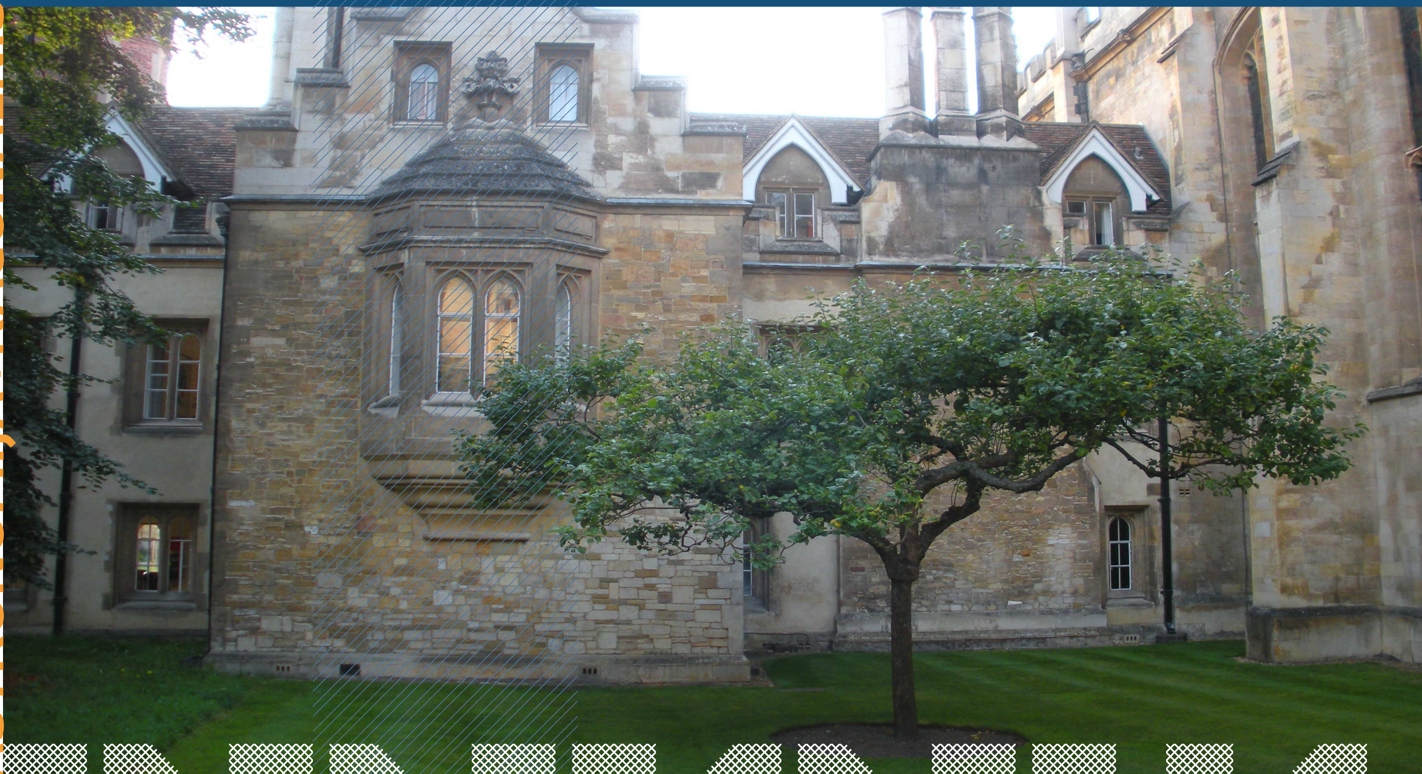
MATEMATIKA+FIZIKA+ASTRONOMIJA+RAČUNALNIŠTVO#

3

PRESEK LETNIK 41 (2013/2014) ŠTEVILKA **3**



PRESEK

→ MARS 2013

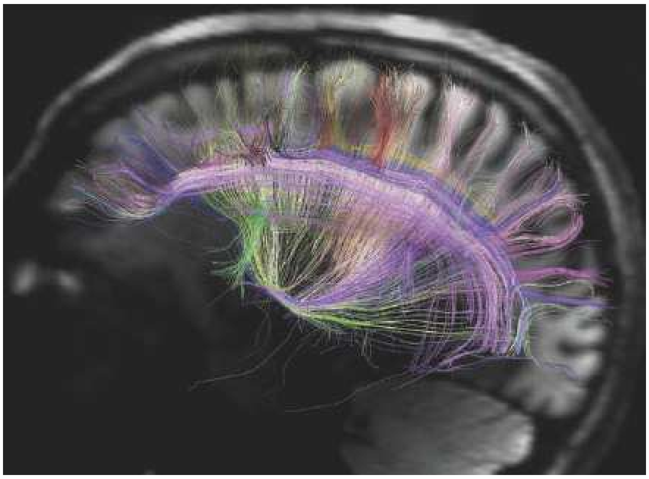
→ RAD BI TE VIDEL

→ DAN ODPRTIH VRAT EVROPSKE VESOLJSKE AGENCIJE

→ SUDOKU KOT POSEBEN PRIMER PROBLEMA PREVOZA

ISSN 0351-6652

Vpogled v možgane



Zelo težko je razumeti, kako deluje človeški um. V primerjavi s starimi metodami nam nove tehnike slikanja glave, ki temeljijo na uporabi vektorjev, tenzorjev in matrik, dajo veliko več informacij o komunikacijskih poteh v možganih. Zdravniki tako lažje kontrolirajo zavest ter diagnosticirajo številne bolezni in nepravilnosti v delovanju možganov, npr. Alzheimerjevo bolezen in kap. Dosedanje metode so opisovale le eno razsežnost, z vektorji in matrikami pa lahko predstavimo trirazsežno gibanje molekul in tako opazujemo prenašanje komunikacijskih signalov.

Novih metod pa ne uporabljamo le kot pomoč pri diagnozi, omogočajo nam tudi veliko boljše razumevanje celotne strukture komunikacijskih poti v možganih. Znanstveniki so pričakovali zapleteno in zavozlano mrežo poti, s pomočjo diferencialnih enačb in diferencialne geometrije pa so odkrili zelo natančno strukturo, ki poteka v treh ukrivljenih smereh. Presenečeni so ugotovili, da vsaka od smeri ustreza smeri v razvoju možganov.

Kogar zanima več, si lahko prebere prispevek Dane Mackenzie *Diffusion Tensor Imaging: A New View of the Brain* v knjigi *Fueling Innovation and Discovery: The Mathematical Sciences in the 21st Century*.

× × ×

KOLOFON

Presek
list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
letnik 41, šolsko leto 2013/2014, številka 3

Dopisi in naročnine: DMFA–založništvo, Presek, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana, telefon (01) 4766 553, telefaks (01) 4232 460, 2517 281.

Internet: www.presek.si
Elektronska pošta: presek@dmfa.si

Naročnina za šolsko leto 2013/2014 je za posamezne naročnike 18,00 EUR – posamezno naročilo velja do preklica, za skupinska naročila učencev šol 15,75 EUR, posamezna številka 3,76 EUR, dvojna številka 6,89 EUR, stara številka 2,71 EUR, letna naročnina za tujino pa znaša 25 EUR.

Transakcijski račun: 03100–1000018787.

Devizna nakazila: SKB banka d.d. Ljubljana, Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana, SWIFT (BIC): SKBASI2X, IBAN: SI56 0310 0100 0018 787.

List sofinancira Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih poljudno-znanstvenih periodičnih publikacij.

Založilo DMFA–založništvo

Oblikovanje Tadeja Šekoranja

Tisk Tiskarna Pleško, Ljubljana

Naklada 1400 izvodov

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana.

NAVODILA SODELAVCEM PRESEKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Presek objavlja poljudne in strokovne članke iz matematike, fizike, astronomije in računalništva. Poleg člankov objavlja Prikaze novih knjig s teh področij in poročila z osnovnošolskih in srednješolskih tekmovanj v matematiki in fiziki. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, učencem višjih razredov osnovnih šol in srednješolcem.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev) in sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo). Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Slike v elektronski obliki morajo biti visoke kakovosti (jpeg, tiff, eps, …), velikosti vsaj 8 cm pri ločljivosti 300 dpi. V primeru slabše kakovosti se slika primerno pomanjša ali ne objavi. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Zaželena velikost črk je vsaj 12 pt, razmak med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku na naslov uredništva **DMFA–založništvo, Uredništvo revije Presek, p. p. 2964, 1001 Ljubljana** ali na naslov elektronske pošte **presek@dmfa.si**.

Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki oceni primernost članka za objavo. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem uredništvo prosi avtorja za izvorne datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TeX oziroma LaTeX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

Kazalo

Slika na naslovnici: Isaac Newton je sam pogosto pripovedoval, da mu je opazovanje padanja jabolka z drevesa pomagalo oblikovati teorijo gravitacije, prvič objavljene leta 1687. Potomec izvirnega drevesa raste pred glavnim vhodom v Trinity College pod sobo v kateri je Newton živel v času svojega delovanja na univerzi v Cambridgeu. Foto: Igor Serša

MaRS 2013

Vesna Iršič

Med 18. – 24. avgustom 2013 je v Bohinju že osmo leto zapored potekal matematični tabor za srednješolce MaRS (Matematično Raziskovalno Srečanje). Udeležilo se ga je osemnajst dijakov in dijakinj iz vse Slovenije, kot udeleženci so se jim pridružili še trije študentje, za uspešno odpravo pa je poskrbelo šest članov posadke: Maja Alif, David Gajser, Nejc Rosenstein, Matej Roškarič, Jana Vidrih in Lara Kozarski, v oporo pa jim je bil tudi dr. Boštjan Kuzman.

Tako kot vsa leta doslej je bila osrednja marsovska dejavnost priprava projektov. MaRSovci smo se razdelili v skupine po tri in se pod okriljem svojega mentorja spopadli z izbranim matematičnim problemom. Preden smo ga rešili, smo morali spoznati nekaj novih matematičnih znanj, nato pa smo še napisali kratek članek in pripravili predstavitev. Letos so se dijaki pri projektih ukvarjali s: Hilbertovim hotelom, taktikami in verjetnostjo pri namizni igri Risk, razdelitvijo ravnine s premicami, matematičnim modelom strjevanja gela, teorijo grafov in problemom najkrajše poti ter aksiomom izbire. Študentska skupina se je posvetila Turingovemu stroju in Postovemu problemu.

Nadebudneže vabimo, da se tudi sami spoprimejo s preprostejšimi problemi, ki so bili del katerega od projektov. Rešitve lahko najdete pod zavihkom »Projekti« na spletni strani `mars.famnit.upr.si`.

SLIKA 1.
Mentorji pred izplutjem na jezero

SLIKA 2.
Posadka na letošnjem MaRS-u: Maja, Lara, Jana (zgoraj); Nejc, Matej, David (spodaj)

Problem. MaRS je vedno bolj priljubljena turistična destinacija. Povpraševanje se izjemno hitro povečuje, zato so tam zgradili hotel Neskončno, hotel s števno neskončno sobami. Ta se je začel hitro polniti in se je nekega dne tudi napolnil. Poleg vseh običajnih postopkov na recepciji so bili vsi gostje primorani podpisati izjavo, da bodo ubogali ukaze, ki jih bodo dobili preko zvočnika, tudi če bodo zelo nenavadni.

(a) Na MaRS je prispela petčlanska družina. Ker je pred hotelom vedno visel napis Proste sobe, so zahtevali vsak svojo sobo.

(b) Prispela pa je tudi vesoljska ladja z neskončno potniki, izmed katerih je vsak zahteval svojo sobo.

Kako naj receptor hotela nastani potnike v posameznem primeru?

Problem. Lastnica Turistične agencije MaRS se je odločila, da bo nagradila nekaj bivših strank in tako še povečala priljubljenost svoje agencije. Kandidate za nagrado je zbrala v skupni sobi in jim povedala, da jih bodo kmalu postavili v vrsto ter vsakemu na glavo dali belo ali črno kapo. Pri tem bo vsak kandidat videl le barve kap vseh tistih kandidatov, ki bodo pred njim. Kdor ugane barvo svoje kape, dobi nagrado. Kandidati bodo ugibali barvo kape od zadnjega proti prvemu, in sicer na glas, tako da bodo vsi slišali vsakega kandidata. Za kakšno strategijo naj se kandidati za nagrado dogovorijo, da jih bo kar največ nagrado dobilo, čeprav lahko vsak izmed njih reče le bela ali črna?

SLIKA 3.
Nejčeva skupina pri pripravi svojega projekta

Problem. Na voljo imaš domine

01	1	010	00
0101	0	1	0

Zloži jih v vrsto eno za drugo tako, da boš zgoraj in spodaj dobil enak niz znakov. Pri tem lahko vsako domino uporabiš poljubno mnogokrat (vendar končno mnogokrat).

Tipičen marsovski dan se je začel z zajtrkom, zaspani MaRSovci pa smo se dokončno prebudili šele pri jutranji telovadbi. Dopoldnevi prvih dni tabora so bili namenjeni različnim delavnicam. Dr. Uroš Kuzman nas je popeljal v svet kompleksnih števil in nam predstavil njihovo povezavo z geometrijo. Mentorji so nam predstavili urejevalnik besedil LaTeX, program GeoGebra in tudi nekaj osnov retorike, ki so nam pomagale pri predstavitvah projektov staršem, profesorjem in prijateljem.

MaRS so obiskali tudi štirje predavatelji – dr. Milan Hladnik, dr. Boštjan Kuzman, Sergio Hiroki Koike Quinatar in dr. Andrej Bauer, ki so nas popeljali v različne svetove matematike in nam popestrili večere. Izvedeli smo, da lahko z neoznačenim ravnilom

SLIKA 4.
Delavnica o kompleksnih številih

SLIKA 5.
Večerno predavanje dr. Andreja Bauerja

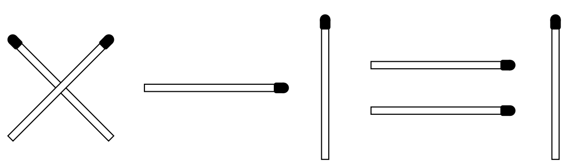
in šestilom načrtamo natanko iste točke kot samo s šestilom, spoznali končna polja, politope in osnove lambda računa. Na predavanjih smo se srečali tudi z naslednjima problemoma:

Problem. Koliko različnih ogrlic s petimi kroglicami lahko naredimo, če imamo na voljo dovolj kroglic v dveh različnih barvah?

Problem. S katerimi pravilnimi mnogokotniki lahko tlakujemo ravnino (t. j. pokrijemo vso ravnino brez prekrivanja)?

Vsak dan je Lara pripravila uganko dneva, s katero smo se lahko spopadali v prostem času. Tudi vi lahko poskusite razrešiti katero izmed njih:

Problem. Premakni eno vžigalico, da bo enačba na sliki 6 veljala (pri tem ne smeš spreminjati znaka =).



SLIKA 6.
Uganka dneva – naloga z vžigalicami

Problem. Že Egipčani so racionalna števila zapisovali v obliki ulomkov, le da so imeli vsi njihovi ulomki v števcu število 1. Število $\frac{2}{89}$ zapiši kot vsoto

(a) dveh različnih egipčanskih ulomkov,
(b) treh različnih egipčanskih ulomkov.

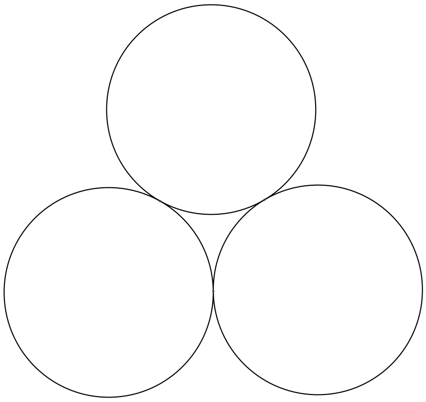
Zgled: $\frac{2}{9} = \frac{1}{6} + \frac{1}{18} = \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{72}$.

Člani posadke so poskrbeli, da naporno delo MaRSovcev ne bi preveč izčrpalo. Zato smo se v sredo podali na pohod ob koritih Mostnice, kjer smo uživali v čudoviti naravi, namaknju nog v mrzlo vodo in odličnem štrudlju v koči na koncu poti. Tudi druge dni smo imeli nekaj prostega časa, ki smo ga izkoristili za kopanje v jezeru in učenje hoje po vrvi (›slacklining‹). Poleg tega je bil vsak dan po večernem predavanju družabni večer, ki se je ponavadi zavlekel pozno v noč. MaRSovci smo se pomerili v namiznem tenisu, osvajanju otoka Catan, že tradicionalni mafiji, igri s kartami Hanabi, taroku, napadanju Tokia, sajenju fižolčkov in osvajanju sveta pri Risku.

Zadnji popoldan je potekala Velika MaRSovska avantura, orientacijski pohod z matematičnimi nalogami na kontrolnih točkah. Na avanturi se nam je pridružilo tudi precej nekdanjih MaRSovcev, tako da je na njej skupaj sodelovalo kar 11 skupin. Za vtis, kakšno je bilo vzdušje na kontrolnih točkah, se lahko tudi sami spoprimete z enim problemom:

Problem. Izračunaj ploščino območja med tremi dotikajočimi se krogi z radijem 1 (glej sliko 8).

SLIKA 7.
Na pohodu ob koritih Mostnice



SLIKA 8.

Naloga z avanture – ploščina območja

Zvečer je sledila razglasitev rezultatov z avanture. Zmago sta si delili dve skupini, ki sta za nagrado prejeli veliko MaRSovsko čokolado, ostali MaRSovci pa smo njim na čast izvedli MaRSovski pozdrav, s katerim smo tudi med tednom pozdravili vsakega obiskovalca. Nato je sledil še piknik ob tabornem ognju, glasbeni spremljavi dveh kitar, harmonike in mnogih navdušenih pevcev. Okoli polnoči nas je dež sicer pregnal izpod milega neba, druženje pa se je nadaljevalo v jedilnici in se za nekatere ni končalo vse do zajtrka. Naslednje jutro je po poskusnih predstavitvah sledil pristanek, ki se je zaključil s prijetnim druženjem, slovesom in željo, da se še kdaj srečamo – če ne na MaRS-u pa vsaj na Zemlji.

SLIKA 9.

Skupina Packi na kontrolni točki na veliki MaRSovski avanturi

× × ×

Rešitev naloge iz prejšnje številke

↓↓↓

Marko Razpet

→ Če je polinom $P(x) = 6x^4 - 5x^3 + \alpha x^2 + 7x + 12$ deljiv s trinomom $Q(x) = 3x^2 - x + \beta$, potem očitno obstajata taki števili λ in μ, za kateri velja $P(x)/Q(x) = R(x) = 2x^2 + \lambda x + \mu$. Ker mora potem veljati enakost $P(x) = Q(x)R(x)$, dobimo:

$$6x^4 - 5x^3 + \alpha x^2 + 7x + 12 = \\ = (3x^2 - x + \beta)(2x^2 + \lambda x + \mu).$$

Po množenju trinomov na desni strani in po urejanju imamo enakost

$$6x^4 - 5x^3 + \alpha x^2 + 7x + 12 = 6x^4 + (3\lambda - 2)x^3 + \\ + (2\beta - \lambda + 3\mu)x^2 + (\beta\lambda - \mu)x + \beta\mu,$$

ki pa velja le, če se polinoma na levi in desni strani ujemata v istoležnih koeficientih, zato morajo števila α, β, λ in μ zadoščati sistemu enačb:

$$\begin{aligned} 3\lambda - 2 &= -5 \\ 2\beta - \lambda + 3\mu &= \alpha \\ \beta\lambda - \mu &= 7 \\ \beta\mu &= 12 \end{aligned}$$

Iz prve enačbe takoj dobimo $\lambda = -1$, tretja in četrta enačba pa se potem glasita:

$$\beta + \mu = -7, \quad \beta\mu = 12.$$

Očitno imamo dve rešitvi:

$$\beta_1 = -3, \mu_1 = -4; \quad \beta_2 = -4, \mu_2 = -3.$$

Iz druge enačbe v sistemu pa sledi še:

$$\alpha_1 = 2\beta_1 + 3\mu_1 - \lambda = -17, \alpha_2 = 2\beta_2 + 3\mu_2 - \lambda = -16.$$

Naloga ima dve rešitvi. Polinom $6x^4 - 5x^3 - 17x^2 + 7x + 12$ je deljiv s trinomom $3x^2 - x - 3$, ko dobimo kvocient $2x^2 - x - 4$, polinom $6x^4 - 5x^3 - 16x^2 + 7x + 12$ pa s trinomom $3x^2 - x - 4$, ko dobimo kvocient $2x^2 - x - 3$.

× × ×

Dobrodošli v Hotelu neskončno[1]

Tilen Lučovnik, Špela Pušnik, Tisa Ževart in Jana Vidrih (mentorica)

Tretji teden avgusta smo srednješolci, ki nas veseli matematika, in skupina mentorjev, v večini študentov matematike, preživeli v Bohinju na 8. Matematičnem Raziskovalnem Srečanju, na kratko MaRS-u. Tam smo poslušali predavanja z različnih področij matematike, imeli matematično – računalniške delavnice, v manjših skupinah pa smo pripravili in na koncu predstavili tudi svoje projekte. Našega smo začeli s krajšo zgodbo o Hotelu neskončno.

MaRS je vedno bolj priljubljena turistična destinacija. Povpraševanje se izjemno hitro povečuje, zato so tam zgradili Hotel neskončno, hotel z neskončno enoposteljnimi sobami. Ta se je začel hitro polniti in se je nekega dne tudi napolnil. Poleg vseh običajnih postopkov na recepciji so bili vsi gostje primorani podpisati izjavo, da bodo ubogali vse ukaze, ki jih bodo dobili preko zvočnika, tudi če bodo zelo nenavadni. Tisti dan, ko se je hotel napolnil, je prišla petčlanska družina. Ker je pred hotelom visel napis Proste sobe, so zahtevali svojo sobo. Receptor jim je ugodil, naslednji dan pa ga je čakala še težja naloga. Najprej se je pripeljala vesoljska ladja z neskončno potniki, nato pa še neskončno vesoljskih ladij, vsaka z neskončno potniki. Receptor je bil v vseh primerih dolžan sprejeti vse goste v hotel. Kako?

[1]Članek je nastal na poletnem taboru MaRS 2013 (Matematično Raziskovalno Srečanje za srednješolce).

Množice

Pri reševanju naloge, opisane v uvodu, smo si pomagali z množicami. Poznamo končne in neskončne množice. *Moč* končne množice je enaka številu elementov, ki jih množica vsebuje. Dve množici imata enako moč, če vsebujeta enako število elementov. Množica $\{\star, \clubsuit, \heartsuit, \bullet\}$ ima enako moč kot množica z elementi $\{1, 2, 3, 4\}$. Moč obeh množic je 4.

Najbolj »vsakdanja« neskončna množica je množica naravnih števil, množica števil, s katerimi štejemo. Množice, ki imajo enako število elementov kot množica naravnih števil, imenujemo *števno neskončne množice*. Neskončne množice, ki imajo večjo moč, pa so *neštevne*. Da bomo lahko ugotovili, kdaj imata dve množici enako elementov, definiramo bijektivno preslikavo. Preslikava iz množice A v množico B je *bijektivna,* če je vsak element iz množice B slika natanko enega elementa iz množice A. Množica je števno neskončna, če jo bijektivna preslikava preslika na množico naravnih števil. Rečemo lahko tudi, da je množica števna, če lahko vse elemente postavimo v neko zaporedje. Moč števno neskončne množice je enaka $\aleph_0$, kar preberemo *alef nič*.

Za lažje razumevanje pojma moči množic si najprej poglejmo nekaj osnovnih primerov. Če je neka množica podmnožica, še ne pomeni, da ima tudi manjšo moč. Čeprav je množica sodih naravnih števil podmnožica naravnih števil, imata obe množici enako moč. Da bi dokazali to izjavo, moramo skon-

SLIKA 1.
Avtorji: Špela, Tilen, Tisa (z leve) in Jana (zgoraj)

struirati bijekcijo med danima množicama. Preslikava f naj bo podana z naslednjim predpisom:

- $f: \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$
  $n \mapsto 2n.$

Preslikava f številu 1 priredi število 2, številu 2 število 4, številu 3 število 6 in tako naprej. Na ta način smo vsakemu naravnemu številu priredili natanko eno sodo število in vsakemu sodemu natanko eno naravno število. Torej je preslikava f bijektivna. Da je množica sodih števil števno neskončna, bi lahko dokazali tudi tako, da bi soda števila uredili v zaporedje $2, 4, 6, 8, \ldots$ Tako bi vsakemu številu določili, na katerem mestu stoji ter mu tako enolično priredili neko naravno število – njegovo zaporedno mesto v zapisu zaporedja.

Iz zgornjega razmisleka je razvidno, da je množica števno neskončna natanko tedaj, ko lahko njene elemente razvrstimo v zaporedje. To bomo v nadaljevanju večkrat uporabili. Števna so tudi cela števila $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Vsakemu celemu številu priredimo natanko eno naravno število tako, da jih uredimo v zaporedje

- $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, \ldots$

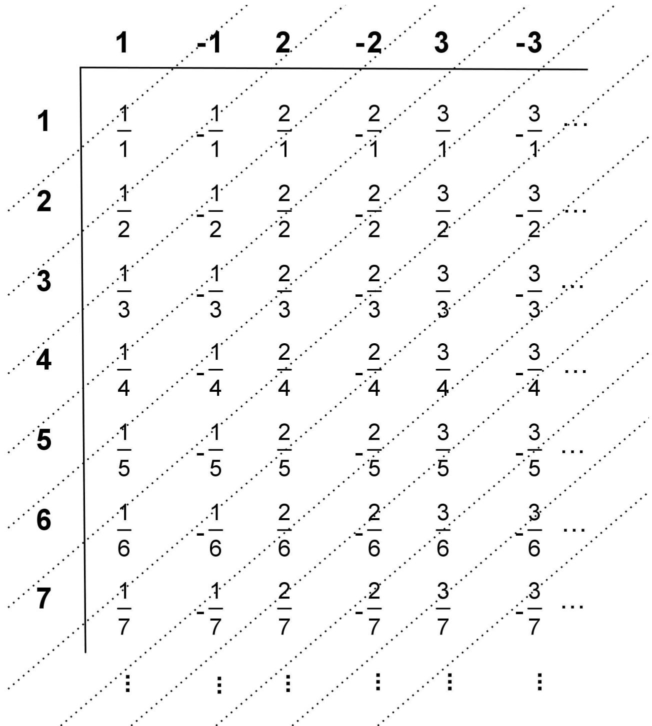
Racionalna števila

Množica racionalnih števil je števno neskončna. To bomo dokazali s pomočjo tabele na sliki 2.

V prvi vrstici tabele so vsa cela števila, zapisana po prejšnjem zaporedju, brez števila 0, v prvem stolpcu pa vsa naravna števila. Ostala števila dobimo z deljenjem celih števil z naravnimi. Tako dobimo vsa racionalna števila razen 0.

Razvrstimo sedaj racionalna števila v zaporedje. Prvi člen zaporedja je 0, naslednje člene pa določamo po diagonalah. Na prvi diagonali je en člen 1, na drugi sta dva člena: $\frac{1}{2}$ in -1, na tretji so trije členi: $\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{2}$ in 2. Člene na vsaki diagonali, po vrsti od spodaj navzgor, zapisujemo v zaporedje. Členov, ki smo jih že izpisali, ne izpisujemo več. Ulomka $\frac{1}{1}$ in $\frac{2}{2}$ sta enaka, zato ulomka $\frac{2}{2}$ ne izpišemo. Zapišimo prvih nekaj členov zaporedja:

- $0, 1, \frac{1}{2}, -1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, 2, \frac{1}{4}, -\frac{1}{3}, -2, \frac{1}{5},$
  $-\frac{1}{4}, \frac{2}{3}, 3, \frac{1}{6}, \ldots$



SLIKA 2.
Dokaz števne neskončnosti množice racionalnih števil

Realna števila in Cantorjev diagonalni dokaz

Najpreprostejši zgled neštevne množice je množica realnih števil $\mathbb{R}$. Da realnih števil ni števno neskončno, je leta 1877 dokazal Georg Ferdinand Cantor. Njegov dokaz nam pove, da je realnih števil več kot naravnih, čeprav sta obe množici neskončni.

Izrek. Interval $[0, 1]$ ni števno neskončen.

Predpostavimo, da interval $[0, 1]$ je števno neskončen. Potem lahko števila iz tega intervala označimo z $r_1, r_2, r_3 \ldots$, saj jih lahko uredimo v zaporedje. Vsa števila r_i, za $i \in \mathbb{N}$ podamo v desetiškem zapisu. Decimalni zapis števila ni enoličen, zato za števila, ki imajo dva različna desetiška zapisa (npr. $0{,}6999\ldots = 0{,}7000\ldots$), uporabimo zapis, ki se končuje z deveticami. Vzemimo primer tega zaporedja realnih števil:

$$\begin{aligned} r_1 &= 0{,}\mathbf{6}2985765\ldots \\ r_2 &= 0{,}3\mathbf{5}634274\ldots \\ r_3 &= 0{,}72\mathbf{9}38906\ldots \\ r_4 &= 0{,}672\mathbf{9}8331\ldots \\ r_5 &= 0{,}1426\mathbf{5}386\ldots \\ r_6 &= 0{,}98564\mathbf{3}52\ldots \\ r_7 &= 0{,}214357\mathbf{4}6\ldots \\ r_8 &= 0{,}6453218\mathbf{5}\ldots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Iz tega zaporedja skonstruiramo novo število x tako, da pogledamo k-to števko za desetiško vejico v zapisu k-tega števila r_k. Torej pri številu r_1 pogledamo prvo decimalko, pri r_2 drugo, pri r_{17} pa sedemnajsto decimalko. Če je ta k-ta števka števila r_k enaka 5, bo k-ta števka števila x enaka 4; če pa k-ta števka r_k ni enaka 5, bo k-ta števka števila x enaka 5. Tako bomo dobili realno število x iz intervala $[0,1]$. Iz zgornjega primera bi npr. skonstruirali takšno število:

$$x = 0{,}54554554\ldots \in [0,1].$$

Ker smo na začetku predpostavili, da zaporedje $r_1, r_2, r_3, \ldots$ zajame vsa realna števila na intervalu $[0,1]$, bi moral obstajati tudi tak $n \in \mathbb{N}$, da bi bil $x = r_n$. Zaradi načina izbire števk števila x pa se x od r_n razlikuje vsaj v števki na n-tem mestu. Od števila r_1 se npr. razlikuje v prvi števki, od števila r_2 v drugi itd. To pomeni, da števila x v zaporedju $r_1, r_2, r_3, \ldots$ ni. Torej v zaporedju niso oštevilčena vsa realna števila iz intervala $[0,1]$. S tem pridemo do protislovja s predpostavko iz začetka dokaza, da je interval $[0,1]$ števno neskončen in lahko njegove elemente uredimo v zaporedje. Tako smo pokazali, da interval $[0,1]$ ni števno neskončen.

Posledica. Moč množice realnih števil je večja od moči množice naravnih števil, tj. $|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$.

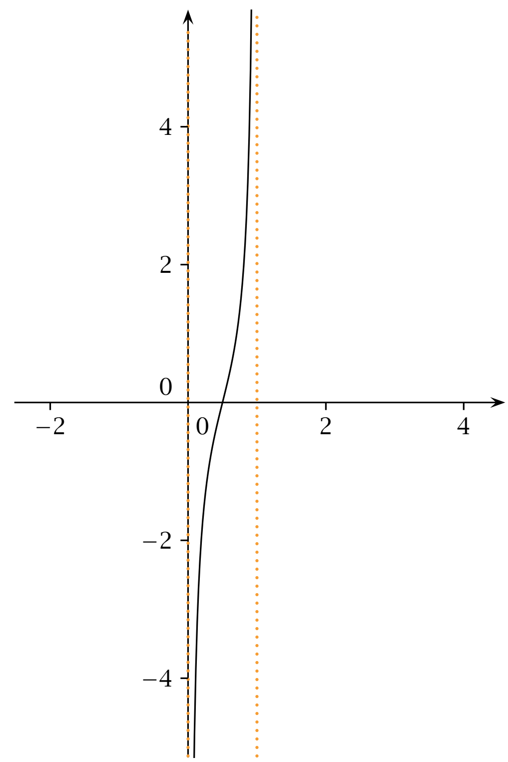
Ker vemo, da je $|[0,1]| > |\mathbb{N}|$, je dovolj pokazati $|[0,1]| = |\mathbb{R}|$. Poiščimo torej bijektivno preslikavo, ki preslika interval $[0,1] \subset \mathbb{R}$ v množico realnih števil $\mathbb{R}$. To lahko naredimo s kompozitumom dveh bijektivnih preslikav. Najprej interval $[0,1]$ preslikamo v interval $(0,1)$ s funkcijo

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}; & x = 0 \\ \frac{1}{3}; & x = 1 \\ \frac{1}{n+2}; & x = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N} \\ x; & \text{sicer.} \end{cases}$$

Funkcija f število 0 preslika v $\frac{1}{2}$, 1 v $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ v $\frac{1}{4}$. Podobno kot število $\frac{1}{2}$ preslikamo tudi druga števila oblike $\frac{1}{n}$; imenovalcu ulomka prištejemo 2. Vsa ostala števila preslikamo sama vase. Enostavno je videti, da je f injektivna in surjektivna, torej bijektivna.[2]

Zdaj poiščimo še bijektivno preslikavo iz intervala $(0,1)$ v množico realnih števil $\mathbb{R}$. To naredimo s funkcijo g, ki je podana z:

$$g(x) = \frac{\frac{1}{2} - x}{x(x-1)}.$$



SLIKA 3.
Graf bijektivne funkcije g, ki preslika interval $(0,1)$ v realna števila.

[2] Namig: števila oblike $\frac{1}{n}$ obravnavaj posebej.

Funkcija g je zaradi monotonosti injektivna, surjektivna pa je zato, ker je zvezna in ima ustrezni limiti $\lim_{x\downarrow 0} = -\infty$ in $\lim_{x\uparrow 1} = +\infty$.

Kompozitum $g \circ f : [0,1] \to \mathbb{R}$ je bijektiven, torej imata množici $[0,1]$ in $\mathbb{R}$ enako moč. Iz tega sledi, da je tudi množica realnih števil $\mathbb{R}$ neštevno neskončna, torej ima večjo moč od množice naravnih števil $\mathbb{N}$.

Hotel neskončno

Ko je prišla v hotel petčlanska družina, je bil hotel že poln. Receptor jim je moral dodeliti sobe. Po zvočniku je sporočil, da naj se vsak gost pomakne za pet sob naprej. Člani družine so dobili sobe od 1 do 5.

Nekega dne pa je prispela vesoljska ladja z neskončno potniki. Receptor je moral najti novo rešitev. Vsem gostom v hotelu je ukazal, da pomnožijo številko svoje sobe z 2 in poiščejo sobo z dobljeno številko. Nove goste je razporedil v sobe z lihimi številkami.

To je delovalo, dokler ni prišlo neskončno ladij, vsaka z neskončno potniki. Receptorja je to najprej presenetilo in ni vedel, kaj naj stori, po premisleku pa se je spomnil rešitve. Najprej je goste v hotelu ponovno premestil v sobe s sodimi številkami in tako izpraznil neskončno sob z lihimi številkami. Vsak potnik v ladji ima določeno številko ladje in številko sedeža v ladji. Receptor je gostom ukazal, naj seštejejo številko svoje ladje in sedeža. Nato jim je delil ključe praznih (lihih) sob po zaporedju njihove izračunane vsote. Najprej je sobo dobil prvi potnik iz prve ladje, ki je imel vsoto enako 2. Za njim sta sobi dobila potnika z vsoto 3 in za njima še ostali po naraščajočem zaporedju izračunane vsote 4, 5, 6, ... Število potnikov, ki imajo enako vsoto, je vedno končno, kar je razvidno iz tabele 1. Vsak potnik ima tako pred seboj le končno drugih gostov in ve, da bo v končnem času dobil svoj ključ.

	1	2	3	4	5	6	⋯
1	2	3	4	5	6	7	⋯
2	3	4	5	6	7	8	⋯
3	4	5	6	7	8	9	⋯
4	5	6	7	8	9	10	⋯
5	6	7	8	9	10	11	⋯
6	7	8	9	10	11	12	⋯
7	8	9	10	11	12	13	⋯
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

TABELA 1.
Številke v prvi vrstici predstavljajo številko sedeža v ladji, številke v prvem stolpcu pa številko ladje. V tabeli je za vsakega potnika napisana vsota teh dveh števil.

Literatura

[1] N. Casey, *Welcome to the Hotel Infinity!*, `http://www.ccs3.lanl.gov/mega-math/workbk/infinity/inhotel.html`, citirano dne 19. 8. 2013.

[2] *Števna množica*, `http://sl.wikipedia.org/wiki/stevna_mnozica`, citirano dne 19. 8. 2013.

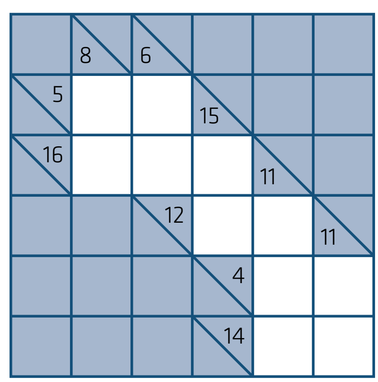
[3] *Cantorjev diagonalni dokaz*, `http://sl.wikipedia.org/Cantorjev_diagonalni_dokaz`, citirano dne 19. 8. 2013.

× × ×

Križne vsote

↓↓↓

→ Naloga reševalca je, da izpolni bele kvadratke s števkami od 1 do 9 tako, da bo vsota števk v zaporednih belih kvadratkih po vrsticah in po stolpcih enaka številu, ki je zapisano v sivem kvadratku na začetku vrstice (stolpca) nad (pod) diagonalo. Pri tem morajo biti vse števke v posamezni vrstici (stolpcu) različne.



× × ×

Rad bi te videl

Koliko svetlobe odbijajo različne barve tkanin?

Tinka Trop in Monika Bažec

Poletje je čas sproščenih večernih sprehodov do odmaknjenih, skoraj pozabljenih kotičkov, od koder je najlepši pogled na sonce, ki se utaplja v morju, ali navzgor v prostranstva vesolja. Zaradi prijaznejših temperatur velikokrat pred odhodom ne pomislimo, da bi s seboj vzeli toplejša oblačila. Prav tako preprosto pozabimo, da nas lahko ujame noč in bi bilo s seboj primerno vzeti kakšno odsevno telo.

Na blogih in spletnih forumih, kjer se tematika dotakne varnosti pešcev v cestnem prometu in njihove vidnosti, pogosto naletimo na zapise razjarjenih voznikov. Ti se pritožujejo nad pešci brez ustreznih odsevnih teles, ki so povrhu vsega oblečeni še v temnejša oblačila. Kakšna pa je razlika med količino svetlobe, ki se odbije od svetlejših in temnejših oblačil?

Voznik v avtomobilu vidi pred seboj predmete, ki jih osvetlijo avtomobilski žarometi. Ko svetloba, ki je elektromagnetno valovanje, sestavljeno iz mešanice valovanj z različnimi valovnimi dolžinami in jakostmi, vpade na površino določene barve, ta absorbira del svetlobe. Del spektra valovnih dolžin, ki se odbije, določa barvo površine. Človeško oko ni enako občutljivo na različne dele barvnega spektra. V očesu imamo dvoje receptorjev: paličice in čepke. Paličice so občutljivejše za svetlobo, vendar ne ločijo barv. Z njimi si pomagamo predvsem v mraku. Čepki so treh vrst in z njihovo pomočjo ločujemo barve.

Predstavljajmo si, da se v nočnih urah na neosvetljeni cesti srečata voznik avtomobila in pešec, oble-

SLIKA 1.

čen v tipična poletna bombažna oblačila. Pri simulaciji teh razmer smo v zatemnjenem prostoru s temno modrim ozadjem uporabili samostoječi reflektor ter na dve stojali naslonjeno ploščo pravokotne oblike, na katero smo pritrdili bombažne majice različnih barv.

Voznikovo oko smo nadomestili s senzorjem svetlobe, t. i. Vernier Light Sensor LS-BTA, ki je združljiv s programsko opremo LoggerPro. Senzor meri osvetljenost, torej svetlobni tok, ki vpada na površino osvetljenega dela silicijeve fotodiode. Izhodni izmerki senzorja so v fiziološki enoti lux. Ta nam pove, da je občutljivost senzorja v odvisnosti od valovne dolžine podobna občutljivosti človeškega očesa pri enakih valovnih dolžinah vpadne svetlobe. Kot takšen, je senzor primeren nadomestek voznika avtomobila.

Pred pričetkom meritev je bilo potrebno preveriti, ali bo pri merjenju pomembno, kakšen je kot med senzorjem svetlobe in napeto tkanino. Ko opazujemo svetlo piko, ki jo svetlobni vir ustvarja na zaslonu iz tkanine, ugotovimo, da jo vidimo enako svetlo, ne glede na to pod kakšnim kotom jo opazujemo. O tem govori Lambertov zakon, ki velja za črno telo in hrapava svetila: svetlost ploskovnega svetila je neodvisna od smeri opazovanja.

Kot vir snopa svetlobe smo uporabili projektor, namenjen predvajanju diapozitivov z zaslonko, ki je imela krožno odprtino premera $(3{,}0 \pm 0{,}5)$ mm. Svetlobni snop iz projektorja je vpadal pravokotno na zaslon z belo tkanino, kot prikazuje slika 3.

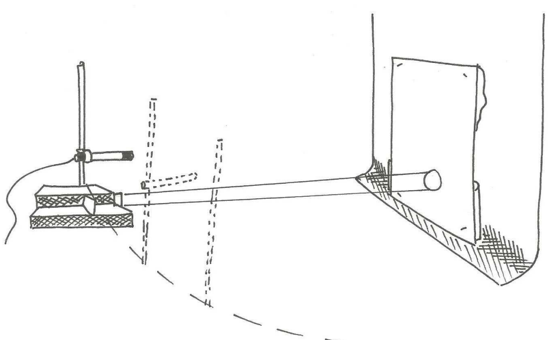
Izmerili smo osvetljenost v odvisnosti od kota med senzorjem in smerjo vpadne svetlobe.

Senzor smo nastavili v najobčutljivejše območje, primerno za merjenje osvetljenosti med 0 in 600 lux. V tem območju je resolucija meritev 0,2 lux. Zajemali smo 20 izmerkov/s. Meritev je trajala deset sekund. Končno vrednost izmerka smo določili kot povprečje meritve. Od vseh meritev je odšteto ozadje, ki smo ga izmerili tako, da smo izmerili osvetljenost enake postavitve brez priključenega vira svetlobe. Meritve prikazuje graf na sliki 5.

Vidimo, da osvetljenost ni odvisna od orientacije senzorja.

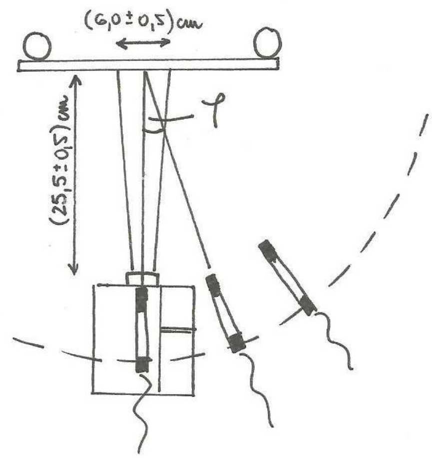
S to ugotovitvijo se lahko vrnemo nazaj k prej zastavljeni simulaciji srečanja voznika avtomobila in neoznačenega pešca. Postavitev eksperimenta prikazuje skica na sliki 6.

SLIKA 2.

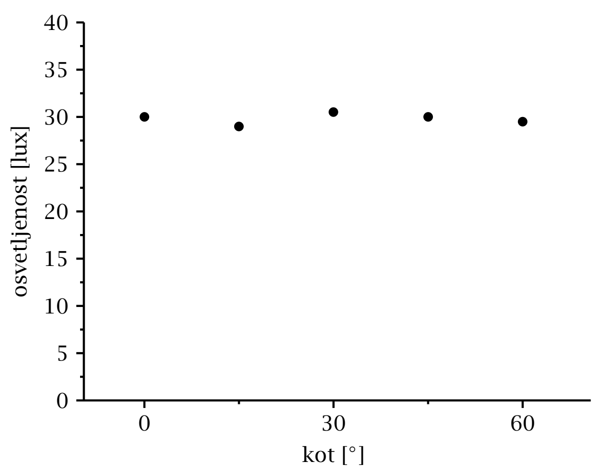


SLIKA 3.

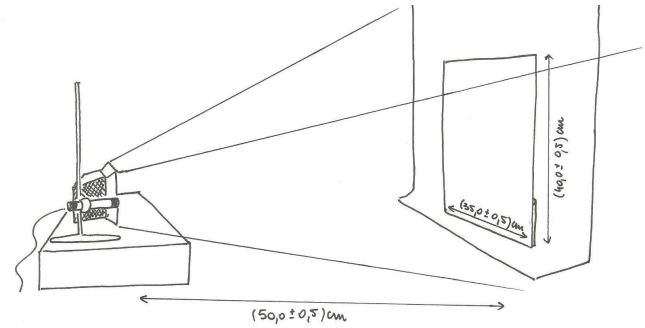
Kot vir svetlobe smo uporabili reflektor, saj se najbolje približa svetlobnemu snopu avtomobilske luči. Snop svetlobe se pri oddaljevanju od svetila širi navzven in je na oddaljenosti, kjer naleti na pešca (na podlago napeto blago), dovolj širok, da osvetli vso površino tkanine in tudi del ozadja, ki je predstavljeno s temno modrim okenskim senčilom.



SLIKA 4.



SLIKA 5.
Osvetljenost v odvisnosti od kota med pravokotnico na zaslon in senzorjem



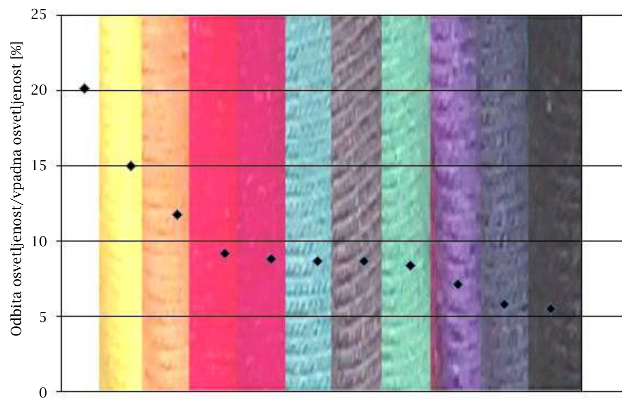
SLIKA 6.

Za primerljivost meritev z različnimi tkaninami smo poskrbeli tako, da je bila postavitev pri vseh delih poskusa enaka. Podlaga z blagom je bila zmeraj enako oddaljena od izvora in senzorja, saj smo na mize in podlago zarisali, kje stoji kateri izmed delov poskusa. Tkanine smo napeli na podlago in ne samo obesili, saj so bile majice različnih velikosti in smo tako poskrbeli, da je bila odbojna površina zmeraj enaka. Vse majice se bile iz 100 % bombaža.

Pomembna predpostavka je bila, da se ozadje opazno ne spreminja. Eksperiment smo izvedli v čim bolj zatemnjeni učilnici. Bil je sončen dan brez oblakov, ki bi spreminjali osvetljenost v učilnici. Pred vsako meritvijo smo najprej naredili meritev ozadja – torej meritev postavitve brez prižganega reflektorja. Te izmerke smo nato odšteli od meritev.

Merili smo v srednjem območju občutljivosti od 0 do 6000 lux z ločljivostjo 2 lux. Zajemali smo 20

SLIKA 7.



SLIKA 8.
Vrstni red barv: bela, rumena, oranžna, rdeča, ciklamna, turkizna, siva, svetlo zelena, vijolična, modra, črna.

izmerkov/s v desetih sekundah. Končni izmerek je povprečje vseh meritev. Izmerke prikazuje graf na sliki 8, kjer je prikazan odstotek odbite svetlobe

- $\frac{a}{b} \cdot 100\,\%$

  a = osvetljenost na določeni razdalji od zaslona s tkanino
  b = osvetljenost na mestu tkanine

v odvisnosti od barve tkanine.

Razmislimo, kaj nam povedo zgornji podatki. Svetla oblačila odbijejo dobrih 20 % vpadne svetlobe, temnejša pa le slabih 6 %. Torej svetla oblačila odbijajo skoraj štiri krat več svetlobe! V tem trenutku postane jasno, zakaj voznik pešca, oblečenega v svetla oblačila, zagleda prej kot tistega v temnih.

Morda pomislimo še na odsevna telesa, od katerih se odbije vsa vpadna svetloba. V primerjavi s svetlimi oblačili lahko rečemo, da se od le-teh odbije pet krat manj svetlobe, kot jo odbije odsevno telo.

Ko vas ob neosvetljeni cesti nepripravljene ujame noč, bodite previdni. Če vidite avtomobil, to še ne pomeni, da je tudi voznik že zagledal vas.

× × ×

44. mednarodna fizikalna olimpijada v Kopenhagnu, Danska

Jurij Bajc

Po regijskem in državnem tekmovanju srednješolcev iz fizike ter izbirnem tekmovanju za olimpijsko ekipo so se na olimpijado uvrstili: Michel Adamič in Bine Brank z Gimnazije Bežigrad, Ljubljana, Žan Kokalj z II. gimnazije Maribor, Žiga Krajnik z Gimnazije Škofja Loka in Žiga Nosan z Gimnazije Ledina, Ljubljana. Tako kot v prejšnjih letih je vse stopnje tekmovanja tudi v šolskem letu 2012/13 organiziralo in izvedlo *Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije (DMFA Slovenije)*.

Strokovni vodji ekipe in člana mednarodne komisije sva bila dr. Barbara Rovšek in dr. Jurij Bajc s *Pedagoške fakultete v Ljubljani*. Udeležbo na olimpijadi sta finančno omogočili *DMFA Slovenije* in *Ministrstvo za izobraževanje, znanost in šport*.

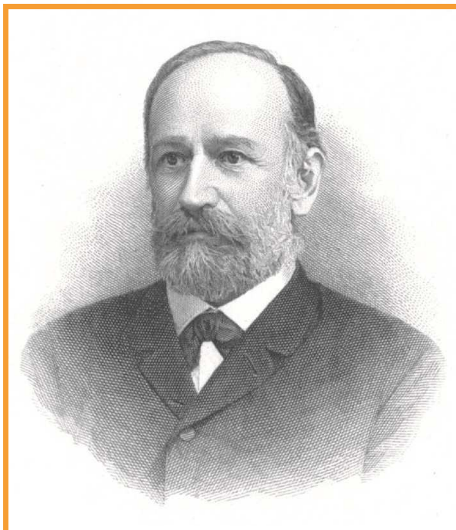
Olimpijada je potekala med 7. in 15. julijem 2013 v Kopenhagnu na Danskem. Sodelovalo je okoli 380 tekmovalcev iz 82-ih držav. Naši tekmovalci so osvojili **dve bronasti medalji** in **eno pohvalo**. Bronasti medalji sta osvojila **Michel Adamič** in **Žiga Krajnik**, pohvalo pa **Bine Brank**.

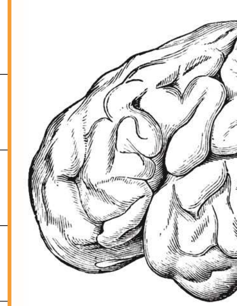
Naslednja, 45. mednarodna fizikalna olimpijada, bo od 13. do 21. julija 2014 v Astani v Kazahstanu.

SLIKA 1. Slovenska olimpijska ekipa na svečani otvoritvi. Z leve proti desni: Barbara Rovšek (vodja), Žiga Nosan, Žiga Krajnik (bronasta medalja), Bine Brank (pohvala), Žan Kokalj, Michel Adamič (bronasta medalja) in Jurij Bajc (vodja).

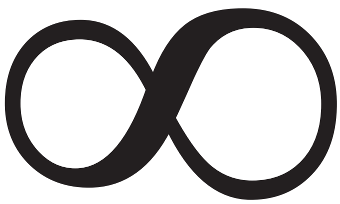
× × ×

Nagradna križanka

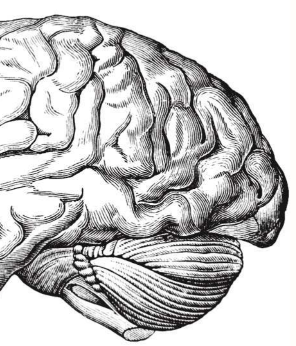




ITAL. KARDINAL V PAPEŽEVI SLUŽBI (AGOSTINO, 1914-98)
RIBA Z BODICAMI NA HRBTNI PLAVUTI
AVSTRIJ. POLITIK (JOSEF)
NAREČNI IZRAZ ZA PODSTREŠJE
RTV VODITELJICA ROŠ ŠIRCA
TRAK KOT ZNAMENJE ODLIKOVANJA
NAPRAVA ZA VBRIZGAVANJE, BRIZGALNIK
JUNAK IZ ILIADE Z ZELO MOČNIM GLASOM
ODKRITELJ POSEBNE SILE V VRTEČEM SE SISTEMU
1
NAJNIŽJI ZNANSTV. SODELAVEC NA VISOKIH ŠOLAH
ŽVRKLJANJE ALI MESENJE SNOVI
PRITOK EBRA, KI TEČE SKOZI PAMPLONO
BARVA KOŽE, POLT
NAREČNI IZRAZ ZA HLOD
JAPONSKA VALUTA
DEJSTVO
PRAVNI, ŽENSKI, SPOLNI ?
DREVESNA ŽIVAL IZ DRUŽINE LEZAVTOV
TERITOR. OBRAMBA
GL. MESTO AZERBAJDŽANA
VRSTA POSTRVI, AMERIKANKA
NAŠ MATEMATIK (JOSIP)
PAS PRI KIMONU
ODPOSLANEC
ZAHODNOEVROPSKI VELETOK
KRAJ NAD MISLINJ. DOLINO
KROGLASTA BAKTERIJA
PESNIK PAVČEK
RADON
HRIB PRI BEOGRADU
TELESNO DEJAVEN ČLOVEK
OKVARA
NAJSTAREJŠE SLOVENSKO MESTO
VOZNIK POLJEDEL. VOZILA
EGIPTOV. KRISTJANI
AMERIŠKI DRAMATIK (EDWARD FRANKLIN)
STROKOVNJAK ZA SVETLOBNE POJAVE
PRILOGA K AKTU, DODATEK
NAŠ LETAL. PIONIR (EDVARD)
5
LASTNOST ZAPOREDJA Z LIMITO
PISATELJ (CIRIL)
PONOVITEV SRČNEGA INFARKTA
VELETOK NA ALJASKI
GOZDNA ZVER
LICE KOVANCA
NAŠ ARHITEKT (LADO)
EDDY MERCKX
ZVOČNI, KITAJSKI, POŽARNI ?
SUMERSKI BOG NEBA
SOPRANISTKA NETREBKO
ČASOVNA ENOTA
KARTONAŽNI IZDELEK
POŠKODBA OD ČESA VROČEGA
NJIVA (NAREČNO)
NESIGURNOST, NEGOTOVOST
12
TOKIJSKO LETALIŠČE
KOVINA REDKIH ZEMELJ
ORODJE V OBLIKI TRISTRANE PRIZME
VPRAŠALNICA PO KRAJU
NAKLON RAVNINE
MESTO V ZGORNJEM EGIPTU
DRŽAVA MED PERZ. ZALIVOM IN KASPIJ. JEZEROM
KULTURNA RASTLINA S SEMENI ZA KAŠO IN MOKO
3
DIH
CUNJA
ANTON AŠKERC
NAŠA IGRALKA (BERNARDA)
REŽISER KUSTURICA
SREDSTVO ZA ŠIVANJE
GOROVJE NA JV. BALKANA
PEVKA ČERNE



NEKDANJI FINSKI ATLET (PAAVO)
FILM IGORJA PRETNARJA
IVAN SVETLIK
RAZMERJE MED ELEK. NABOJEM IN NAPETOSTJO
9
SOČEN JUŽNI SADEŽ
OZNAKA MAROKA



AVTOR: MARKO BOKALIČ
TROSNI MEŠIČEK
DALJNA PRETEKLOST
STAROGRŠKA SKLENJENA BOJNA VRSTA
NEKDANJI TRINIDAD. SPRINTER BOLDON
SVEŽENJ VREDNOSTNIH PAPIRJEV
PREVOZ SKOZI DRUGO DRŽAVO
GRAFIČNO OBLIKOVANJE: MATEVŽ BOKALIČ
HRVAŠKI ZGODOVINAR NODILO
NAŠ STROJNIK (IGOR)
IZUMITELJ PARNEGA STROJA (JAMES)
BODIČAST RASTLIN. IZRASTEK
POLDRAG KAMEN Z BELIMI IN ČRNIMI PROGAMI
NABAVA
ZMES BITUMNA IN PESKA ZA CESTE
UTEMELJITELJ KLASIČNE MEHANIKE (ISAAC)
OHIŠJE ELEKTROMOTORJA S TULJAVO
MESTO IZKOPANIN V EGIPTU
KROGELNA KAPICA
NAŠ FILM. SNEMALEC ZVOKA (JOŽE)
ALUMINIJ
dMFA
RADIJ
NAJVIŠJE LEŽEČI PROSTOR V STAVBI
SUŠICA HRBTNEGA MOZGA
PREDMETI ZA OKRAS TELESA
ČRKA Q
VSAKE IMAJO SVOJEGA MALARJA
ANTIČNA MALOAZ. POKRAJINA
REKA MAJNA (ORIG.)
VIR TRPLJENJA
ZAČETEK OBSTAJANJA
OZNAKA ZA TIHO IZVAJANJE V GLASBI
KRAJ POD ČRNIM KALOM
DROBNA UŠ
PREDVERJE ZGRADBE
DRŽAVNI UDAR
ŠVICARSKA IGRALKA (URSULA)
SLADEK SREDOZEMSKI PLOD, FIGA
IGRALEC COSTNER
ŠPORTNI VADITELJ
KRIVULJA SPREMEMBE STANJA PLINA V TOPLOT. IZOLIRANEM SISTEMU
KAMNITA OGRAJA
CARSKI, ZLATI ?
VNETJE STEGEN. ŽIVCA
MESTO V ŠVICI
ZNIŽANI TON E
GRAFIČNI FORMAT, OSMERKA
KOLIČNIK SILE IN PLOSKVE, NA KATERO TA DELUJE
OZNAKA SREDIŠČA DOLENJSKE
IGRALEC GREENE
PORTUGAL. NOGOMETNI ZVEZDNIK (CRISTIANO)
ŠALA
NATANČNO OMEJENO TRAJANJE
UVODNA SKLADBA K ODDAJI
BIATLONEC BJÖRNDALEN
RIMSKI HAD
NARAVNA ČASOVNA ENOTA
KDOR SE UVAJA V KAKO VEDO
SEVERNA SOSEDA LATVIJE
NAŠA SMUČARKA (ANA)
VEZNIK
PISEC MAT. UČBENIKOV (IVAN)
REKA V KAZAHSTANU
ODTENEK
FR. MATEMATIK, PIONIR ANALIZE
POLMER
NAVOJNICA
ZGODOV. OBDOBJE
STARA KAMNITA KRITINA
FR. FILM. MESTO
ETIOPSKA TEKAČICA (BERHANE)
dMFA
MAGNETNI POMNILNIK V RAČUNALNIKU
NAŠE ELEKTRO PODJETJE
RIBIŠKE VILICE
ITAL. TISKOVNA AGENCIJA
VELIK MORSKI SESALEC
ENAKA SAMOGLASNIKA
OBER
AVSTRAL. PAPIGA S PERJANICO
PARAZIT V SADEŽU
PRELAZ PRI KAMNIKU
ANTON AŽBE
STAROGR. ASTRONOM IZ ALEKSANDRIJE
VEZNIK V OZIRAL. ODVISNIH STAVKIH
VELIKA VEŽA V JAVNIH ZGRADBAH
POKOJNI ŠPANSKI IGRALEC (FERNANDO)

Oštevilčena polja: 2, 4, 6, 7, 8, 10, 11

NAGRADNI RAZPIS

→ Črke iz oštevilčenih polj vpišite skupaj z osebnimi podatki v obrazec na spletni strani

www.presek.si/krizanka

ter ga oddajte do **20. januarja 2014**, ko bomo izžrebali tri nagrajence, ki bodo prejeli **knjižno nagrado**.

×××

Dan odprtih vrat Evropske vesoljske agencije

Dunja Fabjan

ESTEC – središče za raziskovanje vesolja in vesoljsko tehnologijo

Izmed devetih središč Evropske vesoljske agencije je ESTEC (European Space Research and Technology Center) v mestecu Noordwijk na severu Nizozemske največji center. Inkubator tehnologije in glavno središče za razvoj tehnologije za raziskovanje vesolja je svoja vrata odprl obiskovalcem v nedeljo, 6. oktobra 2013. Dogodek je bil del prireditev ob svetovnem tednu vesolja, ki je letos potekal med 4. in 10. oktobrom. Tik pred vstopom v središče je na večjem zaslonu obiskovalcem (bilo jih je več kot 8500) dobrodošlico izrekel astronavt Luca Parmitano, ki je bil v tistih dneh poveljnik misije na Mednarodni vesoljski postaji.

Med dnevom odprtih vrat so specializirani laboratoriji in vrsta oddelkov predstavljali svoje delo. Ker je ESTEC izjemno veliko središče z razvejano paleto aktivnosti bomo v članku predstavili le del dejavnosti, ki si jih je bilo mogoče ogledati.

Vesoljske misije

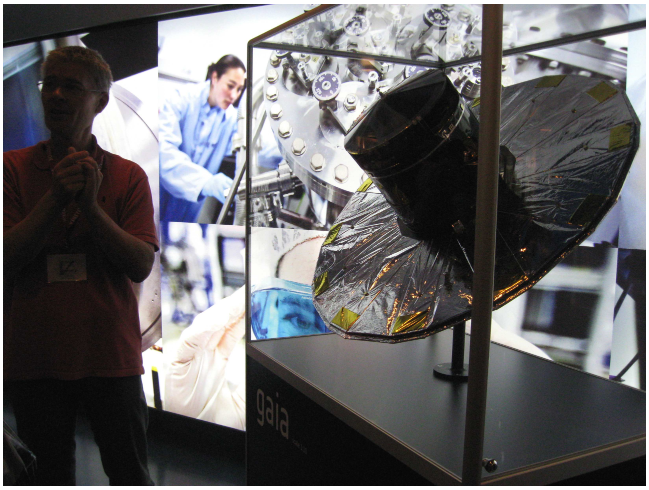
Na dolgem hodniku, ki znotraj glavne stavbe pelje do laboratorijev za testiranje, so bile razvrščene postojanke, namenjene Esinim vesoljskim misijam in nekaterim laboratorijem.

Omeniti velja tri pomembnejše vesoljske misije, izmed katerih se je ena pred kratkim zaključila (vesoljski teleskop Planck), druga bo kmalu izstreljena (vesoljski teleskop Gaia), tretja pa bo čez nekaj mesecev dosegla kritični trenutek (vesoljska sonda Rosetta).

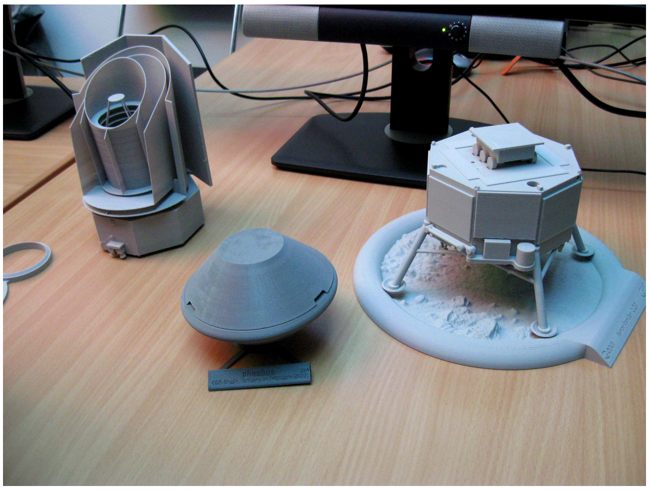
Misija Rosetta je najstarejša izmed treh, saj je prvi osnutek nastal pred dvajsetimi leti, izstreljena pa je bila leta 2004. Ime nosi po slavni steli odkriti v egipčanskem pristanišču Rosetta (danes Rašid), ki je bila temeljnega pomena za razvozlanje hieroglifov. Vesoljska Rosetta in njen pristajalni modul Philae, ki se bosta spustila na jedro kratkoperiodičnega kometa 67P/Churyumov-Gerasimenko, bosta raziskovala naravo plinov in prahu, ki sestavljajo jedro kometov. Podobno kot stela bo Rosetta razvozlala uganke povezane z razumevanjem nastanka Sončevega sistema. Vesoljska trnuljčica Rosetta, ki je trenutno v hibernaciji, naj bi se sama prebudila 20. januarja 2014 in orientirala svojo anteno proti Zemlji. Od tega tre-

SLIKA 1.
Zastava Evropske vesoljske agencije pred vhodom v center ESTEC. (Foto: Dunja Fabjan)

nutka dalje bodo izvedeni še zadnji testi pred zbližanjem z orbito kometa 67P/Churyumov-Gerasimenko, v bližino katerega bo prišla maja meseca in na katerega bo spustila modul Philae novembra leta 2014. Komet bo Rosetta spremljala tudi po prehodu perihelija, ki se bo zgodil 15. avgusta 2015.



SLIKA 2.
Model vesoljske misije Gaia v merilu 1:10. (Foto: Dunja Fabjan)



SLIKA 3.
Makete vesoljskega teleskopa EChO – Exoplanet Characterisation Observatory, sonde Phoebus – High Speed Reentry Demonstrator in lunarnega pristajalnega modula. (Foto: Dunja Fabjan)

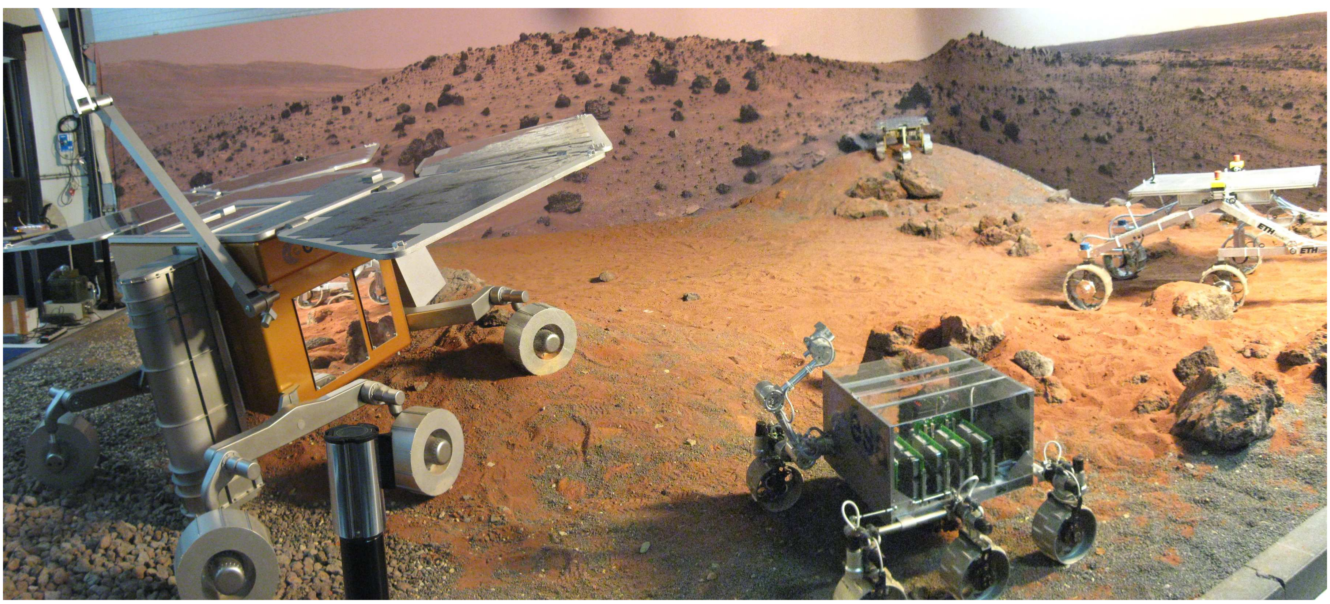
Drug teleskop je konec oktobra sprejel svoj zadnji signal in dokončno ugasnil (prešel v trajno hibernacijo). Vesoljski satelit Planck, namenjen meritvam mikrovalovnega sevanja ozadja, je bil izstreljen maja 2009. V letu dni je dokončal svoj prvi pregled neba z obema instrumentoma v visokih (100–857 GHz) in nizkih (30–70 GHz) frekvencah. Najnatančnejši termometer v vesolju (ohlajen je bil na −273,15 °C) je hladilno tekočino (tekoči helij) porabil do januarja 2012, kar je tudi pomenilo konec opazovanj v visokih frekvencah. Od takrat dalje je s pregledi neba nadaljeval le v nižjih frekvencah in svoje aktivno življenje končal 23. oktobra, še prej pa je bil odposlan na stabilnejšo in nekoliko oddaljeno orbito od prejšnje.

SLIKA 4.
Nemški astronavt Reinhold Ewald po predavanju. (Foto: Dunja Fabjan)

Gaia je vesoljski satelit, ki je namenjen raziskovanju strukture, lastnosti in nastanka naše Galaksije. Ob koncu petletnih opazovanj bo izdelan najnatančnejši 3D zemljevid zvezd v naši Galaksiji. Gaia bo izvedla izjemno natančno astrometrijo, fotometrijo in spektroskopijo milijarde zvezd, opazovala bo torej kar 10000 krat več zvezd, kot jih je opazoval njen predhodnik, satelit Hipparcos. Lastnosti vsake zvezde bo v obdobju svojega delovanja merila večkrat (sedemdesetkrat), opazovala pa bo tudi asteroide, objekte Kuiperjevega pasu ter pol milijona oddaljenih kvazarjev. Gaia nosi na svojem krovu največjo kamero, ki je doslej letela v vesolje, saj jo sestavlja mozaik 106-ih CCDjev, s skupno skoraj milijardo slikovnih elementov!

Nastajanje satelita

Na koncu daljšega hodnika, kjer so se obiskovalci seznanili z vesoljskimi misijami, pri katerih sodeluje Evropska vesoljska agencija, so bile na mizi razstavljene makete vesoljskih satelitov, teleskopov, pristajalnih modulov in sond. Vsaka izmed teh maket predstavlja optimizirano rešitev danega problema. To so začetni osnutki vesoljskih satelitov, ki nastanejo znotraj oddelka Concurrent Design Facility. Namesto sekvenčnega reševanja in opravljanja nalog, ki pritičejo posamičnemu oddelku (npr. za telekomunikacije, za pogonske sisteme), se vsi akterji (od stranke, ki bi rada razvila satelit, do znanstvenikov, inženirjev, strokovnjakov in nenazadnje tudi odvetnikov) zberejo v večji, z računalniki opremljeni delovni sobi, in skupaj načrtujejo zasnovo satelita. S paralelnim opravljanjem nalog (concurrent design engineering) in koordinacijo vodje projekta izoblikujejo najuspešnejšo strategijo. Sproti rešujejo težave in iščejo alternativne rešitve, kar omogoča hitrejše projektiranje in manjše stroške dela. Na tak način je lahko zasnova satelita pripravljena v mesecu dni (letno je pripravljenih približno 12 zasnov satelitov), končni osnovni dokument pa dokončan in dopolnjen v nekaj mesecih. Ta dokument služi kot osnova za nadaljnje delo in pripravo končnega satelita.



SLIKA 5.
Prototipi robotskih vozil na Planetary Utilisation Testbed v laboratoriju za avtomatiko in robotiko. Preizkusno področje velikosti 8 m × 8 m je napolnjeno s peskom različnih velikosti, gramozom in kamenjem ter primerno za testiranje roverjev na površinah podobnih planetarnim, saj so prisotni manjši krater, peščena sipina in strmo pobočje. (Foto: Dunja Fabjan)

3D tiskanje za izgradnjo postaje na Luni

Proces aditivne proizvodnje oziroma 3D tiskanja se je razvil v osemdesetih letih. Uporabljajo jo za hitrejšo izdelavo prototipov in industrijskih izdelkov, na Evropski vesoljski agenciji pa že razmišljajo, kako bi s pomočjo 3D tiskanja zgradili lunarno postajo. Na dnevu odprtih vrat je bil razstavljen prototip osnovnega zidaka, težak 1,5 tone. Esini industrijski partnerji so preverjali, kako bi lahko 3D tiskanje uporabili na Luni in so zato uporabili peščeni material, podoben Lunini prsti. Trenutno je tiskalnik za lunarne zidake sposoben tiskanja s hitrostjo dveh metrov na uro, cilj pa je, da bi celotno postajo na ta način zgradili v tednu dni. Da bili bi zidaki dovolj trdni in ne pretežki, so bili izdelani z votlimi celicami (hollow cell design), njihova struktura nas spominja na notranjost ptičjih kosti.

Srečanje z evropskimi astronavti

Med dnevom odprtih vrat je bilo mogoče prisluhniti predavanjem treh astronavtov različnih generacij: prvemu Esinemu astronavtu Ulfu Merboldu, nizozemskemu astronavtu Andréju Kuipersu, ki se je lansko leto vrnil z Mednarodne vesoljske postaje, ter Reinholdu Ewaldu, ki je leta 1997 preživel dvajset dni na vesoljski postaji Mir. Slednji je imel zanimivo predavanje o svojih izkušnjah med misijo, ki se je je udeležil leta 1997. Nemški fizik je v Zvezdno mesto prvič dospel leta 1990 kot član nemške ekipe astronavtov. Na vesoljski postaji je kasneje preživel nekaj tednov, glavni eksperiment, ki mu je sledil, pa je bil on sam. Na sebi je namreč preizkušal efekt breztežnostnega prostora na metabolične procese in je med bivanjem na postaji moral slediti posebni dieti. S pomočjo meritev, ki jih je izvedel, so takrat ugotovili, da je v vesolju ravnovesje soli v človekovem telesu različno kot na Zemlji.

Med nekaj tedenskim bivanjem na Miru je bil sočasno prisoten tudi ameriški astronavt slovenskega rodu Jerry Linenger. Ravno v tistem obdobju je prišlo do znanega požara na krovu vesoljske postaje; in pripovedovanje o tem dogodku je bilo pretresljivo. Takrat je bilo namreč na krovu prisotnih šest astronavtov (dve ekipi), požar pa je preprečeval dostop do ene izmed Sojuzovih kapsul, kar je pomenilo, da bi se v najhujšem primeru rešila le polovica posadke. Kot je bralcem znano, so astronavti uspeli pogasiti požar in rešiti postajo, ki je delovala še nekaj let.

To seveda ni vse ...

V evropskem središču ESTEC, ki je letos že tretjič zapored odprlo vrata ob svetovnem tednu vesolja, je bil možen tudi 3D ogled modula Mednarodne vesoljske postaje, razstavnih prostorov laboratorija za avtomatiko in robotiko v centru Erasmus, ogled vesoljske sonde BepiColombo, Esine prve misije namenjene raziskovanju Merkurja, ki bo poletela leta 2015, poskrbljeno pa je bilo tudi za najmlajše z igrami na prostem in v centru Space Expo.

Vsem, ki se zanimajo za vesoljske tehnologije, zelo priporočam da si ob naslednji priliki ogledajo to središče, kjer bodo lahko spoznali tehnično srce Evropske vesoljske agencije, v katerem se rojevajo novi projekti, namenjeni raziskovanju vesolja.

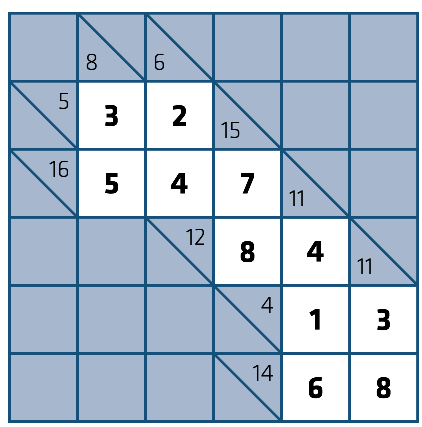
Spletne strani

Evropska vesoljska agencija
`http://www.esa.int/ESA`.

× × ×

Križne vsote

Rešitev s strani 11



× × ×

Sudoku kot poseben primer problema prevoza

Dragana Božović

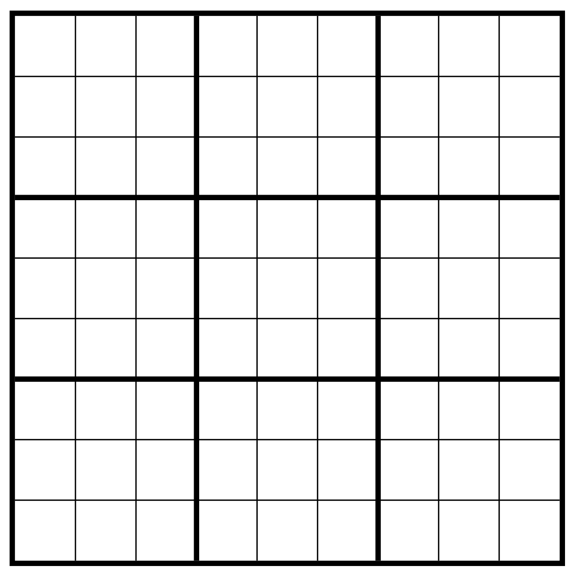
Čeprav je Sudoku na Japonskem postal priljubljen leta 1980, se je na zahod razširil šele leta 2004. Hitro je postal ena izmed najbolj uspešnih in priljubljenih ugank. Sudoku 9×9 mreža je danes vsakdanji del številnih časopisov. V svetu, kjer obstajajo aplikacije že za skoraj vse, tudi za Sudoku najdemo digitalne različice. V prejšnji številki Preseka [5] smo se naučili nekaj o problemu prevoza, tokrat se bomo poglobili v problem, ga povezali s Sudoku uganko in obravnavali Sudoku kot poseben primer problema prevoza.

Igra Sudoku

Spomnimo se najprej, kako je Sudoku uganka sploh sestavljena. Sudoku kvadrat lahko definiramo kot mrežo velikosti 9×9, pri čemer vsaka vrstica, vsak stolpec in vsak od devet označenih 3×3 blokov oz. kvadratov (slika 1) vsebujejo števila od 1 do 9, vsako natanko enkrat. Sudoku uganka je uganka, pri kateri so na začetku nekatera polja zapolnjena, nekatera pa prazna. Cilj reševalca je, da izpolni prazna polja tako, da je rezultat pravilen Sudoku kvadrat. Sudoku uganke delimo glede na težavnost na stopnje od 1 do 5 [2]. Med težavnostjo Sudokuja in številom začetnih števil, podanih v Sudoku mreži, ni nikakršne povezave. Obstajajo zelo težki Sudokuji, ki imajo zelo veliko podanih začetnih števil, in tudi zelo lahki, ki jih imajo zelo malo [3].

S priljubljenostjo igre so se pojavile še različne (drugačne in težje) vrste Sudokuja, med njimi [4]:

- *Sudoku-X*
  Pri tem Sudokuju moramo upoštevati še, da se morajo števila od 1 do 9 v diagonalah pojaviti le enkrat – tako nekateri Sudokuji pridobijo enolično rešitev.
- *Sodo-lihi Sudoku*
  Tak Sudoku ima določena polja osenčena. Na podlagi podane uganke razberemo, ali v osenčena polja vpisujemo soda ali liha števila.
- *Geometrijski Sudoku*
  Kvadrat tega Sudokuja je sestavljen iz različnih geometrijskih likov, imenovanih nonomine. Razmejeni so z debelejšo črto. Sestavlja jih devet polj, v katere je potrebno vpisati števila od 1 do 9.
- *Barvni Sudoku*
  To je Sudoku, pri katerem moramo upoštevati še, da se smejo števila od 1 do 9 v označenih obarvanih likih pojaviti le enkrat.



SLIKA 1.
Označeni 3×3 bloki oz. kvadrati

Sudoku kot poseben problem prevoza

Spomnimo se osnovne formulacije problema prevoza [5], s katerim minimiziramo stroške prevoza dobrin iz različnih izvornih točk (npr. skladišč) v različne končne točke (npr. trgovine):

- minimiziraj $z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{i,j} \cdot x_{i,j}$

  pri pogojih:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{i,j} \le s_i \quad \text{za } i = 1, \ldots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{i,j} \ge d_j \quad \text{za } j = 1, \ldots, n$$

$$x_{i,j} \ge 0 \quad \text{za } i = 1, \ldots, m \text{ in } j = 1, \ldots, n$$

- Število s_i predstavlja zalogo enot v izvorni točki i, kjer je $i = 1, \ldots, m$.
- Število d_j predstavlja, koliko enot naroča končna točka j, kjer je $j = 1, \ldots, n$.
- S številom $c_{i,j}$ označimo, koliko stane prevoz ene enote od izvorne točke i do končne točke j, za $i = 1, \ldots, m$ in $j = 1, \ldots, n$.
- S številom $x_{i,j}$ označimo, koliko enot pošljemo od izvorne točke i do končne točke j, za $i = 1, \ldots, m$ in $j = 1, \ldots, n$.

Za podrobnejšo razlago si poglejte prejšnjo številko Preseka [5].

Reševanje uganke Sudoku zahteva, da 81 števil razporedimo v 81 celic Sudoku mreže (oštevilčenje celic vidimo na sliki 2).

Zato v preoblikovanju Sudoku uganke v problem prevoza uporabimo 81 končnih točk, ki jih moramo upoštevati, vsaka s povpraševanjem ene enote (v vsako celico zapišemo natanko eno število). Na voljo imamo 81 števil, in sicer števila od 1 do 9, vsako natanko devet krat. V enačbi 1 torej velja $m = 9$ in $n = 81$. Naj bosta s množica izvornih točk (v prejšnji številki Preseka [5] množica skladišč) in d množica končnih točk (v prejšnji številki Preseka [5] množica trgovin) takšni, da je $s_i = 9$, za $i = 1, \ldots, 9$ (vsako od devetih števil se pojavi devet krat), in $d_j = 1$, za $j = 1, \ldots, 81$ (vsak kvadratek Sudoku matrike 9×9 prejme eno število od omenjenih 81). Vsaka od devetih izvornih točk i lahko pošlje k vsaki od 81 končnih točk j eno enoto po ceni $c_{i,j}$. Ilustracija opisanega je prikazana na sliki 3.

V nadaljevanju bomo opisali, kako določimo matriko cen, ki je prisotna pri vseh oblikah problema prevoza. Postopek izračuna matrike cen je povzet po [1]. Pri modeliranju različnih Sudoku ugank, množici izvornih točk s in končnih točk d ostajata nespremenjeni. Strošek za ceno $c_{i,j}$ nastane pri prevozu ene enote od izvorne točke i do končne točke j. Zato je potrebno oblikovati matriko cen c, ki določi ceno prevoza ene enote od izvorne do končne točke.

S pomočjo osnovne Sudoku matrike bomo najprej definirali devet pomožnih matrik Π_i, $i = 1, \ldots, 9$ (za vsako število od 1 do 9 eno), velikosti 9×9, nato bomo iz teh matrik sestavili končno matriko cen. Matriko Π_1 ustvarimo na naslednji način:

1. Začnemo z matriko ($i = 1$)

$$\Pi_1 = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Poiščemo število 1 v osnovni matriki (če le-to obstaja).

1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42	43	44	45
46	47	48	49	50	51	52	53	54
55	56	57	58	59	60	61	62	63
64	65	66	67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78	79	80	81

SLIKA 2.
Oštevilčenje celic.

3. Na mesto, kjer smo v osnovni matriki našli število 1, damo v matriko Π_1 število -1, vsa ostala mesta v isti vrstici, istem stolpcu in 3×3 kvadratu, v katerem se število nahaja, pa povečamo za 1.
4. Točki 2 in 3 ponovimo za vsako število 1 v osnovni matriki.

Na enak način ustvarimo vse preostale matrike Π_i, $i = 2, \ldots, 9$.

Poglejmo si, kako postopek deluje na konkretnem primeru. Vzemimo Sudoku uganko s slike 4 in izračunajmo Π_9 (opazujemo torej mesta, kjer se v osnovni matriki nahaja število 9).

Končno matriko cen sestavimo tako, da posamezna manjša matrika predstavlja eno vrstico velike matrike. Torej i-ta vrstica končne matrike je matrika Π_i, pri čemer vrstice matrike Π_i postavimo zaporedoma eno zraven druge in dobimo vrstico dolžine 81. Tako je dimenzija matrike cen, ki jo dobimo, enaka 9×81. Izkaže se, da ima za tako določeno matriko cen vsaka optimalna rešitev vrednost ciljne funkcije enako $z = -N$, kjer je N število števil, podanih v začetni Sudoku uganki.

Sedaj, ko imamo določeno tudi matriko cen, lahko zapišemo Sudoku kot poseben problem prevoza. Naj bo $M = \{1, 2, \ldots, 9\}, N = \{1, 2, \ldots, 81\}, R = \{1, 2, 3\}$. Formulirajmo omejitve našega problema prevoza:

$$\text{minimiziraj} \quad z = \sum_{i=1}^{9} \sum_{j=1}^{81} c_{i,j} \cdot x_{i,j}$$

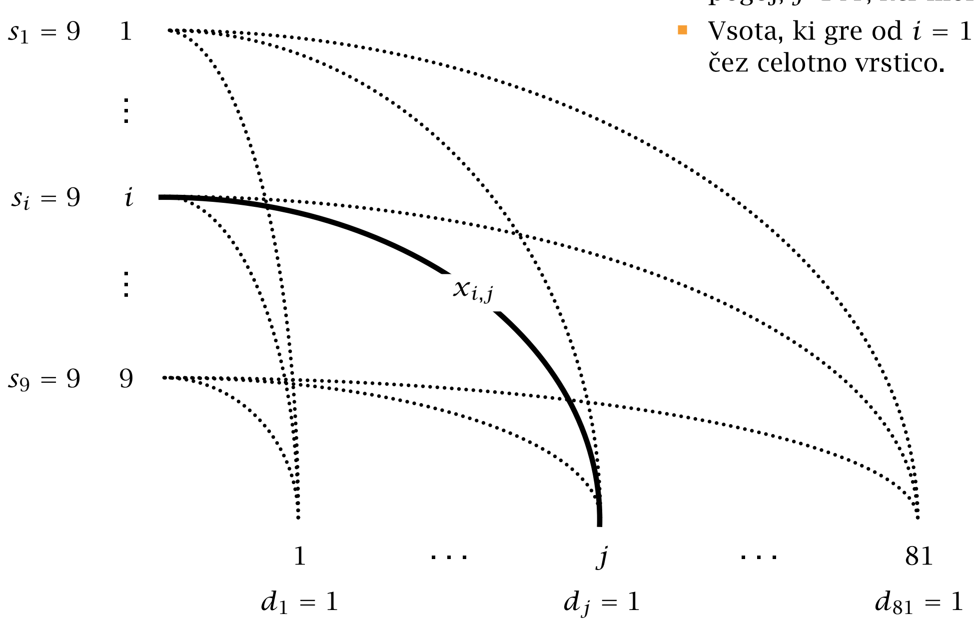
1. $\displaystyle\sum_{j=1}^{81} x_{i,j} = s_i \qquad i \in M$
2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{9} x_{i,j} = d_j \qquad j \in N$
3. $x_{i,j} \in \{0, 1\} \qquad i \in M, j \in N$

Te tri točke smo razložili in opisali v prejšnji številki Preseka [5]. Za pravilno Sudoku rešitev manjkajo še dodatne omejitve:

V vsaki vrstici se vsako število od 1 do 9 pojavi natanko enkrat:

4. $\displaystyle\sum_{i=1}^{9} x_{k,(j-1)\cdot 9+i} = 1 \qquad j \in M, k \in M$

- Število k nam pove, za katero število preverjamo pogoj; $k \in M$, ker moramo preveriti za vsa števila.
- Število j nam pove, za katero vrstico preverjamo pogoj; $j \in M$, ker moramo preveriti za vse vrstice.
- Vsota, ki gre od $i = 1$ do $i = 9$, označuje sprehod čez celotno vrstico.



SLIKA 3.
Prevozni model Sudoku uganke.

Primer. $k = 1$, $j = 3$: preverjamo, ali pogoj velja za število 1 za 3. vrstico. Vsota opiše sprehod čez celice 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27 (kot vidimo na sliki 2, so to celice 3. vrstice).

V vsakem stolpcu se vsako število od 1 do 9 pojavi natanko enkrat:

$$5.\quad \sum_{i=1}^{9} x_{k,(i-1)\cdot 9+j} = 1 \qquad j \in M, k \in M$$

- Število k nam pove, za katero število preverjamo pogoj; $k \in M$, ker moramo preveriti za vsa števila.
- Število j nam pove, za kateri stolpec preverjamo pogoj; $j \in M$, ker moramo preveriti za vse stolpce.
- Vsota, ki gre od $i = 1$ do $i = 9$, označuje sprehod čez celotni stolpec.

Primer. $k = 1$, $j = 1$: preverjamo, ali pogoj velja za število 1 za 1. stolpec. Vsota opiše sprehod čez celice 1, 10, 19, 28, 37, 46, 55, 64, 73 (kot vidimo na sliki 2, so to celice 1. stolpca).

V vsakem od devetih označenih kvadratov se vsako število od 1 do 9 pojavi natanko enkrat:

$$6.\quad \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} x_{k,(a-1)\cdot 27+(b-1)\cdot 3+(i-1)\cdot 9+j} = 1$$
$$k \in M, a \in R, b \in R$$

- Število k nam pove, za katero število preverjamo pogoj; $k \in M$, ker moramo preveriti za vsa števila.
- Števili a in b nam povesta, za kateri 3×3 kvadrat preverjamo pogoj; $a \in R$, $b \in R$, da tvorimo devet različnih parov (saj imamo devet različnih kvadratov).

4	2		1					9
		6				3	4	7
8				2	6			3
						6		
		1		5		8		
5							2	
3	7		9					1
	8		4	1				5

1	1	1	1	1	1	1	1	-1
0	0	0	0	0	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1

4	2		1					9
		6				3	4	7
8				2	6			3
						6		
		1		5		8		
5							2	
3	7		9					1
	8		4	1				5

1	1	1	2	1	1	1	1	-1
0	0	0	1	0	0	1	1	1
0	0	0	1	0	0	1	1	1
0	0	0	1	0	0	0	0	1
0	0	0	1	0	0	0	0	1
0	0	0	1	0	0	0	0	1
0	0	0	1	1	1	0	0	1
1	1	1	-1	1	1	1	1	2
0	0	0	1	1	1	0	0	1

SLIKA 4.
Primer matrike Π_9.

- Dvojna vsota označuje sprehod čez celoten kvadrat.

Primer. $k = 1$, $a = 3$, $b = 1$: preverjamo, ali pogoj velja za število 1 za 3×3 kvadrat v levem spodnjem kotu (glej sliko 1). Vsota opiše sprehod čez celice 55, 56, 57, 64, 65, 66, 73, 74, 75 (kot vidimo na sliki 2, so to celice kvadrata v levem spodnjem kotu).

Sedaj je možno rešiti Sudoku uganko tako, da rešimo problem prevoza, predstavljenega z izvornim vektorjem s, končnim vektorjem d in matriko cen c ter z dodatnimi omejitvami (kot je definirano zgoraj). To lahko naredimo s pomočjo jezika za modeliranje v matematični optimizaciji, kot je recimo AMPL.

Pokazali smo, da lahko Sudoku uganko oblikujemo kot poseben primer problema prevoza.

Primer reševanja

Poglejmo delovanje metode na primeru. Naj bo podana naslednja Sudoku uganka A:

$$A = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}
\hline
4 & 2 & & 1 & & & & & 9 \\ \hline
 & & 6 & & & & 3 & 4 & 7 \\ \hline
 & & & & & & & & \\ \hline
8 & & & & 2 & 6 & & & 3 \\ \hline
 & & & & & & 6 & & \\ \hline
 & & 1 & & 5 & & 8 & & \\ \hline
5 & & & & & & & 2 & \\ \hline
3 & 7 & & 9 & & & & & 1 \\ \hline
 & 8 & & 4 & 1 & & & & 5 \\ \hline
\end{array}$$

Najprej za vsa števila od 1 do 9 tvorimo matrike Π_i. Za lažjo predstavo si poglejmo matriko za $i = 3$:

$$\Pi^{(3)} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}
\hline
\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \hline
\mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ \hline
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ \hline
2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ \hline
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ \hline
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ \hline
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline
-1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ \hline
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline
\end{array}$$

Iz matrik Π_i, $i = 1, \ldots, 9$, sestavimo matriko cen c, velikosti 9×81, zapisano v tabeli 1.

Odebeljeno označen del matrike Π_3 vidimo na začetku tretje vrstice matrike c.

V jeziku AMPL ustvarimo datoteke .mod, .dat in .txt (pomen in sestavo teh smo pojasnili v prejšnji številki Preseka [5]).

Algorithm 1 AMPL model (.mod)

```
set M := {1..9};
set N := {1..81};
set R := {1..3};
param c {M,N};
param s {i in M};
param d {j in N};
var x {i in M,j in N} binary;
minimize Sudoku:
sum {i in M, j in N} c[i,j]*x[i,j];
subject to ponudbe {i in M}:
sum {j in N} x[i,j] = s[i];
subject to povpraševanje {j in N}:
sum {i in M} x[i,j] = d[j];
subject to vrstica {i in M, k in M}:
sum {n in M} x[k,(i-1)*9+n] = 1;
subject to kvadrat {i in R, j in R, k in M}:
sum {l in R, n in R} x[k,((i-1)*27+(j-1)*3+
   (l-1)*9+n)] = 1;
subject to stolpec {i in M, k in M}:
sum {n in M} x[k,(n-1)*9+i] = 1;
```

Algorithm 2 AMPL model (.dat)

```
param s := 1 9 2 9 3 9 4 9 5 9 6 9 7 9 8 9 9
9;
param d := 1 1 2 1 3 1 4 1 5 1 6 1 7 1 8 1 9
1 10 1 11 1 12 1 13 1 14 1 15 1 16 1 17 1 18
1 19 1 20 1 21 1 22 1 23 1 24 1 25 1 26 1 27
1 28 1 29 1 30 1 31 1 32 1 33 1 34 1 35 1 36
1 37 1 38 1 39 1 40 1 41 1 42 1 43 1 44 1 45
1 46 1 47 1 48 1 49 1 50 1 51 1 52 1 53 1 54
1 55 1 56 1 57 1 58 1 59 1 60 1 61 1 62 1 63
1 64 1 65 1 66 1 67 1 68 1 69 1 70 1 71 1 72
1 73 1 74 1 75 1 76 1 77 1 78 1 79 1 80 1 81
1;
param c:  # matrika cen c
```

Algorithm 3 AMPL model (.txt)

```
solve;
display x;
```

S pomočjo AMPL reševalnika kot rezultat dobimo matriko x, velikosti 9×81, zapisano v tabeli 2.

Iz nje moramo razbrati rešitev. Indeksi stolpcev označujejo številke celic (oštevilčenje celic je prikazano na sliki 2), indeksi vrstic pa števila od 1 do 9, ki jih vpisujemo v Sudoku mrežo. Če je v stolpcu j v vrstici i število 1, to pomeni, da imamo v celici številka j v Sudoku mreži število i. Kot vidimo, imamo v stolpcu 6 v vrstici 7 število 1. To pomeni, da se v celici številka 6 v Sudoku mreži nahaja število 7. Na ta način preberemo naslednjo rešitev Sudoku uganke A:

$A =$

4	2	3	1	6	7	5	8	9
1	5	6	2	9	8	3	4	7
7	9	8	5	3	4	2	1	6
8	4	5	7	2	6	1	9	3
9	3	7	8	4	1	6	5	2
2	6	1	3	5	9	8	7	4
5	1	4	6	7	3	9	2	8
3	7	2	9	8	5	4	6	1
6	8	9	4	1	2	7	3	5

Literatura

[1] M. Mansour, *Sudoku as a special transportation problem* (online), 28. 6. 2013. `http://arxiv.org/pdf/1210.2584v1.pdf`.

[2] J. Rosenhouse, L. Taalman, *Taking Sudoku Seriously: The Math Behind the World's Most Popular Pencil Puzzle*, Oxford University Press, New York, 2011.

[3] D. Green, Conceptis Sudoku difficulty levels explained (online), 28. 6. 2013. `http://www.conceptispuzzles.com/index.aspx?uri=info/article/2`.

[4] Wikipedia: Sudoku (online), 28. 6. 2013. `http://sl.wikipedia.org/wiki/Sudoku`.

[5] D. Božović in A. Taranenko, *Linearni problem prevoza*, Presek **41**, št. 2, 24–27.

$c =$

1	1	2	−1	2	1	1	1	2	0	0	1	· · ·	2	2	2
1	−1	1	1	2	1	1	2	1	1	1	1	· · ·	1	1	1
1	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**2**	**2**	**1**	**1**	· · ·	1	0	1
−1	1	1	2	1	1	2	2	2	2	2	2	· · ·	1	2	1
1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	· · ·	1	1	−1
1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	−1	· · ·	1	0	0
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	2	1	· · ·	0	0	1
1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	· · ·	2	1	1
1	1	1	2	1	1	1	1	−1	0	0	0	· · ·	0	0	1

TABELA 1.

$x =$

0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	· · ·	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	· · ·	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	· · ·	0	1	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	· · ·	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	· · ·	0	0	1
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	· · ·	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	· · ·	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	· · ·	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	· · ·	0	0	0

TABELA 2.

× × ×

NARAVOSLOVNA FOTOGRAFIJA

Plamen sveče

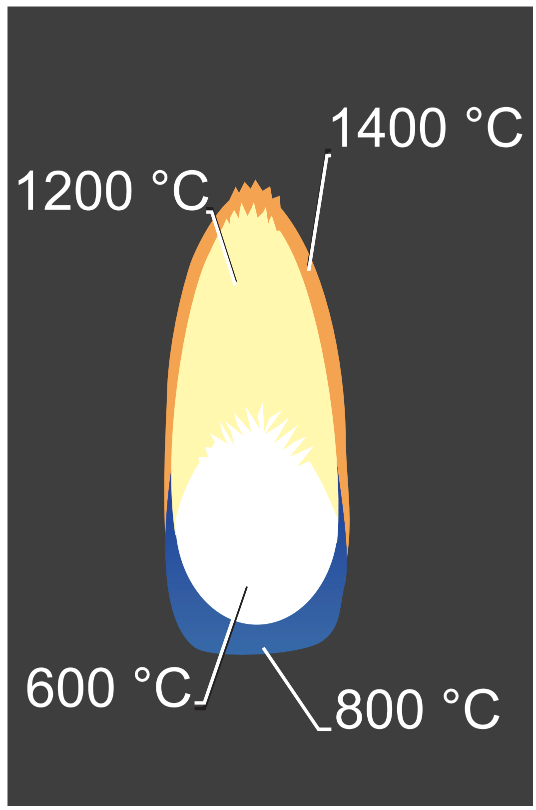
Aleš Mohorič

→ Vzemite si trenutek in opazujte plamen sveče. Pri tem pazite, da si zaradi premočne svetlobe ne poškodujete oči. Opazili boste, da plamen ni zgolj svetel zmazek, ampak ima obliko in barve (slika 1). Pa jih opišimo.

Sveča je sestavljena iz trdnega goriva – t. j. običajno parafin (vrsta voska), gorljiv ogljikovodik, ki se tali pri temperaturi višji od sobne, a ne previsoki. Iz voska izhaja stenj, pletena, gorljiva vrvica, po kateri se staljen vosek dviga zaradi površinske napetosti; pojav imenujemo kapilarni vlek. Ko svečo prižgemo, toplota plamena tali vosek, ki se dviga po stenju in dovaja gorivo, da plamen ne ugasne. Sveča izgoreva s hitrostjo 1 g v 10 min in oddaja toploto z močjo 80 W. Pri gorenju kisik iz zraka reagira z voskom, ki zaradi toplote izpareva iz stenja. Pri gorenju nastajajo vroči plini: vodna para in ogljikovi oksidi ter saje, svetloba in toplota. Toplota plamena povzroča taljenje voska na vrhu sveče in njegovo izparevanje iz stenja. Razen začetne toplote, ki jo dovede vžigalica, se proces vzdržuje sam od sebe.

V plamenu prepoznamo štiri značilna območja (slika 2).

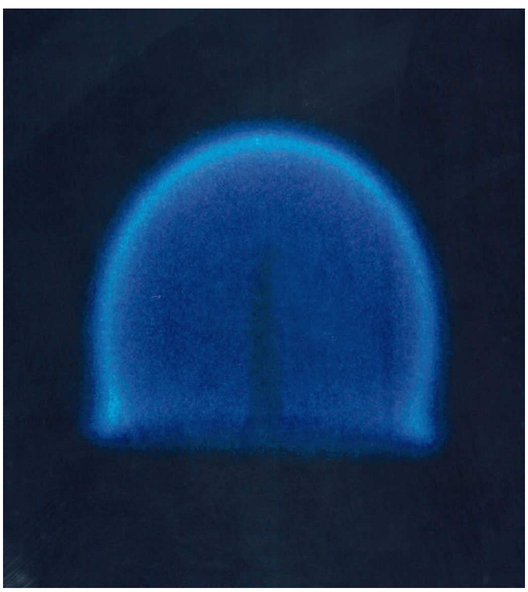
SLIKA 1.



SLIKA 2.
Štiri značilna območja plamena

V spodnjem, modrikastem območju je dovolj kisika; parafin izgoreva z značilnim modrim plamenom pri temperaturi približno 800 °C. Nad tem območjem je temnejša cona (na fotografiji ni dobro vidna, ker se nahaja v notranjosti plamena), kjer je zaradi pomanjkanja kisika izgorevanje slabše in ima temperaturo 600 °C. Na robu tega območja nastajajo saje in temperatura naraste na 1000 °C. Tudi v naslednjem območju izgorevanje zaradi pomanjkanja kisika ni učinkovito. V tem območju saje žarijo s temperaturo okoli 1200 °C; to daje plamenu rumenkasti nadih. V četrtem območju, ki objema plamen na vrhu in robovih, je spet dovolj kisika. Zaradi visokih temperatur (1400 °C) izgorevajo v tem območju tudi saje.

Vroči plini imajo manjšo gostoto od okoliškega zraka in vzgon jih vleče navzgor. Zato ima plamen podolgovato obliko in je usmerjen navpično. Vlek pravzaprav pomaga pri gorenju, saj plini med dviganjem k plamenu iz okolice posrkajo svež zrak, v katerem je kisik, potreben za gorenje. V razmerah breztežnosti konvekcije ni, kisik do plamena priteka mnogo težje, plamen je šibek in ima okroglo obliko. Tovrstne poskuse so izvajali na vesoljski postaji in tak plamen kaže slika 3.



SLIKA 3.
Plamen sveče v breztežnosti

×××

Barvni sudoku

V 8 × 8 kvadratkov moraš vpisati začetna naravna števila od 1 do 8 tako, da bo v vsaki vrstici, v vsakem stolpcu in v kvadratkih iste barve (pravokotnikih 2 × 4) nastopalo vseh 8 števil.

	3	5	8				6
					4	5	
2	5		1		6		
	6						
7			2	8			4
1			4	2			
						7	

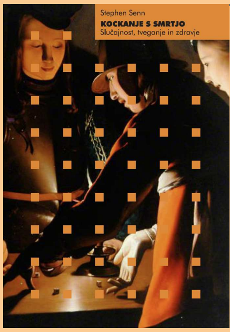
REŠITEV BARVNI SUDOKU

4	3	5	8	1	7	2	6
6	2	1	7	3	4	5	8
2	5	4	1	7	6	8	3
8	6	7	3	5	1	4	2
7	1	6	2	8	5	3	4
3	4	8	5	6	2	1	7
1	7	3	4	2	8	6	5
5	8	2	6	4	3	7	1

×××

Knjižnica Sigma

Že od leta 1959 nam Knjižnica Sigma prinaša poljudna in strokovna besedila za popularizacijo področij matematike, fizike, astronomije in računalništva. Vključuje tako zbirke nalog z različnih tekmovanj, dopolnilne učbenike, priročnike in drugo zanimivo branje domačih avtorjev, kot tudi nekaj prevodov tujih avtorjev.

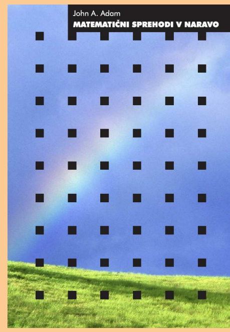


Stephen Senn

KOCKANJE S SMRTJO
Slučajnost, tveganje in zdravje

296 strani
format 14 × 20 cm
mehka vezava

29,99 EUR



John A. Adam

MATEMATIČNI SPREHODI V NARAVO

280 strani
format 14 × 20 cm
mehka vezava

27,31 EUR

Poleg omenjenih lahko v Knjižnici Sigma najdete še precej drugih del. Podrobnejše predstavitve so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse publikacije tudi naročite:

`http://www.knjiznica-sigma.si/`

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA Slovenije, dijaki in študentje imate ob naročilu pri DMFA–založništvo 20 % popusta na zgornje cene – izkoristite ga! Dodatne informacije lahko dobite v uredništvu Preseka po telefonu (01) 4766 553.

REŠITEV NAGRADNE KRIŽANKE PRESEK 41/2

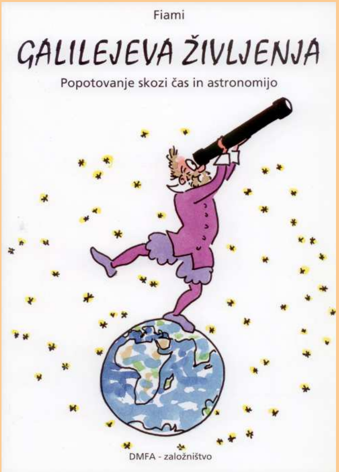
→ Pravilna rešitev nagradne križanke iz druge številke 41. letnika Preseka je **Problem prevoza.** Izmed pravilnih rešitev so bili izžrebani KLARA GOLUBIČ iz Celja, IVANKA TOMPA iz Ljubljane in ANITA BROLIH iz Preddvora, ki so razpisane nagrade prejeli po pošti.

Zgodovina znanosti v stripu

Sredi decembra 2012 je Center za mladinsko književnost in knjižničarstvo pri Mestni knjižnici Ljubljana že tretjič podelil priznanja Zlata hruška. Z njimi so tokrat odlikovali kakovostno najboljših deset odstotkov otroške in mladinske književnosti, ki je izšla v letu 2011. DMFA-založništvo je priznanje prejelo za strip *Življenja Marie Curie*.

Švicarski avtor Raphaël Fiammingo, s kratkim umetniškim imenom Fiami, v tem stripu večjega formata duhovito predstavlja nekaj izsekov iz zgodovine kemije, od Aristotela do današnjega časa. V vsakem razdelku nastopa dekle ali ženska, katere ime je različica imena Marija, v čast veliki znanstvenici Marie Curie. Zgodbice ilustrirajo tudi vlogo žensk v raznih zgodovinskih obdobjih. Predvsem pa so zabavne in obenem poučne, saj zvemo marsikakšno zanimivo podrobnost o nastanku znanstvenih odkritij. Med najbolj posrečenimi je zgodbica o Mendeljejevu in njegovem sestavljanju periodnega sistema elementov. Tudi druge pripovedi ne zaostajajo. Knjigo je odlično prevedel prof. dr. Alojz Kodre.

7,68 EUR



7,68 EUR

8,31 EUR

Pri DMFA-založništvo sta v Presekovi knjižnici izšli še dve knjigi istega avtorja

- *Galilejeva življenja*, z zgodbami iz zgodovine astronomije, od Babiloncev do danes, ter
- *Einsteinova življenja*, z zgodbami iz zgodovine fizike, vse od Sokrata do danes.

Ta dva stripa je prav tako izvrstno prevedel Alojz Kodre. Sta enako zanimiva, zabavna in poučna in bosta bralcu brez dvoma polepšala dan.

Poleg omenjenih ponujamo tudi druga matematična, fizikalna in astronomska dela. Podrobnejše predstavitve so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse publikacije tudi naročite:

`http://www.dmfa-zaloznistvo.si/`

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA Slovenije, dijaki in študentje imate ob naročilu pri DMFA–založništvo 20 % popusta na zgornje cene – izkoristite ga! Dodatne informacije lahko dobite v uredništvu Preseka po telefonu (01) 4766 553.