA/NE-kartončkov pri vrednotenju odgovorov). Na začetku učitelj potrdi učenčeve odgovore ali jih popravi, če so napačni, da bi se zmanjšalo potencialno nerazumevanje ali nepopolno razumevanja snovi in omogočilo bolj poglobljeno razumevanje matematičnih pojmov, postopkov in veščin. Učitelj uporabi *ustrezne povratne informacije* (posreduje pravilen odgovor in drugo priložnost vsem tistim, ki so naredili napako). Če ima učenec priložnost, da odpravi napako, je uspešnejši pri učenju. Učenec mora imeti dovolj časa za izvajanje vaj oziroma nalog.

Četrti element je sistematično **vključevanje učenca v samostojne vaje oziroma naloge**. Pri prenosu te stopnje direktnega poučevanja v prakso mora biti učitelj posebno pozoren na postopnost, zato začne z enostavnimi vajami in postopno prehaja na zahtevnejše. Število primerov naj bo omejeno (trije na začetku). Učencu ponudi opore. Kasneje organizira čim več raznolikih priložnosti utrjevanja znanja. Učitelj nudi sprotno povratno informacijo, ker s tem zmanjša utrjevanje napak. Na koncu učenci povežejo predznanje in na novo usvojeno znanje ter naredijo povzetek bistva obravnavanega pojma, postopka ali veščine (Doabler in Fien, 2013).

Direktno poučevanje je učinkovit način poučevanja matematike za učence v PP NIS, v okviru katerega učitelj omogoči učencem veliko vaj oziroma nalog z oporami, različnimi reprezentacijami, prilagajanjem jezikovnih zahtev, vključevanjem življenjskih primerov in drugo.

2.1.2 Vključevanje opor

Učitelj učinkovito uresničuje individualizacijo in diferenciacijo v procesu direktnega poučevanja in drugih oblik poučevanja tudi z različnimi oporami. Posameznemu učencu prilagojene opore močno povečajo njegovo uspešnost učenja matematike. Ko učenec usvoji znanje ali spretnosti, je treba postopno, v skladu s potrebami posameznega učenca, zmanjševati število opor in količino časa rabe opor, da ne postanejo ovira pri učenju. Začnemo lahko z najbolj konkretnimi oporami, katerih konkretnost postopno zmanjšujemo (npr.: fizično vodenje

roke pri pisanju števil, do pisanja številke po že napisani številki, rabe opornih pik za potek pisanja številke do zapisa številke brez opor v običajnem črtovju) ali obratno, da začnemo z rabo manj konkretnih opor pri matematični vsebini, ki je bila že obravnavana. Če učenec pri reševanju naloge ni uspešen, učitelj postopno povečuje konkretnost opor do izvedbe naloge s konkretnimi ponazorili (npr. neuspešen izračun ploščine pravokotnika s pomočjo formule zamenjamo z ugotavljanjem velikosti ploskve s polaganjem standardnih ploščinskih merskih enot na ploskev ter izračunom ploščine z manj razvitima strategijama, npr.: s seštevanjem merskih enot po vrstah ali stolpcih ali preštevanjem vseh enot na omejeni ploskvi).

2.1.2.1 Vrste opor

Fizične opore najpogosteje uporabljamo pri mlajših učencih pri učenju osnovnih šolskih veščin (npr.: vodenje roke pri oblikovanju števil, učinkovita uporaba prstov pri računanju, uporaba geometrijskega orodja itn.). Fizično vodenje pri učenju veščin je učinkovitejše kot verbalna navodila.

Mehanične opore pomagajo pri učinkovitejši uporabi pripomočkov, oblikovanju, pisanju in risanju (npr.: uporaba nastavka za pravilno držo pisala, geometrijsko orodje z držali in drugimi prilagoditvami, neдрseča podlaga ipd.).

Učni pripomočki so ena od ključnih opor v procesu poučevanja matematike za učence v PP NIS. Učencem omogočajo učinkovitejše učenje pojmov in postopkov s preходом od konkretnih, slikovno-grafičnih do simbolnih reprezentacij. Učencem je treba ponuditi ustrezne in individualizirane opore (konkretno, slikovno-grafične) za prehod na simbolno raven reševanja nalog. Čas rabe posamezne vrste opor mora biti prilagojen posebnim vzgojno-izobraževalnim potrebam posameznega učenca.

Grafične (obkrožanje, podčrtovanje, uokvirjanje) *in barvne opore*, s katerimi poudarimo ključne informacije (npr.: ključne izraze, vrstni red računanja pri številskem izrazu, računske znake, ponazoritev pozitivnih in negativnih števil na številski premici itn.), zaporedje korakov pri postopkih (npr. pri pisnem računanju, računanju s pomočjo številskega poltraka, računanju obsega lika, površine geometrijskega telesa itn.) in drugo.

Kartončki so v pomoč učencem, ki imajo težave z usvajanjem matematičnega izrazja ter priklicem dejstev in postopkov (na eni strani kartončka je izraz ali pojem, na drugi opis ali ilustracija pojma ipd.), z avtomatizacijo postopkov (na kartončku je predstavljen postopek npr. pisnega računanja korak za korakom), z aritmetičnimi dejstvi (na eni strani račun in na drugi

rezultat, npr. pri poštevanke), s pretvarjanjem merskih enot (tabele s pretvorniki), formulami (za obseg, ploščino, volumen) itn.

Verbalne opore so različne in lahko vključujejo eno ali več besed, ki jo/jih učitelj pove učencu kot asociacijo za odgovor ali začetek nekega zaporedja (npr. pri štetju po 2 učitelj prične z naštevanjem števil 2, 4, 6 in pusti učencu, da nadaljuje), podporno vprašanje in podobno. Pri nalogah, pri katerih učenec nadaljuje vzorec, je treba določiti niz ali enoto ponavljanja na način, da ga vsaj dvakrat navedemo. Učenec mora za nadaljevanja vzorca najprej ugotoviti ponavljajoči se niz (ugotoviti mora pravilo), pri čemer mu učitelj lahko pomaga tako, da npr. nizanje ubesedi. Če je npr. narisano mačka, miš, mačka, miš in če to učitelj v ritmu izgovori, bo učenec najverjetneje slišal, kako naj nadaljuje, torej z mačko.

Časovne prilagoditve omogočajo učencu uporabo lastne strategije reševanja naloge z zagotovitvijo zadostne količine časa (npr. za zamudno strategijo seštevanja s preštevanjem prstov za ponazoritev obeh seštevancev in določanje vsote s preštevanjem mu omogočimo več časa ali manj nalog; količina časa se zmanjša pri prehodu na štetje prstov od večjega seštevance naprej in hitro izvedeno rešitev z miselnim računanjem, nazadnje, pri določenih primerih računov tudi s priklicem aritmetičnih dejstev).

Geste omogočajo boljšo organizacijo procesa poučevanja in učenje nekaterih matematičnih vsebin, ker so manj moteče za posameznikov proces učenja kot verbalne opore. Z gesto učitelj najpogosteje pritegne pozornost učencev, ponudi oporo, pospeši tempo dela, ustavi nezaželeno dejavnost ali vedenje in drugo. Geste so v procesu poučevanja v pomoč učencem, ki imajo težave s predstavljalnostjo pojmov, postopkov, ker vplivajo na rabo delovnega spomina (npr. s prstom obkrožimo obseg, robove geometrijskega telesa, z dlanjo "prevlečemo" ploskve, z iztegnjenima prstoma ponazorimo dolžino dm, z razmaknjenima dlanema ponazorimo oklepaj itn.). Učencem geste omogočijo lažjo zapomnitev pojmov in postopkov ter učinkovitejšo rabo teh pri reševanju nalog (Hord idr., 2019). Učitelj lahko npr. z gestami ponazori postopek pisnega deljenja z dvomestnim deliteljem: najprej delimo (z roko zamahnemo navzdol), nato množimo (prekrižamo roki v položaj X), nato odštejemo (z roko zamahnemo vodoravno) in nazadnje podpišemo (s potegom pesti navzdol pokažemo podpisovanje). Geste nato ponavljamo, saj se postopek pisnega deljenja tudi v vsakem koraku ponovi, dokler ne podpišemo zadnje številke deljenca. Učitelj se skupaj z učenci lahko odloči za drugačne geste, ki jih nato učenec lahko izvaja s prsti (jih minimalizira na način, da so le zanj) in si tako pomaga pri zapomnitvi postopka deljenja.

2.1.3 Življenjske situacije

Sposobnost učenja matematike učencev v PP NIS se močno poveča, če jim učitelj v procesu poučevanja ponudi vsebinski okvir, ki predstavlja povezavo z zanje zanimivim življenjskim problemom. Učitelj si čim večkrat oziroma ko je to smiselno prizadeva za povezovanje matematike z življenjem. Nekatere vsebine, npr. obseg, so bolj povezljive kot npr. predstavitev postopka pisnega odštevanja.

K interesu za učenje matematike bistveno pripomorejo življenjske in interesne dejavnosti ali informacije, ki jih učenec dobro pozna. Ker so povezane z njegovimi življenjskimi izkušnjami, je obravnavana matematična vsebina še bolj osmišljena in uporabna v vsakdanjem življenju (npr.: učenje enačb, predstavljanje podatkov itn.). Učenec spozna, da življenjske probleme lahko rešuje na različne načine in ni vedno le ena pravilna rešitev. Kot smo omenili že v uvodu, je področje matematične pismenosti tisti del matematike, ki uvaja učenca v reševanje matematičnih nalog in problemov, ki so manj strukturirani kot šolski. Še enkrat pa je treba poudariti, da brez temeljnega znanja matematike to ni mogoče in da sta matematična pismenost in matematično znanje v soodvisnem procesu: matematično znanje vpliva na matematično pismenost in obrnjeno.

Učitelj v čim večji meri spodbuja učence, da tudi sami predlagajo raznolike probleme, povezane z njihovim življenjem (npr.: koliko plastenk odložijo v smeti v enem mesecu, koliko kg smeti družina ustvari v enem tednu, koliko sadežev učenci pojejo za malico itn.), ki jih bodo skupaj reševali v razredu. Pripravijo lahko tudi časopis življenjskih problemov, ki se pojavljajo doma ali v bližnjem okolju. Ustrezno organizirano reševanje življenjskih problemov spodbuja komunikacijo med učenci, razvoj strategij načrtovanja in reševanja problemov, kreativnost in sodelovanje. Prehajamo od reševanja enostavnih in konkretno ponazorjenih nalog do bolj kompleksnih in abstraktnih.

Učenje novega pojma, dejstva, postopka in reševanja problema naj bo, če je le mogoče, povezano z življenjskim problemom v obliki matematične besedilne naloge, ki je ustrezno ponazorjena. Učitelj mora učence spodbujati, da novo usvojena znanja, strategije in veščine uporabijo v realnem življenju, v socialni interakcijah z vrstniki in odraslimi ter z reševanjem nalog pri drugih predmetih in v širšem okolju (npr. pri nakupovanju v trgovini berejo cene, preštevajo denar, ocenijo ceno izdelkov itn.) (Waege, 2009; Alpizar - Vargas in Morales - Lopez, 2019).

Ravnanje z denarjem je ena od pomembnejših nalog, povezanih z vsakdanjim življenjem, zato moramo v procesu poučevanja matematike denarnim enotam nameniti posebno pozornost in dovolj časa. Igralni denar bi morali v šoli pogosteje uporabiti kot učni pripomoček, saj je dobro ponazorilo pri učenju številnih matematičnih pojmov, postopkov oz. pri različnih vsebinah, npr.: pri razvoju pojma števila, delov celote, štetju, razdruževanju in združevanju, desetiških enotah, reševanju aritmetičnih nalog z vsemi štirimi operacijami, reševanju besedilnih nalog in problemov itn.

2.1.4 Učenje matematičnega izrazja

Matematika ima lasten slovar besed in simbolov (NCCA – MILD, b. d.). Učenci, ki slabo obvladajo matematični jezik, imajo skromen matematični besednjak, težko razumejo ustna in pisna navodila matematičnih nalog, slabše berejo matematične naloge, težje sledijo razlagi ter opisujejo postopke, rešujejo besedilne naloge, naloge iz učbenika in naloge za preverjanje znanja. Za učence v PP NIS je matematični jezik zahtevnejši, abstraktnejši in mnogo bolj specifičen od socialnega jezika. Še zahtevnejši pa je matematični jezik za učence v PP NIS, ki izhajajo iz neslovensko govorečih družin in družin iz manj spodbudnega okolja zaradi revščine.

Učitelj mora pri poučevanju nujno upoštevati kulturno in jezikovno ozadje učenca. Izražati se mora jasno in razumljivo tako pri ustnem kot pisnem izražanju ter upoštevati jezikovne sposobnosti učencev (Mitchell, 2014). Učitelj, ki uporablja jasen in razumljiv jezik v procesu poučevanja matematike, omogoča učencem dolgoročno uspešnejše učenje matematike in posledično manj težav. V prvih razredih obvladovanje matematičnega jezika pomembno vpliva na obvladovanje osnovnih matematičnih znanj in veščin (npr. orientacijski pojmi, štetje, primerjava skupin elementov po lastnostih, številu, urejanje števil itn.), ki so osnova za nadaljnje učenje matematike, zato je učenju izrazja in preverjanju razumevanja tega treba nameniti veliko pozornosti in časa (Byrd Hornburg, Schmitt in Purpura, 2018).

Učenci v PP NIS slabše usvajajo matematične izraze ob vsakdanjih dejavnostih in s spontano igro, zato potrebujejo sistematično in dovolj nazorno učenje matematičnega jezika. Matematične pojme uspešneje usvajajo z oblikovanjem predstav in povezovanjem z verbalnim izrazjem. Razumevanje matematičnega jezika pomembno vpliva tako na matematično konceptualno, proceduralno kot problemsko znanje. Pri tem ima pomembno vlogo obvladovanje matematičnega besedišča, ki se iz razreda v razred širi in pogloblja. Ker matematični jezik vključuje številne abstraktne, nevsakdanje besede, učenci sporočila pogosto težje ali sploh ne razumejo. Še zahtevnejši pa postane jezik, ki se navezuje na matematične simbole, npr. za simbole $>$, $<$, $=$, pripadajoče izrazje je več kot, je manj kot, je enako. Učitelji

morajo poenotiti rabo simbolov in ključnih matematičnih izrazov. Z uporabo izbranih matematičnih izrazov je včasih treba seznaniti tudi starše.

Matematični jezik je treba sistematično poučevati in utrjevati na čim več različnih načinov. Učenec mora imeti dovolj priložnosti in časa za utrjevanje matematičnega izrazja. Ker je matematično besedišče pogosto vezano na abstraktne pojme, ki niso neposredno povezani s konkretnimi materiali in dogajanjem v okolju, mora učitelj oblikovati kognitivne povezave med učencu znanim vsakdanjim jezikom ter matematičnim jezikom in simbolnimi predstavami, kadar je to le mogoče in smiselno (Miller, 1993). Nujno je poučevanje vseh novih ključnih izrazov pred uporabo teh v novih matematičnih vsebinah pri različnih predmetih.

2.1.4.1 Interaktivni zid besed

Poučevanje predmetno specifičnih matematičnih izrazov določenega vsebinskega sklopa (npr. obseg lika) lahko predstavimo s *poučevanjem v obliki »interaktivnega zidu besed«*. Interaktivni zid besed, ki je lahko tudi plakat, je orodje, s katerim učitelj na interaktiven in zanimiv način uči učence nove matematične in druge izraze. Omogoča boljše razumevanje besed in rabo teh v različnih zvezah.

Vedno bolj se uveljavlja tudi z digitalno tehnologijo predstavljen interaktivni zid besed, ki ga poimenujejo tudi *»e-zid besed«*. Digitalna tehnologija motivira učence za sodelovanje. E-zid besed med drugim omogoča interaktivno delo, večjo možnost individualizacije in diferenciacije v skladu s potrebami posameznega učenca, multisenzorno predstavitev in raznovrstne načine utrjevanja. Učencu omogoča spoznavanje novih besed, povezavo s predhodnim znanjem, takojšnjo povratno informacijo, raznolike primere ponazoritve za posamezne besede itn. Učenci se lahko učijo matematično izrazje z e-zidom besed individualno, skupinsko ali frontalno. E-zid predstavlja učinkovit pristop poučevanja tudi za učitelja, saj ga časovno razbremeni, ker lahko hitreje najde zanimive, raznolike vidne in slušne ponazoritve besed (Narkon, Wells in Segal, 2011).

2.1.5 Prehod od konkretnih preko slikovno-grafičnih reprezentacij do abstrakcij

Za usvajanje matematičnih idej je reprezentacija ključna. Razlikujemo notranje (miselne predstave) in zunanje (okolje) reprezentacije. V procesu uspešnega učenja posameznik z interakcijami med obema reprezentacijama aktivno oblikuje matematično znanje (Hodnik, 1998, 2020). Dejavnosti, ki vključujejo različne reprezentacije in temeljijo na vzpostavljanju povezav učencem v PP NIS, omogočajo predstavitev pojmov, dejstev in postopkov na različnih kognitivnih ravneh, razvoj bolj točnih miselnih predstav, boljše razumevanje matematičnih idej,

povezavo med konceptualnim in proceduralnim znanjem, večjo motivacijo za reševanje matematičnih nalog in uspešnejšo uporabo teh v življenjskih situacijah. Če v procesu poučevanja osnovnih matematičnih znanj in veščin učitelj prehitro preide s konkretnega na slikovno-grafično reprezentacijo (v nadaljevanju tudi ponazoritev) ter simbolno učenje v učbenikih in delovnih zvezkih, imajo učenci izrazite težave pri učenju matematike, saj nimajo dovolj priložnosti za izvajanje dejavnosti v skladu s svojimi posebnimi vzgojno-izobraževalnimi potrebami (Maccini in Gagnon, 2005). Učenci doživljajo stres, če učitelj nove matematične pojme in postopke prehitro predstavlja abstraktno, ker potrebujejo proces poučevanja, ki jim omogoča dovolj časa ter dovolj razumljivo in nazorno organizirano učenje. Ponazoritve z digitalno tehnologijo nikakor ne morejo nadomestiti rabe konkretnih in drugih pripomočkov, jih pa dobro dopolnjujejo (Jimenez in Stranger, 2017).

Pri usvajanju novih matematičnih pojmov in postopkov ima pomembno vlogo strategija, ki vključuje prehod *od konkretnih, slikovno-grafičnih do abstraktnih ponazoritev* (v nadaljevanju KSA) (Bouck, Park in Nickell, 2017). Učenci, ki jih učitelj poučuje po modelu KSA, hitreje usvojijo matematična znanja, dejstva in postopke ter naredijo manj napak kot tisti, ki niso bili deležni takega poučevanja. Strategija KSA omogoča učencem multisenzoren pristop pri učenju konceptualnega znanja (npr.: desetiške enote, ulomki, ploščina itn.), tekočnost kljub slabšemu pomnjenju proceduralnega znanja (npr.: odštevanja s prehodom desetice, ploščine pravokotnika itn.), veščin (npr.: merjenje količin, ocenjevanja količin itn.) ter večjo uspešnost pri reševanju življenjskih problemov in matematičnih besedilnih nalog. Učitelj lahko na različne načine motivira učence za rabo konkretnih ponazoril, npr. z "matematično čarobno škatlo", ki jo predstavljamo v nadaljevanju.

Primer ponazarjanja pojma števila z "matematično čarobno škatlo"

Motivacija učencev za učenje števil ima pomemben vpliv na uspešnost učenja, ki se poveča z možnostjo izbire dejavnosti in pripomočkov.

V praksi se je kot učinkovita pokazala uporaba "matematične čarobne škatle". To je škatla (npr. od čevljev), ki jo učenci prinesejo od doma in jo porišejo ali oblepijo z različnimi figurami, ki so zanje zanimive. Potem pa po lastni izbiri v to škatlo prinašajo različne vrste drobnih predmetov (npr.: plodove, kamenčke, drobne figurice, avtomobilčke, kroglice, žetone, ploščice, nalepke itn.). Škatle po opravljenih nalogah vedno pospravijo in dajo na isto mesto v razredu.

V procesu poučevanja začetnih pojmov števil je posebno pomembno, da učenci spoznajo, da število ni odvisno od barve, velikosti ali oblike predmeta. Prav tako je pomembno, da učenec ni vezan le na eno vrsto ponazoritev (npr. s prsti). Na konkretni ravni prehajamo od ponazoritev pojma števila s skupinami enakih predmetov do ponazarjanja pojma števila s skupinami z različnimi predmeti. Pri utrjevanju na konkretni ravni npr. za pojem števila 4 vsak učenec v škatli na mizi poišče skupino 4 enakih predmetov, ki jih razporedi v vrsto na klopi. Učitelj potem učence spodbudi, da si drug pri drugem ogledajo vse skupine s po 4 predmeti. Vsak učenec svojo množico predmetov poveže tudi z besedno označbo (npr. imam 4 želode, drugi pove, da ima 4 avtomobilčke ...). Na ta način učenci ugotovijo, da je količina 4 predmetov lahko ponazorjena z različnimi predmeti, a vsem je skupno enako število predmetov.

Učitelj težko sam pripravi toliko različnih ponazoritev kot učenci. Predmeti, ki jih za ponazarjanje števil iz škatle izberejo učenci, so zanje tudi zanimivejši. Predmete iz čarobne škatle učenci lahko uporabijo tudi pri oblikovanju vzorcev kot pripomočke pri računanju, pri uprizarjanju besedilnih nalog ipd.

Strategija KSA učencem omogoča dovolj priložnosti za izvajanje dejavnosti z različnimi ponazoritvami v ustreznem zaporedju. *Konkretna ponazoritve* s predmeti iz vsakdanjega življenja (npr.: kostanj, prsti, denar za štetje) uporabimo pri mlajših učencih in na začetku obravnave nove snovi, da bi učenci uvideli, da je obravnavani problem povezan z realnim življenjem, kasneje pa uporabimo pripomočke, ki jih lahko povežemo/združimo v določeno strukturo (npr.: kocke, kroglice, ploščice, žetone itn.).

Posebno pozornost je treba nameniti sistematičnemu učenju ponazarjanja količin in reševanju računskih operacij s prsti, saj številne računske napake nastanejo zaradi netočnega izvajanja postopkov ponazarjanja števil in aritmetičnih operacij s prsti. Primer: če učenci ne vedo, ali prst, ki so ga zadnjega prešteli, predstavlja rezultat pri seštevanju ali odštevanju, so izračuni za 1 ali 10 večji ali manjši. Enak problem se pojavi pri rabi tabel, številskega traku in drugih podobnih ponazoril.

Slikovne ali dvodimenzionalne ponazoritve prav tako pomagajo učencu uspešneje usvojiti koncepte in vizualizirati postopek reševanja matematične naloge. Pomembno je, da učitelj v

prvih razredih sistematično predstavi povezavo med konkretnim pripomočkom in slikovno ponazoritvijo tudi tako, da na tablo pred učenci riše risbo konkretnega predmeta, ki ga imajo učenci pred seboj. S tem ustvari povezavo med konkretno in slikovno reprezentacijo, ki je za učenje z razumevanjem bistvena, kakor so bistvene tudi ostale povezave med reprezentacijami.

Grafične ponazoritve pa učencu omogočajo boljši vpogled v zbrane podatke, s katerimi učitelj podkrepí obravnavano snov. Učenci naj uporabijo tudi grafične opore (npr.: obkrožijo, podčrtajo izraze, korake v postopku, grafično ponazorijo podatke itn.), s katerimi poudarijo ključne informacije. Vizualne ponazoritve so še posebno pomembne za učence v PP NIS, ki imajo izrazitejšje jezikovne težave.

Po uspešnem učenju s konkretnimi in slikovno-grafičnimi ponazoritvami sledi *abstraktna oziroma simbolna predstavitev*, ki je najkrajši in učinkovitejši način predstavljanja pojma ali odnosov, a zahteven in dolgotrajen proces za učence v PP NIS. Učenci bodo učinkoviteje uporabljali simbole, če bo učitelj v procesu poučevanja uporabil različne pristope in upošteval predstavljeno zaporedje KSA ter organiziral veliko vaj in nalog ponazarjanja matematičnih idej v različnih situacijah. Strategija KSA se lahko izvaja frontalno, v mali skupini ali individualno (Sealandar idr., 2012).

Uporabo pripomočkov je treba *prilagoditi tudi finomotoričnim in organizacijskim spretnostim učenca*. Dobre finomotorične spretnosti učencu omogočajo učinkovito ravnanje z različno velikimi učnimi pripomočki in predmeti iz okolja, kar prispeva k uspešnejšemu oblikovanju miselnih povezav in prostorskih predstav. Dobre finomotorične spretnosti omogočajo učinkovitejšo ponazoritev matematičnih nalog (npr.: pisanje števil, natančen zapis pisnih računskih operacij, načrtovanje geometrijskih nalog itn.). Od finomotoričnih spretnosti pa je odvisna tudi hitrost pisanja, ki vpliva na hitrost pisnega reševanja matematičnih nalog pri preverjanju znanja in posredno tudi na oceno (Pitchford, Papini, Outhwaite in Gulliford, 2016).

Nekateri učenci potrebujejo različne ponazoritve, predstavljene na različne načine, in dalj časa kot njihovi vrstniki v razredu, zato jim učitelj ponudi različne učne pripomočke v kotičku, kjer lahko sami izberejo tisti pripomoček, ki jim najbolj pomaga pri reševanju matematične naloge. Učni pripomočki morajo biti dostopni vsem učencem v kotičku, da bi jih lahko izbirali pri samostojnem delu. Učence pa je treba učiti tudi ustrezne in odgovorne rabe učnih pripomočkov. Učiti jih je treba takega rokovanja z učnimi pripomočki, da bi jih lahko najučinkoviteje uporabili (npr. materiale za štetje naj razporedi v vrsto, da bi naredil manj napak pri štetju).

Primer učenja samoizbire pripomočka

Pomembno je tudi sistematično poučevanje samoizbire pripomočkov. Učence pred reševanjem naloge učitelj motivira, da razmislijo (na začetku s pomočjo učiteljevega modeliranja), kateri od učnih pripomočkov, ki so razporejeni v razrednem kotičku, bi jim bil najbolj v pomoč pri reševanju konkretne naloge. Vsak učenec pove svojo odločitev. Ugotovijo, da izbirajo različne pripomočke pri reševanju istih nalog. Vajo je treba večkrat ponoviti, da bi se vsi naučili v čim večji meri izbrati pripomoček v skladu s svojimi potrebami in zmožnostmi. Pri reševanju zahtevnejše naloge lahko učenec tako vedno izbere konkretnije ponazorilo, čeprav je že reševal podobne enostavnejše naloge na simbolni ravni.

Reševanje nalog po modelu KSA najučinkoviteje izvedemo v obliki *direktnega poučevanja*, ki vključuje *izvedbo dejavnosti na konkretni, slikovno-grafični in simbolni ravni*. Pomembno je tudi izvajanje ponazoritev KSA v kombinaciji z učinkovitim učenjem matematičnega izrazja, kar močno poveča uspešnost učenja matematike. Učenci ne smejo le tiho izvajati dejavnosti, ker opisovanje poteka dejavnosti omogoča hitrejši prehod s konkretne na miselno raven izvajanja procesov učenja matematike. Tak način poučevanja je za učence v PP NIS nujen za vse ključne matematične pojme in postopke. Vsaka stopnja v pristopu KSA se izvaja toliko časa, dokler večina učencev ne obvlada pojma ali postopka reševanja nalog. Za tiste učence, ki kljub temu ne obvladajo ključnih obravnavanih pojmov ali postopkov, pa je treba razmisliti o večjih prilagoditvah (Bouck, Park in Nickell, 2017). Take prilagoditve so npr. povezane z obsegom obravnavane vsebine, številskim obsegom, načinom ponazoritve, bolj nazorno ponazoritvijo in drugo.

2.2 SPECIALNO PEDAGOŠKI ELEMENTI POUČEVANJA NEKATERIH TEMELJNIH MATEMATIČNIH ZNANJ

Pozornost je namenjena razvoju dveh pomembnih sklopov: občutku za števila in količine ter procesiranju aritmetičnih operacij.

2.2.1 Občutek za števila in količine

Dober občutek za števila in količine je osnova za uspešno učenje matematike (Crean, 2012). Vključuje primerjanje količin, merjenje in ocenjevanje, prepoznavanje smiselnosti rezultatov, razumevanje koncepta števil, številska zaporedja, velikostne odnose, sistematično štetje, veščine računanja, fleksibilnost pri miselnem računanju, sposobnost prehajanja med različnimi reprezentacijami, uporabo najbolj smiselne reprezentacije za rešitev določenega problema ter

reševanje problemov na ustrezen in smiseln način pri matematiki in v vsakdanjem življenju (Singh, 2009).

Otroci brez posebnih potreb razvijajo velik del občutka za števila in količine že v predšolskem obdobju. Del občutka za števila je genetsko pogojen in delno je pridobljen z izkušnjami. Na razvoj občutka za števila in količine ima pomemben vpliv spodbudno domače okolje v predšolskem obdobju (vključevanje otroka v različne dejavnosti, povezane s količinami), zato mora biti na začetku izobraževanja posebna pozornost namenjena učencem, ki nimajo takega domačega okolja.

Šele ko je temeljni občutek za števila in količine razvit, lahko učenec resnično razume pomen števil in količin, jih zna v skladu s kontekstom predstaviti in uporabiti za reševanje matematičnih nalog in problemov. V času formalnega izobraževanja in pridobivanja življenjskih izkušenj pa se matematična znanja in veščine nadgrajujejo, da bi se razvil še funkcionalen občutek za števila in količine (Sayers idr., 2016). Učenci v PP NIS tega občutka ne uspejo v zadostni meri neformalno razviti, zato potrebujejo zelo sistematično in specifično poučevanje z ustreznimi ponazoritvami.

Učenci izboljšajo občutek za števila in količine z raznolikimi dejavnostmi, ki omogočajo povezavo med matematiko in realnim svetom; s prehodom od konkretnih izkušenj s količinami do abstraktnih ponazoritev (KSA); s poučevanjem vseh potrebnih osnovnih veščin z modeliranjem toliko časa, da jih obvladajo; vključevanjem učenja matematičnega jezika tako, da učenec resnično razume matematično izrazje in simbole; zagotavljanjem priložnosti za ocenjevanje rezultatov pred izračunom ali meritev pred merjenjem; zagotavljanjem številnih in raznolikih priložnosti za miselno računanje; poznavanjem različnih strategij reševanja nalog, da izberejo tisto, ki jim najbolj ustreza, in še številne druge dejavnosti itn.

Učitelj mora zagotoviti spodbudno učno okolje z upoštevanjem stopnje obvladovanja občutka za števila in količine za vsakega posameznega učenca, s sprotnim preverjanjem razumevanja pojmov, postopkov in veščin, predno začne z izvajanjem različnih vaj. Eden od učinkovitih načinov je poučevanje novih pojmov z modelom učenja pojmov.

2.2.2 Model učenja pojmov

K razvoju občutka za števila in količine ima pomembno vlogo matematično pojmovno znanje s poudarkom na razumevanju in pomnjenju matematičnih izrazov (npr. pojem števila, računskih operacij), izrazov za odnose med števili (je več kot, je manj kot, je enako), poznavanje matematičnih simbolov (npr. za računske operacije), matematičnih konvencij (npr. standardne

merske enote), razumevanje konceptov seštevanja, odštevanja, množenja in deljenja itn. Učenec sicer lahko usvoji strategijo računanja (mehanična izvedba korakov postopka reševanja), a brez razumevanja pojma število, relacij in operacij učenec ne bo razumel problema in ga ne bo znal rešiti. Pri učenju novih pojmov učenec prehaja od poznanih pojmov do novih na osnovi dobrega poučevanja, z izkušnjami, ob konkretnih in slikovno-grafičnih ponazoritvah do prevoda informacij v matematični jezik in simbole, zato naj učenec dejavnosti, ki jih izvaja, tudi opisuje.

Eden od učinkovitih načinov poučevanja ključnih matematičnih pojmov (oblik, odnosov, števil, merskih enot itn.) in tudi matematičnega izrazja je *Nyborgov model poučevanja pojmov* (Hansen in Morgan, 2009). Model omogoča učinkovitejše učenje pojmov, miselno organizacijo informacij, zato tudi učinkovitejše shranjevanje informacij v dolgotrajni spomin, hiter in učinkovit priklic ter zagotavlja povezave pojmov z ustreznimi matematičnimi izrazi. Pomembno je modeliranje učenja pojma in ustreznega matematičnega izrazja z direktnim poučevanjem. Model učenja pojmov vključuje tri faze, in sicer **asociativno fazo**, **fazo diskriminacije** in **fazo posploševanja**. Vsaka faza se obvezno izvaja na **konkretni, grafično-slikovni in simbolni ravni**. Učenec po različnih senzornih poteh usvaja pojem, npr. gleda predmet, ga tipa in posluša učiteljeve besede. Uči se po vseh stopnjah modela KSA z učiteljevimi opornimi vprašanji.

Primer učenja pojma okrogla oblika

Asociativna faza vključuje povezavo okrogle ploskve z besedno oznako. Učitelj učencem najprej modelira predstavitev okrogle ploskve na konkretni ravni (za ponazoritev uporabi npr. zelo tanek okrogel podstavek za kozarce). Vsak učenec dobi podstavek za kozarce, da ga lahko prime, potipa in s prstom obrobi okroglo ploskev. Učitelj v procesu modeliranja okroglo obliko podstavka poveže z besedno označbo, ko reče: »Podstavek je **okrogle** (specifičen pojem za ploskev) **oblike** (nadredni pojem).« Nato učenci vadijo ponazoritve in poimenovanja oblike ploskve. Najprej po modelu učitelja pokažejo okroglo ploskev podstavka in ponovijo, da je podstavek okrogle oblike (če je le mogoče, vztrajamo pri obeh izrazih). Potem učitelj postavlja direktna vprašanja, npr.: »Kakšne oblike je podstavek?« Učenci ob tem držijo podstavek in ponovijo besedno označbo, a tisti, ki ne zmorejo, le z roko obrobijo okroglo obliko ploskve. Učitelj utrjuje povezavo novega pojma z besedno označbo z vprašanji (npr. Kakšne oblike je ploščica ali sličica?) ob različnih ploskvah okrogle oblike, ki jih učenci lahko obhodijo po na tleh narisani okrogli ploskvi, obrobijo s prstom ploščice

okroglih oblik in povežejo z besedno oznako (npr.: Ploščica je okrogle oblike). Na drugi ravni sledijo vaje s slikovnim gradivom, ki jih izvajajo dalj časa v enakem zaporedju (učiteljevo modeliranje, vodene vaje z vprašanji z namenom povezave oblike z besedno oznako). Na simbolni ravni reče učitelj učencu, naj nariše okroglo obliko (najprej s prstom nariše okroglo obliko na pladnju v mivki, kasneje obriše okroglo ploskev na listu papirja, jo nariše s šablono itn.) in šele kasneje jo nariše prostoročno po zraku, na hrbet sošolca, s svinčnikom na papir ter jo poimenuje. Učenci izvajajo različne vaje risanja okroglih oblik in poimenovanja.

Sledi *diskriminativna faza*, v kateri se učenci naučijo okroglo obliko ploskve razlikovati od drugih oblik. Učitelj da učencem po 4 različne oblike ploščic (npr.: kvadratno, trikotno, okroglo in šesterokotno ploščico). Na začetku je najbolje, da so ploščice enake barve, da so učenci pozorni le na obliko, kasneje pa je lahko vsaka ploščica drugačne barve. Učitelj reče: »Pokaži ploščico okrogle oblike.« Učitelj ga še vpraša: »Zakaj si se dotaknil te ploščice?« In doda: »Kako si vedel, da je to okrogla ploščica?« Nekateri učenci bodo potrebovali dalj časa, da bodo znali ubesediti odgovor na vprašanje, zato lahko le s prstom obkrožijo okroglo ploskev. Potem učitelj učencem pokaže še druge skupine različnih oblik ploskev in učence spodbuja, da v vsaki skupini pokažejo okroglo ploskev in jo povežejo tudi z ustrezno besedno oznako. Sledijo podobne vaje s slikovnim materialom, ko učenci uspešno poiščejo okroglo ploskev, jo povežejo z ustreznim izrazom in preidejo po enakem zaporedju vaj na simbolno raven. Učenci iščejo okroglo obliko na slikovnih ponazoritvah, jo pokažejo, poimenujejo in tisti, ki zmorejo, tudi razložijo, zakaj so izbrali določeno obliko.

Ko učenci naredijo dovolj vaj in zadovoljivo razlikujejo okroglo ploskev od ploskev drugih oblik, preidejo na *fazo posploševanja* po vseh stopnjah od konkretne stopnje (iskanje okroglih ploskev, npr.: med prometnimi znaki, okrogle oblike piškotov med piškoti različnih oblik itn.), iskanje okroglih ploskev v slikovnih materialih (npr. v reklamnih gradivih) do bolj abstraktnih ponazoritev, povezanih z raznolikimi primeri narisanih likov itn. Potem pa iščejo okrogle ploskve v sestavljenih oblikah konkretnih predmetov (npr. na pralnem stroju), v slikovnem gradivu (npr.: cvetja, gumbov) in simbolni ravni (npr.: pri geometriji, med računalniškimi simboli za oblike, v vzorčkih ter drugih simbolih).

2.2.2.1 Model učenja parov pojmov

Opisani Nyborgov model (Hansen in Morgan, 2009) učenja pojmov je še posebno učinkovit pri poučevanju *parov osnovnih, a ključnih matematičnih pojmov*, ki jih učenci težje razlikujejo in

usvojijo (npr.: levo – desno, težko – lahko, polmer – premica, obseg – ploščina lika, simbolni prikaz znakov več – manj, delitelj – deljenec, produkt – količnik, merske enote m – dm, l – dl idr.). Učitelj pa mora biti pozoren na rabo jezika pri učenju razlik med pari izrazov, ki opredeljujejo različne količine (dolžina, čas, masa ...), da ne zamenjuje izrazov jezika ocenjevanja (dolg – kratek, hiter – počasen) in jezika primerjanja (daljše kot, krajše kot hitreje kot, počasnejše kot) v postopku modeliranja. V asociativni fazi učitelj obravnava na vseh treh ravneh (konkretni, grafično-slikovni in simbolni) *prvi pojem, ki ga poveže z besedno oznako*, in šele potem, ***ko je prvi pojem usvojen, na enak način na vseh treh ravneh sledi obravnava vsako raven drugega pojma***. Sledi faza diskriminacije obeh pojmov na vseh treh ravneh ter po enakem modelu faza posploševanja, ki se izvaja tudi z medpredmetnim povezovanjem.

Proces učenja po Nyborgovem modelu traja dalj časa, vendar je usvajanje, predelovanje informacij v dolgotrajnem spominu, shranjevanje informacij in priklic učinkovitejši kot pri klasičnem načinu poučevanja. Učitelj ima pomembno vlogo pri pripravi konkretnih materialov in slikovnih ponazoritev ter modelnem poučevanju (Hansen in Morgan, 2009).

2.2.3 Poučevanje štetja

Sposobnost štetja v predšolskem obdobju je za vse učence osnova za usvajanje številnih matematičnih pojmov in postopkov v kasnejšem formalnem izobraževanju. Učenci v PP NIS v predšolskem obdobju usvojijo manj pojmovnega znanja in veščin štetja kot vrstniki brez posebnih vzgojno-izobraževalnih potreb. Na začetku izobraževanja imajo učenci težave z učenjem preštevanja predmetov in osnovnega verbalnega štetja že v manjšem številskem obsegu. Pri štetju ima pomembno vlogo povezava besede in simbola števila z ustrezno količino predmetov (prirejanje eden enemu). Učenci morajo razumeti, kako so besede za označevanje števil povezane s številskimi pojmi in kako so besede za označevanje števil v zaporedju uporabljene pri štetju predmetov (Geary, 1994). Učenci učinkovito štejejo, ko usvojijo ključna načela štetja: prirejanje eden enemu, vrstni red naštevanja števil, načelo kardinalnosti (zadnje število določi število predmetov, ki jih preštavamo) in neodvisnost končnega števila od vrstnega reda preštevanja. Učitelj mora dobro poznati njihovo predznanje in v skladu s tem sistematično in dovolj časa direktno poučevati vse predpogoje za usvojitev štetja in vse vrste štetja s pristopom KSA. Poučevati in utrjevati mora konceptualna in proceduralna znanja vseh vrst štetja: štetja naprej in štetja v zaporedju.

Štetje naprej in nazaj učenci zelo učinkovito utrjujejo z multisenzornim pristopom, npr. s hojo na gladkih tleh na dvorišču ali travniku (učenec glasno šteje, opazuje korake in hodi). Učenci se primejo za roke in v vodoravni vrsti korakajo naprej in glasno skupaj z učiteljem štejejo

korake po 1 do 10 (ali 20 ... do 100). Potem pa gredo vzvratno in skupaj z učiteljem štejejo korake hoje nazaj (10, 9, 8 ..., 0). Vajo pogosto ponavljajo. Učenci tako lažje povežejo pojem štetja naprej s hojo naprej in pojem štetja nazaj s hojo nazaj ter urijo postopek obeh vrst štetja. Štetje nazaj je za učence zelo zahtevno, ker morajo najprej dobro obvladati štetje naprej, pri štetju nazaj pa morajo miselno obrniti niz števil.

2.2.4 Procesiranje matematičnih operacij in problemov

Učenci v NIS imajo praviloma težave s hitrim in točnim reševanjem že enostavnih matematičnih nalog in problemov pri aritmetiki, geometriji, algebri in drugih vsebinah. Problemi so matematične naloge, za katere učenci ne poznajo poti reševanja oziroma morajo odkriti, oblikovati strategijo reševanja, ki je do sedaj še ne poznajo (strategija sicer vključuje učencu poznane matematične postopke, procese, le da pri reševanju problemov učenec izbere le določene in v nekem novem vrstnem redu – odvisno od problemske situacije in učenčevega reševanja). V PP NIS tudi aritmetične besedilne naloge lahko obravnavamo kot matematične probleme. Aritmetične operacije ter matematične besedilne naloge (MBN) učenci rešujejo z različnimi strategijami. Razvitost strategij reševanja aritmetičnih operacij, MBN posameznika je odvisna od starosti, kognitivnih sposobnosti, zadostne količine vaj in ustreznosti poučevanja. Rabe razvitejših strategij reševanja nalog ne moremo izsiliti, jih pa v omejenem obsegu dosežemo s kakovostnim poučevanjem in zadostnim številom vaj.

Aritmetične operacije lahko učenci izvajajo z materialnimi in verbalnimi strategijami ali z miselnim računanjem. *Materialne strategije* učitelj hitro prepozna, ker učenec pri računanju uporablja materialne opore (jabolka, prste, kocke, tabele, številski trak itn.) in je tempo računanja počasnejši. Nekateri učenci v PP NIS dalj časa ali vse življenje vztrajajo pri rabi materialnih strategij. *Verbalne strategije* (npr.: polglasno ali tiho ponavljanje večkratnikov, miselno štetje pri seštevanju itn.) omogočajo hitrejše računanje, kot je računanje z materialnimi strategijami, a učenci lahko naredijo več napak, ker pozabijo števila, s katerimi računajo, ali pozabijo na omejitve (npr. do katerega števila morajo šteti, katere večkratnike povedati) in drugo. Najhitrejše in najučinkovitejše je *miselno računanje*, ki vključuje avtomatiziran priklic aritmetičnih dejstev (deklarativno znanje) in obvladovanje aritmetičnih postopkov (proceduralno znanje).

2.2.4.1 Poučevanje aritmetičnih operacij

Učitelj mora v procesu poučevanja aritmetičnih operacij uravnotežiti poučevanje konceptualnega, deklarativnega in proceduralnega znanja aritmetičnih operacij (Miller in Hudson, 2007).

Konceptualno znanje v procesu poučevanja in učenja aritmetičnih operacij vključuje razumevanje pomena računskih operacij in tudi razumevanje povezav med operacijami. Učitelj lahko hitro preveri obvladovanje konceptualnega znanja posamezne operacije, npr. koncepta množenja z nalogo: *V škatli je 5 vrst po 7 piškotov. Koliko je vseh piškotov?* Učenci, ki ne obvladajo koncepta množenja, bodo odgovorili, da je 12 piškotov, ker števili seštejejo namesto množijo. Zelo pa je pomembno, kako nalogo oblikujemo. Zgornje besedilo bi lahko oblikovali za učenca tudi bolj enostavno: *V škatli so piškoti. Razporejeni so v 5 vrst. V vsaki vrsti je 7 piškotov. Koliko je vseh piškotov?* Na tak način strnjeno matematično besedilo zapišemo manj jedrnato, s čimer lahko vplivamo tudi na učenčev proces mišljenja, postopen pristop k reševanju. Zelo pomembno je, da učitelj pri oblikovanju besedilnih nalog poskuša "ujeti" jezik, ki ga učenec dobro razume in mu lahko sledi.

K razvoju konceptualnega znanja aritmetičnih operacij pripomore model KSA v okviru direktnega poučevanja. Proces KSA poučevanja konceptualnega znanja aritmetičnih operacij učitelj začne s postopnim izvajanjem dejavnosti s konkretnimi učnimi pripomočki, sledi prehod na slikovno-grafične ponazoritve do rabe simbolov. Najprej učitelj natančno demonstrira in opisuje vsako dejavnost, predstavljeno z besedilno nalogo, sledi vodena praksa učencev, ki se konča s samostojnim računanjem učencev. Učenci v PP NIS potrebujejo veliko dejavnosti z različnimi ponazoritvami, da bi postopoma razumeli povezavo med konkretno ponazoritvijo pojma in abstraktnim simboli (Miller idr., 2011).

Postopek razdruževanja števil v manjšem obsegu števil je eden temeljnih postopkov, ki pomembno vpliva na računanje v večjem obsegu števil. Za učence v PP NIS je velik izziv, a predstavlja nujni predpogoj za ustno seštevanje in odštevanje. Pri računanju s prehodom, pri pisnem odštevanju, reševanju enačb je pomen znanja razdruževanja števil zelo pomemben. Če zna učenec razdružiti npr. število 10 na različne pare seštevancev, bo pri računu s prehodom npr. $8 + 9$ razdružil drugi seštevanec na 2 in 7 (pri takih primerih gre praktično za dvojno razdruževanje: najprej seštevanca, katerega vsota je 10, nato pa še seštevanca za vsoto 9). Še enkrat lahko poudarimo, da razdruževanje števil predstavimo po modelu KSA kot razdruževanje množice konkretnih predmetov, slikovno ponazorjenih nalog ter z oblikovanjem parov števil in beleženjem dobljenih delov (Beishuizen, 1997; Rathgeb -Schnierer in Rechtsteiner, 2018; Bračič, 2020).

Deklarativno znanje vključuje sposobnost pomnjenja informacij kot dejstev (npr. učenec vidi številko in takoj pove njeno ime, vidi račun $3 + 6$ in pove rezultat). Obvladovanje

deklarativnega znanja vpliva na razvoj konceptualnega in proceduralnega znanja aritmetičnih operacij (Miller idr., 2011). Avtomatizacija aritmetičnih dejstev (npr. računi seštevanja in odštevanja do 10 ali 20, poštevanke itn.) ne omogoča le hitrega reševanja enostavnih in kompleksnejših računskih nalog, ampak tudi manj obremenjuje delovni spomin. Hitrost priklica dejstev je odvisna od asociativne moči računa. Močnejša kot je povezava med računom in rezultatom (npr. pari $7 + 7$ ali $6 + 6$, priklic rezultatov množenja s faktorjema, manjšima od 5 itn.), hitreje učenec prikliče določeno aritmetično dejstvo. Kadar pri priklicu dejstva učenec ni uspešen, si lahko pomaga z manj razvitimi strategijami (npr. preštevanjem prstov, konkretnih predmetov, tabelami itn.).

Proceduralno znanje opredelimo kot sposobnost obvladanja postopka in sledenje zaporedju korakov postopka pri reševanju različnih matematičnih nalog in problemov. Obvladovanje korakov postopkov omogoča uspešnejše reševanje simbolno predstavljenih problemov in besedilnih nalog (npr.: vsota ulomkov, vrsta besedilne naloge, enačbe, izračun ploščine itn.) Izvedba postopkov je pomembno odvisna od avtomatizacije aritmetičnih dejstev. Pri predstavitvi postopkov učitelj z lastnim moduliranjem izvedbe korakov postopka in pristopa KSA predstavi vse korake postopka. Ob reševanju naloge učenec, ki avtomatizirano izvaja postopek, iz dolgoročnega spomina prikliče postopek in ga poveže z nalogo, ki jo rešuje. Po koncu reševanja naloge postopek shrani v dolgoročni spomin, ki se ponovno aktivira ob reševanju podobnega problema. Priklic ustreznega postopka omogoča učencu hitrejšo rešitev naloge. Avtomatizacijo postopka doseže s številnimi in raznolikimi vajami. Učenci iz PP NIS v primerjavi z vrstniki brez posebnih potreb obvladajo manj postopkov, ki so tudi manj razviti (Miller in Hudson, 2007). Učence, ki si težko zapomnijo korake postopkov, učimo tudi specifične kognitivne strategije. Kognitivne strategije namreč pomagajo učencem do hitrejšje zapomnitve korakov postopkov računskih nalog in besedilnih problemov. Kognitivne strategije zapomnitve korakov postopkov lahko vključujejo besedo z začetnimi črkami imen korakov, ključne besede ali stavke. Učencem v PP NIS so specifične kognitivne strategije v pomoč predvsem pri zapomnitvi korakov zahtevnejših postopkov, kot je pomnjenje korakov postopka reševanja matematičnih besedilnih nalog.

2.2.4.2 Poučevanje matematičnih postopkov

V procesu avtomatizacije postopkov pisnega računanja in številnih drugih postopkov je učence smiselno učiti tudi notranji govor, ki jim omogoča zavestno kontrolo rabe strategij ter s tem zagotavlja uspešnejše in hitrejšje učenje. Učimo ga s 5-stopenjskim modelom samoinstrukcij

(Pulec Lah in Rotvejn Pajič, 2011). Notranji govor učence najprej učimo ob izvajanju enostavnih praktičnih dejavnosti (npr. brisanja table, ki vključuje učiteljevo brisanje table z glasnim opisom postopka, učenčevo brisanje table po navodilih učitelja, učenec briše tablo po lastnih glasno izrečenih navodilih in na koncu je brisanje table s poltihi in kasneje z notranjim govorom). Vsak korak postopka se izvaja toliko časa, da ga učenec obvlada in šele potem preidemo na naslednjega, zato za poučevanje notranjega govora učitelj potrebuje več časa.

Priporočljivo je, da so naloge v začetni fazi učenja samoinštrukcij manj zahtevne, da se uči večšine, ko pa učenec že razume in obvlada notranji govor samoinštrukcij, preidemo na zahtevnejše naloge. Z verbalnim opisom postopka si hitreje zapomnimo postopke (npr. pisnega računanja). Upoštevamo vse korake učenja notranjega govora.

Primer poučevanje postopka pisnega seštevanja s pomočjo notranjega govora

Model vključuje 5 korakov, kot primer je predstavljeno izvajanje postopka pisnega seštevanja brez prehoda desetice, npr.:

$$\begin{array}{r} 34 \\ + 25 \\ \hline \end{array}$$

Učitelj je model, ki glasno navaja korake postopka (model učenja postopka), npr.:

1. Učiteljev opis reševanja računa pisnega seštevanja: *Pisno začnem seštevati pri enicah* (naredi zeleno zvezdico za oporo). *Najprej seštejem 5 in 4* (števíli pokaže s prstom) *in dobim rezultat* (vsoto, če učenci obvladajo izraz) *9, ki ga napišem pod črto. Potem seštejem 2 in 3 desetice ter dobim vsoto 5 desetic, ki jo zapišem v drugo kolono.*
2. *Sledi učenčevo izvajanje vseh korakov postopka pisnega seštevanja po navodilu učitelja.*
3. *Nato učenec rešuje nalogo in si sam daje glasna navodila (samoinštrukcije).*
4. *Na naslednji stopnji učenec šepeta navodila med reševanjem naloge.*
5. *Kasneje pa rešuje naloge tiho s pomočjo notranjega govora.*

Učenci naj vsak dan rešujejo vsaj kakšno podobno nalogo s pomočjo notranjega govora, da avtomatizirajo postopek reševanja.

2.2.4.3 Kognitivni računski model

Za učence in učitelja je zelo pomembna sprotne evalvacija uspešnosti računanja vsakega učenca. Učitelj pripravi 1- ali 2-minutne naloge z računi za preverjanje znanja. Najprej naloge z eno aritmetično operacijo in kasneje, ko učenec že usvoji pravila pri določanju vrednosti številskega izraza, v katerem so računske operacije istih ali različnih stopenj, z več operacijami. Vsak učenec lahko sam preverja pravilnost izračunov z računalom. Učitelj naj na začetku diferencira zahtevnost nalog v skladu s posebnimi potrebami učencev, da bi dosegel večjo motivacijo za reševanje aritmetičnih nalog.

Pri učencih, ki kljub kakovostnem poučevanju in številnim vajam ne napredujejo, skuša učitelj ugotoviti vzrok težav. S *kognitivnim računskim modelom* (McCloskey, Caramazza in Basili, 1985) lahko ugotovi vrste napak pri reševanju enostavnih aritmetičnih nalog. Najbolj enostavno predstavimo kognitivni računski model s 3 elementi: *s povezavo računskega znaka, besede ali besedne zveze z računsko operacijo; priklicem postopka računske operacije in priklicem aritmetičnih dejstev potrebnih za izvedbo aritmetične operacije.*

Pri izvajanju kateregakoli računskega postopka najprej povežemo računski simbol (+, −, x, :) s ključno besedo (dodam, odvezamem) ali besedno zvezo (npr. *manj kot* povežemo z odštevanjem), ključno besedo iz navodil naloge (npr. število 89 povečaj za 7) ali besedilne naloge (npr. razdeli 33 kart trem sošolcem), z aritmetično operacijo (*povečaj za ...* s seštevanjem in *razdeli z* deljenjem). Potem v spomin priključimo korake postopka izvedbe aritmetične operacije (npr. pri pisnem deljenju najprej ugotovi, na kateri strani oz. pri kateri mestni vrednosti začnemo deliti, kako določimo količnik itn.) in temu sledi izvedba postopka računanja po korakih, ki so značilni za posamezen postopek računanja.

Primer uporabe kartončkov z znaki za računske operacije

Učitelj da učencem karton kvadratne oblike, razdeljen na 4 enake kvadratke, v katere vpišejo vse 4 računske znake in prazen kartonček velikosti enega kvadrata za pokrivanje računskih znakov. Učitelj navaja kratke besedilne naloge, ki pa jih učencem ni treba izračunati (npr.: Imaš 5 bonbonov in dobiš še 3. Kako boš ugotovil koliko bonbonov imaš?), ker urijo izbiro

postopka in le pokrijejo računski znak za določeno operacijo (npr. + za seštevanje). En učenec pove, katero operacijo je treba izvesti (npr. seštevanje) in ostali učenci s kartončki DA/NE evalvirajo pravilnost odgovora. Učitelj takoj dobi povratno informacijo o uspešnosti izvedbe prvega elementa modela.

Zaradi izrazitejših posebnih potreb (pogojenih z nižjimi intelektualnimi sposobnostmi, jezikovnimi težavami, težavami pri branju, slabšo pozornostjo in drugimi težavami) nekateri učenci ne povežejo računskega znaka, besede ali besedne zveze z ustrezno aritmetično operacijo, zato je lahko kljub obvladovanju npr. postopka vse nadaljnje reševanje naloge neustrezno. Z vajami lahko učitelj učencem prvih razredov pomaga vzpostaviti povezavo med znakom in besedo ali besedno zvezo z aritmetično operacijo (primer reševanja besedilnih nalog z oporo "kartončki").

V okviru drugega elementa modela morajo učenci v spomin *priklicati korake postopka* računanja. Učitelj pri poučevanju vsake nove aritmetične operacije in drugih postopkov zelo natančno modelira postopek korak za korakom, da bi učenci usvojili ustrezno zaporedje korakov. Nekaterim učencem pripravi kartončke s koraki postopkov (npr. pisnega računanja), vsem pa veliko priložnosti za vaje.

Pri pisnem deljenju so npr. koraki postopka naslednji: količnik najprej ocenimo (tudi ocenjevanje količnika je svoj postopek), nato računamo po postopku (odvisno, ali delimo z enomestnim ali večmestnim številom – spet sta tu dva nekoliko različna postopka), primerjamo dobljeni količnik in oceno količnika ter na koncu naredimo še preizkus.

Pomembno je tudi glasno računanje, predvsem na začetku, kar omogoča učencem hitrejšo avtomatizacijo postopka in učitelju hitrejše odkrivanje napak v izvedbi postopka. Proceduralno znanje je učencu težje ubesediti, zato pri učencih v PP NIS pravilnost izvedbe postopka najhitreje ugotovimo z analizo napak in glasnim računanjem.

Sledi tretji element, ko učenec izvede korake postopka s priklicanimi aritmetičnimi dejstvi oziroma z ustreznimi oporami, če priklica aritmetičnih dejstev (še) ni zmožen.

Učenec ima lahko težave pri izvedbi enega, dveh ali vseh treh elementov modela. Z opazovanjem, poslušanjem učenčevega opisa reševanja in analizo izdelka učitelj ugotovi, kje se učenec zmoti, da bi mu lahko čim hitreje organiziral učinkovito pomoč.

2.2.4.4 *Matematične besedilne naloge*

Za učence v PP NIS je še posebno velik izziv reševanje matematičnih besedilnih nalog (v nadaljevanju MBN), zato potrebujejo več časa ter sistematčne in specifične strategije poučevanja. Reševanje MBN s področja aritmetike, algebre, geometrije, merjenja itn. predstavlja kompleksno kognitivno in metakognitivno dejavnost. Vključuje tristopenjsko procesiranje (Pellegrino in Goldman, 1987). Na prvi stopnji mora učenec preoblikovati pisno ali ustno podano besedilo v notranjo reprezentacijo, kar lahko razumemo kot proces razumevanja naloge. Na drugi stopnji izbere kvantitativne postopke v skladu z reprezentacijo problema. Na tretji stopnji pa izvrši postopke, da bi lahko oblikoval odgovor naloge. Uspešno reševanje MBN zahteva zmožnost razumevanja zastavljene naloge, prepoznavanje pomembnih informacij, vizualno predstavitev naloge, pripravo načrta za reševanje naloge, razmislek o možnih rešitvah in odgovorih ter izvedbo izračuna in preverjanje rešitve. Obenem pa zahteva tudi zmožnost vodenja in spremljanja lastnega procesa razmišljanja med samim izvajanjem procesa reševanja naloge s samoregulacijskimi strategijami, kot so samoinštrukcije z opornimi vprašanji (Montague, 1992, v Karabulut in Özmen, 2018). Raba samoregulacijskih strategij pomembno vpliva na uspešnost reševanja MBN.

Učenje postopka reševanja matematičnega MBN mora potekati postopno in sistematično. Najprej učenci rešujejo enostavne naloge (npr.: nastavi 4 rdeče in 2 zeleni kocki, pobarvaj tri rumene in dve modri roži, trak s 6 kvadrati, ki mu odrežemo 2 kvadrata itn.). Učitelj modelira potek reševanja naloge na konkretni in simbolni ravni. Učenci kasneje dobijo ilustracije in podane račune in sestavijo besedilne naloge, ki jih med seboj primerjajo in izračunajo. Sledi reševanje enostavnih odprtih nalog v poznanih kontekstih (t. i. naloge realistične matematike), ki vključujejo ilustracije brez besedil in omogočajo reševanje MBN z različnimi strategijami (npr. naloge nakupovanja). Sledi sistematično direktno poučevanje strategij MBN, ki je sicer dolgotrajno, a učinkovito tudi za učence v PP NIS.

Ker imajo učenci v PP NIS običajno omejitve pri učinkoviti rabi kognitivnih in metakognitivnih strategij reševanja MBN, je treba te strategije prilagajati in učence sistematično učiti kognitivne strategije reševanja MBN (npr.: branje naloge, opisovanje z lastnimi besedami, predvidevanje rešitve, vizualno ponazarjanje naloge, načrtovanje rešitve, računanje, preverjanje itn.) in metakognitivne strategije (npr.: razvijanje in aktiviranje predhodnega znanja, razgovor o uporabljenih strategijah, sledenje korakov postopka, preverjanje itn.). Učitelj to doseže z modeliranjem v okviru direktnega procesa poučevanja (Karabulut in Özmen, 2018). Za učence

v PP NIS je učinkovita 5-stopenjska strategija reševanja MBN in druge podobne strategije. Nujna je postopnost v zvezi z jezikovno zahtevnostjo, reprezentacijo in kompleksnostjo nalog.

S 5-stopenjsko strategijo reševanja MBN učence iz PP NIS seznanimo v drugem ali tretjem vzgojno-izobraževalnem obdobju, kar je odvisno od posebnih potreb učencev, a predpogoje razvijamo od začetka izobraževanja naprej. Strategija je namreč učinkovita takrat, ko učitelj predhodno učence **sistematično poučuje predpogoje reševanja** pri matematiki in drugih predmetih, kot so: *branje z razumevanjem, določanje ključnih besed, ponazarjanje naloge, načrtovanje rešitve naloge in računanje ter preverjanje pravilnosti rešitve*. Ko učenci obvladajo predpogoje reševanja MBN, z učiteljevim modeliranjem in oporami usvojijo postopek reševanja. Posebno pozornost pa mora učitelj nameniti še učenju izrazja in vizualnim ponazoritvam. Direktno poučevanje korakov postopka reševanja MBN vključuje tudi samoinštrukcije.

Pri učenju 5-stopenjske strategije učenci z direktnim poučevanjem spoznajo korake reševanja. Učencem so za boljše pomnjenje korakov postopka v pomoč tudi kartončki (individualni in razredni) z mnemotehnikami, npr. **5 P** z napisanimi ključnimi besedami (**preberi, podčrtaj, ponazori, pripravi in preveri**) korakov postopka reševanja MBN. Na začetku učitelj učencem ob vsakem koraku postavlja vprašanja, potem ga vodi s kartončki z vprašanji in postopoma prehaja na samoinštrukcije.

1. **Preberi in ponovi nalogo** (Učenec počasi z razumevanjem prebere nalogo, jo ponovi po svojih besedah in se ob tem vpraša: »Ali sem natančno prebral nalogo? Ali jo razumem?«)
2. **Podčrtaj ključne besede** (Učenec podčrta ključne besede, ki opredeljujejo problem naloge, ob tem si reče: »Ker sem natančno prebral nalogo, bom znal podčrtati ključne besede.« Če pa ne zna poiskati ključnih besed, si reče: »Ponovno bom natančno prebral nalogo in določil ključne besede.«)
3. **Ponazori nalogo** (Učenec laže razume nalogo, če jo ponazori. Prehaja od konkretne do grafične ponazoritve podatkov. Reče si: »Kako lahko predstavim podatke naloge?«)
4. **Pripravi načrt reševanja naloge in reši nalogo** Na tej stopnji učenec ugotovi, katero aritmetično operacijo bo uporabil (za oporo napiše aritmetični znak ali znake v zaporedju izvedbe ene ali več operacij) in potem reši račun. Ob tem si reče: »Naredil bom načrt, zato me zanima, kaj me naloga sprašuje, katero operacijo bom uporabil, da bom rešil nalogo.«

5. **Preveri korake** (ponovno preveri pravilnost reševanja vseh predhodnih korakov postopka reševanja MBN). Reče si: »Preveril bom, ali so vsi koraki pravilno narejeni.«

Primer poučevanja korakov 5-stopenjske strategije reševanja MBN

Učitelj najprej prikaže učencem 5-stopenjsko strategijo reševanja MBN z direktnim poučevanjem korak za korakom, ob upoštevanju potreb učencev zelo natančno in razumljivo opisuje postopek reševanja MBN. Direktni trening usvajanja korakov postopka reševanja MBN vključuje naslednje korake:

- *Učitelj modelira postopek reševanja MBN korak za korakom (ilustrira pravila reševanja določenega tipa naloge, razloži problem in na plakatu predstavi korake strategije reševanja konkretnega problema).*
- *Nato učitelj predstavi plakat s koraki 5-stopenjske strategije reševanja MBN, na katerem manjka del postopka rešitve MBP (vsak učenec dopolni postopek reševanja z manjkajočim korakom in takoj dobi povratno informacijo o pravilnosti dopolnitve strategije (z DA/NE-kartončki) ter potem dobi še več priložnosti za iskanje manjkajočih korakov v strategiji reševanja MBP).*
- *Učitelj razdeli učence v pare, da bi pomagala drug drugemu pri dopolnjevanju korakov postopka problema ali MBP. Učitelj pregleda rešitev in učencema posreduje ustrezno povratno informacijo.*
- *Sledi individualno delo tako, da vsak učenec samostojno reši MBP.*

Učenci strategijo redno uporabljajo pri reševanju različnih MBN. Čim več različnih MBN učenci rešijo, tem bolj razvijejo strategije reševanja.

Učenci v PP NIS bodo uspešneje reševali različne vrste matematičnih nalog, če bodo zato imeli dovolj časa, bodo deležni direktnega poučevanja z modelom KSA, pred učenjem same strategije se bodo učili uporabe kognitivnih in metakognitivnih strategij, preverjali bodo uspešnost svojih dosežkov ter dobili pozitivno naravnano povratno informacijo.

2.2.5 Prilagoditev učnega okolja

Pri načrtovanju in uresničevanju posebnih vzgojno-izobraževalnih potreb učencev iz PP NIS ima pomembno vlogo spodbudno učno okolje. Učitelj s prilagajanjem učnega okolja učencem omogoča učinkovitejše učenje. V šolski praksi je uporabna delitev učnega okolja na *fizično*,

didaktično, socialno in kurikularno okolje (Jereb, 2011). Fizično in socialno okolje se redkeje prilagajata, kurikularno okolje učitelj prilagaja za vsak vsebinski sklop, didaktično okolje pa mora prilagoditi za vsako učno uro. Sistematično načrtovanje prilagajanja učnega okolja pomembno vpliva na kakovost poučevanja in učenja učencev iz PP NIS.

V sklopu prilagoditev **fizičnega učnega okolja** učitelj poskrbi za: čist zrak v razredu, razporeditev klopi v skladu z načrtovano obliko dela (frontalno, skupinsko, individualno, delo v parih). Pri individualnem reševanju matematičnih nalog za učenca z motnjo pozornosti je treba zagotoviti reševanje nalog v mirnem kotu (omejenem prostoru s panoji, da je učenec izpostavljen manjšemu številu dražljajev), dodano mizo s potrebnimi matematičnimi učnimi pripomočki, plakati po stenah (npr.: s koraki računskih postopkov, poštrevanko, formulami itn.) in druge prilagoditve v prostoru.

Didaktično učno okolje se spreminja vsako uro in vključuje: multisenzorno predstavitev učnih vsebin, rabo različnih učnih pripomočkov, opor in orodij, digitalne tehnologije (npr. uporabo računalna z osnovnimi računskimi operacijami, če ne preverjamo avtomatizacije dejstev in postopkov), prilagoditve učnih listov (npr.: ustrezen fond pisave, barvna podlaga, več prostora, skice, slikovna gradiva, barvne in grafične opore, delitev informacij na dele, dodani koraki postopkov, fotokopije ob večjih motoričnih primanjkljajih itn.) in prilagajanje pisnih preverjanj in ocenjevanj znanj (možnost izkazovanja znanja na različne načine in ne le pisno, prilagoditev oblike nalog podobno kot pri učnih gradivih, več časa, več ustnega preverjanja znanja, individualizacija in diferenciacija zahtevnosti nalog itn.) ter načrtovanje domačih zadolžitev (naloge so skrbno izbrane, kriterij je kakovost in ne količina nalog). Pričujoči dokument praktično v celoti govori o didaktičnem učnem okolju, zato smo krajši opis uporabili le zato, da bi se vzpostavila razlika do preostalih učnih okolij.

Socialno učno okolje ne vpliva le na počutje posameznika, ampak tudi na uspešnost pri učenju matematike. Učenci potrebujejo razumevajočega učitelja s pozitivnimi stališči, ki je v svojem odnosu in ravnanju zgled učencem in učiteljem, postavlja jasna pravila in meje vedenja, ima ustrezna pričakovanja do učencev, partnerski odnos s starši in učenci, skrbi za spodbudno klimo ter dobro sodelovanje z vrstniki.

Kurikularno učno okolje vključuje kakovostno poučevalno prakso z individualizacijo in diferenciacijo zahtev, prilagajanje zahtevnosti nalog vzgojno-izobraževalnim potrebam učencev, časovne prilagoditve, tudi učenje bolj splošnih strategij, kot so: organizacija dela, konstruktivno reševanje problemov v procesu učenja, organizacijske veščine, metakognitivne

veščine (npr. samokontrole pri reševanju nalog), razvijanje motivacije do učenja matematike, vnaprejšnji dogovori (o spraševanju, učenju) itn.

3 STROKOVNO DIDAKTIČNA OBRAVNAVA MATEMATIČNIH VSEBIN PO SKLOPIH IZ UČNEGA NAČRTA

Namen tega poglavja je predstaviti temeljne matematične pojme z vidika strokovne in didaktične obravnave. Vsekakor ni mogoče izčrpati razsežnosti poučevanja matematike na tem mestu, a kljub temu želimo učitelja opremiti z nekaterimi najbolj bistvenimi poudarki didaktike matematike. Učitelj, ki matematični pojem dobro razume, se zaveda njegove razsežnosti in njegove umeščenosti v širšo matematično pojmovno shemo, bo lahko izvajal kakovostno poučevanje. Ob tem je prav gotovo učenec, ki potrebuje določene prilagoditve, na osrednjem mestu. V tem dokumentu smo podali usmeritve, ki so učitelju v pomoč pri razumevanju didaktično-matematičnih pojmov, njihovega horizontalnega in vertikalnega povezovanja v osnovni šoli in načrtovanju pouka. Nakazali smo precej polemik pri izbiri in pomenu različnih reprezentacij, s čimer želimo učitelja spodbuditi h kritičnemu razmisleku, katero ponazorilo izbranega pojma je ustrezno tako z vidika obravnavanega pojma kot z vidika potreb učenca. Konkretna ponazoritev ni vedno "rešitev" za matematične težave, ker je treba najprej ugotoviti, kaj je vzrok težav (poznavanje postopka, branje z razumevanjem, priklic dejstev, rezoniranje ...) in nato poiskati ustrezno didaktično rešitev v vsaki učni situaciji posebej. Nekatere odgovore smo podali v besedilih pri posameznih temah oz. sklopih. Poudariti želimo še, da je ponavljanje v matematiki pomembno; ne smemo ga razumeti kot pouk, ki ne temelji na razvijanju razumevanja. Preprosto gre za to, da učenec pri posameznih vsebinah potrebuje veliko vaje, katerih uspešna rešitev po opravljenem ponavljanju mu daje gotovost v svoje znanje in možnosti za napredovanje. Treba je še odmisлити, da bo učenec znanje kreiral sam – sodeloval bo v procesu kreiranja znanja ob vodenju učitelja, v sodelovalnem dialogu z učenci, ki izhaja iz poznavanja učnega načrta in vodi pouk po smernicah, ki zagotavljajo njegovo kakovost.

Strokovno didaktične usmeritve so zapisane po sklopih oz. temah. S tem želimo učitelja spodbuditi, da se seznani z razvojem posameznega pojma od prvega razreda naprej. Ključne matematične pojme, o katerih v nadaljevanju razpravljamo in so predmet učnega načrta, smo zapisali ležeče. V okviru posamezne teme smo nekatere izraze in pojme kratko pojasnili, s čimer želimo zagotoviti čim bolj enotno razumevanje strokovno didaktičnih izrazov učiteljev, ki poučujejo matematiko v PP NIS. Posebej poudarjamo, da smo pri opredeljevanju teh izrazov sledili cilju razumljivosti zapisanega z vidika šolske matematike, nekoliko manj pa

matematičnemu formalizmu. Pri opredelitvah izrazov nismo presegli njihovih pomenov z vidika učnega načrta, za katerega so ta priporočila oblikovana.

3.1 ARITMETIKA IN ALGEBRA

Kratka pojasnila nekaterih izrazov iz učnega načrta:

Številski trak: trak, na katerem so v kvadratkih zapisana naravna števila (zapis števil je tak, da so števila prikazana kot diskretne enote – med posameznima številoma ni mest za druga števila). Pomembna značilnost številskega traka je ta, da ima opredeljeno začetno in končno število.

Številski poltrak: poltrak, na katerem je v izhodišču zapisano število 0, nato pa so predstavljena naravna števila tako, da so med dvema sosednjima naravnima številoma enake razdalje. Pri številskem poltraku, na katerem so prikazana števila do 1000, pa so npr. vidne enake razdalje med sosednjima stoticama ... Te "razdalje so polne števil", ki pa jih učenci še ne poznajo, niso pa števila prikazana kot diskretne enote. Videti je že, da so števila tudi vmes (v višjih razredih jih bomo skladno z učnim načrtom dopolnili z nekaterimi racionalnimi števili).

Številska premica: premica, na kateri lahko prikažemo negativna in pozitivna cela števila, število 0 in racionalna števila.

"Prazna" številka premica: zgolj črta, na katero učenci samostojno zapisujejo števila (lahko le približno) in pri tem izkazujejo znanje o velikostnih odnosih med števili, tudi zakonitosti zapisovanja števil (npr. enotne razdalje med posameznimi desetiški števili).

Modeli desetiških enot: so konkretni pripomočki za prikazovanje tisočice, stotice, desetice in enice, ki nastopajo v različnih izvedbah (ena palčka – enica, snop desetih – desetica, 10 snopov – stotica; ena link kocka – enica, deset – desetica ...). V kompletu modelov, v katerem je tudi tisočica, pa so najpogostejše leseni ali plastični modeli, običajno z zarezi, ki prispevajo tudi h količinski predstavi števil in odnosov med njimi.

3.1.1 Naravna števila in število 0 ter cela števila

3.1.1.1 Predštevilsko obdobje

Ob vstopu v šolo ima učenec že nekaj izkušenj z matematiko, predvsem s števili, oblikami in količinami. Šolska aritmetika se praktično začne z razvrščanjem objektov glede na izbrane lastnosti, kajti predmeti s tem, ko so razvrščeni v skupine (množice), za otroke postanejo števni. Če imamo denimo sadeže in jih razvrstimo v skupine češenj, jagod, malin ..., bodo učenci

enostavneje določili število članov (elementov) posamezne skupine oz. povedali, kaj so prešteli. Seveda je mogoče preštrevati tudi predmete heterogenih množic, a pri tem lahko pri mlajših učencih nastopi težava v tem, da ne znajo opredeliti, kaj so prešteli (če bi npr. imeli 5 miz, 3 stole in 3 omare, bi učenec sicer lahko ugotovil skupno število predmetov, a ko bi moral povedati, kaj je preštel, bi lahko imel težave pri opredelitvi sekundarnega pojma, torej kosov pohištva; enaka situacija bi se zgodila, če bi imel na voljo trikotnike, kroge in kvadrate – števila predmetov (moč množice) ne bi zmožl izraziti v številu likov). Več smo o vsebinah, ki so ključne za usvajanje števil in tudi drugih pojmov v matematiki, zapisali pri temi druge vsebine, v sklopu o logiki in jeziku. Poudarjamo, da strokovnega izrazja, kot npr.: množica, moč množice, element, ne uporabljamo pri poučevanju matematike. Uporabljamo izraze, kot so skupina, član (besedo član v konkretni situaciji nadomestimo z imeni objektov ali oseb, ki predstavljajo skupino), število članov skupine.

3.1.1.2 Uvajanje v štetje

Števila spoznavamo postopoma, najprej na konkretni ravni oziroma s preštevanjem. Da bi učenec lahko uspešno štel, mora usvojiti načela štetja: 1) konstantnost vrstnega reda števil, 2) povratno enolično prirejanje, 3) neodvisnost števila preštevancev od narave preštevancev in 4) neodvisnost od vrstnega reda štetja. Poglejmo si vsako načelo podrobneje:

1. Vrsti red števil je določen, štejemo z naravnimi števili in sicer 1, 2, 3, 4 ... in zadnje število, ki ga izrečemo, ko štejemo predmete in upoštevamo načela štetja, določi število teh predmetov.
2. Pri štetju predmetov dane množice nobenega predmeta ne smemo izpustiti ali šteti dvakrat. V matematiki temu procesu rečemo tudi prirejanje eden enemu in na preprost način kot vpeljavo v štetje lahko uvajamo prirejanje eden enemu z vzpostavljanjem odnosa med elementi dveh skupin (npr. imamo skupino otrok in skupino žog in se vprašamo, ali ima vsak otrok svojo žogo – odnos lahko nakažemo tako, da povezujemo s črto pare "otrok – žoga" in če otroci ostanejo brez žog, pomeni, da je žog več kot otrok, lahko je obratno ali pa je žog ravno toliko kot otrok), s čimer ugotavljamo brez štetja, v kateri množici je več predmetov oz. manj ali pa jih je enako. Več o tem načelu je mogoče prebrati v sklopu o logiki in jeziku.
3. Število elementov v množici ni odvisno od velikosti elementov, od njihove postavitve, barve, oblike ... Tri zrna riža je enako mnogo kot tri omare.
4. Elemente dane množice lahko štejemo v poljubnem vrstnem redu, pomembno je le, da vse preštejemo. Parkirana vozila pred blokom lahko štejemo npr. od leve proti desni ali

obratno in se število ne bo spremenilo. Seveda bi lahko najprej prešteli vse modre, nato vse rumene in na koncu bele ali pa bi ubrali drugačno pravilo, a se končno število avtomobilov ne bo spremenilo.

Pri učenju štetja so pomembne vse vrste štetja: naprej, nazaj, v zaporedju in druge vrste.

Primer strategij štetja nazaj

Poznavanje strategij štetja učitelju pomaga pri izbiri pripomočkov za posameznega učenca. Primer naloge: *Marko je v razredu, ki ima na vratih napisano številko 6, in gre do prijateljevega razreda, ki ima na vratih številko 3.* Učenec lahko uporabi različne strategije štetja nazaj, saj učenec pri štetju nazaj najprej hodi po hodniku in bere številke od 6 do 3 na vratih razredov, potem so vrata brez številke predstavljena na sliki, ki ponazarja problem naloge. Učenec šteje naprej od začetka do izhodiščnega števila (1, 2, 3, 4, 5 in vsakič napiše eno številko na vrata, npr. 5, potem ponovno šteje do 4 in na vrata napiše 4 itn.), lahko šteje ob sliki od 3 naprej do 6 in vpisuje številke vrat, mimo katerih gre Marko, potem šteje nazaj s slikovno oporo. Končni cilj je miselno štetje nazaj.

3.1.1.3 Štetje do 20

Zgornja načela predstavljajo izhodišča za načrtovanje dejavnosti štetja v šoli. Učenci najprej načela usvojijo v manjšem obsegu števil, nato pa jih uporabljajo tudi pri večjem obsegu, takem, pri katerem je štetje še smiselno, najpogosteje nekje do 100. Pri načrtovanju izkušenj štetja je potrebno zajeti vsa načela, da bi učenec prešel od preštevanja – zgolj naštevanja števil – k dejanskemu štetju. Pomembno je, da šteje najprej predmete, ki jih lahko premika, omogočimo pa mu tudi štetje predmetov, ki jih ne more premikati, se jih pa lahko dotika (npr. različne slikovne ponazoritve), nadalje tudi oddaljene predmete (npr. drevesa ob sosednji hiši), lahko tudi elemente, ki jih ne vidi (npr. za paravanom učitelj nekajkrat udari na boben in učenci določijo število udarcev). Učence postopno seznanjamo s pomenom števila 10 tako, da mu ponudimo niz desetih kroglic na vrvi. Kasneje niz 20 kroglic (10 rdečih in 10 modrih), pri obravnavi števil do 100 pa niz 100 kroglic, izmenoma po 10 rdečih in 10 modrih. Pričakujemo, da ima vsak učenec na razpolago tisti niz, ki ga potrebuje v skladu z obravnavanim številskim obsegom. S ščipalkami lahko učenci označujejo količine (npr. število 23 bo označil na način, da bo ščipalko pripel za 23. kroglico). Pri računanju mu bo tako označevanje količin pomagalo pri pomnjenju količin, s katerimi bo računal.

Števila sočasno ob njihovem pridobivanju tudi zapisujemo s simboli, grafično prikazujemo ter predstavimo na številskem traku. Potrebno je zagotoviti preplet reprezentacij: učenec lahko konkretno reprezentacijo prevede v simbolno (npr. zapiše, koliko avtomobilčkov je na mizi), simbolno prevede v slikovno-grafično (npr. nariše toliko žog, kolikor jih narekuje zapisano število), tudi simbolno v konkretno (npr. zapisano število 5 predstavi s petimi objekti) ipd. Zapomnimo si dvoje: 1) konkretna reprezentacija je pomembna, a le z vzpostavitvijo odnosa z drugimi reprezentacijami dobi pomen, kar pomeni, da sama na sebi ne reši matematičnih težav učenca ter 2) učencu je treba glede na naravo težav prilagoditi reprezentacije oz. mu omogočiti, da izkaže svoje znanje na način, kot ga zmore.

Števila do 20 vpeljemo zelo podobno kot števila do 10. Ko učenci usvojijo števila do 10, to predstavlja izhodišče za vsa nadaljnja števila do 20 – povečujemo 10 po ena in postopoma pridobivamo števila do 20. Učencem ni enostavno šteti od 10 naprej na način, da bi pri preštevanju 13 predmetov, npr. link kock, ki bi bile prikazane kot stolpec 10 kock in tri proste, štel 11, 12, 13 (torej predpostavljal deset v enem stolpcu brez dodatnega štetja), zato ga je te spretnosti potrebno sistematično naučiti. Denimo, da imamo 15 link kock, ki jih učenec najprej prešteje, nato združi 10 kock v stolpec (5 ostane prostih), jih spet prešteje in to ponovi pri različnih številih od 10 do 20. Ob učiteljevi spodbudi oz. ustreznem vodenju bo lahko postopoma poenostavil štetje tako, da ne bo štel po ena, ampak bo vključil desetico, če jo prepozna kot konstanto. Le v tem primeru bo učenec lahko preštel npr. 15 predmetov. Učenec, ki tega ne zmore, mora imeti možnost, da šteje vse predmete. Na podoben način izvajamo štetje kroglic na vrvici. Postavimo ščipalko na izbrano mesto in spodbudimo učenca, da določi število kroglic pred ščipalko. Ker so kroglice označene z barvami (10 modrih in 10 rdečih), bo to učenca postopoma spodbudilo k temu, da ne bo prešteval kroglic od začetka, ampak od 10 naprej, če imamo v mislih števila v drugi desetici oziroma od izbranega desetiškega števila naprej, če se ukvarjamo s števili do 100. Tu ne vpeljujemo desetic, enic, ampak je ključnega pomena, da učenec usvoji, da je združevanje po 10 osnova za hitrejše preštevanje objektov.

3.1.1.4 Število 0

Posebno obravnavo posvetimo številu 0. Pri obravnavi števil do 5, ko še ne vpeljujemo računskih operacij, število 0 predstavimo kot moč prazne množice. Če imamo v eni posodi npr. 3 žogice, v drugi 1 žogico, v tretji pa nobene, bomo k slednji pripisali število 0 na enak način kot bomo k prvi 3 in k drugi 1. To je torej število 0, ki nakazuje odsotnost količine. Isti znak uporabljamo pri zapisu števila 10, kjer ima 0 drugačen pomen, predstavlja številko. Ko pričnemo z odštevanjem v obsegu do 5, pa število 0 dobimo tudi kot rezultat pri odštevanju

(zmanjševanec in odštevanec sta enaka). Učenec spozna torej kar tri pomene števila 0 pri obravnavi števil in računskih operacij do 10.

3.1.1.5 Urejanje števil

Hkrati ob spoznavanju števil ta tudi urejamo in vzpostavljamo odnose med izbranimi številoma: je več, je manj, je enako kot. Če števila konkretno prikažemo, npr. števila od 1 do 20 z link kockami, potem lahko na osnovi višin stolpcev izpeljemo primerjavo števil, jih urejamo. Pri večjih številih odnos temelji na mestu števil na številskega traku – število, ki je bližje številu 0, je manjše od tistega, ki je od 0 bolj oddaljeno.

3.1.1.6 Števila do 100

Pri obravnavi števil do 100 najprej štejemo po 10 do 100 in nato po ena med sosednjima deseticama (učencem poudarimo, da štejemo npr. med 20 in 30 praktično enako kot od 1 do 10, le da pridamo še ustrezno poimenovanje desetice). Poleg štetja objektov, ki jih lahko združujemo po deset (npr. link kocke), števila ponazarjamo tudi z nizom kroglic na vrvici, na številskega traku, v stotičnem kvadratu. Učenci naj pri štetju do 100, poleg štetja po 1 naprej in nazaj (lahko ob različnih ponazorilih), štejejo tudi po 10 od danega števila naprej in nazaj. Pri poučevanju štetja do 100 uporabimo niz kroglic na vrvici (10 rdečih, 10 modrih, 10 rdečih ... do skupaj 100 kroglic), ki naj jih ima vsak učenec pri sebi, učitelj pa niz večjih kroglic za demonstracijo. Za štetje po 10 naprej ali nazaj je prav tako potrebno uporabljati različna ponazorila kot npr. niz kroglic, številskega trak, računalno s kroglicami, tudi stotični kvadrat. Poznavanje štetja po 10 od danega števila, npr. od 15 po 10 naprej, učencu bistveno olajša računanje z dvomestnimi števili. Če imamo denimo račun $25 + 42$, je zelo pomembno, da zna učenec številu 25 najprej prišteti 40 (torej dodaja po 10 od 25 naprej), nato pa še 2, s čimer pravzaprav pokažemo, da seštevanje dvomestnih števil temelji na znanju štetja do 100 na različne načine. Enako velja tudi za odštevanje v tem obsegu, le dodajanje zamenjamo z odzemanjem.

Števila v obsegu do 100 prikazujemo tudi na stotičnem kvadratu, da bi učenci uvideli, seveda ob pomoči učitelja, da velja med števili določen "red": števila so v stolpcih "poravnana" glede na enice, v posamezni vrstici so števila, ki imajo enako število desetic, razen zadnjega števila v vrsti, lahko poiščemo števila, ki imajo enako število desetic kot enic ... Ni pa stotični kvadrat primeren za računanje s prehodom, ker je postopek premikanja po stotičnem kvadratu v tem primeru zahteven, zato uporabimo številskega (pol)trak. Stotični kvadrat je uporaben za iskanje določenega števila, predhodnika, naslednika danega števila, števil med danima številoma znotraj dane desetice, preskoke po 10 naprej in nazaj, za štetje v zaporedju ...

Za učenca je pomembno, da zna določiti velikostne odnose med števili in mu je lahko naslednji postopek primerjave števil po velikosti v pomoč. Če sta na mestu desetice različni številki, potem se o velikostnem odnosu med številoma odločimo na osnovi velikosti desetice, če pa sta številki na mestu desetice enaki, o velikostnem odnosu odločata velikosti enic. Enak postopek uporabimo tudi v drugih številskih obsegih. Nekaterim učencem je lahko v pomoč tudi barvna opora (npr.: desetice z eno barvo, enice z drugo barvo). Za učence, ki so jim te opore v pomoč, je treba zagotoviti enako označevanje desetiških enot v vseh obsegih in vseh razredih.

Primer vpeljevanja številskega poltraka

S pomočjo kroglic na vrvici (z 10 ali 20 ali 100 kroglicami v dveh barvah po 5 ali 10 vsake barve), ki visijo na tabli, in individualnih nizov kroglic za učence postopoma pridejo do ponazoritve številskega poltraka. Tridimenzionalna ponazoritev s kroglicami na vrvici omogoča prijemanje in premikanje kroglic, kar nekateri učenci potrebujejo dalj časa. Ker so kroglice dveh barv (po 5 ali 10 ene barve in po 5 ali 10 druge barve), je mogoče tudi hitrejšo štetje po skupinah. Učenci izvajajo veliko vaj štetja kroglic ter seštevanja in odštevanja s kroglicami, ki jih po skupinah zamejujejo s ščipalkami, da so pri štetju in računanju hitrejši in učinkovitejši.

Ko učenci uspešno uporabljajo niz kroglic pri ponazarjanju količin in računanju, učitelj na tablo ob vrvici s kroglicami nariše debelejšo vrvico, ob kateri nariše krožce v enakih barvah in velikosti, kot so kroglice na vrvici. Učenci imajo ob dvodimenzionalni ponazoritvi še vedno možnost preštevanja krožcev in računanja z njimi. Potem pa učitelj na narisani črti označi mesto vsakega krožca (dolžino premera), da dobi črto z enotami v velikosti premera krožcev. Učitelj pove, da se črta lahko nadaljuje brez omejitev proti desni, zato jo imenujemo poltrak. Poltrak z označenimi enotami omogoča ponazarjanje različnih števil (ulomkov, decimalnih števil itn.) in reševanje nalog z njimi z različnimi koraki postopkov vseh štirih aritmetičnih operacij. Korake izvedbe postopka posamezne operacije (npr. pri seštevanju dodajanje števil po 1, po 10 ali drugih skupinah) ponazorijo z loki najprej na tabli in potem tudi v zvezkih. Za uspešnejše računanje s številskim poltrakom učitelj predstavi še barvne opore. Pri seštevanju in množenju začne na levi strani poltraka in loke za korake riše proti desni strani, npr. z rdečo barvo, pri odštevanju in deljenju pa začne na desni strani in loke riše proti levi strani, npr. z modro barvo. Učence mora spodbujati, da vključujejo različne korake reševanja naloge. Ko si učenci ogledajo rešitve drug drugega, spoznajo, da je možno

neko število ali račun predstaviti na različne načine. Npr.: $19 + 7$ ponazorijo z lokom, ki vključuje 10 enot, dodajo še 9 enot in 1, da dobijo novo desetico, ter preostalih 6 enot. Ob vsakem koraku na loku napišejo izračunano število z računskim znakom (odvisno od tega, ali so dodajali ali odvezemali količine) in ob točki stika loka s poltrakom vsoto (10 in 9 je 19 in 1 je 20 in 6 je 26).

3.1.1.7 Števila do 1000

Števila do 1000 lahko sistematično vpeljemo po naslednjih korakih: najprej obravnavamo/štejemo po 100 do 1000 (lahko bi pri tem uporabili ponazoritev števila 100 z modeli desetiških enot, z igralnim denarjem, ponazorili števila na številskem poltraku), nato predstavimo števila med npr. 100 do 200 tako, da štejemo najprej po 10 (enako pri tem lahko uporabljamo modele desetiških enot), nato pa še po ena, npr. od 110 do 120. Bistveno je usvojiti logiko štetja – če znamo šteti do 100 in poznamo zaporedje stotiskih števil, potem gre to štetje bistveno lažje. Za učence lahko pripravimo "delne" plastificirane številske trakove, npr. od 0 do 100, od 100 do 200 ..., ki jih učenci lahko obravnavajo posamično ali s ščipalkami ali sponkami spnejo v ustrezno "dolga" številska trak.

Števila do 1000 prikažemo na številskem poltraku, ki mora biti glede na potrebe razlage oz. ponazoritve števil ustrezno natančen. Če bomo npr. obravnavali zaokroževanje števil na stotico, bomo interval med dvema stoticama, znotraj katerega se nahaja število, ki ga želimo zaokrožiti na stotico, precej natančno določili (bolj natančno o zaokroževanju števil pišemo v nadaljevanju). Ustrezno ponazorilo za števila do 1000 je tudi denar, pri katerem ne ponazarjamo količinske vrednosti neposredno (zapis 100 na bankovcu praktično ničesar ne pomeni z vidika količinske predstave), ampak posredno: večje kot je število na bankovcu, več je ta vreden oziroma več si zanj lahko privoščimo. Pri kovancih pa to ni tako: kovanci, na katerih so enomestna števila, so vredni več kot tisti z dvomestnimi. Razlog je v odnosu cent – evro, a je kljub temu za učence to lahko presenetljiv podatek v smislu "število je večje, a predstavlja manj denarja". Opisana situacija je lahko dobro izhodišče za pogovor s posameznimi učenci.

3.1.1.8 Desetiške enote

Simboli za desetiške enote E, D in S niso temeljna znanja, učencem jih predstavimo nazadnje, ko so že usvojili števila do 100. Ko bodo namreč šteli objekte, ki jih je več kot npr. 50, bodo za lažje preštevanje objekte združevali po 10, kar kasneje, ko je štetje na tak način utrjeno, poimenujemo desetica, preostale objekte, ki jih nismo mogli združiti v skupine po deset ali desetice, pa enice. Deset desetic skupaj bomo imenovali stotica, enako bomo deset stotic opredelili kot tisočica in za vse desetiške enote uporabljali ustrezne simbole. Učitelj te pojme

vpelje deduktivno, čim bolj nazorno, z ustreznimi ponazorili, simboli in poimenovanjem. Opredeljevanje števil z desetiški enotami je formalni matematični jezik, ki ga kasneje uporabljamo pri izvajanju nekaterih računskih operacij, predvsem pri pisnem seštevanju in določenih algoritmičnih pisnega odštevanja, pri katerih z njihovo uporabo želimo poudariti pomen združevanja istovrstnih desetiških enot (npr. enice prvega seštevanca z enicami drugega seštevanca). Sicer pa pojmov tisočica, stotica, desetica in enica ne uporabljamo pri izgrajevanju drugih matematičnih pojmov in z vidika hierarhije v osnovnošolski matematiki nimajo velikega pomena, obvladovanje strukture desetiškega sistema pa je pomembno pri pretvarjanju določenih merskih enot (meter v decimetre, liter v decilitre ...).

Primer direktnega poučevanja pojma stotica

Spoznali bomo desetiško število – stotico (predstavitev cilja).

Učenci po navodilu s ponazorili (npr.: kockami, tabelami, trakovi, nizom kroglic na vrvici itn.) predstavijo desetiške enote različnih dvomestnih števil (npr. število 23 ima 2 desetice in 3 enice) (preverjanje predznanja).

Učitelj pokaže ponazorilo s sto kroglicami na vrvici (po 10 rdečih in 10 modrih), ki jih učenci preštejejo, učitelj pa pove, da sto kroglic ponazarja stotico. Poudari povezavo modela stotica z verbalno označbo in zapisom besede ter simbola stotica – S (učiteljevo modeliranje). Postopek modeliranja ponovi še z dvema vrstama drugih pripomočkov (npr.: s kockami, z denarjem itn.) za različne ponazoritve stotic. Na enak način ponazori vsaj po tri primere stotic s slikovnim materialom in kasneje izvede še modeliranje na simbolni ravni z vsemi tremi vrstami simbolnega zapisa (300, tristo, 3 S).

Sledijo različne vaje s prehodom od konkretnih do simbolnih ponazoritev stotic v določenem številu. Učenci delajo vaje v skupinah, parih ali individualno (vodene vaje). Učitelj pove število (npr. 400). Učenci vsak zase nastavijo ustrezne pripomočke (konkretne ali grafične ponazoritve) za 4 stotice in potem med sabo primerjajo rešitve. Kasneje določajo stotice v številih brez ponazoril le z verbalno povezavo z ustreznim številom stotic. Ena skupina učencev oziroma en učenec skupine ob vsakem primeru glasno predstavi s pripomočki (kasneje s slikovnim materialom in potem le simbolno) stotice v danem številu. Ostali učenci pa pravilnost rešitve prikažejo s kartončki DA/NE (povratna informacija).

V nadaljevanju (v naslednjih urah) učitelj modelira desetice in enice v treh trimestnih številih, v katerih eksplicitno določa število desetic v trimestnim številom z opisom in ponovi prikaz

pripomočkov za ponazoritev stotic, desetic in enic. Postopek lahko opiše na naslednji način: število 328 sestavljajo 3 stotice (pokaže številko 3 in jo poveže s 3 ploščami s po 100 kockami), dve desetici (pokaže številko 2 in jo poveže z 2 stolpoma s po 10 kockami) in 8 enic (pokaže številko 8 in jo poveže z 8 kockami) ter nadaljuje z drugima dvema primeroma (učiteljevo modeliranje). Na steni je lahko plakat s primeri ponazorjenih desetiških enot in dodanimi zapisi z besedami in številskimi simboli.

Učenci v parih najprej z didaktično igro s ponazorili naredijo številne vaje zamenjevanja enic (E) v desetice (D) in desetic v stotice (S). Te vaje so tudi pomembna osnova za pretvarjanje različnih merskih enot. *Na A5-poli papirja so označena 3 enako velika, a dovolj velika polja, eno za E, eno za D in eno za S. Učenci v paru mečejo po 2 kocki s pikami in glede na dobljeno število pik nastavijo kocke v polje enic, če jih je več kot 10, jih 10 združijo v stolp za ponazoritev D in stolp postavijo na polje D, ostale ostanejo na polju E. Nadaljuje drugi učenec v paru. Zmaga tisti, ki prvi dobi 10 stolpov oziroma eno stotico (vaje).* Učenci za vajo prehajajo pri ponazarjanju stotic, desetic in enic števil od rabe konkretnih ponazoril, slikovno-grafičnih do simbolnih (vaje). En učenec vedno glasno pove in predstavi najprej s pripomočki, kasneje s slikovnim materialom in potem brez ponazoritev, le s simboli število stotic, desetic in enic v danem številu. Ostali učenci pa pravilnost rešitve prikažejo s kartončki DA/NE (povratna informacija). Učitelj dobi takojšnjo povratno informacijo o znanju učencev. Sledijo individualne vaje. Učencem s težavami pri določanju desetiških enot v številu učitelj individualno ali skupinsko ponovno opiše postopek predstavitve mestnih vrednosti, prilagodi vaje in ponazoritve ter jim omogoči dovolj časa za vaje.

3.1.1.9 Večja števila od 1000

Števil nad 1000 ne vpeljujemo enako sistematično kot do 1000, bomo pa najprej šteli po 1000 do 10 000, nato po 100 med izbranimi tisočicama in pokazali logiko branja števil, pri čemer spet velja, da je potrebno znati šteti do 100 in prepoznati tisočico na prvem mestu danega štirimestnega števila. V učnem načrtu smo zapisali, da učenec pozna števila do 10 000, jih bere, zapiše in ureja. Vsekakor pri tako velikem obsegu števil ne operiramo več v tolikšni meri s konkretnimi materiali (tudi pozicijsko računalno je namenjeno le mestni vrednosti števil, ne pa ponazarjanju velikosti števil), ampak učenca sistematično navajamo na branje in urejanje teh števil. Slednje temelji na primerjanju števil: če sta obe števili, ki ju primerjamo štirimestni,

potem zadostuje že primerjava prvih števil pri obeh številih, da določimo velikostni odnos. Priporočamo sistematično obravnavo: najprej primerjamo dve štirimestni števili, pri katerih je dovolj primerjava prvih dveh števil (recimo temu prva stopnja), nato je pomembna druga številka, ker je številka na mestu tisočic enaka ... Učenec, ki utrdi znanje, npr. na prvi stopnji, bo lahko na osnovi novega, različnega primera še bolje dojel pravilo ali vzorec pri primerjanju števil na prvi stopnji in tako naprej. Z drugimi besedami, učenčevo ponavljanje ene vrste naloge, dokler je ne usvoji, mu omogoča, da pri reševanju drugačne vrste nalog ugotovi pravilo ponavljanja prve vrste nalog zaradi nastale razlike, ki jo je zmožen prepoznati, ker je reševanje ene vrste nalog dovolj utrjeval/ponavljal.

Razdalje na številske (pol)traku uporabljamo tudi *pri zaokroževanju števil*. Če npr. želimo zaokrožiti trimestno število na stotice, potem za dano število, ki ga želimo zaokrožiti, pogledam, kateri stotici je dejansko bližje. Pri tem pa je treba sprejeti še dogovor, da številka 5 v številu, npr. v 350, ki je od 300 in 400 enako oddaljeno, pomeni zaokrožitev navzgor, v našem primeru na 400. Enako pravilo zaokroževanja uporabimo pri kateremkoli zaokroževanju. Tudi pri zaokroževanju števil spodbujamo učence, da uporabljajo svoje "delne" številske trakove, ki smo jih že predstavili v tem dokumentu.

Števil, večjih od 10 000, ne obravnavamo več sistematično, ampak jih predstavimo v izbranih kontekstih, npr.: pri podatkih o državah, cenah, večjih razdaljah med kraji ... Učencem predstavimo logiko izrekanja števil, ki pa bo za večino učencev precej problematična, če ne bomo pričeli s čistimi desetstotnicami (10 000, 20 000, 30 000 ...), nato pa nadaljevali s petmestnimi števili, ki imajo le še na mestu tisočic števko, različno od 0 (11 000, 12 000, 13 000 ...). Pri zapisu števila lahko uporabimo tudi piko, npr. 12 000, kar učencu olajša branje števila. Ko učenci usvojijo branje teh števil, pa lahko nadaljujemo spet tako, da nadomestimo številko 0 na mestu stotic z drugo številko in tako naprej. Večja števila urejamo na enak način, ki smo ga že predstavili. Sistematično lahko postopamo tako, da pri obeh petmestnih številih podčrtamo prvo števko in ju primerjamo. Če nista enaki, že vemo, katero število je večje, če pa sta, postopek nadaljujemo. Podčrtamo pri obeh drugo števko, ju spet primerjamo in določimo velikostni odnos, če nista enaki. Če sta, postopek nadaljujemo. Učitelj bi pri tovrstnih primerih lahko stopnjeval zahtevnost pri tistih učencih, ki zmorejo več, sicer pa primerjanje petmestnih števil, ki se razlikujejo npr. le pri deseticah, pri vseh večjih desetiških enotah pa se ujemajo, ni temeljni cilj. Pomembnejše je, da učenec ve, da je 12 000 manjše kot 15 000, saj so praktično podatki, s katerimi operiramo v življenju, predstavljeni na tak način. Bistveno pomembnejše je

zaokroževanje števil, saj je ta večšina pomembna tudi pri ocenjevanju rezultatov pri računskih operacijah, ne nazadnje tudi pri določanju približkov v vsakdanjem življenju.

3.1.1.10 Cela števila

Negativna cela števila učencem predstavimo le v kontekstu, ki je učencem poznan. Pomembno je, da učenec zna celo število prebrati (tu ne gre za velika števila) in ga tudi zapisati, npr. temperaturo pod lediščem, znesek na računu, ki je manjši od 0 ...

Primer rabe številske premice

Redki učenci v PP NIS bodo sposobni preiti s ponazarjanja števil na številske poltraku na samostojno uporabo prazne številske premice za ponazarjanje različnih vrst števil in različnih računskih operacij. Potreben je prehod od konkretnega niza kroglic, dvodimenzionalne ponazoritve niza kroglic, narisane vrvice do prazne premice. S premico bodo lažje ponazarjali naloge kot npr.: *Zjutraj je bila temperatura -2 stopinje C, opoldan pa 11 stopinj C. Za koliko stopinj se je od jutra do opoldneva segrel zrak? Učenec na premici označi 0 stopinj in potem z lokom proti levi strani označi -2 stopinji ter od ničle proti desni označi $+11$ stopinj. Z loki nariše korake prehoda od -2 do 11 stopinj (npr.: nariše lok od -2 do 0 in na zgornjem delu loka napiše 2 , od 0 do 10 na zgornjem delu loka napiše 10 in nad lokom od 10 do 11 napiše 1) ter sproti piše vsote posameznih korakov ob enoti, ob kateri se lok dotika premice in ugotovi, da se je zrak ogrel za 13 stopinj.*

3.1.2 Računske operacije in njihove lastnosti

Učenec se na intuitivni ravni seznani z računskima operacijama seštevanje in odštevanje z dodajanjem oziroma odvzemanjem objektov od dane skupine objektov. Obstaja več različnih situacij, ki jih lahko uprizarjamo za namen prikazovanja dodajanja in odvzemanja, npr.: vstopanje v avtobus ali izstopanje (kar smo že prikazali v tem dokumentu), varčevanje denarja ... Sistematična vpeljava seštevanja običajno izhaja iz združevanja dveh množic objektov, ki so si podobni, a jih lahko tudi razločujemo, npr. združimo množici rdečih in zelenih jabolk. Pri odštevanju pa izhajamo iz odvzemanja, torej imamo izhodiščno množico objektov, ki ji število teh zmanjšamo z odvzemanjem, kar pomeni, da ne prikazujemo zmanjševanja in odštevanja z npr. različnima barvama, kot to storimo pri seštevanju, da ločimo seštevanca (s tem dosežemo razlikovanje med seštevanjem in odštevanjem).

Združeno množico prikažemo tudi simbolno, in sicer z računom seštevanja, npr. $3 + 2 = 5$ in učence naučimo račun seštevanja prebrati. Prikazujemo pa račune seštevanja tudi grafično, in sicer tako, da narišemo objekte ene in druge množice ter nakažemo združitev obeh – lahko obkrožimo, podčrtamo, nikakor pa ne rišemo vsote, saj bi pri računu $3 + 2$ imeli 10 narisanih objektov, kar je za učence napačno sporočilo. Bistveno pri slikovno-grafični reprezentaciji je, da lahko učenec rezultat računa razbere s slike. Če imamo npr. 3 zelena jabolka in 2 rdeči in nas zanima, koliko jih je skupaj, jih bomo prešteli – bodisi na konkretni ravni bodisi na slikovni reprezentaciji. Tudi simbolov za operacije ne pišemo pri slikovnih reprezentacijah (ne bomo npr. narisali treh rdečih žog, 2 modrih žog, med skupinama pa znak +), s tem ločimo simbolni zapis od slikovnega. Ni odveč poudariti, da se je z učenci treba dogovoriti, kako interpretiramo slikovne reprezentacije pri matematiki, na kaj smo osredotočeni. Vzemimo npr. grafično reprezentacijo za odštevanje. Za račun $5 - 2$ bi lahko narisali 5 žog in 2 prečrtali, ostale bi 3 neprečrtane, kar je tudi rezultat tega računa odštevanja. Bistveno oz. osnovni namen je, da s slikovno reprezentacijo pridemo do rezultata. Da bi to dosegli pri učencih, moramo sprejeti dogovor o tem, kako prikazujemo račune odštevanja: katero število predstavlja zmanjševanec (vsi narisano predmeti), katero odštevanec (prečrtani objekti) in katero razlika (neprečrtani objekti). Nemalokrat se namreč zgodi, da učenec slikovno reprezentacijo za račun $5 - 2$, kot smo jo predstavili, interpretira kot $3 - 2$, ker vidi 3 neprečrtane žoge in 2 prečrtani. Povsem jasno je, da rezultat, v tem primeru 1, ni prikazan in je zatoj taka interpretacija nesmiselna.

3.1.2.1 Od konkretnega štetja do priklica aritmetičnih dejstev pri računanju v obsegu do 10

Učenec najprej pri računanju izvaja konkretno štetje, nato se pomakne na računanje s prsti (temu rečemo konkretno verbalno štetje), sledi verbalno-mentalno štetje, pri katerem učenec uporablja določene miselne strategije, če jih je seveda ob pomoči učitelja razvil, končno pa gre za priklic aritmetičnih dejstev. Kako lahko učenec razvije miselne strategije pri računanju do 10 oz. do 20? Zelo pomembno je, da učitelj k računanju pristopi sistematično. Ni namreč vseeno, ali učencu pri utrjevanju računanja ponuja na začetku naključno izbrane račune in predpostavlja, da bo učenec sam ugotovil strukturo računanja oz. povezave med računi. Ponudimo mu račune, ki so na določen način povezani oz. omogočajo učencem prepoznati določeno pravilo, npr. pri računih $4 + 1$, $4 + 2$, $4 + 3$, $4 + 4$..., učenec lahko prepozna, da se vsota pri vsakem naslednjem računu od prejšnje poveča za 1; lahko mu ponudimo račune $1 + 1$, $2 + 2$, $3 + 3$, $4 + 4$, $5 + 5$..., ki jih učenec lahko uporabi pri računanju $5 + 7$, ko račun v mislih prevede v $5 + 5 + 2$ itn. Ni mogoče izčrpati vseh primerov na tem mestu, učitelj pa mora natančno premisliti, kakšno vlogo imajo posamezni računi za učenca pri učenju računanja.

Primer vpeljevanja seštevanja s pomočjo številskega traka

Primer: Hana je šest rumenih lončkov in dva zelena lončka postavila na polico enega poleg drugega. Koliko lončkov je na polici?

Učenci na polico zložijo ustrezni količini in barvi lončkov enega poleg drugega. Potem učitelj na tablo nariše polico in nanjo nariše ustrezno število in barvi lončkov. Vsak učenec na rob klopi nastavi kocke enakih barv in količin kot so lončki. Učitelj pa na tabli pod narisane lončke nadomesti lončke s kvadrati podobne velikosti, kot so originalni lončki, in upošteva tudi barvi. Pove, da bodo kvadrate zlepili in dobili trak. Ko na trak napišejo še številke, ga poimenujejo *številski trak*. Učenci dobijo na listu narisane številski trak, na katerem pobarvajo ustrezno število rumenih in zelenih kvadratov za lončke. Ugotovijo, koliko je lončkov posamezne barve in koliko je vseh lončkov. Na trak zapišejo tudi števila. Sledi reševanje različnih nalog seštevanja s pomočjo številskega traku. Računov odštevanja na številske traku ne moremo ponazoriti na enak način, kot smo to naredili za seštevanje.

3.1.2.2 Računanje s prehodom do 20

Pred računanjem s prehodom je treba veliko časa nameniti razdruževanju števil. Učencem npr. ponudimo 8 link kock, ki jih razdružujejo na različne načine in rezultate predstavijo na tabli. Postopek razdruževanja je ključen pri računanju s prehodom, zato mu je treba nameniti veliko časa.

Za učenje računanja s prehodom je bistveno utrjeno poznavanje parov seštevancev, katerih vsota je 10 ($1 + 9, 2 + 8 \dots$), kajti le avtomatizirano znanje teh parov omogoča učencu izvajanje prehoda na način, ki je v matematiki najbolj optimalen (dokler ne razvijemo priklica dejstev, če ga sploh). Pri tem mu ponudimo različne opore za ponazoritev desetice (npr. škatla za 10 jajc – najbolje, da je razrezana in zlepljena tako, da je 10 prostorčkov v eni vrsti), s čimer ga "prisilimo", da prepozna pomen števila 10 pri računanju s prehodom.

Primer poučevanja razdruževanja

Učitelj naj razdruževanje količin in števil predstavi v obliki igre. Učenci najprej razdružujejo množice predmetov, prehajajo na slikovno raven ter zaključijo z razdruževanjem simbolov. Vedno začnemo z življenjsko besedilno nalogo (npr. učenci morajo pospraviti 10 žog v dve

škatli). Najprej učitelj modelira razdruževanje in potem vsak učenec razdruži 10 žog v dve košari in na tablo nariše svoj način razdruževanja 10 žog. Na tabli so tako drug pod drugim nanizani načini razdruževanja učencev. Učitelj potem na tablo nariše tabelo z dvema kolonama, ki ima na vrhu narisanih 10 žog in število 10, in učenci v tabelo s števili vpisujejo vsak svojo razdružitev množice 10 žog. Sledijo različne naloge, ki so le slikovno in grafično ponazorjene. Sledijo vaje razdruževanja enakega tipa nalog z drugimi števili, a brez opore. V naslednjem koraku učenci le miselno razdružujejo število, različne razdružitve zapišejo v tabelo na tablo in v zvezke. Vsako razdružitev danega števila lahko predstavijo tudi v obliki računa seštevanja.

Razdruževanje števila je predpogoj za računanje s prehodom. Če imamo npr. račun $7 + 5$, lahko uporabimo škatlo za 10 jajc, v katero bo učenec zložil najprej 7 rdečih kroglic, nato dopolnil desetico z modrimi kroglicami in ugotovil, da mu preostaneta dva modri kroglici, ki ju zloži v drugo škatlo. Če je usvojil štetje od 10 naprej, bo hitro ugotovil, da je skupaj 12 kroglic.

Če učitelj nenehno preverja in spodbuja učenca k višjim stopnjam računanja in vedno znova ugotovi, da učenec tega ne zmore, bo lahko zaključil, da je ohranil dovolj visoka, a realna pričakovanja in da bi učenec lahko napredoval, če bi lahko. S tem želimo povedati, da mora učitelj do vsakega učenca ohraniti dovolj visoka pričakovanja, saj nizka lahko vodijo v zanemarjanje učenčevih potencialov.

3.1.2.3 Računanje do 100

Računanje do 100 vpeljujemo postopoma. Najprej seštevamo/odštevamo desetiška števila (npr. $20 + 30$, $60 - 40$...), nato prištevamo enomestna števila k dvomestnim brez prehoda (npr. $20 + 6$, $23 + 5$..., $67 - 4$, $55 - 5$...), nato s prehodom (npr. $34 + 8$, $50 - 6$, $53 - 8$...), nato seštevamo in odštevamo dve dvomestni števili brez prehoda ($45 + 23$, $53 - 21$...), nazadnje pa s prehodom (npr. $34 + 29$, $65 - 38$...).

Primer seštevanja desetiških števil

Vedeti moramo, da ponazarjanje v matematiki ni poljubno, ampak natančno določeno, zato je treba pred uporabo različnih reprezentacij natančno opredeliti, kako se s posamezno reprezentacijo rokuje in čemu je namenjena. Če bomo seštevanje desetiških števil, npr. $20 + 30$, prikazali z modeli desetiških enot, bomo s tem pri učencih razvijali številske predstave, ne pa

tudi strategije računanja, ker bo učenec združene desetiške enote, v našem primeru dve in tri desetice, le preštel. Treba je še zagotoviti, da je povezava med pojmom in reprezentacijo čim bolj transparentna, da jo učenec brez večjega napora odkrije in še pomembneje, da podpira cilj poučevanja. V opisanem primeru bi bila reprezentacija procesa izvajanja premikanja v desno – ker gre za $20 + 30$ – na številskem (pol)traku bolj povezana s ciljem, da učenec usvoji računanje z desetiškimi števili. Številski (pol)trak učencu namreč omogoča, da se "postavi" na število 20 in od tega števila šteje naprej, in sicer za 30, in pri tem izgovarja 30, 40, 50, kar je rezultat. Ta proces se bistveno razlikuje od procesa, pri katerem učenec le prešteje vse desetiške enote (pet desetic), ki jih nastavi pri računu $20 + 30$. Sklenemo, da je potrebno oboje: desetiške enote za konkretno predstavitev računanja in za razvijanje količinskih predstav, številski (pol)trak za razvijanje procesa računanja.

Vsak korak je potrebno usvojiti, če se želimo pomikati naprej. Spet bomo za ponazoritev seštevanja uporabili različna konkretna ponazorila (zelo primerne so link kocke, kroglice na vrvici). Kot smo že omenili, predlagamo številski trak, tudi številski poltrak, ki omogoča premikanje proti večjim številom, če seštevamo, in nasprotno, če odštevamo. Ni pa odveč še enkrat poudariti, da je ključnega pomena za računanje dobro štetje do 100, štetje po 10 naprej in nazaj po 10 od danega števila oziroma izvajanje različnih zaporedij števil. Vse omenjene naloge lahko rešujemo ob pomoči številskega (pol)traka. Učenec naj ima števila pred seboj, na številskem (pol)traku, na katerem naj ob učiteljevi spodbudi opazi, da gre pri zaporedjih števil (npr. 3, 6, 9, 12...) za enake razdalje (tudi v fizičnem smislu) med posameznimi števili, da gre za "enako dolge skoke". Posebej je treba poudariti, da na številskem traku 1 pomeni "en premik", npr. od 2 do 3, kar je drug pomen od pomena, da 1 predstavlja en objekt. To je praktično največja ovira za učenca, ko se prvič seznani s številskim trakom v obsegu števil do 20 in z računanjem na njem, zato je potreben dogovor oz. pravilo, ki ga vpelje učitelj. Če imamo torej račun $5 + 3$, se postavimo na število 5 in naredimo 3 poskoke (če številski trak izdelamo na tleh, potem bodo učenci naredili tri sonožne poskoke po poljih) in "doskočimo" na 8. Učenec mora najprej dobro usvojiti pravila rokovanja s številskim trakom, da bi si z njim lahko pomagal. V pomoč pri seznanjanju s tem ponazorilom so nam lahko tudi družabne igre, npr. človek, ne jezi se, pri kateri se premikamo po plošči prav na tak način – naredimo toliko premikov (skokov) naprej, koliko pik vržemo na kocki. Ko je učenec zmožen računati v obsegu do 20, se pomikamo proti računanju v večjih obsegih števil.

Omenimo še računanje z dvomestnimi števili. Učenec lahko računa v več korakih, npr. račun $23 + 45$ zapiše kot $23 + 40$ in $63 + 5$. Morda pa bo rabil še en korak več in bo najprej seštel

desetiški števili ($20 + 40$), nato enice ($3 + 5$) in delna rezultata seštel skupaj. Spet je zelo pomembno, da učenec lahko uporablja številski trak (lahko tudi številski poltrak). Svetujemo, da si učenec številski trak do 100 s pomočjo učitelja, ki pripravi trak in na njem kvadratke za števila, oblikuje sam oz. ob pomoči.

3.1.2.4 Računanje do 1000, pisno seštevanje in odštevanje

Pri računanju v obsegu do 1000 je najprej pomembno, da zna učenec seštevati/odštevati stotiška števila (npr. $300 + 400$, $700 - 200 \dots$), saj bo to znanje lahko uporabil pri ocenjevanju rezultatov pri pisnem računanju. Ko zna učenec seštevati oziroma odštevati s stotiškimi števili, lahko preidemo na pisno seštevanje in odštevanje do 1000. Tu predlagamo, da učenca naučimo postopka računanja. Res lahko demonstriramo seštevanje z modeli desetiških enot, predvsem zaradi tega, da učenec dejansko vidi, da lahko seštevamo skupaj enice, desetice, stotice obeh seštevancev in ne npr. desetic pri enem in enic pri drugem (to je vizualno mogoče prikazati z modeli desetiških enot). Predlagamo, da najprej pisno seštevamo/odštevamo brez prehoda (npr. $123 + 534$, $567 - 324$), nato s prehodom pri enicah (npr. $245 + 339$, $781 - 536$), nato s prehodom pri desetih (npr. $241 + 385$, $518 - 356$), nazadnje pa vključimo oba prehoda (npr. $258 + 179$, $531 - 298$). Postopek, ki ga uberemo, pa je (prikazali ga bomo npr. u pisnega računanja računa $245 + 339$):

1) najprej rezultat ocenimo in sicer tako, da najprej oba seštevanka zaokrožimo na stotice in zapišemo rezultat, ki je naša ocena ($200 + 300 = 500$);

2) računamo po postopku, pri čemer števili zapišemo v tabelo desetiških enot in poudarimo, da začnemo pri najmanjši desetiški enoti (seštevamo: $5 + 9 = 14$, zapišemo pod enice 4, 1 pa k deseticam itn.);

3) primerjamo oceno in rezultat in presodimo o ustreznosti ocene oz. rezultata.

Pri pisnem odštevanju sledi še 4. korak – preizkus. Poudarimo, da pri pisnem odštevanju s prehodom, npr. $534 - 178$, ubesedimo računanje na način: $14 - 8 = 6$ in ne "8 in koliko je 14", saj s takšnim izrazjem odštevanje prevedemo v reševanje enačb. Učenci se bodo morali naučiti, da če izrečemo dvomestno število na mestu posamezne desetiške enote, štejemo "ena naprej" k naslednji (prvi večji) desetiški enoti. Odštevanje s prehodom pri pisnem računanju pri nas temelji na pravilu razlike. To pomeni, da se razlika pri odštevanju ohrani, če zmanjševanec in odštevanelec povečamo ali zmanjšamo za isto število. Pri pisnem odštevanju s prehodom npr. $234 - 116$ bomo zmanjševancu prišteli 10 enic (ker $4 - 6$ ne moremo izračunati), 1 desetico pa bomo prišteli odštevancu in s tem zagotovili, da se bo razlika ohranila in oba koraka nazorno

prikazali v tabeli desetiških enot. Učencem pri pisnem računanju ponudimo različne opore: označevanje začetka računanja, opora za pravilno podpisovanje (mreža, poudarjene črte), pogosto glasno ubesedovanje postopka in drugo.

3.1.2.5 Poštevanka (10 x 10) – množenje in deljenje do 100

V 4. razredu pričnemo tudi s poštevanko. Najprej vpeljemo krajši zapis za seštevanje enakih seštevancev v obliki zmnožka. Gotovo ni odveč vključiti protiprimera, npr. da se zapisa $4 + 5 + 5$ ne da zapisati v obliki zmnožka, v nasprotju s $5 + 5 + 5$, ko je to mogoče zapisati kot $3 \cdot 5$. Za znak krat uporabljamo piko, učencem pa pokažemo tudi simbol "x", ki je običajno na elektronskih napravah, tudi na računalu, katerega uporabo smo vključili med cilji v učnem načrtu. Poštevanka temelji najprej na štetju, torej moramo pri npr. $4 \cdot 5$ najprej vedeti, da nam račun množenja narekuje seštevanje štirih petic (glede na zakon o zamenjavi pa tudi petih štiric) in da je rezultat, v tem primeru 20, tudi zmnožek.

Primer direktnega poučevanja štetja v zaporedju

Na travniku smo nabrali šopek triperesnih deteljic. Naučili se bomo čim hitreje prešteti vse njihove listke (*predstavitev cilja*).

Učenci se razporedijo okrog mize, na katero učitelj razporedi 10 deteljic. Enega učenca spodbudi, da prešteje listke vseh deteljic. Učenec glasno prešteje listke (1, 2, 3, 4 ... do 30). Učitelj z modeliranjem učencem sporoči, da je tako štetje zamudno, zato se bodo naučili hitrejšega štetja. Učitelj šteje po 3 listke vsake deteljice: 3, 6, 9 ... 30. Učencem potem pove, da jim bo pokazal, kako si pri štetju skupin listkov deteljic lahko pomagajo. Učitelj v roke vzame eno deteljico in **polglasno šteje ena, dva in tri glasno pove** ter nadaljuje poudarjeno štetje vsakega tretjega števila od 3 do 30. Učitelj vzame še stolpe s po 3 kockami (posode s po 3 jabolki ...), ki jih učenci skupaj z učiteljem preštevajo po enakem modelu, kasneje preidejo na štetje skupin s 3 elementi na slikovnih ponazoritvah do verbalnega štetja po 3 brez vmesnega tihega štetja števil.

Učenci potem v parih preštevajo različno število predmetov v skupinah po 3, s kombinacijo tihega in glasnega štetja na konkretni, slikovni in simbolni ravni (*vodene vaje*). Učitelj pokliče posamezne učence, ki sami preštevajo skupine s po 3 elementi na vseh treh ravneh (*individualne vaje*). En učenec glasno šteje skupine s po tremi elementi na vseh treh ravneh, drugi učenci pa s kartončki (DA/NE) ugotavljajo pravilnost štetja (*povratne informacije*). V

skladu s posebnimi potrebami izvajajo številne individualne vaje štetja na različnih ravneh ponazoritev.

Pri poučevanju poštevanke lahko uporabimo reprodukcijsko metodo (sistematična obravnava poštevanke, vsake posebej v ustreznem zaporedju) ali pa konstrukcijsko, kjer uporabljamo pri obravnavi novih poštevanek znanje prejšnjih oziroma pri vpeljevanju nove poštevanke znotraj te vzpostavljamo povezave. Ker npr. vemo, da je $2 \cdot 5 = 10$, je $4 \cdot 5 = 20$ ali npr. $9 \cdot 5$ izračunamo kot $10 \cdot 5 - 5$ itn. Zavedamo se, da so to zahtevnejši miselni postopki in da bo za večino učencev primernejša reprodukcijska metoda obravnave. Pomembno pa je, da učencem predstavimo zakon o zamenjavi za množenje, saj jim ta olajša avtomatizacijo poštevanke. Zakon o zamenjavi za množenje lahko pokažemo na način, da npr. na število piškotov, ki so na pladnju zloženi v vrste, pogledamo na dva načina: nekdo jih vidi kot dve vrsti po 5 piškotov, drugi, od strani, pa kot 5 vrst po 2 piškota. Za 10 piškotov imamo torej dva zapisa: $5 \cdot 2$ in $2 \cdot 5$. Ker smo število 10 piškotov opredelili z dvema računoma množenja, izpeljemo enakost obeh računov množenja. Na tem mestu zapišimo še dva zanimiva primera, ki sta lahko učitelju v navdih za iskanje še drugih oblik pomoči za lažjo zapomnitev poštevanke. Da bi si lažje zapomnili rezultat pri npr. $8 \cdot 7$, lahko zapišemo $56 = 7 \cdot 8$ (števila od 5 do 8 nastopajo v vrstnem redu), enako $12 = 3 \cdot 4$. Pri utrjevanju poštevanke je pomembno, da si vzamemo dovolj časa in da se zavedamo, da naštevanje večkratnikov v pravilnem vrstnem redu ne pomeni utrjevanja poštevanke. Poštevanko učenci utrjujejo tako, da govorijo (ali kako drugače prikazujejo) rezultate množenja znotraj poštevanke. Veliko je različnih načinov utrjevanja, ponavljanja – pomembno je, da smo kot učitelji potrpežljivi in vztrajni. Kot smo že zapisali, je treba ohraniti ustrezno visoka pričakovanja.

Primer učenja poštevanke

Eden od pomembnih predpogojev za usvojitev poštevanke je obvladovanje štetja v zaporedju. Pred obravnavo vsake nove poštevanke moramo po modelu KSA uriti štetje v zaporedju, povezanem z obravnavano poštevanko (preštevanje skupin konkretnih predmetov, slikovno predstavljenih množic predmetov, gibov v zaporedju do miselnega štetja v zaporedju). S tem se začne obravnava konceptualnega znanja poštevanke (npr. skoči petkrat po 3 skoke).

Kot vsako novo vsebino tudi poštevanko z besedilno nalogo povežemo z za učenca znano življenjsko situacijo (Marko je naredil 6 stolpov s po dvema kockama. Koliko kock je

porabil?). S konkretnimi predmeti učitelj skupaj z učenci ponazori nalogo ter z vprašalnicami (Koliko je stolpov?, Koliko je kock v enem stolpu?, Koliko je vseh kock?) preverja razumevanje naloge. Učence spodbuja, da z lastno strategijo rešujejo nalogo (nekateri preštevajo vse kocke, spet drugi pa štejejo skupine kock v stolpih). Sledi slikovna ponazoritev naloge z računi seštevanja in izpeljanega množenja. Učitelj na tablo napiše račun seštevanja in z modeliranjem učencem predstavi poštevanko kot hitrejšo obliko računanja, kar ustrezno ubesedi in zapiše v obliki množenja, npr. $6 \cdot 2$. Račune vsake poštevanske skupaj z učenci uredi po vrsti. Vsako poštevanko najprej ponavljajo v urejeni vrsti, sledi ponavljanje večkratnikov in potem ponavljanje poštevanske mešano. Ponavljanje naj poteka krajši čas (okoli 5 minut), a vsak dan, po vseh komunikacijskih poteh, z zanimivimi učnimi pripomočki, v prijetnem učnem okolju itn. Ko učenec račune poštevanske prikliče hitro in pravilno, jih obvlada kot dejstva.

Ob množenju učimo učence tudi deljenje, ki je vezano na poštevanko. Poudarjamo, da imamo pri deljenju, ki je vezano na poštevanko, opraviti s konceptom "iskanje števila enako močnih množic". To pomeni, da bomo npr. račun $20 : 5$ ponazorili na način, da bomo pripravili 20 objektov in jih delili v skupine po 5 (ne bomo jih pravično delili petim). Tako deljenje je enostavneje za prikazovanje, tudi slikovno-grafična reprezentacija je pri tem obvladljiva (narišemo 20 objektov in jih obkrožujemo po 5 pri deljenju $20 : 5$), hkrati pa tudi obratna računska operacija, v tem primeru ji lahko rečemo tudi preizkus, $4 \cdot 5$, ustreza grafični reprezentaciji, ki smo jo omenili (4 skupine po 5 objektov je skupaj 20 objektov).

Pri drugi vrsti deljenja, ki jo bomo podrobneje prikazali v sklopu o delih celote oziroma o racionalnih številih, pa gre za iskanje števila elementov v enako močnih množicah ali poenostavljeno povedano za pravično deljenje (račun $20 : 5$ bi lahko interpretirali na način, da želimo 20 kart pravično razdeliti med 5 otrok in se vprašamo, koliko kart dobi vsak). Seveda je rezultat oziroma količnik enak kot prej, 4, pomena pa sta različna in ju učitelj pri pouku ne sme zamenjevati.

3.1.2.6 Ostanek pri deljenju

Utrjena poštevanka je temelj za računanje ostanka pri deljenju. Posebej bodimo pozorni, da ne govorimo "deljenje z ostankom", saj je to sporočilo z matematičnega vidika zelo dvomno – s čim torej delimo. Učitelj mora ustrezno uporabljati matematično izrazje, poznavanje matematičnega izrazja za učence je natančno opredeljeno v učnem načrtu, učitelj pa pri rabi

upoštevata potrebe učencev. Koncept predstavimo z objekti, in sicer tako, da za deljenec izberemo število, ki ni večkratnik delitelja, npr. $27 : 4$, in ga obravnavamo na enak način kot prej: imamo 27 reči in jih postavljamo v skupine po 4. Vprašamo se, koliko takih skupin dobimo in koliko reči ostane. Z učenci naredimo še nekaj takih primerov in vpeljemo za vsak ponazorjeni primer še zapis, npr. $27 : 4 = 6$, ost. 1. Treba je izpostaviti tudi poseben primer, ko je deljenec manjši od delitelja, npr. $5 : 6 = 0$, ost. 5 (do takih situacij pride pri pisnem deljenju) in poudariti, da ostanek ne sme biti večji od delitelja, kar z drugimi besedami pomeni, da v matematiki delimo "do konca", dokler je mogoče – če to povemo na način, ki ima za učence pomen. Če imamo 15 predmetov in jih delimo v skupine po 4, pokažemo, da rešitev 2 skupini in ostanek 7 predmetov ni ustrezen, ker v matematiki delimo, dokler lahko. To v našem primeru pomeni, da bomo dobili tri skupine s po 4 predmeti in ostanek 3. Na tem mestu še poudarimo, da izraz delitelj na razredni stopnji uporabljamo za število, s katerim delimo (npr. pri računu $23 : 5$ je 5 delitelj), na predmetni pa izraz delitelji števila pripišemo tistim številom, ki delijo dano število brez ostanka (npr. delitelji števila 15 so 1, 3, 5 in 15).

3.1.2.7 Pisno množenje in deljenje

Zgoraj predstavljeno je temelj za pisno množenje in deljenje. Znanje poštevanka je osnova za pisno množenje, deljenje oziroma določanje ostanka pri deljenju pa za pisno deljenje. Učencem, ki poštevanka ne morejo avtomatizirati, omogočimo uporabo pomagala, npr. kartončke s poštevanko. V učnem načrtu je tako pri pisnem množenju kot deljenju med cilji opredeljeno, da učenci usvojijo postopek na osnovni ravni, kar pomeni, da množijo večmestno število z enomestnim in da je pri deljenju delitelj enomestno število. Tako množenje kot deljenje izvajamo po podobnih korakih, ki smo jih predstavili pri pisnem seštevanju in odštevanju. Rezultat najprej ocenimo, računamo po postopku, primerjamo rezultat in oceno, pri deljenju pa na koncu naredimo še preizkus. Pri obravnavi postopkov pisnega deljenja in množenja ne uporabljamo modelov in tabele desetiških enot, saj je za učence ta material za ponazarjanje teh algoritmov preveč zapleten. Učence bomo naučili postopka računanja in če na tem mestu izpostavimo le deljenje, potem pričnemo s primeri, pri katerih je deljenec dvomestno število, a več kot desetkratnik delitelja (npr. $78 : 5$) – to so tudi prvi primeri deljenja, ko lahko vpeljemo pisni algoritem za deljenje. V primeru $78 : 5$ bomo najprej ocenili količnik (zaokrožimo 78 na 80 in povemo, da bo količnik med 10 in 20 – to je dovolj dobra ocena, ne pričakujemo nujno enega števila; rečemo, da je 20 preveliko število, ker je $5 \cdot 20 = 100$, 10 pa premajhno, ker je $5 \cdot 10 = 50$, torej bo rezultat nekje vmes), nato izvedemo postopek deljenja.

Začnemo pri največji desetiški enoti in 7 delimo s 5, dobimo 1, 2 je ostanek, ki ga zapišemo pod 7. K 2 pripišemo 8 in delimo $28 : 5$, dobimo 5, ki jo pripišemo k 1, in ostanek 3, ki ga ustrezno podpišemo pod število 28, torej pod 8 in zraven zapišemo "ost.". Namenoma smo postopek izpisali, da bi bil zapis v pomoč pri učiteljevem ubesedovanju postopka.

Posebej poudarjamo, da pri pisnem deljenju z enomestnim deliteljem ne podpisujemo delnih zmnožkov, ampak le ostanke, saj s tem ohranjamo preglednost računanja. Vsekakor pa si učenec lahko posamezne račune, ki jih izvaja ob pisnem deljenju, zapisuje kot pomožne račune, lahko zapiše tudi večkratnike delitelja in si s tem olajša računanje.

Ko usvojijo učenci postopek pisnega deljenja dvomestnega števila z enomestnim, pričnemo z deljenjem trimestnega števila z enomestnim. Pri tem lahko uberemo naslednje stopnjevanje zahtevnosti:

1. Vsaka številka deljenca je deljiva z deliteljem (npr. $264 : 2$): postopek izvedemo tako, da vsako števko posebej delimo z deliteljem, ostankov 0 ne podpisujemo, prav tako ne številke deljenca.
2. Prva številka deljenca je deljiva z deliteljem (npr. $456 : 2$): delimo tako, da ne podpišemo ostanka 0 pod 4, saj bi s podpisano številko 5 ob delnem ostanku 0 nato dobili 05, kar pa ni število. Sprejmimo pravilo, da ostanka 0 ne pišemo, če se deljenje v postopku deljenja izide. Razmislimo, kateri so še posebni primeri, ki jih moramo posebej obravnavati. Taki so med drugim primeri: $206 : 2$; $314 : 3$...
3. Prva številka deljenca je manjša od delitelja in moramo zato vzeti prvi dve številki deljenca (npr. $254 : 6$).

V učnem načrtu smo pri izvajanju računskih operacij priporočili uporabo računalna. Posebej primeren je ta pripomoček za določanje oziroma preverjanje ocene rezultata (če napovemo, da je npr. količnik med 100 in 200, to lahko preverimo z računalom), za preverjanje ustreznosti rezultatov računanja in pri reševanju besedilnih nalog.

3.1.2.8 Številski izrazi

Učenci na predmetni stopnji spoznajo tudi številske izraze. Številski izraz poenostavljeno imenujemo račun, v katerem nastopata dve ali več računskih operacij. Konkretizacija računskih izrazov ni potrebna, učenci se morajo naučiti pravil, ki veljajo pri določanju vrednosti številskih izrazov. Najprej združujemo operaciji iste stopnje, seštevanje in odštevanje, ter nato množenje in deljenje, kjer velja, da računamo od leve proti desni. Kadar pa imamo v številskem izrazu operacije različnih stopenj, skladno z učnim načrtom le operaciji prve stopnje (seštevanje in

odštevanje) ter operaciji druge stopnje (množenje in deljenje), pa ima operacija druge stopnje prednost pred operacijo prve stopnje. Predlagamo, da učenec podčrta del številskega izraza, ki ga bo izračunal najprej. V učnem načrtu nismo predvideli zahtevnih številskega izrazov, tudi ni namen, da so v številskega izrazih velika števila – dovolj je obseg števil do 100, kajti učenec ob določanju vrednosti številskega izrazov utrjuje tudi znanje poštevanka in osnovno računanje.

3.1.2.9 Računski zakoni

Glede računskih zakonov smo v učni načrt vključili le zakona o zamenjavi za seštevanje in za množenje. Oba zakona sta predvsem učencem uporabna pri računanju: pri seštevanju je enostavneje seštevati, če je drugi seštevanec manjši od prvega (če ni, lahko njun vrstni red zamenjamo), pri množenju pa zakon o zamenjavi omogoča povezovanje med poštevankami različnih števil ($2 \cdot 4$, $4 \cdot 2 \dots$). Vpeljavo zakona o zamenjavi za množenje smo že predstavili s primerom pladnja s piškoti v vrstah, pri zakonu o zamenjavi za seštevanje pa lahko uporabimo stolpiček link kock, v katerem sta seštevanca predstavljena v različnih barvah. Vzemimo primer stolpiča iz 7 kock, 3 rdeče in 4 modre. Stolpiček poležimo med dva učenca: eden lahko na vprašanje, koliko je vseh kock oziroma kako bi zapisal račun seštevanja, odgovori " $3 + 4$ ", tisti na drugi strani pa " $4 + 3$ ". Ker je rezultat v obeh primerih 7, lahko rečemo, da seštevanca lahko zamenjamo. Gotovo je jasno, da tega ne bomo izpeljali na enem primeru, ampak bomo učencem ponudili več podobnih situacij in poskušali izpeljati pravilo, ne na simbolni ravni, le narativno za posamezne primere.

3.1.2.10 Besedilne naloge

O besedilnih nalogah in poučevanju reševanja smo pisali v prvem delu teh priporočil. Na tem mestu dodajamo le primer dejavnosti, s katero učitelj lahko uvaja učence v prepoznavanje računske operacije, ki jo je treba izvesti pri reševanju določene matematične besedilne naloge. Dejansko ni cilj, da jo učenec reši – bistveno je, da prepozna, katero operacijo bi moral izvršiti, če bi jo reševal. Učenca s tem navajamo na branje matematičnih besedil.

3.1.3 Enačbe in neenačbe

3.1.3.1 Enačbe

Kot je zapisano v učnem načrtu, pričnemo z obravnavo enačb v 4. razredu. Upoštevati moramo, da gre pri reševanju enačb za premislek glede rešitve in ne za sistematično reševanje. Najprej je neznano število prikazano z okvirčkom, kar učencu omogoča, da lahko rešitev enačbe zapiše v okvirček, v 6. razredu pa namesto okvirčka za neznano število vpeljemo črko. Enačbe rešujemo v obsegu do 100. Podobno kot pri številskega izrazih tudi tu lahko dodatno utrjujemo osnovne računske operacije v obsegu do 100. Enačbe vpeljemo na različne načine. Lahko

povemo besedilo: »Zamislila sem si število. Dodala sem 3 in dobila 5. Katero število sem si zamislila?« Lahko uporabimo vrečko in ob konkretnem prikazovanju izrekamo: »V vrečki imam 4 kocke. Nekaj jih bom dodala. Sedaj bom vse kocke stresla iz vrečke in jih preštejem 6. Koliko kock sem dodala?« Lahko pa uporabimo tudi šolsko tehtnico, s katero predvsem izpostavimo pomen enakosti: če je na eni strani 5 link kock, na drugi pa so tri, lahko tehtnico uravnovesimo (vzpostavimo enakost med številoma, pri čemer so kocke enako težke) na različne načine. Lahko dodajamo, lahko odvezujemo, ne nazadnje vzpostavimo enakost tudi tako, da na obeh straneh odvezujemo vse kocke. Tu ne gre v prvi vrsti za iskanje neznanega števila, ampak gre za vzpostavljanje razumevanja enakosti. Učenci na začetku pouka aritmetike in tudi sicer znak za enakost razumejo v operacijskem smislu, kar pomeni, da jim znak "=" pomeni, da se dve števili (npr. pri seštevanju ali odštevanju) zamenjata s tretjim (torej npr. z vsoto ali razliko) oziroma da pomeni "izvršiti" operacijo "dobiti" rezultat. To je tudi razlog, da učenci dokaj slabo rešujejo enačbe, pri katerih je na levi strani enačaja eno število, na drugi pa število in neznano število (npr. $8 = a + 2$).

Učinkovito iskanje neznanega števila je predpogoj za uspešno reševanje enačb. Uspešnost reševanja *nalog z neznanim številom* pa je odvisna od usvojenih predpogojev, npr.: razvit pojem števil, pojem in postopek izvajanja računskih operacij, razumevanje, da sta seštevanje in odštevanje nasprotni operaciji, množenje in deljenje pa obratni, pojem del – celota števila in razumevanje pomena enačaja oziroma enakosti (Englisch idr., 2018). Pri začetnem poučevanju konceptualnega znanja neznanega števila pri seštevanju in odštevanju je učinkovita tudi uporaba kroglic na vrvici in reševanje kontekstualnih nalog (npr. situacije z izstopanjem in vstopanjem potnikov v avtobus, kot so predstavljene v konceptu realistične matematike na Nizozemskem), zato učitelj v čim večji meri izhaja iz življenjskih situacij, podprtih z modelom KSA (Beishuizen, 1997). V nadaljevanju podajamo dva primera.

Primer rabe kroglic na vrvici

Vrvico z 10 večjimi kroglicami (5 modrih in 5 rdečih) obesimo na tablo. Učenci morajo imeti veliko priložnosti preštevanja kroglic, da že brez preštevanja vedo, da je npr. na vrvici z 10 kroglicami 5 modrih in 5 rdečih kroglic. Učitelj z roko pokrije nekaj kroglic (upoštevajo postopnost pri količini). Učenci morajo ugotoviti, koliko jih je pokril. Ker poznajo celoto, lahko ugotovijo neznano oziroma skrito število kroglic na osnovi prešteti preostalih kroglic. Učitelj najprej kot model predstavi način reševanja nalog. Učencem, ki nepravilno povedo neznano število kroglic, učitelj odkrije kroglice, da jih lahko preštejejo. Kasneje lahko uporabi vrvico z

20 ali 100 kroglicami (konkretno in slikovno) in pokrije nekaj kroglic. Pri vrvicah z več kot 10 kroglicami se izmenjuje po 10 kroglic v dveh različnih barvah (npr. po 10 rdečih, 10 modrih).

Primer situacije izstopanja in vstopanja v avtobus

Učitelj se z učenci pelje z avtobusom, da opazuje, kako na postajah vstopajo in izstopajo potniki ter kako se ob tem spreminja število potnikov na avtobusu. V razredu dramatizirajo potovanje z avtobusom tako, da s stoli v vrstah ponazorijo avtobus in učenci po navodilih izstopajo in vstopajo v avtobus, učitelj pa ubesedi vsako dejavnost ter pred učenci rešuje naloge kot npr.: Avtobus je na postajo pripeljal 9 potnikov. Nekaj potnikov je izstopilo. S postaje se je odpeljalo 7 potnikov. Koliko potnikov je izstopilo na postaji? Drugi primer: Avtobus je potnike pripeljal na postajo. Vstopilo je 5 potnikov. S postaje se je avtobus odpeljal z 12 potniki. Koliko potnikov je avtobus pripeljal na postajo? Učitelj najprej rešitev predstavi z modeliranjem štetja naprej ali nazaj in kasneje predstavi miselno reševanje nalog. Potem izvajajo situacije tako, da gre en učenec iz razreda in mora ugotoviti število potnikov, ki predstavljajo neznano število. Ostali učenci pa s kartončki DA/NE potrdijo pravilnost njegovega odgovora. Učenci na začetku izvajajo dejavnosti vstopanja in izstopanja ter s štetjem ugotavljajo neznano število (npr. za prvo nalogo štejejo od 9 do 7 in za drugi primer od 5 do 11), kasneje pa rešujejo le ilustrirane naloge. Učenci dobijo ilustracijo avtobusnih situacij, s pomočjo katerih ugotavljajo neznano število potnikov. Zaključna faza pa je reševanje simbolno podanih nalog. V opisanih situacijah učitelj lahko prepozna, da je simbolni zapis situacij mogoč tako v obliki enostavnih računov kakor tudi enačb.

V učnem načrtu smo natančno predvideli, katere enačbe in na kakšen način naj jih rešuje učenec, pri čemer obseg števil ni večji kot 100, šele v 8. razredu pričnemo z preoblikovanjem enačb v ekvivalentne enačbe. Ne dvomimo, da bo večina učencev ta postopek usvojila mehanično, da se torej npr. predznak pri številu spremeni, če ga prestavimo na drugo stran enačaja. Prav pa je, da učitelj na preprostem primeru, npr. $a + 4 = 9$, ustrezno prikaže postopek preoblikovanja enačbe v ekvivalentno enačbo (za primer $a + 4 = 9$ na obeh straneh enačbe odštejemo 4, kar zapišemo kot $a + 4 - 4 = 9 - 4$ in izpeljemo postopek do konca). Ker učenci v 8. razredu ne poznajo celih števil, ne bomo mogli npr. razložiti preoblikovanja enačbe v ekvivalentno, če bomo za enačbo izbrali npr. $a - 4 = 10$, saj moramo v tem primeru na obeh

straneh enačbe prišteti 4, da lahko zapišemo $a = 14$. Pomembno je torej uporabiti ustrezne enačbe za izpeljavo pravila, posplošili pa bomo gotovo na način, da se "predznak pri prenosu števila na drugo stran enačaja spremen". Prav gotovo so pri reševanju preprostih enačb ključni premisleki, ki so osnovani na poznavanju nasprotnih (seštevanje in odštevanje) in obratnih (množenje in deljenje) operacij.

3.1.3.2 Neenačbe

V 9. razredu se učenec seznani tudi s preprostimi neenačbami oblike $a > x$, $a < x$, katerih rešitve določi v množici naravnih števil in števila 0 (ker poznajo učenci tudi negativna cela števila, bi lahko pri reševanju neenačb vključili tudi ta števila, če učitelj presodi, da so učenci tega zmožni, ni pa to temeljni cilj). Vzemimo primer neenačbe $a > 5$. Rešitev te neenačbe je neskončno, zapišemo jih na način: $a = 6$, $a = 7$, $a = 8$, $a = 9 \dots$ S tremi pikicami na koncu nakažemo, da je teh rešitev še več oz. jih je neskončno. Še en poudarek je potreben. Če smo pri enačbah lahko izhajali iz konkretnih reprezentacij in smo rešitev enačbe na nek način odčitali, je pri neenačbah konkretna reprezentacija neuporabna v smislu, da ne moremo izčrpati vseh rešitev. Če npr. rečemo, da imamo v žepu manj kot 6 žetonov, ne gre za to, da učenci ugibajo, koliko jih imamo in jim na koncu dejansko pokažemo, koliko žetonov imamo v žepu (s tem bi napačno predstavili pomen neenačbe), saj rešitev pri neenačbah običajno ni ena sama. Lahko pa seveda izhajamo iz situacij, ki jih lahko prevedemo v matematični zapis z neenačbo, npr. v dvigalo gre lahko manj kot 9 ljudi ($a < 9$), matematični preizkus znanja sem pisala manj kot 5 ($b < 5$), na tržnici je več kot 20 ljudi ($c > 20$) ...

3.1.4 Racionalna števila

3.1.4.1 Celota, deli celote

Z racionalnimi števili pričnemo v 3. razredu, ko vpeljemo pojem polovica, sicer le na konkretni ravni, npr. polovica žemljice, polovica jabolka, lubenice ... Na začetku celoto predstavlja en objekt, kasneje pa celoto predstavlja tudi več objektov. Razlikujemo namreč med polovico jabolka in polovico osmih jabolok. Res gre v obeh primerih za pojem polovica, a pri prvem eno jabolko razdelimo na dva enaka dela, v drugem primeru pa imamo opraviti s številom jabolok, zato izvajamo deljenje, v našem primeru z 2. Kot smo že omenili, imamo pri delih celote, ko nas zanima del celote, pri števnih objektih opraviti z deljenjem, pri katerem se vprašamo po številu objektov v enako močnih množicah (prej smo to imenovali pravično deljenje; drugačno torej kot pri deljenju, ki je vezan na poštevanko). To pomeni, če nas zanima npr. tretjina od 12 jabolok, bomo 12 jabolok pravično razdelili med 3 otroke in se vprašali, koliko jabolok dobi vsak (to ni enako, kot če rečemo, da bomo jabolka delili po tri – v tem primeru bi šlo za koncept

deljenja, ki ga povezujemo s pošteevanko). Število enakih delov postopoma povečujemo, a do petega razreda imamo opraviti le z enim delom celote, npr. ena šestina, ena petina ..., v šestem pa nas zanima tudi že več enakih delov celote. Ko prikazujemo dele celote, je pomembno, da učenec te dele celote lahko primerja s celoto (npr.: cel krog in tretjina kroga). V šestem razredu dele celote učenci zapišejo z ulomkom in poimenujejo dele ulomka. Dele celote najprej primerjajo v situacijah, v katerih je celota enaka. To pomeni, da bomo lahko tretjino, četrtno, petino ... med seboj primerjali le takrat, ko bodo ti deli vezani na isto celoto (isti krog za vsak del celote, ki jih primerjamo med seboj). Če imamo npr. krog ali več enakih krogov in jih delimo na enake dele, npr. prvega na četrtno, drugega na tretjino, tretjega na petino ..., bomo lahko primerjali vsak del s celoto in posledično urejali dele celote po velikosti. Enako lahko storimo, če celoto predstavlja določeno število objektov, npr. 12 kovancev. Lahko primerjamo, ali je več tretjina od 12 kovancev ali četrtna od 12 kovancev ... Tu učencem povzroča izzive velikostni odnos med naravnimi števili, kajti 4 je več kot 3, ki je pri racionalnih številih obrnjeno: četrtna je manj kot tretjina.

Zelo pomembno je poudariti, koliko enakih delov predstavlja celoto, npr. $\frac{4}{4}$, $\frac{3}{3}$... Dokaj enostavno to lahko prikažemo z deljenjem celote na enake dele in nato ponovnim sestavljanjem celote iz teh delov. Primernejše kot pri števnih objektih je izvajanje tega deljenja na enake dele pri primerih, kjer celoto predstavlja en predmet, npr. pica, krog, kvadrat ... Poznavanje celote je osnova za krajšanje ulomkov oz. za zapisovanje sestavljenih števil (celi del in ulomek, manjši od 1).

Kasneje, v 7. razredu, predstavimo tudi ulomke, večje od 1. Najprej s primeri iz življenja: ena lubenica in še pol lubenice, dve torti in še četrtna torte, tri čokolade in še tretjina čokolade ...

3.1.4.2 Ulomek, računanje delov celote

Ko ima učenec pred seboj tovrstne reprezentacije različnih reči, njihovo količino najprej ubesedimo, nato pa predstavimo še zapis z ulomkom. Ko učenci zapis usvojijo, lahko reprezentirajo predstavljen ulomek z izbranimi objekti. Če npr. zapišemo $1\frac{1}{3}$ pice, bi učenec ta ulomek ponazoril s konkretno, slikovno ali s katero drugo reprezentacijo. Učenci v 7. razredu izračunajo en del od celote. Pri tem cilju imamo opraviti s celoto, ki je določena z izbranim številom objektov (takim, da je to število deljivo z imenovalcem ulomka). Vzemimo npr. 12 jabolk in se vprašajmo, koliko je tretjina te celote. Praktično bi moral učenec znati razdeliti 12 jabolk na tri enake dele in prešteti jabolka v enem delu. Dodajmo še simbolni zapis, in sicer $\frac{1}{3}$ od 12 je 4, ker je $4 \cdot 3 = 12$. Povsem jasno je, da izvedemo več konkretnih ponazoritev v povezavi s simbolnim zapisom. Ponovno poudarjamo, da je pri matematiki potrebno vztrajati

pri spodbudah, da učenec preseže konkretno preštevanje in preide na računanje. Računanje enega dela celote iz 7. razreda se v 8. razredu nadgradi v računanje več delov celote. Postopamo podobno kot pri enem delu, in sicer v smislu, da najprej konkretno predstavljeno celoto razdelimo na določeno število enakih delov in vzamemo predpisano število enakih delov. Če želimo določiti $\frac{2}{3}$ od 12 jabolk, bomo najprej razdelili 12 jabolk na tri enake dele in vzeli dva taka dela oziroma 6 jabolk. Na konkretni ravni ta aktivnost niti ni tako zahtevna, kot se to prikaže na simbolni, ko učenec prične z izvajanjem računskih operacij. Pri omenjenem primeru se pri računanju največkrat zmoti na način, da ni prav gotov, s katerim številom število 12 najprej deli in s katerim nato množi. Problem je v tem, da ni enostavno prevesti izvedbe na konkretni reprezentaciji v miselno izvedbo postopka. Sicer se ujemata, a ker sta večstopenjska, učencem postopek povzroča težave. Zato pri rokovanju s simbolnim zapisom, npr. $\frac{2}{3}$ od 12 učenca, vodimo tako, da vsak korak, ki ga izvedemo na simbolni ravni, osmišljamo z vprašanji: zakaj 12 delimo s 3; kaj dobimo, ko 12 delimo s 3; nas zanima le en del; koliko delov moramo vzeti; kako to vemo; bi lahko dobili za rezultat več kot 12; zakaj ne ...).

Primer vpeljave racionalnih števil kot točke na daljici (kasneje tudi številski premici)

Izhodiščna situacija: Učenci so na 4-km teku po mestnih ulicah na vsakega $\frac{1}{2}$ km dobili vodo, na vsako $\frac{1}{4}$ km so jim ponudili papirnate robčke.

Učitelj učencem najprej na tabli predstavi daljico, ki ima označene 4 enote (za 4 km poti) z označenimi 4 celimi števili nad daljico. Na daljico učitelj v sodelovanju z učenci označi vse točke (polovice posameznih kilometrov s križci), ko so tekači dobili vodo. Potem na daljici označi točke za četrtine posameznih kilometrov (s krožci), ko so tekači dobili papirnate robčke, pod vrsto z označenimi polovicami označijo še zaporedje četrtn (prikazano na sliki 4). Ob označevanju ulomkov na daljici učenci opazijo, da so na nekaterih mestih po 2 označbi ulomkov in tako spoznajo, da je npr. $\frac{1}{2}$ enako kot $\frac{2}{4}$. Spoznajo tudi mešane ulomke, ki so večji od 1. Ko učenci v vsaki vrsti berejo ulomke, ugotovijo, da se spreminja le števec, imenovalec pa ostaja enak in prav tako ugotovijo, da čim večji je imenovalec, tem manjša je vrednost ulomka, da od leve proti desni narašča tako velikost ulomkov kot celih števil. Primerjajo razliko v številu ulomkov, ki imajo v imenovalcu polovico v primerjavi z ulomki, ki imajo v imenovalcu četrtno, kar lahko ugotovijo tudi z branjem ulomkov, saj je branje

niza ulomkov, ki imajo v imenovalcu četrtnine, daljše kot pri tistih, ki imajo v imenovalcu polovice (Rižnik, 2018).

S podobnimi besedilnimi nalogami lahko ponazarjamo tudi zaporedja drugih ulomkov in odnosov med njimi.

3.1.4.3 Računanje z ulomki

V 8. razredu pričnemo tudi s seštevanjem ulomkov, ki imajo enak imenovalec. To je z vidika konkretizacije postopka dokaj enostavno, saj dele izbrane celote, npr. krog, razdelimo na 8 enakih delov in se nato vprašamo, koliko je $\frac{1}{8} + \frac{3}{8}$, $\frac{6}{8} + \frac{2}{8}$... Celoten postopek konkretiziramo, izvedemo več primerov, uporabimo tudi različne celote (npr. različne like). Učenci seštevanje ulomkov z enakim imenovalcem prevedejo na seštevanje naravnih števil, pri čemer je seveda simbolni zapis drugačen. Nekoliko drugačna situacija pa nastopi, če ulomki, ki jih želimo sešteti (predlagamo največ tri seštevance), nimajo enakih imenovalcev. Konkretizacija tega postopka ni enostavna, lahko bi celo rekli, da je postopek na simbolni ravni enostavnejši. Enostavne primere seštevanja ulomkov, npr. $\frac{1}{2} + \frac{2}{4}$, lahko prikažemo s konkretno reprezentacijo, ki jo za učence pripravi učitelj, in sicer tako, da učenec polovico in dve četrtnini enake celote sestavi v celoto. Ni nujno, da vedno sestavi v celoto, npr. pri seštevanju ulomkov $\frac{1}{4} + \frac{2}{8}$ bo dobil polovico, ki jo z modeli lahko nazorno prikažemo. Pri tem je treba učence spodbujati, da s konkretnimi dejavnostmi odkrivajo zakonitosti seštevanja ulomkov, pri katerih ni treba določati skupnega imenovalca na način, kot je to treba pri ulomkih, ki jih manj srečujejo v vsakdanjem življenju. Izberimo torej drugačen primer, npr. $\frac{1}{2} + \frac{1}{8}$. Izrežemo dva enaka (skladna) kroga, prvega razdelimo na polovici, drugega pa na osmine. Kaj dobimo, ko damo skupaj polovico in osmino? Kako to ubesedimo? Enostavno bomo morali učencem povedati, da imamo sicer dva dela, da pa vsote tega računa z ulomkom na način, kot smo vajeni, ne moremo izraziti in da odgovor dva dela ni ustrezen. Naučili jih bomo torej postopka in rekli, da moramo pogledati, katera celota je razdeljena na manjše dele in da moramo na tako majhne dele razdeliti obe celoti. Ko imamo torej oba kroga razdeljena na osmine, jih moramo pri prvem vzeti toliko, da bodo predstavljali polovico kroga, torej 4. Pri drugem smo vzeli enega, kar skupaj predstavlja 5 takih delov oz. $\frac{5}{8}$. Postopek ni enostaven, ni ga mogoče tudi zelo preprosto utemeljiti, a učenci bi morali usvojiti, da moramo pri seštevanju oziroma odštevanju ulomke vedno prevesti na skupni imenovalec. Opisan primer je pojasnilo za učitelja, ki učencem primerno, ob uporabi ponazoril, približa pomen skupnega imenovalca. Naslednji korak je ponazarjanje seštevanja in odštevanja ulomkov z različnima imenovalcema s

številskim poltrakom. Iskanje skupnega imenovalca naj bo v okviru poštevanke, nobene potrebe ni po preseganju števil do 100.

Rezultate pri seštevanju in odštevanju ulomkov zapišemo kot celi del in ulomek, manjši od 1. Učence pri dobljeni vsoti ali razliki ulomkov vprašamo, ali smo dobili ulomek, ki je večji kot 1, kako to vemo in kako bi ga zapisali v obliki celi del in ulomek, manjši od 1. Če je rezultat $1\frac{1}{8}$, lahko enostavno razdelimo krog na osmine in ugotovimo, da bomo morali deliti še en tak krog na osmine, da jih bomo imeli skupaj 11. Reprezentacija pokaže, da $1\frac{1}{8}$ pokažemo kot celoto in še 3 osmine, kar zapišemo kot $1\frac{3}{8}$. Pomembno je, da je to znanje utrjeno, preden izvajamo računske operacije. Učenec mora vedeti, da je ulomek večji od 1 takrat, ko je števec večji od imenovalca.

Operaciji z ulomki, ki sledita, sta množenje in deljenje. Tu pa z gotovostjo lahko trdimo, da je postopek množenja dveh ulomkov na simbolnem bistveno enostavnejši kot reprezentacija s konkretnim ali grafičnim prikazom. Zamislimo si, da želimo zmnožiti $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5}$. Če želimo to prikazati npr. z grafično reprezentacijo, potem bomo račun prevedli v zapis $\frac{3}{4}$ od $\frac{2}{5}$ oziroma se vprašali, koliko je $\frac{3}{4}$ od $\frac{2}{5}$. Izberemo celoto (spet svetujemo celoto, ki je določena z enim objektom), jo razdelimo na 5 enakih delov, vzamemo dva dela, na katerih moramo določiti $\frac{3}{4}$. Torej moramo ta dva dela razdeliti na 4 enake dele in vzeti 3. Precej zapleten postopek, če ga primerjamo s postopkom, ki ga izvedemo na simbolnem: zmnožimo števca in imenovalca. Želimo poudariti, da slikovna reprezentacija lahko da pomen množenju ulomkov (namenoma smo zapisali lahko, saj je zelo malo verjetno, da to dojame učenec, ki se o množenju ulomkov uči), ni pa osnovni pogoj za uspešno izvajanje množenja ulomkov. Kaj naj torej v tem primeru stori učitelj? Vsekakor lahko ponazori množenje na enostavnem primeru, npr. $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$ po postopku, ki smo ga opisali (ni odveč dodati, da je že samo razumevanje znaka $\cdot$ pri ulomkih problematično – ko operacijo reprezentiramo, ga prevedemo v "od"), še enostavneje je prikazati množenje ulomka z naravnim številom. Deljenje ulomkov je še zahtevnejša operacija za reprezentiranje. Razmislimo, kako prikažemo $10 : \frac{1}{2}$ ali $\frac{1}{2} : 10$. Prvi primer je enostavnejši, saj imamo lahko 10 jabolk in jih razdelimo na polovice in se vprašamo, koliko polovic dobimo. Presenetljivo za učence je že to, da je količnik kar naenkrat večji od deljenca (rezultat je 20), kar se do tega trenutka pri matematiki zanj še ni primerilo, zato posvetimo temu nekoliko več pozornosti. Po drugi strani pa prav tako lahko pokažemo, kaj pomeni razdeliti polovico jabolka na 10 enakih delov. Povsem očitno je, da bodo deli majhni, ne moremo pa na osnovi konkretne reprezentacije uvideti, da so to dvajsetine jabolka. Treba si bo torej pomagati s postopkom na simbolni ravni: polovico pomnožimo z desetino. Podobno bomo predstavili postopek za

deljenje dveh ulomkov: ustrezno ga bomo prevedli v množenje. Ta opis je utemeljitev za učitelja, da se pri obravnavi množenja in deljenja dveh ulomkov posveti razlagi enostavnega postopka na simbolni ravni. Učencem pa bodo v veliko pomoč kartončki s koraki postopka pri posamezni operaciji.

3.1.4.4 Desetiški ulomki

Učence seznanimo tudi z desetiškima ulomkoma $1/10$ in $1/100$ in zapisom teh dveh ulomkov z decimalnima številoma, 0,1 in 0,01. Pokažemo, da $2/10$ zapišemo kot 0,2, $6/100$ kot 0,06 ... in jih naučimo prebrati: dve desetini ali nič celih dve, šest stotin ali nič celih, nič šest ... Tudi npr. $35/100$ ali 0,35, $25/10$ ali 2,5 ... Kot oporo pri branju in zapisovanju decimalnih števil učencem ponudimo tabelo z desetiškimi enotami (npr. stotica, desetica, enica, desetina, stotina). Naučimo jih decimalna števila vnašati v računal. To spretnost bodo uporabili v 9. razredu, ko pri računanju z decimalnimi števili lahko uporabljajo računal.

3.1.4.5 Seštevanje in odštevanje decimalnih števil

Seštevanje in odštevanje decimalnih števil povežemo s pisnim računanjem, pri čemer je zelo pomembno, da ločimo decimalna števila, ki so manjša od nič, od tistih, ki so večja, ter pravilno podpisovanje. Učenci naj števila zapisujejo v tabelo desetiških enot, s čimer jim olajšamo ustrezno podpisovanje. Pred računanjem rezultate ocenimo, števili prej ustrezno zaokrožimo, kar smo že predstavili pri zaokroževanju naravnih števil – pomembno je, da decimalno število približno umestimo na številske poltraku in pogledamo, kateremu naravnemu številu je najbližje. Je 1,25 bližje 1 ali 2? Pogoji za dobro zaokroževanje decimalnih števil je kakovostno predznanje zaokroževanja naravnih števil.

3.1.4.6 Odstotki

Učenci pridobijo tudi osnovna znanja o odstotkih. Odstotek je le še eden od zapisov decimalnega ulomka $1/100$, ki ga predstavimo učencem, denimo na mreži 10×10 . Torej: $1/100$ je 1 % (1 % predstavlja tudi en cent v odnosu do evra). Števec v ulomku, ki ima v imenovalcu stotine, določa, koliko odstotkov predstavlja. Kvadrat 10×10 z narisanimi 100 kvadrati je dobro ponazorilo za prikazovanje delov celote in z njimi povezanimi odstotki. Ukvarjamo se z odstotki, ki imajo za učenca pomen iz vsakdanjega življenja: 50 %, 25 %, 20 %, 30 % Odstotek dane količine izračunajo z računalom, a jih moramo vedno spodbujati, da presodijo o smiselnosti rezultata. Je lahko 50 % od 20 enako 100? Zakaj ne? Kaj pomeni 50 % ...?

3.2 GEOMETRIJA IN MERJENJE

3.2.1 Orientacija

Pri geometriji je predvsem pomembno jasno izražanje, natančno opredeljevanje pojmov skupaj s simboliko, ki je nujna za komunikacijo v šolski geometriji. Bistveno je natančno izražanje, uporabljanje različnih situacij, predvsem življenjskih za učenje orientacije, in dopuščanje, da določeni predlogi, s katerimi izražamo položaje, niso enoznačni, npr.: pred, za (npr. kaj je pred drevesom, kaj je za drevesom, od česa je to odvisno). Znanje orientacije v prostoru in na ploskvi je ključnega pomena za nadaljnje učenje matematike in predvsem za orientiranje v zvezku, delovnem učbeniku, pri upoštevanju podanih navodil učitelja, za orientacijo na številskem (pol)traku ... Številski trak lahko učitelj oblikuje na tleh (tla so običajno pokrita s kvadratnimi ploščami), po katerem se učenci po navodilih premikajo. Kasneje naj se premikajo tudi po mrežah. Mreže, po katerih se premikajo, naj bodo kvadratne, saj bo tako lažje šteti premike (spomnimo se na številski trak, kjer delamo poskoke) v različne smeri. Učenci naj oblikujejo navodila za premikanje po mreži (morda tudi s preprostimi simboli, s številkami in ustreznimi puščicami, npr. $6 \uparrow 3 \leftarrow \dots$, kar preberemo, da naredimo 6 premikov navzgor (ker smo na mreži, je pojem navzgor jasen, torej navpično, kar nakazuje tudi puščica), nato 3 v levo ... Lahko izdelamo labirint, ki bo učence dodatno motiviral pri iskanju "izhoda". Preden bodo sami oblikovali navodila, bo učitelj predstavil ustrezen način podajanja navodil, ki mu bodo učenci najprej sledili, nato bodo navodilo ubesedili, postopoma pa nekateri dodali tudi simbolni zapis, številke in puščice.

3.2.2 Geometrijske oblike in geometrijski pojmi, uporaba geometrijskega orodja

Kratka pojasnila nekaterih izrazov iz učnega načrta:

Geometrijsko telo: z vseh strani omejen del prostora

Geometrijski lik: z vseh strani omejen del ravnine

Večkotnik: lik, omejen s sklenjeno lomljeno črto

Rob: stičišče dveh ploskev

Oglišče pri geometrijskem telesu: stičišče vsaj treh robov (stožec ima vrh)

Oglišče pri geometrijskem liku: stičišče dveh stranic

Premica: na obeh straneh neomejena ravna črta

Poltrak: na eni strani neomejena ravna črta

Daljica: na obeh straneh omejena ravna črta (primeri daljic: stranica večkotnika, premer, polmer, rob pri oglatem telesu ...)

3.2.2.1 Geometrijska telesa

Geometrijo najprej spoznavamo z objekti, ki nas obkrožajo in imajo oblike geometrijskih teles, likov in črt. Opazujemo, katere oblike so si med seboj podobne, katere različne, v čem so si podobne, različne, tudi enake. Pri geometriji je potrebno znanje pridobivati z natančnim opazovanjem objektov oziroma njihovih lastnosti. V tem se pridobivanje znanja pri geometriji razlikuje od pridobivanja znanja pri aritmetiki, pri kateri so v ospredju postopki in so objekti le neke vrste sredstvo za udejanjanje postopkov, kot sta npr. štetje in računanje. Če se najprej posvetimo geometrijskim telesom, katerih modelov je vsepovsod polno, se moramo zavedati, da je učenec v prvih letih učenja o geometriji na vizualni stopnji (van Hiele, 1986), kar pomeni, da prepozna oblike na osnovi videza oziroma da npr. ne bo uvrstil vseh kvadrov, ki mu jih ponudimo, v isto skupino, ker so mu videti različno ("ploščat" kvader, "poln" kvader). Učenec lahko šele takrat, ko spozna lastnosti geometrijskih teles, torej ko je na opisni stopnji, uvrsti vse enake oblike v isto skupino (v našem primeru kvadre, a enako velja tudi za valje, stožce, manj pa za kocke in krogle, saj je ti dve obliki ne glede na velikost, barvo položaj enostavno prepoznati). Za prehajanje od vizualne na opisno stopnjo pri učenju o geometrijskih telesih je pomembno, da učitelj učencem ponudi dejavnosti, ki učencu omogočajo spoznavanje lastnosti geometrijskih teles: geometrijska telesa se lahko kotalijo ali pa ne (delitev na okrogla in ogleta telesa), lahko iz njih sestavimo stolp (stožec npr. ne more biti najnižji objekt, če gradimo stolp v višino, en predmet na drugega) ... Modele geometrijskih teles naj učenci tudi izdelujejo, kar spet omogoča pridobivanje znanja o njihovih lastnostih: kroglo lahko z gnetljivimi materiali oblikujemo med dlanmi, za kocko bomo potrebovali trši raven predmet, npr. deščico ali ravnilo za oblikovanje ravnih ploskev. Proti koncu osnovne šole učenci podrobneje spoznajo tudi stožec in pravilno štiristrano piramido. Pri izdelavi modela stožca pridemo do nove oblike, in sicer do krožnega izseka, ki ga pri stožcu zvijemo v krivo ploskev, in ustrezno velikega kroga (zgolj kot opomnik za učitelja pri izdelovanju mreže stožca: obseg kroga je enak dolžini loka krožnega izseka). Ker učenec nima znanj za oblikovanje modela stožca, predlagamo, da "sestavne dele" pripravi učitelj, učenec pa bi lahko samostojno izdelal model stožca iz gnetljivega materiala. Pri pravilni štiristrani piramidi so mejne ploskve jasne (skladni trikotniki in kvadrat), zato naj učitelj spodbudi učenca, da to geometrijsko telo poskuša izdelati na različne načine, z uporabo različnih materialov, tudi npr. paličic, ki bodo predstavljale robove in plastelina za oglišča. Pri izdelovanju modelov geometrijskih teles učitelj učencem pomaga, jim

ponudi opore, v kolikor jih zaradi specifičnih potreb potrebujejo, in jih usmerja z ustreznimi vprašanji.

3.2.2.2 *Geometrijski liki*

Pri usvajanju likov, za katere enako velja, da jih učenci usvojijo najprej na vizualni stopnji (npr. ne prepoznajo "zašiljenega" trikotnika, dokler ne poznajo bistvene lastnosti trikotnika, torej trikotnik je lik, ki je omejen s tremi stranicami), je zelo pomembno, da izbiramo ustrezne materiale za ponazarjanje likov – najboljši je papir, ustrezni so tudi plastificirani liki. Čim bolj se moramo izogniti tretji dimenziji, debelini, saj se s tankimi materiali približamo bistvenemu pri likih – lik je omejen del ravnine. Ko učenci preidejo na opisno stopnjo oziroma like prepoznajo na osnovi opisa, opustijo lastnosti likov, ki so bile na vizualni stopnji še pomembne: velikost, lega, morebiti barva ... Priporočamo ponazarjanje značilnosti likov s čim bolj raznovrstnimi dejavnostmi, npr. z gibanjem (hoja po stranicah na tleh narisanih likov, "potovanje" s prstom po stranicah likov ...), razvrščanjem likov po različnih lastnostih, z didaktičnimi igrami, na geoplošči ipd. Na geoplošči učenec z elastiko oblikuje različne like, ki jih nekateri nato lahko tudi narišejo v mrežo. Raznoliko ponazarjanje značilnosti geometrijskih likov učitelju omogoča udejanjanje individualizacije in diferenciacije zahtev. Da bi učenec prešel na opisno stopnjo, mora biti učiteljevo izražanje jasno in natančno. Pri likih, ki jih delimo na večkotnike in ostale, velja, da večkotnike, ki imajo stranice in oglišča, opredelimo na osnovi števila stranic (prav gotovo v začetku ne povezujemo števila stranic s številom kotov, čeprav je to najbolj očitna povezava glede na imena večkotnikov, kajti učenci kotov pri večkotniku še ne poznajo, ko jih seznanjamo npr. s trikotnikom). Pri geometrijskih telesih, ki jih delimo na okrogla in oglata, uporabljamo pojme ploskev, rob (ne stranica!) in oglišče. Za učence je abstraktno relacijska stopnja (van Hiele, 1986) ali stopnja, pri kateri učenec spozna hierarhijo med posameznimi geometrijskimi objekti na osnovi opisov (saj na vizualnem niso vidni), npr. da je kvadrat pravokotnik ali kocka kvader, zelo zahtevna, zato v učnem načrtu cilja, ki bi meril na ta znanja, nismo vključili.

3.2.2.3 *Skladnost likov*

Pri likih učenci spoznajo pojem skladnost, ki v šolski matematiki ni nič drugega kot natančno prekrivanje, ujemanje dveh likov. Skladnost dveh likov lahko preverimo tako, da lika izrežemo in ju prekrijemo. Če pa to ni mogoče, en lik prerišemo na paus papir in ga položimo na drugega, tistega, za katerega želimo preveriti skladnost s prvim.

3.2.2.4 Črte, presečišče črt

Črte so ravne, krive ali lomljene in v nobenem primeru ravna črta ne more biti sklenjena; sklenjena je lahko le lomljena črta ali kriva črta. Za boljše pomnjenje izrazov učitelj uporabi različne asociacije: vodoravno kot voda, navpično kot stoja, lomljena kot veja, kriva kot ogrlica ... V povezavi s črtami učenci spoznajo tudi presečišče črt, ki ga učitelj nazorno predstavi z natančnim risanjem na tabli. Seveda lahko izhaja iz semantične miselne sheme učenca: lahko navede primer križišča, "sekanja" poti/sledi npr. različnih vozil. Križišče lahko učitelj ali učenec grafično reprezentira in poudari mesto, kjer so se poti križale. Temu ne rečemo presečišče. Tega dobimo takrat, ko narišemo dve črti, ki se sekata, ter mesto označimo s križcem in z veliko tiskano črko. Ko bomo torej situacijo iz življenja prenesli v matematično reprezentacijo, bomo ob tem uporabljali ustrezno izrazje. Življenjska situacija je referenca (asociacija) pri vpeljevanju pojma, kasneje pa za nekatere ni več potrebna oziroma presečišče črt ni več vezano na določeno situacijo, ampak postane bolj abstraktno.

3.2.2.5 Simboli v geometriji

Skladno z učnim načrtom bodo učenci usvojili tudi določene simbolne reprezentacije za prikazovanju pojmov in odnosov med pojmi v geometriji: oznaka za daljico, njeno dolžino, premico, poltrak, vzporednost, pravokotnost dveh premic, lega točke na premici. Ko učenci poznajo bistvena medsebojna odnosa dveh premic, vzporednost in pravokotnost, lahko izvajamo naloge konstruiranja. Konstruiranje imenujemo, ker pri risanju črt in likov učenec uporablja geometrijsko orodje, katerega uporabo in zahtevnost nalog prilagodimo potrebam učenca.

3.2.2.6 Obseg likov

Pri likih nato uvedemo količino obseg, ki jo učenci najprej določajo pri večkotnikih brez obrazcev, kasneje pa z uporabo obrazcev. Pri obsegu večkotnika poudarimo, da seštejemo dolžine stranic (ne seštejemo stranic) in da morajo biti te izražene v isti merski enoti, ki je pri likih največkrat izražena v centimetrih. Obseg je pojem, ki ga poznamo iz vsakdanjega življenja, npr. pri poklicu šivilje (obseg roke, bokov, glave ...), v gradbeništvu (dolžina letev za obrobo tal sobe, učilnice ...). Učenci obseg najprej spoznajo tako, da obsežejo objekt npr. z vrstico, katere dolžino nato izmerijo. Pri določanju obsega večkotnika najprej izmerijo dolžine posameznih stranic in jih seštejejo, nazadnje pa obsege računajo z obrazci. Računanje obsega temelji na učenčevem znanju in veščinah merjenja dolžin stranic oziroma daljic ter ustreznem zapisovanju podatkov. Pri zapisovanju dopuščamo dve možnosti računanja obsega: 1) učenec lahko sešteje števila, ki predstavljajo merska števila dolžin večkotnika, in v odgovor zapiše z ustrezno mersko enoto, kolikšen je obseg ali 2) računa z merskimi števili in enotami. Če zapis

pričnemo "o = ...", potem moramo pisati ob številih tudi merske enote, saj smo napovedali obseg, če pa le računamo s pomožnim računom, lahko merske enote pri računanju izpustimo. Več o pravilih računanja s količinami bomo zapisali pri vsebini merjenje.

Primer rabe interaktivnega zidu besed za obseg lika

Začnemo z enostavno napisano definicijo besede, ki vključuje s preprostimi besedami predstavljen pojem ter za učenca razumljive in bistvene informacije, kot npr.: *Obseg lika je dolžina sklenjene črte, ki okrog in okrog omejuje lik*. Definicijo je treba jezikovno še poenostaviti, če je za učence prezahtevna. Na zid besed se dodajo še ilustracije življenjskih primerov (npr.: obseg zapestja prikazan s prsti okrog zapestja, obseg drevesa z rokoma okrog debla itn.). Učitelj razumevanje definicije pri učencih preveri na različne načine, kot npr. tako, da s svojimi besedami razložijo posamezen izraz ali prikažejo s kretnjo pomen izraza (npr. učenec z rokama pokaže obseg pasu). Potem učenci iščejo različne primere slikovne predstavitve izraza (npr.: slikovni prikaz ograje okrog vrta, okvirja okrog slike itn.). Učenci v nadaljevanju še v različnih situacijah utrjujejo izraz za določen pojem, ustvarjajo povezave (npr.: z miselnim vzorcem različnih predstavitev obsega določenega lika) ter pomen izraza ponavljajo na različne načine, lahko tudi z različnimi didaktičnimi igrami spomin, domine idr.). V učenje izrazov lahko vključuje tudi mnemotehnike, slovar besed in druge zanimive predstavitve. Pogostost ponavljanja se postopoma zmanjšuje. Posploševanje pa učenec doseže z rabo izrazov za matematične pojme pri medpredmetnih povezavah (npr.: učenci ugotavljajo obseg predmetov pri tehničnem pouku, obseg igrišča pretečejo pri športu itn.) in v življenjskih situacijah v domačem in širšem okolju.

3.2.2.7 Ploščina likov

Nadalje se učenec seznani s ploščino, ki prvenstveno sodi k obravnavi likov, posredno pa tudi k obravnavi geometrijskih teles, saj površino oglatih teles izračunamo kot vsoto ploščin mejnih ploskev. Vpeljavo ploščine bomo prikazali pri vsebini merjenje, na tem mestu bomo izhajali iz dejstva, da učenci poznajo standardne merske enote za ploščino in da imajo konkretne izkušnje z merjenjem velikosti ploskev. Ploščino pravokotnika vpeljemo tako, da na centimetrsko kvadratno mrežo narišemo pravokotnik izbranih dimenzij. Za lažjo razlago izberimo dolžino 5 cm in širino 7 cm. Na narisanim pravokotniku označimo 1 cm^2 . Najprej ploščino pravokotnika lahko določimo s štetjem vseh ploščinskih enot, kasneje lahko štejemo sistematično in ugotovimo, da je v vrstici našega pravokotnika 7 cm^2 in da imamo 5 takih vrstic, nazadnje pa

preidemo na izračun ploščine pravokotnika s pomočjo množenja in izpeljemo, da je ploščina $7 \text{ cm}^2 \cdot 5 = 35 \text{ cm}^2$ (ali $5 \cdot 7 \text{ cm}^2 = 35 \text{ cm}^2$). Lahko pa preštejemo najprej ploščinske enote v enem stolpcu, v našem primeru je to 5 cm^2 , stolpcev je 7, zato zopet lahko zmnožimo $5 \text{ cm}^2 \cdot 7 = 35 \text{ cm}^2$ (ali $7 \cdot 5 \text{ cm}^2 = 35 \text{ cm}^2$). Glede na predznanje, ki ga imajo učenci, ne postopamo na način, da bi zapisali $7 \text{ cm} \cdot 5 \text{ cm} = 35 \text{ cm}^2$, kajti učenci ne poznajo potenc. Ker poznajo ploščinske merske enote v smislu, da je npr. 1 cm^2 ploščina kvadrata s stranico dolgo 1 cm (torej niso pridobili ploščinske enote kot $\text{cm} \cdot \text{cm}$), jih moramo kot take obravnavati tudi pri določanju ploščine pravokotnika. Z učenci naredimo nekaj primerov in izpeljemo pravilo, da pri določanju ploščine lahko zmnožimo obe dolžini stranic in pripišemo ustrezno mersko enoto (predlagamo, da so podatki pri obeh dolžinah izraženi v isti merski enoti). Podobno kot pri obsegu mora biti jasno, da če zapišemo " $p = \dots$ ", moramo v nadaljevanju uporabiti v zapisu merske enote na način, kot smo ga predstavili zgoraj (le pri pomožnem računu nam merskih enot ni treba pisati). Ko računamo ploščino po obrazcu, pa zapišemo $p = a \cdot b$ in vstavimo podatke za stranico a in za stranico b . Zavedamo se, da prehod od prej opisanega postopka, ko ploščino določamo s krajšim načinom preštevanja ploščinskih enot (z množenjem), na množenje merskih števil in merskih enot ni čisto logično nadaljevanje, a predpostavljamo, da ima učenec že kar nekaj izkušenj z računanjem ploščine, zato preidemo brez posebnega utemeljevanja na računanje ploščine po obrazcu. Učenci pogosto zamenjujejo obseg in ploščino, zato predlagamo, da s prstom ponazorijo obseg, z dlanjo pa ploščino lika. Za oporo lahko uporabimo tudi grafično ponazoritev: obseg prevlečejo z eno barvo, velikost ploskve pa pobarvajo z drugo barvo.

3.2.2.8 Mreža geometrijskega telesa

Če razrežemo geometrijsko telo (kot modele uporabimo različne škatlice) vzdolž nekaterih robov tako, da ga lahko razgrnemo na ravnino, dobimo mrežo geometrijskega telesa. Pričnemo z mrežo kvadra in kocke, ki ju lahko opisujemo z geometrijskimi pojmi, ki jih učenci že poznajo: kvadrat, pravokotnik, stranica, vzporednost, pravokotnost, skladnost ... Poznavanje teh lastnosti učencem omogoča, da načrtajo mreže geometrijskih teles. Morda kot zanimivost lahko zapišemo, da obstaja natanko 11 neskladnih mrež kocke. Tudi pri mreži lahko uporabijo barvne opore, s katerimi ločijo robove (na mreži so to stranice) od ploskev, kar olajša sestavljanje geometrijskega telesa iz mreže. S sestavljanjem geometrijskega telesa iz mreže učenci razvijajo prostorske predstave. Denimo pri sestavljanju kvadra iz mreže, na kateri smo barvno označili ploskve, bodo enostavneje prepoznali, katere ploskve so sosednje, katere vzporedne ...

3.2.2.9 Kot

Dva poltraka, ki se stikata v izhodišču, na ravnini določata dva kota, dve premici, ki se sekata, pa štiri. Pri vpeljavi pojma kot ni druge možnosti kot deduktivna (učitelj situacijo nariše in označi kota oz. kote ter pojme poimenuje). Opredeli oziroma pokaže npr.u, kaj je vrh kota in kraka kota (vpeljavo kotov predlagamo s primerom dveh poltrakov, ki imata skupno izhodišče in ne pri sekanju dveh premic). Seveda besedo *kot* poznamo v življenjskih situacijah: šolsko torbo je postavil v kot; na gol je streljal iz kota; v kotu sobe je pajek ..., a pojem kota na ravnini je gotovo bolj abstrakten oziroma zelo enoznačno določen. Predlagamo, da učitelj opredeli na začetku velikost kota kot razprtost krakov: bolj sta kraka razprta, večji je kot. Ustrezna ponazorila so lahko škarje, dve palički, speti z netom, ki ju lahko bolj ali manj razpre, ali razpiranje dveh prosojnic, spetih s pritiskačem, na katerih sta narisani dve črti. Dejansko velikost pa bo učenec kasneje meril z geotrikotnikom. Če želimo primerjati kote po velikosti brez merjenja, to lahko naredimo "na oko" ali pa tako, da kote "izrežemo" iz papirja in s prekrivanjem ugotavljamo velikostna razmerja. Na enak način lahko primerjamo kote v večkotniku: lahko z očesom, lahko pa jih "izrežemo" in s prekrivanjem ugotavljamo, kateri kot je najmanjši, največji ... Kote v večkotnikih označimo z različnimi barvami in preden vpeljemo grške črke za oznake kotov, lahko uporabljamo poimenovanje kotov po ogliščih, npr. v štirikotniku ABCD bomo kote imenovali: kot pri oglišču A, kot pri oglišču B, kot pri oglišču C in kot pri oglišču D. Pri likih označimo predvsem notranje kote (te običajno primerjamo po velikosti in jih uporabljamo pri načrtovanju likov), lahko pa pokažemo tudi zunanje kote pri večkotniku, kar je zanimivo za učence, ki imajo boljše prostorske predstave. Poznavanje zunanjih kotov pri večkotniku za nadaljnje razumevanje geometrije glede na učni načrt ni bistveno. Kote bomo ob koncu obravnave imenovali z grškimi črkami in jih nakazali z lokom, lahko tudi s senčenjem.

Za določanje velikosti kota uvedemo kotno stopinjo. Predlagamo, da to ponazorimo kar na geotrikotniku in učence s primeri naučimo meriti velikosti kotov. Pri tem je pomembno, v kakšni legi so poltraki, ki določajo kote. Predlagamo, da je pri kotu, tako ostrem kot topem, ki mu določamo velikost z geotrikotnikom (vsaj na začetku) en poltrak vzporeden s spodnjim robom zvezka. Kasneje pa lahko lege poltrakov glede na zmožnosti učencev tudi spreminjamo. Bolj bistveno kot geometrijska "telovadba" z merjenjem kotov je ocenjevanje velikosti kotov: je manj/več kot 90 stopinj, več/manj kot 30, 60 stopinj, občutek za kot 45 stopinj ... Iztegnjeni kot in kot nič sta za učence najbolj abstraktna, saj iztegnjeni kot učenec lahko dojame kot premico, kota nič pa praktično ni mogoče zaznati. Poudarjamo, da to znanje o kotih za učence ni bistveno.

3.2.2.10 Geometrijsko orodje

Rokovanje z geometrijskim orodjem natančno prikaže učitelj. Pri konstruiranju kroga oziroma krožnice s šestilom vedno najprej označimo središče (predlagamo s križcem), ga označimo s črko in narišemo krog oziroma krožnico. Prej seveda odmerimo s šestilom polmer. Učencem pri rokovanju s šestilom ponudimo različne opore, npr.: plastelin za oporo igle šestila, prilagojeno šestilo ...

Nekateri učenci bodo bolj vešči pri uporabi geometrijskega orodja, zato lahko izvajajo različne načrtovalne naloge: načrtovanje trikotnika, risanje vzporednice k dani premice skozi dano točko, merjenje razdalj med točko in premico, med dvema vzporednima premicama, konstruiranje simetrale daljice, kota. Nekateri učenci pa tega ne bodo zmogli in bodo tovrstne naloge izvajali na njim prilagojeni način.

3.2.2.11 Prostornina in površina geometrijskih teles

Ob koncu osnovne šole spoznajo še prostornino (velikost omejenega prostora) in površino geometrijskih teles (razen pri krogli jo opredelimo kot vsoto ploščin mejnih ploskev). Najprej pojma lahko pokažejo na modelih, kasneje pa bodo prostornino in površino kvadra in kocke tudi izračunali. Površina je z vidika računanja oz. njegovega osmišljanja enostavnejša, saj učenec pozna ploščino kvadrata in pravokotnika, zato mora pri obravnavi površine usvojiti, da bo podatek o površini dobil tako, da bo seštel ploščine vseh mejnih ploskev. Pri prostornini pa je to nekoliko zahtevnejše, čeprav je matematični obrazec za izračun prostornine enostavnejši kot pri površini. Izberimo kvader določenih dimenzij in ga zapolnimo z enotskimi kockami. Najprej moramo učencu povedati, da je prostornina kocke z robom 1 cm enaka 1 cm^3 . To je podatek, ki je izhodišče za nadaljnje vpeljevanje prostornine kocke oziroma kvadra. Učenci bodo prostornino izbrane posode v oblik kvadra izmerili najprej tako, da bodo vanjo položili enotske kocke in jih prešteli. Nato bodo zapolnili samo dno, določili število kock na dnu in predvideli, koliko takih vrst bi napolnilo kvader (učitelj se lahko odloči in z učenci ponovno napolni kvader z enotskimi kockami na bolj sistematičen način kot prej, ko so kocke le preštevali med polnjenjem, in sicer tako, da zapolnijo dno in nato dodajajo enake "plasti" do "vrha" kvadra). Naslednji korak pa je izračun po obrazcu, ki ga vpeljemo ob konkretni ponazoritvi. Če imamo kvader dimenzije 4 cm, 5 cm in 7 cm, potem lahko postopamo na način, da zapolnimo dno s kockami in jih porabimo $4 \times 5\text{ cm}^3$ oziroma 20 cm^3 , nato pa razmislimo, koliko takih vrst potrebujemo, da zapolnimo kvader do vrha. V našem primeru je to 7 vrst, zato bo prostornina kvadra enaka 140 cm^3 . Seveda bi kvader lahko obrnili tudi drugače, a rezultat bi bil enak. Lahko naredimo nekaj primerov, da bi učenci dojeli, da s polnjenjem prostora kvadra

z enotskimi kockami določamo njegovo prostornino in da je ta odvisna od dimenzije kvadra, torej dolžin njegovih robov. Razumevanje izpeljave določanja prostornine geometrijskih teles je odvisno od precej različnih predznanj: poštevanke, prostorskih predstav, poznavanja lastnosti geometrijskih teles. Učenec, ki ne bo zmozel izračunati prostornine kadra, bo prostornino določil s preštevanjem enotskih kock na konkretnem primeru.

3.2.3 Merjenje

Kratka pojasnila nekaterih izrazov iz učnega načrta:

Merjenje: je primerjanje istovrstnih količin, mase z maso, dolžine z dolžino, ploščine s ploščino ...

Relativna enota: enota, ki se spreminja od merilca do merilca, običajno povezana s telesom merilca (laket, ped, korak ...).

Konstantna nestandardna enota: enota, ki ni standardna niti relativna, se ne spreminja od merilca do merilca (npr. za merjenje dolžine vsi, ki merijo, uporabijo enako dolgo palico, za maso enako težke frnikule ...).

Standardna enota: dogovorjena enota za posamezne količine (mednarodni merski sistem enot SI).

Večimenske merske enote: če je podatek o meritvi izbrane količine izražen v z več merskimi enotami, je izražen z večimensko enoto (npr. 3 m 7 cm).

Ordinalne merske enote: enote, katerih vrednosti (običajno) opisne lahko uredimo, ne moremo pa povedati razmerij med posameznimi enotami, mersko število 0 ni smiselno (primeri takih enot: znaki za razpoloženja od najmanj razpoloženega do zelo veselega; število zvezdic na hotelu (hotel, ki ima dve zvezdici, ni dvakrat boljši od hotela, ki ima dve zvezdici); ocene na preizkusu znanja (ocena 4 ne pomeni, da zna reševalec dvakrat več kot tisti, ki dobi oceno 2)).

Intervalne merske enote: enote, pri katerih je ničla arbitrarno določena (npr. čas 00.00 ali temperatura 0 °C), med njimi ne moremo povedati razmerij (če je zunaj 10 °C, to ne pomeni, da je 10-krat topleje, kot če je 1 °C), 0 ne pomeni odsotnost količine.

Proporcionalne enote: enote, med katerimi lahko izražamo razmerja (20 cm je dvakrat daljše kot 10 cm), 0 pomeni, da količine ni.

Učenci bodo pri vsebinah iz merjenja pridobili znanje in veščine o naslednjih merskih količinah: dolžina, masa, čas, denar, ploščina, površina in prostornina.

3.2.3.1 *Metodični koraki pri učenju merjenja količin (dolžina, masa, ploščina ...)*

Pri merjenju priporočamo postopanje po naslednjih korakih: 1) primerjanje količin, 2) merjenje z relativno enoto, 3) merjenje s konstantno nestandardno enoto in 4) merjenje s standardno enoto. Pred vsako meritvijo naj učenec meritev oceni in po izvedeni meritvi svojo oceno primerja z meritvijo. Oba podatka lahko vpiše v preglednico. Merjenje je v prvi vrsti primerjanje količin, npr. dolžine z dolžino, mase z maso ... Če merimo dolžino učilnice s koraki (korak je v tem primeru relativna enota, ker se spreminja od merilca do merilca), potem primerjamo dolžino koraka z dolžino učilnice in lahko povemo, da npr. dolžina učilnice meri 12 Evinih korakov ali z drugimi besedami: dolžina Evinega koraka je 12 krat krajša od dolžine učilnice (lahko tudi rečemo, da je učilnica 12 krat daljša od Evinega koraka). Ni namreč ustrezno, da bi dolžino učilnice npr. merili z listom A4, saj je pri tej "merski enoti" bolj kot dolžina izrazita ploščina. Torej bi z listom A4 lahko merili velikosti večjih ploskev, npr. ploskev table. Pri merjenju z relativnimi enotami je bistveno, da učenec usvoji določene veščine: izbere ustrezno mersko enoto za merjenje izbrane količine (npr. za dolžino učilnice korak, za dolžino mize ped, za ploskev mize dlan ...) ter usvoji "pravila" merjenja (dolžino merimo v ravni črti oz. od stene do stene po najkrajši poti, ploščino ploskve merimo tako, da merske enote polagamo drugo ob drugo in poskrbimo, da pokrijemo ploskev čim bolj v celoti ...). Relativna merska enota je običajno povezana z deli telesa, ni pa nujno. Relativnost merske enote lahko dosežemo tudi tako, da vsak učenec ali skupine učencev izberejo za merjenje določene količine različne merske enote. Ko usvojimo merjenje z relativno enoto, preidemo na konstantno standardno – pojavi se namreč potreba, da vsi dobimo pri merjenju izbrane količine enake rezultate. Za dolžino učilnice bomo namesto korakov izbrali palico in vsak, ki bo meril dolžino učilnice z izbrano palico, bi moral dobiti enak rezultat. Seveda so mogoča manjša odstopanja, predvsem ko dolžina učilnice ni večkratnik dolžine palice in bodo učenci lahko dolžino zaokrožili na različne načine. Ne vztrajajmo pri tem, da mora biti mersko število le naravno število; učenec bi lahko zapisal, da dolžina učilnice meri 9 palic in še pol palice ali kako drugače. Ker gre za realno situacijo, jo tako tudi ohranimo in dopustimo, da učenci pridobijo veščine, ki jim bodo tudi sicer v življenju koristile. Prehod na standardno enoto – to vpelje učitelj tako, da jo pokaže, poimenuje in zapiše simbol – je logičen zaradi komunikacije, ki jo želimo imeti izven našega razreda. V restavraciji ne naročimo dveh lončkov soka, ampak količino tekočine običajno povemo v dl. V učnem načrtu je jasno zapisano, s katero mersko enoto rokuje učenec v posameznem razredu. Pomembno je, da pri poučevanju vsebin iz merjenja izhajamo iz dejanskega merjenja, kar bo pri učencih omogočalo pridobivanje veščin merjenja in utrdilo znanje o merskih enotah. Pri standardnih enotah je treba vpeljati tudi

velikostne odnose. To je precej preprosto pri metru in decimetru, ker metrski trak lahko prelepimo z decimetrskimi trakovi, odnos decimeter vs. centimeter pa lahko odčitamo na ravnilu. Podobno pri masi lahko vzpostavimo odnose med določenimi merskimi enotami, npr. kilogram in dekagram, nekoliko težje pa med dekagramom in gramom. Lahko uporabimo izdelke, katerih masa je zapisana v standardnih enotah. 1 kg moke npr. tehtja enako kot 10 čokolad po 10 dag – ko nam tehtnica pokaže to ravnovesje, pa lahko zaključimo, da je 1 kg = 100 dag.

Pri vsebinah iz merjenja je zelo pomembno natančno izražanje: ne merimo mize, ampak merimo ploskev mize ali višino mize, ne merimo učilnice, ampak merimo dolžino, višino ali širino učilnice ... To so najpogostejše napake, ki jih delajo tako učitelji kot učenci. Enako pomembno je učence navajati na ocenjevanje meritev preden meritev dejansko izvedejo.

3.2.3.2 Merjenje in odčitavanje časa

Čas je specifična količina, za učenca najbolj abstraktna, saj je ne more videti na način, kot vidi ostale količine. Učenec najbolje razume pojem časa, če opazuje spremembe v času: nekaj časa je minilo od trenutka, ko smo jajce vrgli v ponev do stanja pečenega jajca; nekaj časa je minilo od takrat, ko je bilo drevo polno zelenega listja, do takrat, ko je bilo golo ... To so le nekateri primeri, ko dejansko lahko opazujemo spremembe v času. Če se odločimo opazovati izbrano drevo pred šolo, da ga npr. obiščemo enkrat na mesec in dokumentiramo njegovo stanje (ga fotografiramo, povonjamo, opazujemo življenje okrog njega) in počnemo na enak način celotno šolsko leto ter fotografije izobesimo, imamo priložnosti za dožemanje pojma čas pri učencih. Od učitelja se torej pričakuje, da bo obravnavo vsebin povezanih s časom načrtoval na začetku šolskega leta in dejavnosti udejanjal celotno šolsko leto. Na začetku učenec le opazuje spremembe, kasneje pa se lahko tudi že pogovarjamo o mesecih, dnevih ..., ko izbrano drevo obiskujemo. Čas je za nas subjektivna kategorija: 5 minut v zobni ordinaciji "teče" lahko za posameznika drugače kot 5 minut na igrišču. Tako tudi učenci dojemajo čas na različne načine, malo pa k temu pripomoremo tudi odrasli, saj je čas v izreku "še pet minut" zelo odvisen od situacije, v kateri se nahajamo. Učenci se bodo pri uri matematike učili odčitavati čas tako na analogni kot na digitalni uri, merili bodo tudi trajanje dogodkov. Zapisano vodi v obravnavo dveh vrst merskih enot: intervalne (pri odčitavanju časa, pri katerem je čas 00.00 arbitrarno določen) in proporcionalne (trajanje dogodkov v urah, minutah in sekundah). Pri intervalnih enotah število 0 ne pomeni odsotnost količine (npr. ura je 00.00), pri proporcionalnih, pa katerih lahko med dolžinami dogodkov vzpostavljamo razmerja (tolikokrat daljši, tolikokrat krajši dogodek), pa to pomeni. Posebno pozornost namenimo učenju odčitavanja časa na analogni uri

s pomočjo opor: obarvani kazalci, številke na uri, dodatne številke na uri ... Lahko pričnemo samo z urnim kazalcem, nato vključimo še minutnega. Izdelamo ure za učence, na katerih označimo najprej samo ure (od 1 do 12), nato pa dodajamo minute (npr. 5, 10, 15 ...), kasneje pa dan ločimo na ure od polnoči do 12h in od 12h do polnoči, ki jih dodatno označimo na izdelani uri (13, 14, 15 ..., do 24).

3.2.3.3 Pretvarjanje merskih enot

Pretvarjanje med količinami je znotraj vsebin merjenja najzahtevnejše za učence. Ne gre le za to, da so lahko njihove predstave o količinah slabe, gre tudi za precej zahtevne postopke, še posebej ko pretvarjamo iz enoimenske v večimensko enoto ali obratno. Poudarjamo, da skladno z učnim načrtom pretvarjamo le med sosednjima merskima enotama pri posamezni količini, zato ne bomo npr. obravnavali primera $5\text{ m } 6\text{ dm} = \text{___ cm}$, kajti v tem primeru m in cm nista sosednji merski enoti (vmes je dm). Ustrezen primer je npr. $5\text{ m } 6\text{ dm} = \text{___ dm}$, ker sta posamezni dve enoti, m in dm, sosednji. Kako postopamo pri taki nalogi pretvarjanja? Najprej moramo zelo dobro vedeti, kaj naloga od nas zahteva. Večimensko enoto moramo pretvoriti v enoimensko (učencem teh izrazov ni treba poznati) oziroma moramo podatek o dolžini zapisati le v decimetrih. Vprašamo se, koliko decimetrov meri 1 m in ker vemo, da 10, bomo 10 pomnožili s 5 (imamo namreč 5 metrov) in dobili 50 dm. Te decimetre bomo prišteli k šestim in dobimo 56 dm. Strinjamo se, da je takole zapisati enostavno in da učenec potrebuje veliko vaje. Svetujemo, da utrdimo eno vrsto nalog, npr. pričnemo s primeri, ki smo jih nakazali. Če sestavimo najprej naloge, v katerih je mnogoimenska enota zapisana v metrih in decimetrih, lahko nadaljujemo s primeri, ko imamo decimetre in centimetre in bomo iskali enoimensko enoto v centimetrih. Podobno je pri pretvarjanju enoimenskih enot v večimenske, npr. $35\text{ dm} = \text{___ m } \text{___ dm}$. V tem primeru podatek 35 dm razčlenimo na 30 dm (ker so pretvorniki pri merskih enotah za dolžino večkratniki števila 10) in 5 dm. Vprašamo se, koliko m meri 30 dm? Bo to več? Manj? Zakaj ...? Ugotovimo, da si lahko pomagamo tudi z metriskimi trakovi, da je 30 dm enako kot 3 m. To vpišemo na ustrezno mesto in pripišemo še dm. Spet poudarjamo, da pretvarjamo le med sosednjimi merskimi enotami, zato npr. primer $120\text{ mm} = \text{___ dm } \text{___ cm}$ ni ustrezen, saj mm in dm nista sosednji merski enoti za dolžino. Kot oporo pri pretvarjanju merskih enot predlagamo preglednico z merskimi enotami, v kateri so razvidni pretvorniki merskih enot in je poudarjena osnovna merska enota.

Merskih količin za čas učenci ne pretvarjajo, poudarek je na odčitavanju časa, branju in zapisovanju datumov ter poznavanju velikostnega odnosa med uro in minuto. Pri reševanju

nalog, ki so povezane z merjenjem v vsakdanjem življenju, pa lahko vključimo tudi naloge, pri katerih bo potreben tudi razmislek, npr. o pretvorbi 5 ur v minute.

3.2.3.4 *Računanje z merskimi količinami*

Omenili smo, da bomo v sklopu o merjenju zapisali tudi nekatere poudarke računanja s količinami. Pri računanju s količinami ne drži, da morajo oziroma je pravilno, da so vsi členi merska števila ali da je rezultat mersko število, če sta člena merski števili. Pravilo, da so vsi členi in rezultat merska števila, velja za seštevanje in odštevanje npr. $5\text{ m} + 3\text{ m} = 8\text{ m}$ ali $56\text{ dl} - 12\text{ dl} = 44\text{ dl}$... Drugače pa je pri množenju in deljenju. Vzemimo primer $15\text{ m} : 3$ in ga razlikujmo od primera $15\text{ m} : 3\text{ m}$. Pri prvem bo količnik mersko število, pri drugem pa ne. Prvi primer lahko prevedemo v življenjsko situacijo na način, da se vprašamo, kako dolgi bodo trakovi, če 15 m dolg trak razrežemo na tri enake dele. Pri drugem primeru, $15\text{ m} : 3\text{ m}$, pa količnik ni mersko število, ampak podatek, ki pove, koliko trakov dolgih po 3 m dobimo, če na take dolžine razrežemo 15 m dolg trak. Pri množenju praktično za učence ne bomo zapisali računa, v katerem bosta faktorja merski števili, npr. $5\text{ cm} \cdot 12\text{ cm}$, saj za učenca tak račun nima pomena (pomen ima v višjih razredih pri pojmu ploščina, ko pričnemo uporabljati obrazec za izračun ploščine likov), zato so ustreznejši računi množenja, ko je le en faktor mersko število, npr. $6\text{ m} \cdot 8$, ki ga lahko za učence tudi osmislimo: imamo 8 trakov dolgih po 6 m in se vprašamo, koliko so dolgi vsi skupaj.

Pri reševanju besedilnih nalog, v katerih nastopajo merske količine, lahko računamo na dva načina: račun zapišemo z merskimi števili ali brez njih (včasih moramo uporabiti npr. pisno računanje). Pomembno pa je, da v odgovoru zapišemo ustrezno mersko enoto ob številu, če naloga sprašuje po tovrstnem podatku. Opozorimo učence, da zapis $5 + 6 + 13 = 24\text{ m}$ pri nalogi, koliko dolge so tri vrvice skupaj, če so dolge 5 m , 6 m in 13 m , ni pravilen, saj moramo pri računih seštevanja merske enote pisati pri vseh členih in pri rezultatu ali pa pri nobenem. Pri odgovoru mora biti odgovor smiseln glede na vprašanje. V našem primeru z vrvicami bo to podatek, izražen v metrih.

3.2.3.5 *Denarne enote*

Pri merjenju je potrebno izpostaviti tudi obravnavanje denarnih enot, ki jih najbolj mogoče povezujemo z realnimi situacijami in pripravljamo učence na uspešno rokovanje z denarjem. V učnem načrtu so jasno predstavljeni cilji, ki učitelja usmerjajo pri načrtovanju dela v razredu. Pomembno je, da za učence priskrbimo igralni denar, čim bolj podoben pravemu, saj bo le tako lahko učenec usvojil njegovo uporabnost. Gotovo ni odveč pripomniti, da bo učenec, ki ima lahko težave z računanjem, v "potrošniškem" kontekstu račun bolj razumel in ga tudi zmoget

izračunati. Z drugimi besedami: učencu račun $34 + 48$ lahko predstavlja večji izziv, kot če račun vključimo v kontekst cen dveh izdelkov, $34 \text{ €} + 48 \text{ €}$.

Primer poučevanja denarnih enot

Osnovno znanje rokovanja z denarnimi enotami je treba razvijati dovolj časa. Učenci morajo usvojiti tudi različna predznanja, kot npr. spoznavanje kovancev različnih vrednosti (posebej cente in posebej evre), njihovo razlikovanje po barvi, teži, obliki. Učitelj mora biti pri mlajših učencih pozoren na varnost pri rabi malih kovancev. Učenci naj kovance najprej razporejajo po velikosti in barvi, kasneje pa tudi po vrednosti. Preberejo vrednosti kovancev (npr. najprej do 10 centov). Po navodilu naj učenci nastavijo vrednosti kovancev (npr. na različne načine s kovanci različnih vrednosti nastavi 5 centov, 10 centov, 50 centov ...) ali povedo, koliko denarja imajo v denarnici. V kotičku učenci izvedejo dramatizacijo nakupovanja z realnimi predmeti in denarjem (realnim ali igralnim). Spoznajo, da so nekateri kovanci več vredni kot drugi. Pri igri nakupovanja se naučijo dejstva, da morajo plačati, kar kupijo in ustreznega izrazja (cena, račun ...), povezanega s postopkom nakupovanja. Učijo se zaokroževanja cen in ocenjevanja količin (npr. ugotavljajo, ali imajo dovolj denarja za nakup določenega izdelka). Cene več izdelkov najprej ocenijo in potem ugotovijo, ali jih glede na količino denarja, ki ga imajo, lahko kupijo. Sledi računanje z denarnimi enotami. Izračunajo ceno nakupa izdelkov z upoštevanjem postopnosti, zato najprej rešujejo enostavne naloge seštevanja in odštevanja v obsegu do 10 centov, potem do 20 centov in kasneje v večjem obsegu z več operacijami. Podoben kot je postopek usvajanja značilnosti in vrednosti kovancev s centi, je tudi postopek spoznavanja kovancev in bankovcev za evre.

S številnimi vajami nastavljanja vrednosti kovancev in bankovcev učenci povezujejo cene z ustreznimi količinami denarja ter se ob izvajanju nakupovanja naučijo pretvornika denarnih enot, predstavljenih s kovanci (npr. 1 evro je 100 centov). Naredimo tudi plakat s slikovnim in simbolnim zapisom denarnih enot.

Pri reševanju matematičnih besedilnih in problemskih nalog so uporabne ilustrirane *naloge realistične matematike* (Beishuizen, 1997), saj omogočajo upoštevanje postopnosti od manj do bolj zahtevnih nalog in s tem tudi individualizacijo in diferenciacijo zahtev. Naloge so manj odvisne od jezikovnih in bralnih sposobnosti učencev in praviloma učence te naloge bolj zanimajo in motivirajo za reševanje kot običajne naloge. Pri nalogah nakupovanja postopoma prehajajo od demonstracije nakupovanja v realni trgovini, v »trgovini« v kotičku do ilustriranih nalog. Kasneje preidejo na ilustrirane naloge nakupovanja, ki vključujejo npr.

narisano denarnico z napisano količino denarja ter različne ilustrirane izdelke s cenami. Začnejo postopno le z namišljenim nakupom enega izdelka, pri čemer najprej ocenijo, ali imajo v denarnici dovolj denarja za nakup izdelka. Večini učencev uspe tudi izračunati, koliko denarja jim ostane ali zmanjka za nakup izdelka. Potem povečujemo število izdelkov s cenami in učenci se sami odločijo, koliko izdelkov bi kupili. Napišejo račun za namišljeni nakup in ga izračunajo. Z računalom lahko preverijo pravilnost izračuna. Na ta način je uresničena tudi individualizacija in diferenciacija zahtev, saj učenci z večjimi težavami pri učenju matematike pogosto izberejo le en izdelek, drugi pa skušajo porabiti celotno količino denarja.

Z učiteljevim modeliranjem se učijo nakupovanja izdelkov v avtomatih s pijačo in drugimi izdelki in dvigovanja denarja v bančnih avtomatih. Poleg tega jim učitelj predstavi idejo varčevanja denarja in načrtovanja porabe privarčevanega denarja. Uči jih zavedanja, da so nekateri izdelki zelo dragi in moramo zanje dolgo varčevati, drugi pa so cenejši in zanje lahko hitreje privarčujemo denar.

3.3 DRUGE VSEBINE

3.3.1 Logika in jezik

Kratka pojasnila nekaterih izrazov iz učnega načrta:

Urejanje: razporejanje elementov glede na intenzivnost izbrane spremenljivke (npr. od najmanjšega do največjega).

Slikopis: slikovni prikaz lastnosti, ki je čim bolj splošen (npr. za lastnost "ima očala" čim bolj enostavno in posplošeno narišemo očala, ki ne pomenijo nobenih točno določenih očal, ampak vsa očala).

Vzorec: neomejen sestav objektov (konkretnih, grafičnih, simbolnih, gibalnih ...), ki se ponavljajo po nekem pravilu. Vzorec je dobro definiran, ko se niz, ki je osnovna enota vzorca, dvakrat ponovi.

Kombinatorične situacije: razporedbe – razporejanje določenega števila objektov v vrsto, pri čemer je vrstni red pomemben (npr. razporejanje števil 1, 2 in 3 v trimestna števila); kombinacije – vsi možni pari elementov iz dveh skupin (npr. plesni pari fant – dekle, če imamo 3 dekleta in 2 fanta; vsi načini oblačenja krilo – majica, če imam na voljo dve krili in štiri majice ...).

3.3.1.1 Razvrščanje in prikazi (Vennov in drevesni prikaz)

Vsebine in cilje, vezane na logiko in jezik, praktično razumemo kot neke vrste uvajanje v sistematično mišljenje, pomen matematičnega jezika oziroma natančnega izražanja. Osnovna dejavnost je razvrščanje objektov glede na izbrane lastnosti oziroma ugotavljanje kriterijev razvrščanja. Po eni strani te dejavnosti učence spodbujajo, usmerjajo k natančnemu opazovanju objektov, prepoznavanju podobnosti in razlik, po drugi strani pa jih uvajajo v matematično prikazovanje in matematični jezik. Razvrščanje je dejavnost, ki jo praktično izvajamo vsak dan, ko pospravljamo pribor, zlagamo perilo ..., a prikazovanje razvrstitev na matematičen način terja še drugačno pozornost. Skupine objektov zaobjamemo s sklenjeno krivo črto, če imamo v mislih Vennov prikaz, lahko jih prikažemo v drevesnem prikazu. Lastnosti prikažemo s slikopisom, pri drevesnem diagramu je vključeno tudi zanikanje lastnosti. Vzemimo npr., da bomo razvrščali sadje. Če se odločimo za Vennov prikaz, bomo npr. določili lastnost "barvo" in oblikovali skupine sadežev po barvi, npr.: rumeno sadje, zeleno, rdeče, modro. Vsako lastnost lahko prikažemo s slikopisom na način, da z omenjenimi barvami pobarvamo npr. kartončke (na nek način narišemo na kartonček "packo" izbrane barve) in jih priložimo k posameznim skupinam. Pri tem prikazu torej ni zanikanja lastnosti. Drugače pa je pri drevesnem prikazu, pri katerem se ukvarjamo z lastnostjo in njenim zanikanjem. Ponovno bomo prikazali na prej omenjenem primeru s sadjem. Tokrat se lahko odločimo, da bomo sadje razvrstili na tisto, ki je rdeče, in na tisto, ki ni rdeče. V tem primeru bomo pripravili dva kartončka z rdečo "packo" in jo na enem prečrtali, s čimer bomo prikazali lastnost skupine, v katero sodi sadje, ki ni rdeče barve. Za učence zanikanje lastnosti ni enostavno, zato je vpeljava zanikanja npr. u barv, ki so jim dokaj blizu, najprimernejša. Tako bomo torej narisali drevesni prikaz: najprej "deblo" in dve "veji". V koren posamezne "veje" priložimo ali narišemo na enega slikopis za lastnost, na drugega njeno zanikanje ter oblikujemo dve "krošnji". V našem primeru bo na eni krošnji "raslo" rdeče sadje, na drugi pa ne rdeče sadje. Učence tak prikaz lahko celo presenet. Pri razvrščanju, predvsem pri Vennovem diagramu, učence spodbudimo, da poiščejo vsiljivca. En predmet (sličico, besedo ...), ki ne sodi glede na izbrano lastnost skupine v skupino, nalašč umestimo vanjo in pozovemo učence, da ga najdejo. Ni nujno, da bo njihova izbira enaka naši; lahko izberejo drug predmet in če znajo ustrezno utemeljiti izbiro, bomo vsiljivca seveda upoštevali.

3.3.1.2 Urejanje

Pomemben proces tega sklopa je urejanje predmetov glede na intenzivnost vrednosti izbrane spremenljivke, npr. dolžine, višine, debeline, velikosti ploskve ... Za učence pripravimo ustrezen material in navodilo za urejanje. Število objektov postopoma povečujemo: na začetku

učenci primerjajo lahko le dva objekta, nato tri ... Pomembno je, da jih učitelj spodbuja k natančnemu izražanju, kajti učenci morajo ločiti npr. besedi višji in večji, ki ju v vsakdanjem diskurzu praktično izenačujemo. Enako kot za razvrščanje, kjer smo zapisali, da učence spodbudimo, da ugotovijo kriterije razvrščanja, velja tudi za urejanje. Učencem lahko ponudimo že urejeno vrsto objektov in jih vprašamo, po katerem kriteriju so urejeni. Po eni strani so take naloge pomembne z vidika razvijanja ideje posploševanja, po drugi strani pa z vidika usvajanja matematičnega izražanja. Pri usvajanju posploševanja v matematiki ima pomembno vlogo učitelj, ki z ustreznimi pristopi, vprašanji vodi učenca od enostavnega posploševanja do bolj kompleksnega. Če bomo imeli npr. skupino rdečih reči, bo učencem enostavno ugotoviti (posplošiti), da je lastnost skupine ta, da so vsi predmeti rdeči. Barva je učencu blizu, zato bodo lahko usmerjeni na proces ugotavljanja skupne lastnosti, ki pa jo lahko postopoma otežujemo (npr.: vsi predmeti so trikotne oblike, vsi predmeti se kotalijo ...). Sposobnost ugotavljanja kriterijev razvrščanja ali urejanja, ki vodi v najbolj osnovno posploševanje, učencu bistveno pomaga pri pridobivanju matematičnih pojmov. Zamislimo si npr. pridobivanje pojma trikotnik. Kaj drugega počne učenec kot to, da poveže, kaj je vsem oblikam (v našem primeru različni trikotniki), ki smo mu jih ponudili, skupnega? Prav tako je npr. večkratnikom števila 5 skupno to, da imajo 5 ali 0 enic ... V matematiki praktično ves čas posplošujemo, zato je bistvenega pomena, da učitelj nameni dovolj pozornosti tudi obrnjenim dejavnostim razvrščanja in urejanja, ki so v praksi bolj zapostavljene, torej določanju kriterijev, ko že imamo objekte razvrščene ali urejene – kot smo že zapisali, je pri tem zelo pomembna postopnost pri izbiri primerov in učiteljevo vodenje učenca z vprašanji, npr.: kateri predmeti so v skupini; v čem so si podobni; kateri predmet bi še lahko dodali v skupino; kako bi skupino poimenovali ...

3.3.1.3 Relacije med elementi množic, prirejanje eden – enemu

Ko imamo oblikovane skupine, pa lahko pričnemo tvoriti relacije med elementi (objekti, člani) dveh skupin s pušičnim diagramom. V matematiki ga sicer imenujemo tako, za učence bo popolnoma primerno, če ga poimenujemo kar prikaz s črtami in ne rišemo puščic. V matematično razlago pomena puščic se na tem mestu ne bomo spuščali. Vzemimo primer dveh skupin: skupina učencev in skupina igral. Učenca lahko vprašamo, na katero igralo bi najraje šel. To najprej pove vsak učenec posebej, nato pa učence seznanimo, da v matematiki povedano lahko prikažemo kar s črto: od imena učenca do ustreznega igrala narišemo črto. Če bosta imeli skupini veliko objektov, bo prikaz postal precej nepregleden, zato izberemo ustrezno število članov vsake skupine. Poudarimo še, da gre tu za povsem poljubno relacijo med elementi dveh

skupin; ne gre za preslikave v matematičnem smislu in učencu pri izbiri igral ne določamo nobenih omejitev (edino to, da izbere eno igralo), kar pomeni, da bi vsi učenci lahko izbrali tudi isto igralo.

Naslednja skupina dejavnosti, ko so učenci usvojili prikaz s črtami in interpretacijo, pa bo vključevala relacijo prirejanja eden – enemu. Tokrat bomo učencem ponudili dejavnost tipa "ali ima vsak ...", npr. ali ima vsak lonček svoj krožniček. Učenec bo na konkretni ravni sestavljal pare in ugotovil, česa je več, manj ali enako brez štetja. Če ima torej v omenjenem primeru z lončki in krožnički vsak lonček svoj krožniček, pomeni, da jih je enako oziroma jih je različno število, če to ni tako. Podobno se lahko vprašamo, ali ima vsak flomaster svoj pokrovček, ali je enako čajnih skodelic kot filtrov za čaj, ali ima vsak želod želodovo kapico ... Našteli smo nekatere primere, ki jih lahko izvedemo najprej na konkretni ravni in učencem omogočimo izkušnjo prirejanja eden – enemu, ki jo bodo kasneje lahko prikazali s prikazom s črtami. S takim prirejanjem lahko učenec dani skupini objektov priredi enako, več ali manj objektov. Učenec bo torej lahko brez štetja oblikoval skupino objektov, ki bo imela manj/več/enako članov kot dana skupina objektov.

Treba je poudariti, da je štetje tudi prirejanje eden – enemu, kajti pri štetju počnemo natanko to: vsakemu preštevancu izrečemo natanko eno število in število, ki ga izrečemo nazadnje (preštevancu, za katerega smo se odločili, da je pri našem štetju zadnji, kajti vrstni red pri štetju ni pomemben), določi število vseh objektov naše preštevane skupine.

3.3.1.4 Vzorci

Tudi vzorce obravnavamo v tem sklopu. Vzorec kot matematični pojem praktično ne obstaja, pri pouku matematike pa ima pomembno vlogo. Najprej povejmo, da je vzorec neomejen sestav objektov, ki se ponavljajo po nekem pravilu. Namenoma govorimo o sestavu, da ne bi ustvarili ideje, da gre pri vzorcu le za linearno (običajno so to v vodoravni vrsti nanizani objekti) nadaljevanje. Vzorec lahko gradimo v višino, npr. s kockami, lahko na ploskvi z liki, lahko pri plesu, gibanju ... Bistveno je, da pri vzorcu določimo niz (skupino objektov), ki se ponavlja. Da bi lahko nadaljevali vzorec, je potrebno niz dvakrat ponoviti. Če bi imeli npr. situacijo "trikotnik, kvadrat, trikotnik", še nismo definirali niza, ki se ponavlja, čeprav bi lahko nekdo predpostavljal, da bo sledil kvadrat. To ni nujno, ker vzorca nismo natančno opredelili. Če pa imamo situacijo "trikotnik, kvadrat, trikotnik, kvadrat", je popolnoma jasno, da bo naslednji lik, ki ga bomo postavili, trikotnik, če gremo proti desni, in kvadrat, če gremo proti levi. Smiselno je nadaljevati vzorce v različnih "smereh". V učnem načrtu smo predlagali zaporedje obravnav vzorcev po razredih. Najpreprostejši vzorci so tipa abab, aaabbbbaabbb, aabbaabb, ki jih

učencem predstavimo najprej s konkretnimi objekti, tudi grafičnimi ali simbolnimi, če bi želeli z nekaterimi učenci utrjevati zapis števil ali črk v vzorcu, npr. 1 2 1 2 ali C D C D.

Zaporedja se od vzorcev nekoliko razlikujejo – pravilo ni le ponavljanje, ampak katerokoli drugo, ki ga je mogoče posplošiti. Najpreprostejše zaporedje je zaporedje naravnih števil – vsako naslednje število je od prejšnjega za eno večje, sledijo zaporedja sodih, lihih števil oziroma zaporedja števil, za katera velja, da so razlike med sosednjima številoma enake. V šoli obravnavamo torej le preprosta aritmetična zaporedja, drugih pa ne. Preprosta aritmetična zaporedja so večkratniki poštevanke, naštetih od najmanjšega do največjega ali obratno. Lahko pa z učenci nadaljujemo tudi različna druga zaporedja v obsegih števil, ki jih učenci poznajo. V obsegu števil do 1000 je najpreprostejše zaporedje stotic, desetec v eni stotici ...

3.3.2 Obdelava podatkov

Pri obdelavi podatkov v osnovni šoli predvsem stremimo k ciljem zbrati, prikazati in interpretirati podatke. Vsebina, skupaj z drugimi, predvsem aritmetiko, sodi tudi na področje razvijanja matematične pismenosti. Matematično pismenost, o kateri smo zapisali že nekaj uvodoma, opredelimo kot aktivnost posameznika, ki je zmožen formulirati, uporabljati in interpretirati matematične vsebine v različnih kontekstih. V tej definiciji je jasno izraženo, da ne gre le za posameznikovo prepoznavanje in razumevanje vloge matematike v vsakdanjem življenju, ampak gre za njegovo zmožnost interpretiranja in artikuliranja matematičnih vsebin v (kompleksnejših) kontekstih. Pri vsebinah iz obdelave podatkov je teh kontekstov veliko. Če omenimo le nekatere: živali, hrana, promet, prostočasna dejavnost, ekologija, potem je razvidno, da vsak kontekst omogoča stopnjevanje obravnavanja podatkov: od zelo preprostega prikazovanja podatkov s figurnimi prikazi do histograma. Izdelave slednjega učencem ne predstavljamo posebej, lahko pa ga izdelamo v ustreznem računalniškem okolju.

3.3.2.1 Figurni prikaz s stolpci, vrsticami

Figurni prikaz s stolci ali z vrsticami je najpreprostejša oblika prikazovanja podatkov, saj jih lahko prikažemo tako, da npr. ena sličica pomeni en podatek, vrednosti spremenljivke so običajno kvalitativne oziroma njihove vrednosti opisne. Ilustrirajmo to s primerom. Če želimo ugotoviti, katera je najpogostejša barva oči učencev v našem razredu (barva oči je torej kvalitativna spremenljivka), bomo najprej ugotovili, kakšne barve oči imamo (rjava, modra, zelena, siva so v našem primeru vrednosti kvalitativne spremenljivke barva). Nato bomo te vrednosti spremenljivke prikazali s slikopisom (lahko narišemo oči v različnih barvah, npr. vsakega na svoj kartonček). Nad posameznimi vrednostmi spremenljivkami bodo nato učenci pritrdili svoj kartonček, na katerega so na svoj način označili barvo svojih oči. Tako bodo

nastajali stolpci iz "figur", ki (stolpci namreč) naj se ne držijo skupaj, kajti spremenljivka "barva" ni zvezna oziroma z drugimi besedami med npr. modro in zeleno barvo oči ni neke vrednosti (kot je npr. pri številih, denimo pri spremenljivki čas, med npr. vrednostma 5 min in 6 min še veliko drugih vrednosti). Podobno lahko nastane tudi figurni prikaz z vrsticami. "Figure" so lahko torej sličice, lahko so kocke, gumbi ..., različni materiali, ki so enako veliki in enakih oblik ter omogočajo pregledno prikazovanje podatkov. Pri prikazu s stolpci ali vrsticami, ki niso figurni, pa gre praktično za podobno situacijo, le opraviiti imamo s prikazovanjem podatkov na način, da grafično prikažemo podatke z barvanjem kvadratkov, najpogosteje na začetku šolanja na karirasti mreži. Posebnost pri prikazovanju s stolpci oziroma z vrsticami je še ta, da moramo ob prikazu pridati še legendo, s čimer povemo, kaj en kvadrateg pomeni. Na začetku en kvadrateg pomeni en podatek, ko pa učenci že poznajo poštevanko, pa lahko en kvadrateg prestavlja npr. 3 podatke.

3.3.2.2 Figurni prikaz

Poznamo še figurni prikaz, pri katerem ne gre za stolpce ali vrstice kot v prej omenjenem prikazu, ampak gre za nekakšno združeno obliko obeh opisanih prikazov: torej imamo opraviiti s figurami in še z legendo. Če bi npr. želeli prikazati sečnjo dreves po letih, bi lahko s "figuro" *smreka* predstavili 100 dreves in bi pol smreke (simetrična polovica, če si jo predstavljamo v "idealni" obliki) predstavljala 50 dreves. Vrednosti spremenljivke leto bi bile v tem primeru številčne oziroma kvantitativne (določena leta, npr.: 2019, 2020, 2021).

3.3.2.3 Črtni, tortni prikaz

Učenci spoznajo še črtni in tortni prikaz. Črtni prikaz je praktičen pri zbiranju podatkov. Če se odločimo v skupini učencev raziskati, katero sadje od predlaganih je med njimi najbolj priljubljeno, lahko to naredimo na več načinov: lahko z dvigom rok (učenci dvignejo roke, ko vprašamo po določenem sadju), lahko zbiramo podatke v skrinjici na način volitev (na posamezni skrinjici imamo narisane sadeže, učenec vanjo vrže žeton ali kaj podobnega in s tem označi svojo izbiro) ali pa se odločimo za anketo (učenec ima narisane sadeže in sprašuje učence, kateri mu je najljubši). Prav pri slednji obliki zbiranja podatkov (anketa) lahko uporabimo črtni prikaz. Ko učenec naredi 4 črtice, bo peti podatek pri posameznem sadežu prikazal na način, da bo prejšnje štiri na nek način prečrtal in s tem označil skupinico petih. Zakaj tako ravnamo? Ker je končno določanje števila izbir pri posameznem sadežu bistveno preglednejše, kot če bi imeli zgolj črtice, ki ne bi bile združene v skupine. Morda pa bi učenci preizkusili prikazovati podatke le s črticami in bi se tako lahko kasneje, ko bi jim ponudili tudi črtni prikaz, sami prepričali o razlikah oziroma prednostih drugega.

Tortni prikaz je lahko dokaj preprost prikaz, če se osredotočimo le na deleže, ki jih učenci poznajo in jih sprašujemo po interpretaciji podatkov (polovica, četrtna, osmina). Sicer pa je tortni prikaz precej abstrakten, saj nam krog predstavlja celoto vseh podatkov (ki kar naenkrat za učence niso več števnici, kot so bili pri drugih omenjenih prikazih), ki jih učenec interpretira na osnovi poznavanja delov celot. Če učencem posredujemo podatek o tem, koliko podatkov predstavlja celota, potem bomo deleže pri posameznih vrednostih spremenljivke (denimo, da nam tortni prikaz prikazuje, katera knjiga je med mladimi bralci najbolj priljubljena) izračunali tako, da bomo izračunali vrednost deleža glede na celoto. Če spet ilustriramo s primerom za poznavanje knjig, ki smo ga omenili, potem bi npr. lahko izračunali, kolikim učencem je najbolj všeč knjiga Bratovščina Sinjega galeba, če bi vedeli, da je bilo anketiranih 12 bralcev in se je za omenjeno knjigo odločila $\frac{1}{4}$ bralcev, torej $\frac{1}{4}$ od 12.

Tortnega prikaza učenci ne izdelujejo, saj izdelava tortnega prikaza predpostavlja delitev polnega kota na dano število podatkov oziroma deljenje kroga na dano število enakih delov. Delitev kroga na enake dele je za učence glede na njihovo znanje mogoča le na potence števila 2, torej 1 del (celota), 2 dela, 4 deli, 8 delov, 16 delov ...

3.3.2.4 Preglednica

Posvetimo se kratko še preglednicam, pri katerih je bistveno, da najprej opredelimo pojma stolpec in vrstica. Preglednice nas spremljajo vsepovsod, predstavljajo, kot že beseda pove, pregleden način prikazovanja podatkov, katerega izdelava kot tudi interpretacija za učence nista nujno najbolj enostavni. V učnem načrtu smo vključili stopnjevanje zahtevnosti, od dveh stolpcev (npr. osebno ime in njegova pogostnost) do več stolpcev (npr. urnik). Zelo pomembno je, da učence naučimo izdelati preglednico in smo pozorni, da učenci razumejo, kaj pomeni glava preglednice (pri prej omenjenih dveh stolpcih za preglednico o pogostosti imena, bi v glavi zapisali v prvi stolpec "ime", v drugega pa "število") in kako v preglednici podatke uredimo, če so podatki številčni. Pri preglednici o pogostosti posameznih osebnih imen bi npr. lahko uredili podatke od imena, ki se največkrat pojavi, do imena, ki se najmanjkrat. Urejanje podatkov v preglednici ni vedno mogoče ali smiselno. Učenci naj podatke iz preglednic berejo, primerjajo, interpretirajo. Ponudimo jim čim več različnih preglednic; že v učbeniških gradivih, ki jih uporabljajo pri pouku, jih je precej. Morda pa včasih le prehitro privzamemo, da so jim preglednice v učbeniških gradivih (ne le pri matematiki) uporabne na način, kot bi si želeli in jih zato sistematično ne vpeljemo, kar ni prav. Navedli smo kar nekaj načinov predstavljanja podatkov, a ne smemo pričakovati, da bodo učenci obvladali vse. Prilagajamo tudi obseg števil in število vrednosti dane spremenljivke (npr. letni čas je ustrezna spremenljivka, ker ima le štiri

vrednosti; število vrednosti spremenljivke skladno z zmožnostmi učencev lahko tudi stopnjujemo).

3.3.2.5 *Kombinatorične situacije*

Sistematično mišljenje pri matematiki razvijamo tudi z vsebinami iz kombinatorike. Kombinatorične situacije, ki jih obravnavamo pri pouku matematike, so dveh vrst: razporedbe oziroma permutacije (npr. na koliko različnih načinov se trije učenci lahko postavijo v vrsto, eden za drugim ali koliko različnih trimestnih števil lahko sestavimo iz števil 3, 5 in 7 ...) in enostavne kombinatorične situacije (npr. na koliko različnih načinov se lahko oblečem, če imam na voljo tri krila in dve majici in vsakič oblečem eno krilo in eno majico). Pri razporedbah lahko uporabimo konkreten material, npr. sestavljamo stolpce iz treh kock različnih barv, vsak stolpec je zgrajen iz kock vseh treh barv, in jih med seboj primerjamo: sta morda katera dva enaka, kaj še manjka ... Podobno dejavnost lahko izvedemo z barvanjem kvadratkov (ali česa drugega); pomembno je, da učenec poskuša najti čim več različnih možnosti oziroma pri 3 različnih objektih 6 razporedb. To ni enostavna naloga, kajti učenec običajno usmeri pozornost na objekt, ki je na prvem mestu, in sta mu drugo in tretje mesto manj pomembni, zato bo na začetku najverjetneje ponudil tri rešitve pri razporejanju treh različnih objektov. Učencu zato ponudimo različne dejavnosti (ni nujno, da je pri sistematičnem preštevanju najboljši konkreten material) in ga vodimo pri iskanju možnosti, nakažemo tudi sistematičnost (če je npr. prva kocka rdeča, kakšna je lahko druga, če imamo na razpolago modro in rumeno ...). Lahko vključimo tudi številke, črke in jih razporejamo v vrste – skratka dejavnosti v 5. in 6. razredu prilagodimo učenčevemu predznanju in zmožnostim. Pri razporedbah števil to pomeni, da bomo oblikovali dvomestna ali trimestna števila, ki jih nato lahko urejamo, pri razporedbah črk pa se lahko vprašamo, koliko besed ima pomen (če npr. razporejamo dve črki I in N, potem dobimo besedi IN in NI; če razporejamo npr. črke O, K, T, dobimo naslednje razporedbe OKT, OTK, KOT, KTO, TKO, TOK in lahko vodimo diskusijo o tem, katere imajo v slovenščini pomen).

V 7. razredu pa pričnemo s preštevanjem kombinatoričnih situacij po osnovnem izreku kombinatorike, ki pravi, da lahko možnosti na prvi stopnji odločanja (npr. število majic) zmnožimo s številom možnosti na drugi stopnji odločanja (npr. število kril). Ob tem moramo zaradi natančnosti matematičnega zapisa dodati, da zmnožimo možnosti lahko zato, ker je odločanje na drugi stopnji neodvisno od odločanja na prvi. Če bi npr. postavili omejitev, da rdeča majica in modro krilo ni ustrezna kombinacija, potem števili možnosti na obeh stopnjah ne bi mogli enostavno zmnožiti. Vzemimo npr. možnosti za zajtrk, če imamo na voljo tri različne vrste kruha in dva različna namaza. Predpostavimo, da nimamo nobenih omejitev

oziroma da vsak namaz lahko namažemo na vsak kruh in se vprašamo, koliko možnosti imamo. Naloge se lahko lotimo na več načinov: s puščičnim prikazom, pri katerem v enem stolpcu zapišemo vse vrste kruha, v drugem pa obe vrsti namaza in s črtami povežemo vsak kruh z obema namazoma. Dobimo torej šest povezav oziroma šest možnosti. To je prav gotovo najbolj abstrakten način. Pred tem lahko zaigramo situacijo sestavljanje zajtrkov s sestavljanjem kombinacij kruha in namazov, prikazanih npr. s sličicami ali s konkretnimi predmeti. Naslednja možnost prikaza kombinacij je kombinatorično drevo (tega ne smemo zamenjevati z drevesnim prikazom), pri katerem bi na koncu "debla" najprej lahko narisali tri "veje" in nad vsako napisali vrsto kruha, nato pa bi se vsaka "veja" zaradi dveh vrst namazov razvejala še v dve nadaljnji "veji", nad katerima bi pri vsaki vrsti kruha napisali še oba namaza. Končno lahko izpišemo tudi vse možnosti, torej skupaj 6 oziroma $3 \cdot 2$ ali $2 \cdot 3$. Obstaja pa še možnost prikazovanja števila kombinacij v preglednici. V tem primeru bi narisali preglednico tako, da bi imeli toliko stolpcev (ali vrstic), kot je vrst kruha in toliko vrstic (ali stolpcev), kot je vrst namazov. V preglednici lahko izpišemo vse pare in ugotovimo, da jih je skupaj $3 \cdot 2$ oz. 6. Tako določanje števila kombinacij pa spominja na računanje ploščine pravokotnika. Upoštevajoč učni načrt učitelj stopnjuje število kombinacij, in sicer od 4 v 7. razredu do 12 v 9. razredu. Če imamo 12 kombinacij, bi lahko izbrali tudi za odločanje v treh korakih, kar bi pomenilo, da bi našemu prej omenjenemu sestavljanju zajtrkov dodali še dve vrsti napitka. Zavedamo se, da tako nalogo lahko ponudimo le učencem, ki so dobro usvojili dvostopenjsko odločanje oziroma kadar želimo učencem, ki so pri matematiki uspešnejši, ponuditi izziv.

3.3.2.6 Preprosta raziskava

Prvenstveno so vsebine iz obdelave podatkov, kot smo omenili že na začetku, namenjene razvijanju matematične pismenosti, zato te vsebine v učnem načrtu zaključujejo cilji, ki določajo, da zna učenec ob koncu devetletne osnovne šole izdelati preprosto raziskavo, ki se nanaša na življenjsko situacijo, npr. kateri šport je med učenci najbolj priljubljen, koliko jedi zna skuhati vsak učenec ... Izdelava preproste raziskave pomeni, da učenec čim bolj samostojno izbere način zbiranja podatkov (vprašalnik, "volilna skrinjica", anketa ...), se odloči za prikaz in ga interpretira glede na zmožnosti (vsi učenci ne bodo zmogli sami izvesti preproste raziskave, zato potrebujejo učiteljevo pomoč z opornimi vprašanji na kartončku ali ustno, ki bodo učence vodila v izvajanju korakov preproste raziskave). Pri tem si pomaga tudi z digitalno tehnologijo. V devetem razredu za dane podatke določijo aritmetično sredino, brez uporabe in z uporabo računalu. Po eni strani s tem učenci utrjujejo računanje, sledijo določenemu postopku (seštejejo numerične vrednosti podatkov in vsoto delijo s številom podatkov), ki zahteva

natančnost, po drugi strani pa poskušamo učencem predstaviti, kaj aritmetična sredina za dane podatke pomeni. Če bi želeli npr. ugotoviti aritmetično sredino za število golov, ki jih rokometaš zadane na posamezni tekmi (recimo po 3, 7, 2, 8 in 10 golov na 5 tekmah), aritmetična sredina (v našem primeru 6) predstavlja podatek, da so rokometaševi dosežki enaki, kot če bi dosegel na vsaki tekmi 6 golov. Interpretacija aritmetične sredine za učence ni enostavna, lahko pa jim jo z ustreznimi primeri nekoliko približamo. Prej smo omenili primer raziskave o številu jedi, ki jih zna skuhati posameznik. Če izračunamo aritmetično sredino za število jedi, ki jih zna pripraviti posamezni učenec v našem razredu, in bi dobili npr. podatek, da zna v povprečju vsak pripraviti vsaj 2 jedi, se lahko vprašamo, kaj si bo mislil naš učenec, ki ne zna pripraviti še nobene jedi oziroma le eno. Interpretacija aritmetične sredine ni enostavna, zato ni temeljna vsebina.

4 ZAKLJUČEK

V teh strokovnih priporočilih smo predstavili izbrane rešitve za poučevanje matematike v prilagojenem izobraževalnem programu z nižjim izobrazbenim standardom, ki nikakor ne pomenijo omejitev za učiteljeve inovativne rešitve in raznolike prilagoditve v skladu s posebnimi potrebami učencev. V praksi bi lahko dopolnitve prinašali z izmenjavo dobrih poučevalnih praks, hospitacijami pri kolegih in kolegicah, refleksijami lastnega dela, predvsem pa s kakovostnim načrtovanjem pouka, ki je prvenstveno usmerjeno v posebne potrebe učencev in skrb za razvoj njihovih potencialov. Za realizacijo teh pričakovanj učiteljem svetujemo profesionalno usposabljanje na področju poučevanja in učenja matematike, dopolnjevanje poučevalne vloge z raziskovalno dejavnostjo v povezavi s strokovnjaki s specialno didaktičnih in didaktično matematičnih področij.

5 LITERATURA

- Ahlgrim - Delzell, L., Knight, V. F, Jimenez, B. A. in Agnello, B. A. (2009). *Research-Based Practices for Creating Access to the General Curriculum in Mathematics for Students with Significant Intellectual Disabilities*. http://dev.idahotc.com/Portals/15/Docs/IAA/10-11%20Docs/Research_Based_Practices_Math_2009.pdf
- Allsopp, D., Lovin, L. H. in van Ingen, S. (2017). Supporting mathematical proficiency: Strategies for new special education teachers. *Teaching Exceptional Children*, 49(4), 273–283.
- Alpizar - Vargas, M. A. in Morales - López, Y. (2019). Teaching the topic of money in mathematics classes in primary school. *Acta Scientiae*, 21(5), 102–127.
- Aunio, P. (2019). Small group interventions for children aged 5–9 years old with mathematical learning difficulties. V A. Fritz-Strantmann in P. Rasanen (ur.), *International handbook of mathematical learning difficulties* (str. 709–731). Springer.
- Beishuizen, M. (1997). Development of mathematical strategies and procedures up to 100. V M. Beishuizen, K. P. E. Gravermejer, E. C. D. M. van Lieshout (ur.), *The role of context and models in the development of mathematical strategies and procedures*. Freudenthal institute.
- Berch, D. B. (2005). Making sense of number sense: Implications for children with mathematical disabilities. *Journal of Learning Disabilities*, 38(4), 333–339.
- Bouck, E., Park, J. in Nickell, B. (2017). Using the concrete-representational-abstract approach to support students with intellectual disability to solve change-making problems. *Research in Developmental Disabilities*, 60, 24–36.
- Bračič, J. (2020). *Trening reševanja nalog seštevanja in odštevanja z neznanim členom za učence s specifičnimi učnimi težavami pri matematiki*. [Magistrsko delo, Univerza v Ljubljani, Pedagoška fakulteta]. PeFprints.
- Byrd Hornburg, C., Schmitt, S. A. in Purpura, D. J. (2018). Relations between preschoolers' mathematical language understanding and specific numeracy skills. *Journal of Experimental Child Psychology*, 176, 84–100.
- Crean, M. (2012). *At Last, A Comprehensive Guide to Help Your Students Develop Good Number Sense*. <http://topnotchteaching.com/experts/guide-to-develop-number-sense/>,
- Doabler, C. T. in Fien, H. (2013). Explicit mathematics instruction: What teachers can do for teaching students with mathematics difficulties. *Intervention in School and Clinic*, 48(5), 276–285.
- Elgart, M. A. (2017). *Meeting the promise of continuous improvement*. Advance ED Education continuous improvement system and observations of effective schools. Alpharetta GA: Advance Education Inc. www.advanceed.org/sites/default/files/CIS_White_Paper

- Geary, D. C. (1994). *Children's mathematical development: Research and practical applications*. American Psychological Association.
- Hansen, A. in Morgan, K. (2009). The concept teaching model. V *A Curriculum for the teaching of Basic Conceptual Systems (BCSs) and related Basic Concepts in kindergarten and primary school. Exemplified by a project in the municipality of Balsfjord, Norway. An expanded version presented at the IACESA Conference* (str. 11–13).
- Hodnik, T. (1998). Vloge različnih reprezentacij računskih algoritmov na razredni stopnji. *Matematika v šoli*, 6(1–2), 11–18.
- Hodnik, T. (2020). Representation of mathematical ideas: basic considerations for teaching. V B. Saqipi, S. Berčnik (ur.), *Selected topics in education* (str. 35–58). Albas.
- Hord, C., Dupstadt, M., Marita, S. in Pescatrice, S. (2019). Access to seventh grade mathematics: A case study of two students with mild intellectual disability. *Journal of Intellectual Disabilities*, 25(1), 31–49.
- Jereb, A. (2011). Učno okolje kot dejavnik pomoči učencem z učnimi težavami. *Učenci z učnimi težavami. Izbrane teme*. Uredili: S. Pulec Lah in M. Velikonja. Univerza v Ljubljani, Pedagoška fakulteta. Str. 80–93.
- Jiménez - Fernández, G. (2016). How can I help my students with learning disabilities in Mathematics?. *Journal of Research in Mathematics Education*, 5(1), 56–73.
- Jimenez, B. A. in Stanger, C. (2017). Math Manipulatives for Students with Severe Intellectual Disability: A Survey of Special Education Teachers. *Physical Disabilities: Education and Related Services*, 36(1), 1–12.
- Karabulut, A. in Özmen, E. R. (2018). Effect of “Understand and Solve!” strategy instruction on mathematical problem solving of students with mild intellectual disabilities. *International Electronic Journal of Elementary Education*, 11(2), 77–90.
- Kavkler, M. (2011). Obravnava učencev z učnimi težavami pri matematiki. V M. Košak Babuder in M. Velikonja (ur.), *Učenci z učnimi težavami: pomoč in podpora* (str. 124–156). Univerza v Ljubljani, Pedagoška fakulteta.
- Maccini, P. in Gagnon, J. (2005). *Mathematics strategy instruction for middle school students with learning disabilities*. <https://digilib.gmu.edu/jspui/bitstream/1920/284/1/MathSIforMiddleschoolStudentswithLD>
- McCloskey, M., Caramazza, A. in Basili, A. (1985). Cognitive mechanisms in number processing and calculation: Evidence from dyscalculia. *Brain and cognition*, 4(2), 171–196.
- Miller, D. L. (1993). Making the connection with language. *Arithmetic Teacher*, 40(6), 311–317.
- Miller, S. P. in Hudson, P. J. (2007). Using evidence-based practices to build mathematics competence related to conceptual, procedural, and declarative knowledge. *Learning Disabilities Research & Practice*, 22(1), 47–57.

- Miller, S. P., Stringfellow, J. L., Kaffar, B. J., Ferreira, D. in Mancl, D. B. (2011). Developing computation competence among students who struggle with mathematics. *Teaching Exceptional Children*, 44(2), 38–46.
- Mitchell, D. (2014). *What really works in special and inclusive education: Using evidence-based teaching strategies*. Routledge.
- Narkon, D. E., Wells, J. C. in Segal, L. S. (2011). E-word wall: An interactive vocabulary instruction tool for students with learning disabilities and autism spectrum disorders. *Teaching Exceptional Children*, 43(4), 38–45.
- NCCA (National Council for Curriculum and Assessment). *Mathematics - Guidelines for teachers of students with MILD general learning disabilities. Primary*. (b. d.)
- NCCA (National Council for Curriculum and Assessment). *Mathematics - Guidelines for teachers of students with MODERATE general learning disabilities. Primary*. (b. d.)
- Pellegrino, J. W. in Goldman, S. R. (1987). Information processing and elementary mathematics. *Journal of Learning Disabilities*, 20(1), 23–32.
- Pitchford, N. J., Papini, C., Outhwaite, L. A. in Gulliford, A. (2016). Fine motor skills predict maths ability better than they predict reading ability in the early primary school years. *Frontiers in psychology*, 7, 783.
- Pulec Lah, S. in Rotvejn Pajič, L. (2011). Spodbujanje učne uspešnosti učencev z učnimi težavami zaradi motnje pozornosti in hiperaktivnosti. V M. Košak Babuder in M. Velikonja (ur.), *Učenci z učnimi težavami. Pomoč in podpora* (str. 158–175). Univerza v Ljubljani, Pedagoška fakulteta.
- Rathgeb - Schnierer, E. in Rechtsteiner, C. (2018). *Rechnen lernen und Flexibilität entwickeln: Grundlagen – Förderung – Beispiele*. Springer Spektrum.
- Rižnik, V. (2018). *Trening konceptualnega in proceduralnega znanja ulomkov pri učencih z lažjo motnjo v duševnem razvoju*. (Magistrsko delo, Univerza v Ljubljani, Pedagoška fakulteta) PeFprints.
- Sayers, J., Andrews, P. in Boistrup, L. B. (2016). The role of conceptual subitising in the development of foundational number sense. V *Mathematics education in the early years* (str. 371–394). Springer.
- Schreiner, E. (b. d.). *Teaching Math to Slow Learners*. http://www.ehow.com/how_7910547_teaching-math-slow-learners.html
- Sealand, K. A., Johnson, G. R., Lockwood, A. B. in Medina, C. M. (2012). Concrete–semiconcrete–abstract (CSA) instruction: a decision rule for improving instructional efficacy. *Assessment for Effective Intervention*, 38(1), 53–65.
- Singh, P. (2009). An Assessment of Number Sense among Secondary School Students. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, str. 27–54.
- Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and Insight*. Academic Press.

Weage, K. (2009, January). Motivation for learning mathematics in terms of needs and goals. *Proceedings of CERME*, 6, 84–93. <http://ife.ens-lyon.fr/publications/edition-electronique/cerme6/wg1-06-waegel.pdf>