

PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652

Letnik 5 (1977/1978)

Številka 3

Strani 131-133

Vladimir Batagelj:

SANDOKAN

Ključne besede: matematika.

Elektronska verzija: <http://www.presek.si/5/5-3-Batagelj.pdf>

© 1978 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

© 2010 DMFA - založništvo

Vse pravice pridržane. Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.



SANDOKAN

Najbrž ste že vsi slišali za Sandokana, hrabrega, močnega, plemenitega in očarljivega "Malajskega tigra iz Mompracema", pirata in upornika proti kolonialnim gospodarjem iz angleške Vzhodnoindijske družbe.

Začelo se je pri naših sosedih s televizijsko nanizanko. Nato smo dobili Sandokana še v stripu, knjigi in na posterju. Zelo priljubljena je tudi Sandokan plošča. Na svoj račun so prišla tudi uredništva časopisov (s tem sestavkom se jim pridružuje tudi Presek).

Zadnjih nekaj mesecev pa nas na Sandokana spominjajo odvržene Sandokan vrečice, ki "krasijo" tlak naših pločnikov in ulic. Nobena skrivnost ni, da so bile v vsaki vrečici, ki stane "samo" 1 dinar, po tri samolepilne Sandokan sličice. Obstaja vsega 400 različnih sličic, ki si jih lahko nalepimo v poseben Sandokan album. Tega lahko kupimo, če imamo srečo in ni trenutno razprodan, za 5 din v skoraj vsaki trafiki, kjer se dobe tudi sličice.

Prav zbiranje Sandokan sličic je glavna tema tega sestavka. Tisti, ki te sličice zbirate (ali pa ste zbirali te ali podobne: živali, ladje, pevce, avtomobile, zastave, filmske igralce, športnike, ...), ste najbrž opazili, da je spočetka skoraj vsaka sličica nova. Kasneje pa se začno kopičiti sličice, ki jih že imamo, in le poredko dobimo novo. Zbiralci kaj kmalu najdejo rešitev: razvije se živahno menjavanje odvečnih sličic, ki pa bistveno ne prispeva k polnosti albuma. Običajno sčasoma zbirateljska vnema popusti in ostane nam skoraj poln album in

kupček "enakih" sličic.

Ker ima Sandokan album tudi moj šestletni sin, sem si pred časom zastavil vprašanje: Koliko sličic je treba (v povprečju) kupiti, da bomo napolnili cel album?

Prva zamisel, kako priti do odgovora na zastavljeno vprašanje, je bila računalniška simulacija kupovanja sličic. Dobljeni odgovor je bil: za to, da napolnimo prazen Sandokan album, je potrebno kupiti okrog 2700 Sandokan sličic ali $2700/3 = 900$ Sandokan vrečic oziroma porabiti $900 \text{ din} = 90 \text{ jurjev}$ (za ta denar lahko kupimo štiri Sandokan knjige). Seveda pa v tem rezultatu ni upoštevano menjavanje sličic. Predpostavljaj pa sem "poštenost" izdelovalca Sandokan vrečic: vsako sličico je natisnil in dal v vrečice v enakem številu.

Pred kratkim sem v neki knjigi našel tudi teoretični odgovor na zastavljeno vprašanje: Naj bo v albumu prostora za n različnih sličic in naj jih manjka še p sličic. Potem moramo za to, da bi album napolnili (v povprečju) kupiti še

$$N(n, p) = n \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{p}\right)$$

sličic. Vsoto recipročnih vrednosti prvih p naravnih števil imenujemo tudi harmonična vrsta in jo označimo s H_p . Torej lahko prejšnji obrazec zapišemo krajše

$$N(n, p) = n \cdot H_p$$

Pri majhnih p vrednost H_p določimo kar neposredno po definiciji s seštevanjem. Pri večjih p pa velja na precej decimalnih mest natančno obrazec

$$H_p \approx \ln\left(p + \frac{1}{2}\right) + \gamma$$

kjer je

$$\gamma = 0.57721\ 56649\ 01532\ 86060\ 6512\ \dots$$

Eulerjeva konstanta. Tako dobimo po tem obrazcu H_{10} na štiri mesta natančno, H_{100} pa že kar na šest mest natančno.

Za naše namene pa bo zadostovala naslednja tabela:

p	H_p	p	H_p
1	1.000 000	15	3.318 229
2	1.500 000	20	3.597 740
3	1.833 333	30	3.994 987
4	2.083 333	50	4.499 205
5	2.283 333	100	5.187 378
6	2.450 000	150	5.591 181
7	2.592 857	200	5.878 031
8	2.717 857	300	6.282 664
9	2.828 968	400	6.569 930
10	2.928 968	500	6.792 823

Bralec naj poskuša sam najti teoretične ocene za neznanne količine v naslednjih nalogah:

1. Koliko Sandokan sličic moramo v povprečju kupiti, da napolnimo prazen Sandokan album?
2. Koliko Sandokan sličic moramo v povprečju kupiti, da bomo dobili 380 različnih sličic?
3. V Sandokan albumu imamo že 380 različnih sličic. Koliko jih moramo v povprečju še kupiti, da dobimo še manjkajočih 20 sličic in napolnimo album?
4. Recimo, da gre v album 100 različnih sličic. Koliko sličic moramo v povprečju kupiti, da ga napolnimo?
5. Kolikokrat v povprečju moramo vreči kocko, da bomo vrgli vsako cifro vsaj enkrat?

Vladimir Batagelj