

Računanje temperaturnih napetosti v elastičnem področju

UDK: 531:536.4:517.2

ASM/SLA:U10, Q25p, U4e

F. Grešovnik

Obravnavane so osnove elastomehanike. Deformacijski tenzor je razširjen za primer, ko je prisotno tudi temperaturno raztezanje materiala. Na tej osnovi je prikazana splošna linearna zveza med napetostmi in deformacijami. Skupaj z gibalno enačbo za elastični kontinuum služi za izračun temperaturnih napetosti. Ustrezne diferencialne enačbe so prikazane tudi v cilindričnih in krogelnih koordinatah. Med praktičnimi primeri je obravnavano nastajanje napetosti zaradi osno simetričnega spreminjanja temperature valjastega telesa, napetosti v primeru navlačenja plašča na os valja ter nastajanje napetosti zaradi središčno simetričnega spreminjanja temperature krogle.

1. UVOD

V materialu nastanejo napetosti zaradi zunanjih mehanskih vplivov, temperaturnih gradientov ter gravitacijskih in elektromagnetnih polj. Prva dva vpliva sta pogosto vzrok za nastanek razpok oziroma za zlome.

V tem članku je obravnavano nastajanje napetosti zaradi temperaturnih gradientov. Obdelani so samo primeri, ko se material obnaša čisto elastično, natančneje rečeno, ko velja med napetostmi in deformacijami linearna zveza. Zunanji mehanski vplivi niso upoštevani, vendar je iz rešenih primerov razvidno, kako bi lahko upoštevali na primer hidrostatski tlak.

Uporabljena je analitična metoda reševanja diferencialnih enačb. V zadnjih letih se na tem področju vedno bolj uveljavljata numerično reševanje diferencialnih enačb in metoda končnih elementov¹. Poudariti je treba, da imata ti dve metodi očitno prednost le v primeru, če imamo na razpolago dovolj eksperimentalnih podatkov o lastnostih materiala. Za hitre ocene napetosti v materialu pa so rezultati analitične metode vsekakor ugodnejši, ker so pregledni in omogočajo hitre prilagoditve konkretnim razmeram. Seveda pa se moramo tu omejiti le na najpreprostejše geometrijske oblike preizkušancev.

2. OSNOVE ELASTOMEHANIKE

Napetostni tenzor

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix} \quad (1)$$

opisuje stanje napetosti, to je ploščinsko porazdeljenih sil, v elastičnem kontinuumu. Silo na enoto ploskve, ki je pravokotna na koordinato x_i ($i = 1, 2, 3$) s smernim vektorjem e_i , dobimo s pomočjo komponent tega tenzorja takole:

$$p_i = \sum_{k=1}^3 p_{ik} e_k \quad (2)$$

Silo na enoto ploskve, ki je pravokotna na poljubno smer n , dobimo po obrazcu

$$p_n = \sum_{i=1}^3 p_i \cos \alpha(n, e_i) = \sum_{i=1}^3 p_i \alpha_{ni} \quad (3)$$

Na osnovi (2) in (3) lahko hitro pokažemo, da se pri transformaciji koordinatnega sistema napetostni tenzor pretvori takole:

$$p_{nr} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \alpha_{ni} \alpha_{rj} p_{ij}, \quad (4)$$

kar je osnovna značilnost tenzorjev drugega reda. S pomočjo enačbe (4) poiščemo glavne smeri, to je tisti koordinatni sistem, v katerem so normalne napetosti p_{nn} ekstremne. Izkaže se, da so takrat tangencialne napetosti p_{nr} ($r \neq n$) enake nič.

Iz gibalnih enačb za kontinuum sledi, da je tenzor \mathbf{P} simetričen, torej

$$P_{ij} = P_{ji}$$

Sled tenzorja \mathbf{P}

$$\text{Tr } \mathbf{P} = \sum_{i=1}^3 p_{ii} = I_1$$

se pri transformaciji koordinatnega sistema ne spreminja.

Pod vplivom sil se elastični kontinuum deformira, kar pomeni, da se spreminjajo razdalje med točkami in koti med zveznicami točk (sl. 1). Omenjene spremembe popišemo z **deformacijskim tenzorjem**

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{bmatrix} \quad (5)$$

Nazorni pomen komponent tega tenzorja je takle:

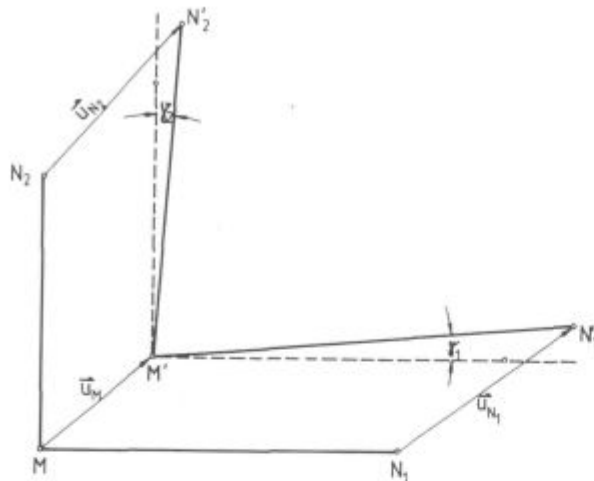
$$\gamma_{11} = 2 \epsilon_{11} = 2 \frac{\overline{M'N'_1} - \overline{MN_1}}{\overline{MN_1}},$$

$\gamma_{12} = \gamma_{21}$ in analogno za ostale.

S pomočjo premikov točk u pa se komponente γ_{ij} izračunajo takole:

$$\gamma_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \quad (6)$$

Iz (6) takoj sledi, da je $\mathbf{\Gamma}$ simetrični tenzor. Pri transformaciji koordinatnega sistema se pretvori podobno,



Slika 1
Spremembe pri deformaciji elastičnega kontinuuma
Fig. 1
Changes in deformation of elastic continuum

kot kaže obrazec (4). Pri tem se spet sled tenzorja ne spremeni. Sled deformacijskega tenzorja ima nazoren pomen; enak je dvakratni volumski dilataciji.

$$\text{Tr } \Gamma = \sum_{i=1}^3 \gamma_{ii} = 2\varepsilon_v = 2 \frac{V' - V}{V}$$

Enoosni natezni preizkus (smer obremenjevanja: e_1) izotropnega materiala pokaže pri majhnih napetostih naslednje zveze med napetostimi in deformacijami:

$$E \frac{\gamma_{11}}{2} = p_{11}, \quad (7)$$

pri čemer je E Youngov modul (modul elastičnosti). Preizkušane se deformira tudi v prečni smeri:

$$E \frac{\gamma_{22}}{2} = E \frac{\gamma_{33}}{2} = -\frac{p_{11}}{m} = -\nu p_{11} \quad (8)$$

m imenujemo Poissonova konstanta, ν pa Poissonovo število. Iz (7) in (8) sklepamo, da pri večosni obremenitvi velja zveza:

$$\frac{\gamma_{11}}{2} = \frac{p_{11}}{E} - \nu \frac{p_{22}}{E} - \nu \frac{p_{33}}{E}$$

oziroma

$$E \frac{\gamma_{11}}{2} = (1 + \nu)p_{11} - \nu I_1,$$

splošno pa za vsako glavno smer:

$$E \frac{\gamma_{ii}}{2} = (1 + \nu)p_{ii} - \nu I_1 \quad (9)$$

S transformacijsko formulo lahko izrazimo komponente deformacijskega tenzorja v poljubnem koordinatnem sistemu:

$$\gamma_{mn} = \frac{2}{E} [(1 + \nu)p_{mn} - \nu I_1 \delta_{mn}], \quad (10)$$

ker je γ_{mn} Kroneckerjev simbol ($= 1$, če je $m = n$, sicer je 0).

Enačbo (10) lahko tudi obrnemo in izrazimo komponente napetostnega tenzorja kot linearno funkcijo komponent deformacijskega tenzorja

$$p_{mn} = \frac{E}{1 + \nu} \left(\frac{\gamma_{mn}}{2} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \varepsilon_v \delta_{mn} \right). \quad (11)$$

3. OSNOVNE ENAČBE ZA IZRAČUN TEMPERATURNIH NAPETOSTI V ELASTIČNEM PODROČJU

Če homogeno in izotropno telo enakomerno segreje ali ohladimo od poljubne izhodiščne temperature na neko drugo temperaturo, so temperaturni specifični raztezki ε_T v vseh smereh enako veliki

$$\varepsilon_T = \alpha T \quad (12)$$

Pri tem je α temperaturni koeficient dolžinskega raztežka, T pa sprememba temperature. Ustrezen deformacijski tenzor je torej izotropen in se glasi:

$$\Gamma_T = \begin{bmatrix} 2\alpha T & 0 & 0 \\ 0 & 2\alpha T & 0 \\ 0 & 0 & 2\alpha T \end{bmatrix} \quad (13)$$

Če preprečimo prosto temperaturno raztezanje z zunanjim vpetjem ali okoliškimi območji v telesu (z drugačno temperaturo), nastopijo temperaturne napetosti, ki ustrezajo elastičnim deformacijam. Celotni raztezek snovi je sestavljen iz elastičnega raztežka in temperaturne raztežka. Od tod sledi, da se elastični deformacijski tenzor zapiše:

$$\Gamma_{el} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} - 2\alpha T & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} - 2\alpha T & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} - 2\alpha T \end{bmatrix} \quad (14)$$

Pri popolnoma togem vpetju je $\gamma_{mn} \equiv 0$ in je $\Gamma_{el} = -\Gamma_T$. Pri popolnoma neoviranem raztezanju in pri homogenem temperaturnem polju pa so vse komponente tenzorja Γ_{el} enake 0.

Hookeov zakon (11) se ob prisotnosti temperaturnih raztezkov glasi:

$$p_{mn} = 2G \left(\frac{\gamma_{mn}}{2} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \varepsilon_v \delta_{mn} - \frac{1 + \nu}{1 - 2\nu} \alpha T \delta_{mn} \right) \quad (15)$$

Vpeljali smo strižni modul G , ki je z modulom elastičnosti povezan z enačbo

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (16)$$

V primeru, ko lahko volumske sile zanemarimo, se gibalna enačba za elastični kontinuum zapiše:

$$\sum_{k=1}^3 \frac{\partial p_{ki}}{\partial x_k} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}; \quad (17)$$

ρ je gostota snovi, t pa čas.

Če vstavimo Hookeovo enačbo (15) v gibalno enačbo (17) in pri tem upoštevamo (6), dobimo:

$$\Delta u_i + \frac{1}{1 - 2\nu} \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial x_i} - \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{2(1 + \nu)}{1 - 2\nu} \frac{\partial(\alpha T)}{\partial x_i} \quad (18)$$

Δ je Laplaceov operator $\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$.

V cilindričnih koordinatah se te enačbe zapišejo za osnosimetrični primer takole:

— gibalna enačba za radialno smer:

$$\frac{\partial p_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r}(p_{rr} - p_{\theta\theta}) = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (19 a)$$

— gibalna enačba za aksialno smer:

$$\frac{\partial p_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} + \frac{p_{rz}}{r} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (19 b)$$

— komponente deformacijskega tenzorja:

$$\gamma_{rr} = 2 \frac{\partial u}{\partial r}, \gamma_{\varphi\varphi} = 2 \frac{u}{r}, \gamma_{zz} = 2 \frac{\partial w}{\partial z}, \gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}, \quad (20)$$

ostale so 0

— volumska dilatacija:

$$\epsilon_v = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (20 \text{ a})$$

Namesto enačbe (18) imamo:

$$\Delta u - \frac{u}{r^2} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \epsilon_v}{\partial r} - \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial(\alpha T)}{\partial r} \quad (21 \text{ a})$$

$$\Delta w + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \epsilon_v}{\partial z} - \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial(\alpha T)}{\partial z} \quad (21 \text{ b})$$

Laplaceov operator ima obliko:

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (22)$$

V krogelnih koordinatah se enačbe zapišejo za primer simetrije glede na koordinatno izhodišče takole:

— gibalna enačba za radialno smer:

$$\frac{\partial p_{rr}}{\partial r} + \frac{2}{r} (p_{rr} - p_{\varphi\varphi}) = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad p_{\theta\theta} = p_{\varphi\varphi} \quad (23)$$

— komponente deformacijskega tenzorja:

$$\gamma_{rr} = 2 \frac{\partial u}{\partial r}, \gamma_{\varphi\varphi} = \gamma_{\theta\theta} = 2 \frac{u}{r}, \quad (24)$$

ostale so 0

— volumska dilatacija:

$$\epsilon_v = \frac{\partial u}{\partial r} + 2 \frac{u}{r} \quad (24 \text{ a})$$

Namesto enačbe (18) imamo

$$\Delta u - \frac{2u}{r^2} - \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial(\alpha T)}{\partial r} \quad (25)$$

Laplaceov operator pa se glasi:

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right). \quad (26)$$

4. PRIMERI

Reševanje splošnega sistema parcialnih diferencialnih enačb (18), (21 a) in (21 b) ter (25) je zahtevna naloga. Poenostavitev dobimo v kvazistacionarnem primeru, ko je pospešek $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ tako majhen, da ga lahko zanemarimo. Dodatno poenostavitev dobimo, če lahko privzamemo ravninsko stanje deformacij.

Osnosimetrično spreminjanje temperature valjastega telesa

Dolg votel valj z notranjim polmerom R_n in zunanji polmerom R_z naj bo ogrevan ali ohlajen tako, da je temperatura odvisna le od polmera in časa, vendar naj velja kvazistacionarni približek. Obe osnovni ploskvi naj bosta togo vpeti.

Pri teh pogojih je $\gamma_{zz} = 0$ in se vse napetosti izražajo s pomiki u v radialni smeri. Ker so tudi v cilindričnem koordinatnem sistemu posamezne koordinatne smeri

med seboj pravokotne, lahko uporabimo enačbo (15) in dobimo:

$$p_{rr} = \frac{2G}{1-2\nu} \left[(1-\nu) \frac{\partial u}{\partial r} + \nu \frac{u}{r} \right] - \frac{E\alpha T}{1-2\nu} \quad (27)$$

$$p_{\varphi\varphi} = \frac{2G}{1-2\nu} \left[(1-\nu) \frac{u}{r} + \nu \frac{\partial u}{\partial r} \right] - \frac{E\alpha T}{1-2\nu} \quad (28)$$

$$p_{zz} = \frac{2G}{1-2\nu} \nu \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) - \frac{E\alpha T}{1-2\nu} \equiv \nu(p_{rr} + p_{\varphi\varphi}) - E\alpha T. \quad (29)$$

Enačba (21) se poenostavi v obliko

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} = \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial T}{\partial r}. \quad (30)$$

Leva stran te enačbe se da zapisati v obliki

$$\frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (ru) \right] \right\}$$

in je zato mogoče diferencialno enačbo (20) rešiti z integriranjem. Splošna rešitev je

$$u = C_1 r + \frac{C_2}{r} + \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\alpha}{r} \int_{R_n}^r x T(x, t) dx \quad (31)$$

C_1 in C_2 sta integracijski konstanti. Določimo ju tako, da na notranji in zunanji površini postavimo $p_{rr} = 0$. Iz enačbe (27) sledi, da mora biti izpolnjena enačba

$$C_1 - (1-2\nu) \frac{C_2}{r^2} = \frac{1+\nu}{1-\nu} (1-2\nu) \frac{\alpha}{r^2} \int_{R_n}^r x T(x, t) dx$$

za $r = R_n$ in $r = R_z$. Od tod sledi

$$C_1 = \frac{1+\nu}{1-\nu} (1-2\nu) \frac{\alpha}{2} \bar{T}(R_z, t); \quad C_2 = \frac{R_n^2}{1-2\nu} C_1, \quad (32)$$

pri čemer je

$$\bar{T}(r, t) = \frac{2}{r^2 - R_n^2} \int_{R_n}^r x T(x, t) dx \quad (33)$$

povprečna temperatura (poprečenje po ploskvi) med R_n in r .

S pomočjo enačb (27), (28) in (29) potem dobimo:

$$p_{rr} = \frac{E\alpha}{2(1-\nu)} \left(1 - \frac{R_n^2}{r^2} \right) [\bar{T}(R_z, t) - \bar{T}(r, t)] \quad (34)$$

$$p_{\varphi\varphi} = \frac{E\alpha}{2(1-\nu)} \left[\left(1 + \frac{R_n^2}{r^2} \right) \bar{T}(R_z, t) + \left(1 - \frac{R_n^2}{r^2} \right) \bar{T}(r, t) - 2T(r, t) \right] \quad (35)$$

$$p_{zz} = \frac{E\alpha}{1-\nu} \left[\nu \bar{T}(R_z, t) - T(r, t) \right] \quad (36)$$

Če je valj poln, je $R_n = 0$ in $C_2 = 0$, pa dobimo

$$p_{rr} = \frac{E\alpha}{2(1-\nu)} [\bar{T}(R_z, t) - \bar{T}(r, t)] \quad (37)$$

$$p_{\varphi\varphi} = \frac{E\alpha}{2(1-\nu)} [\bar{T}(R_z, t) + \bar{T}(r, t) - 2T(r, t)] \quad (38)$$

$$p_{zz} = \frac{E\alpha}{1-\nu} \left[\nu \bar{T}(R_z, t) - T(r, t) \right] \quad (39)$$

Če ima potek temperature v odvisnosti od polmera obliko kvadratne parabole (ta predpostavka je dokaj dobro izpolnjena v trenutku, ko je razlika med temperaturo na površini in v sredini velja največja), lahko zapišemo

$$T = ar^2 + b, \quad (40)$$

pri čemer je $a = \frac{T_z + T_n}{R_z^2}$, $b = T_n$ (T_n je temperatura v sredini valja, T_z pa na površini valja).

Povprečni temperaturi $\bar{T}(r, t)$ in $\bar{T}(R_z, t)$ izračunamo po prilagojenem obrazcu (33) in dobimo

$$\bar{T}(r, t) = \frac{T_z - T_n}{2R_z^2} r^2 + T_n \quad (41)$$

$$\bar{T}(R_z, t) = \frac{T_n + T_z}{2} \quad (42)$$

Če ta dva izraza vstavimo v enačbe (37), (38) in (39), dobimo

$$p_{rr} = \frac{E\alpha(T_z - T_n)}{4(1-\nu)} \left[1 - \frac{r^2}{R_z^2} \right] \quad (43)$$

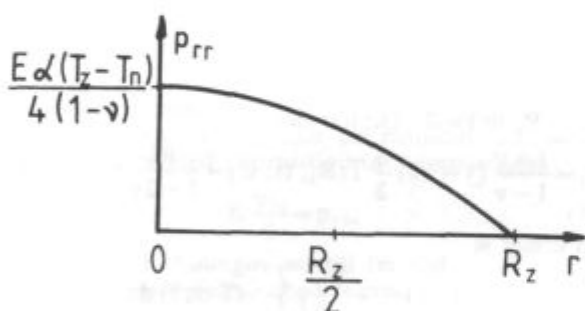
$$p_{\varphi\varphi} = \frac{E\alpha(T_z - T_n)}{4(1-\nu)} \left[1 - 3\frac{r^2}{R_z^2} \right] \quad (44)$$

in

$$p_{zz} = \frac{E\alpha}{1-\nu} \left[\nu \frac{T_n + T_z}{2} - T_n - \frac{T_z - T_n}{R_z^2} r^2 \right] \quad (45)$$

Če je $T_n = T_z$, preide enačba (45) v znani izraz $p_{zz} = -E\alpha T_n$. Negativne napetosti imajo tlačni značaj, pozitivne pa natezni značaj.

Poteka p_{rr} in $p_{\varphi\varphi}$ v odvisnosti od polmera sta prikazana na sliki 2 in 3.

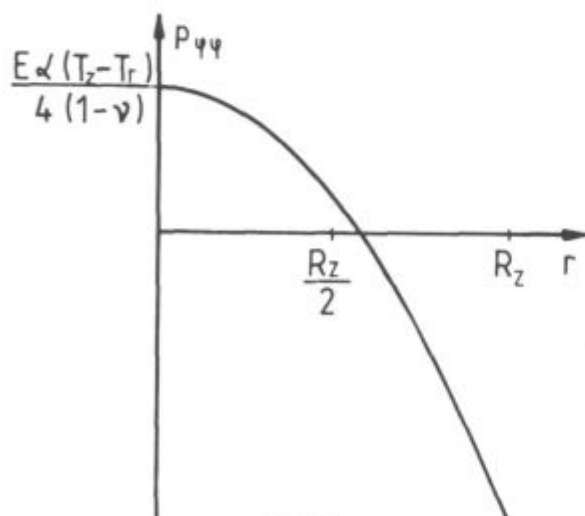


Slika 2

Potek radialne normalne napetosti p_{rr} v odvisnosti od polmera

Fig. 2

Course of radial normal stress p_{rr} as a function of radius



Slika 3

Potek cirkularne normalne napetosti $p_{\varphi\varphi}$ v odvisnosti od polmera

Fig. 3

Course of circular normal stress $p_{\varphi\varphi}$ as a function of radius

Če sta obe osnovni ploskvi valja prosti, lahko dobimo rešitev tako, da prištejemo k rešitvi (36), (39) ali (45) po preseku konstantno aksialno napetost $(p_{zz})_0$, ki mora biti tolikšna, da se rezultirajoča aksialna sila uniči². Temu pogoju ustreza negativna povprečna vrednost napetosti p_{zz} po enačbah (36), (39) ali (45).

$$(p_{zz})_0 = \bar{p}_{zz} = -\frac{2}{R_z^2} \int_0^{R_z} r p_{zz}(r) dr \quad (46)$$

Če se omejimo na rezultat enačbe (45), dobimo

$$(p_{zz})_0 = E\alpha \frac{T_z + T_n}{2}$$

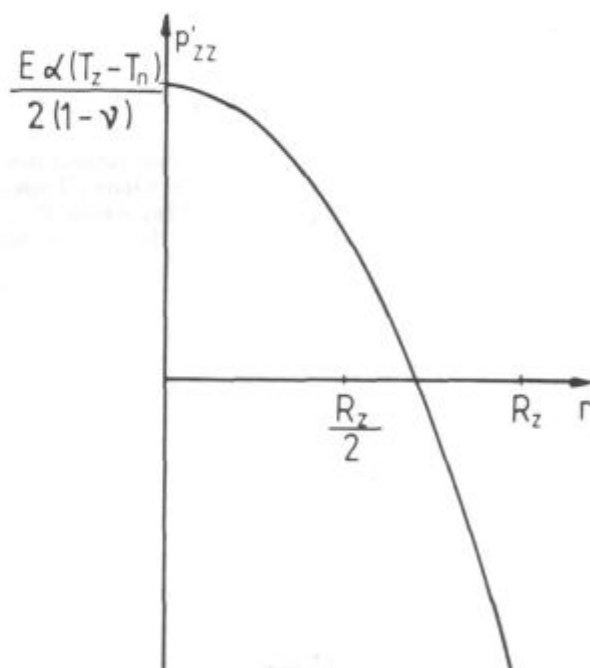
in je pri prostih osnovnih ploskvah valja odvisnost aksialne normalne napetosti p_{zz} od polmera takale:

$$p_{zz} = \frac{E\alpha(T_z - T_n)}{2(1-\nu)} \left(1 - 2\frac{r^2}{R_z^2} \right) \quad (47)$$

Na osnovi enačb (43) in (44) vidimo, da je

$$p_{zz} = p_{rr} + p_{\varphi\varphi}$$

Radialna in cirkularna napetost zaradi tega postopka nista prizadeti, rezultati pa po St.-Venantovem principu veljajo le v dovolj veliki oddaljenosti od obeh osnovnih ploskev. Potek napetosti p_{zz} v odvisnosti od polmera je prikazan na sliki 4.



Slika 4

Potek aksialne normalne napetosti p_{zz} v odvisnosti od polmera

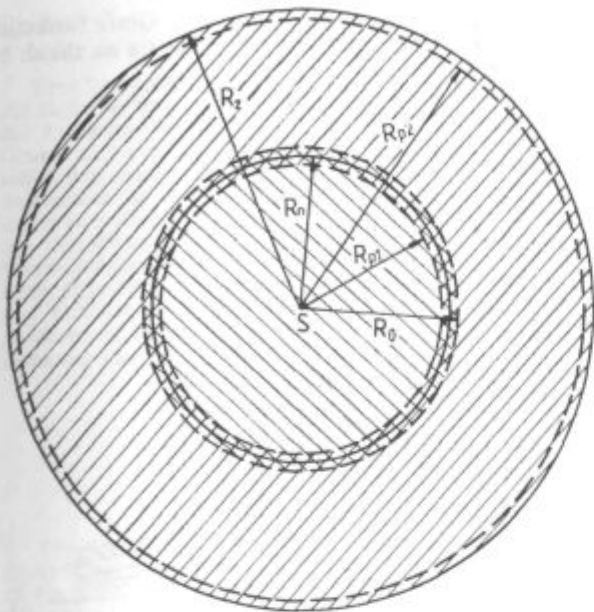
Fig. 4

Course of axial normal stress p_{zz} as a function of radius

Navlačenje plašča na os

Na os navlečemo plašč valja. Pri tem naj bo polmer osi za ΔR večji, kot je notranji polmer plašča (slika 5). Kolikšne napetosti pri tem nastanejo?

Nalogo rešimo s pomočjo rezultatov v 1. primeru. Če ni temperaturnih razlik, odpadejo v enačbah (27), (28), (29) in (30) vsi členi, ki vsebujejo temperaturo. Zaradi tega se pomiki točk v radialni smeri zapišejo za plašč



Slika 5
Spremembe dimenzij po navlačenju plašča na os valja
Fig. 5
Dimensional changes in pulling a casing on a cylindrical axis

za os pa
$$u = C_1 r + \frac{C_2}{r}, \quad (48)$$

$$u' = C_1' r \quad (49)$$

Integracijske konstante določimo iz naslednjih treh pogojev:

a) pri $r = R_n: u - u' = R_n - R_{p1} = \Delta R$

b) pri $r = R_n: (p_{rr})_{os} = (p_{rr})_{pl}$

c) pri $r = R_2: (p_{rr})_{pl} = 0$

Ob privzetku, da imata os in plašč enake elastične lastnosti, dobimo

$$C_1' = (1 - 2\nu) \frac{R_n \Delta R}{2(1 - \nu)} \left(\frac{1}{R_2^2} - \frac{1}{R_n^2} \right),$$

$$C_1 = (1 - 2\nu) \frac{R_n \Delta R}{2R_2^2 (1 - \nu)}, \quad C_2 = \frac{R_n \Delta R}{2(1 - \nu)}$$

Sledijo enačbe za normalne napetosti - v osi

$$\left. \begin{aligned} p_{rr} &= G \frac{R_n \Delta R}{1 - \nu} \left(\frac{1}{R_2^2} - \frac{1}{R_n^2} \right) = p_{\phi\phi} \\ p_{zz} &= 2G \frac{\nu}{1 - \nu} R_n \Delta R \left(\frac{1}{R_2^2} - \frac{1}{R_n^2} \right), \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

če sta osnovni ploskvi toga vpeti - v plašču

$$\left. \begin{aligned} p_{rr} &= G \frac{R_n \Delta R}{1 - \nu} \left(\frac{1}{R_2^2} - \frac{1}{r^2} \right), \\ p_{\phi\phi} &= G \frac{R_n \Delta R}{1 - \nu} \left(\frac{1}{R_2^2} + \frac{1}{r^2} \right), \end{aligned} \right\}$$

$$p_{zz} = 2G \frac{\nu}{1 - \nu} \frac{R_n \Delta R}{R_2^2},$$

če sta obe osnovni ploskvi toga vpeti.

Iz (50) in (51) je razvidno, da imajo radialne napetosti povsod tlačni značaj, cirkularne in aksialne napetosti pa imajo v osi tlačni značaj, v plašču pa natezni značaj. V osi so vse napetosti neodvisne od kraja, v plašču pa to velja le za aksialno napetost. Če sta obe osnovni ploskvi prosti, ravnamo tako, kot je opisano v 1. primeru in so aksialne napetosti identično enake 0. Najbolj kritične so cirkularne napetosti v plašču neposredno ob stiku z osjo. Od tod dobimo oceno

$$\Delta R < \frac{\sigma_{dop} (1 - \nu)}{G R_n \left(\frac{1}{R_2^2} + \frac{1}{R_n^2} \right)} \quad (52)$$

Navlačenje izvedemo tako, da plašč segrejemo za

$$\Delta T > \frac{\Delta R}{\alpha R_n} \quad (53)$$

Če plašč navlečemo na cev, se radialni pomiki točk v cevi zapišejo

$$u' = C_1' r + C_2' / r$$

in je zato potreben še robni pogoj ob notranji površini cevi

d) za $r = R_{nc}: p_{rr} = p_{os}$,

sicer je račun podoben kot zgoraj.

Središčno simetrično spreminjanje temperature krogle

Polna krogla s polmerom R naj ima glede na središče simetrično, sicer pa poljubno porazdelitev temperature $T(r, t)$. Velja naj kvazistacionarni približek. Zanimajo nas napetosti v krogli, če je njena površina prosta. Enačba (25) se poenostavi v

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2u}{r^2} = \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \frac{\partial(\alpha T)}{\partial r} \quad (54)$$

Levo stran te enačbe lahko zapišemo

$$\frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r^2 u) \right] \right\}$$

in se zato diferencialna enačba (54) da rešiti z zaporednim integriranjem. Splošna rešitev je

$$u = \frac{C_1 r}{3} + \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \alpha \frac{1}{r^2} \int_0^r x^2 T(x, t) dx \quad (55)$$

Integracijsko konstanto C_1 določimo iz pogoja $(p_{rr})_{r=R} = 0$, pri tem pa poiščemo p_{rr} z uporabo enačbe (15)

$$p_{rr} = 2G \left(\frac{\gamma_{rr}}{2} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \epsilon_v - \frac{1 + \nu}{1 - 2\nu} \alpha T \right); \quad (56)$$

γ_{rr} in ϵ_v sta določena z enačbama (24) in (24 a). Dobimo

$$C_1 = 2 \frac{1 - 2\nu}{1 - \nu} \alpha \bar{T}(R, t), \quad (57)$$

pri čemer je

$$\bar{T}(R, t) = \frac{3}{R^3} \int_0^R x^2 T(x, t) dx \quad (58)$$

Končni rezultat za p_{rr} je

$$p_{rr} = \frac{2}{3} \frac{E \alpha}{1 - \nu} [\bar{T}(R, t) - \bar{T}(r, t)] \quad (59)$$

(51) Na podoben način dobimo

$$\begin{aligned} p_{\phi\phi} &= \frac{1}{3} \frac{E \alpha}{1 - \nu} 2 [\bar{T}(R, t) + \bar{T}(r, t) - 3 T(r, t)] = \\ &= p_{\phi\phi} \end{aligned} \quad (60)$$

Če poznamo funkcijo $T(r, t)$, lahko izračunamo p_{rr} in $p_{\theta\theta}$. $T(r, t)$ je mogoče v nekaterih primerih tudi izračunati z reševanjem difuzijske enačbe za prevajanje toplote

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \Delta T, \quad a = \frac{\lambda}{\rho c} \quad (61)$$

λ je toplotna prevodnost, c pa specifična toplota materiala, po katerem se širi toplota. V primeru krogelne simetrije temperaturnega polja se enačba (61) zapiše:

$$\frac{a}{r} \frac{\partial^2(r T)}{\partial r^2} = \frac{\partial T}{\partial t} \quad (62)$$

To enačbo je mogoče analitično rešiti za tak idealiziran primer: krogla z začetno enakomerno temperaturo T_0 se ohlaja v sredstvu s temperaturo 0 (temperaturno skalo si mislimo prilagojeno tako, da njeno izhodišče sovpada s temperaturo hladilnega sredstva). Toplotna prestopnost med kroglo in hladilnim sredstvom naj bo neskončno velika, kar pomeni, da površina krogle takoj na začetku ohlajanja doseže temperaturo kopeli.

Enačbo (62) rešimo z ločitvijo spremenljivk, to je z nastavkom

$$\begin{aligned} T &= P(t) Q(r) \\ P(t) &= e^{-\beta_n t} \end{aligned} \quad (63)$$

Za $Q(r)$ dobimo potem diferencialno enačbo

$$\frac{\partial^2(r Q)}{\partial r^2} + \frac{\beta_n}{a} (r Q) = 0 \quad (64)$$

Njena splošna rešitev je

$$Q = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{r} \sin\left(\sqrt{\frac{\beta_n}{a}} r\right).$$

Tu je že upoštevana zahteva, da mora biti rešitev končna pri $r=0$. Pri $r=R$ mora biti $Q=0$, iz česar sledi

$$\sqrt{\frac{\beta_n}{a}} R = n\pi, \text{ oziroma } \sqrt{\frac{\beta_n}{a}} = \frac{n\pi}{R} \quad (65)$$

Koeficiente določimo tako, da je izpolnjen začetni pogoj

$$T_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{r} \sin \frac{n\pi}{R} r \quad (66)$$

Če enačbo (66) pomnožimo z $r \sin\left(\frac{n\pi}{R} r\right) dr$ in integriramo od $r=0$ do $r=R$, sledi zaradi ortonormiranosti trigonometričnih funkcij

$$A_n = \frac{2T_0 R}{n\pi} (-1)^{n+1}. \quad (67)$$

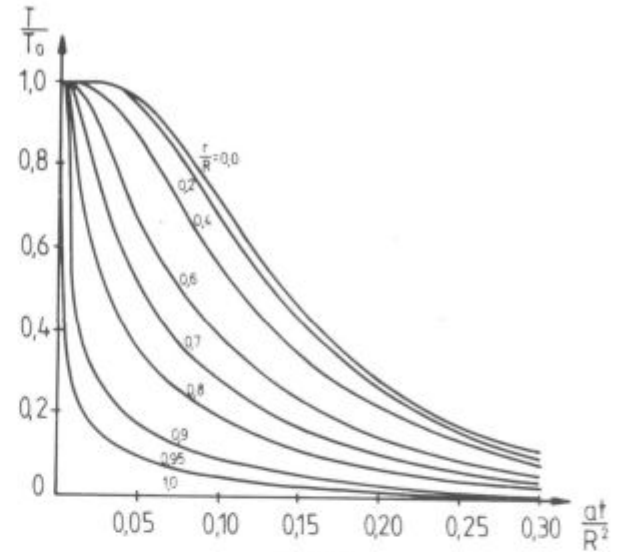
Končna rešitev enačbe (62) je torej

$$T(r, t) = \frac{2T_0 R}{\pi r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \frac{n\pi r}{R} e^{-\alpha n^2 \pi^2 t / R^2} \quad (68)$$

Ta vrsta je enakomerno konvergentna tako glede spremenljivke t kot glede spremenljivke r . Po obrazcu (58) dobimo iz enačbe (68)

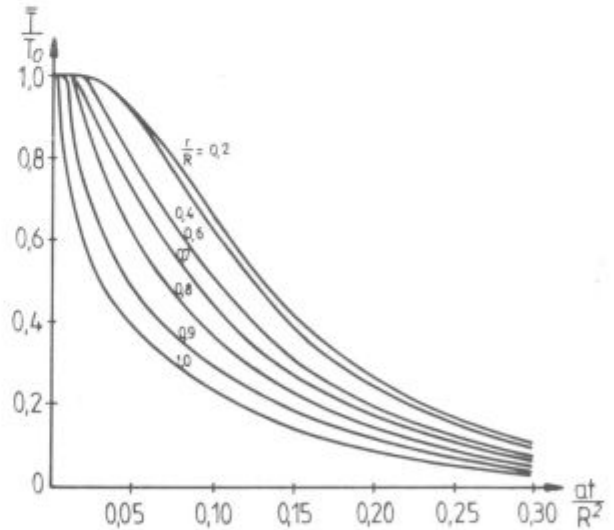
$$\begin{aligned} \bar{T}(r, t) &= 6 T_0 \left(\frac{R}{\pi r}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \left(\cos \frac{n\pi r}{R} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{R}{n\pi r} \sin \frac{n\pi r}{R}\right) e^{-\alpha n^2 \pi^2 t / R^2} \end{aligned} \quad (69)$$

S tem lahko izračunamo p_{rr} in $p_{\theta\theta} = p_{\phi\phi}$. Grafa funkcije $T(r, t)$ in $\bar{T}(r, t)$ v brezdimenzijski obliki sta na slikah 6 in 7.



Slika 6
Potek temperature krogelne površine med ohlajanjem v odvisnosti od kraja in časa (v brezdimenzijski obliki)

Fig. 6
Temperature changes in a sphere during cooling as a function of position and time (in dimensionless form)



Slika 7
Potek povprečne temperature notranjosti krogelne površine med ohlajanjem v odvisnosti od časa (v brezdimenzijski obliki)

Fig. 7
Change of the average temperature in the interior of the sphere during cooling, depending on time (in dimensionless form)

Literatura

1. F. Sturm in R. Harreither: Berechnung von Wärmespannungen mit der Methode der finiten Elemente, Arch. Eisenhüttenwes. 47 (1976), št. 6, str. 357
2. H. Parkus: Stationäre Wärmespannungen, Springer Verlag, Dunaj 1959

ZUSAMMENFASSUNG

Eine Beschreibung der Spannungen im elastischen Bereich mit Hilfe des Spannungstensors wird gegeben. Die Bedeutung der Komponenten des Verformungstensors wird gezeigt. Auf Grund der experimentell festgestellten Verbindungen zwischen den Spannungen und Verformungen bei einachsiger Zugversuch ist die Verbindung zwischen den Komponenten dieser zwei Tensoren ausgeführt worden. Mit der Erweiterung des Verformungstensors für den Fall wo auch eine isotrope Temperaturexpansion des Werkstoffes anwesend ist wird noch allgemeine lineare Verbindung zwischen Spannungen und Verformungen angegeben. Zusammen mit der Bewegungsgleichung für den elastischen Kontinuum dient diese für die Berechnung der Temperaturspannungen. Entsprechende Diffe-

renzialgleichungen werden auch in zylindrischen und Kugelkoordinaten angegeben. Unter den praktischen Beispielen wird die Entstehung der Spannungen wegen der achsensymmetrischen Temperaturänderung des zylindrischen Körpers, Spannungen im Falle des Aufziehens eines Mantels auf die Achse des Zylinders, und die Entstehung der Spannungen wegen der vom Mittelpunkt ausgehenden symmetrischen Temperaturänderung einer Kugel. Die analytische Methode ist für die Lösung der Differenzialgleichungen angewendet worden. Äußere mechanische Einflüsse werden nicht berücksichtigt, jedoch ist aus den gelösten Beispielen zu entnehmen wie zum Beispiel hydrostatischer Druck berücksichtigt werden konnte.

SUMMARY

The description of stresses in an elastic continuum by a stress tensor is presented. The significance of the components of the strain tensor is also given. Based on the experimentally determined correlations between the stresses and strains at uniaxial tensile test the correlation between the components of the two tensors was deduced. By extending the strain tensor on the case where also isotropical temperature expansion of material is present, even a more general linear correlation between the stresses and the strains is given. Together with the motive equation for the elastic continuum it can be applied in calculating the temperature stresses. Corresponding differen-

tial equations are given also for cylindrical and spherical coordinates. As practical examples the appearance of stresses due to axially symmetric variation of temperature in a cylinder, the stresses appearing in pulling-on a casing over a cylindrical axis, and the appearance of stresses due to centre symmetrical variation of temperature in a sphere were calculated. Analytical method for solving differential equations was applied. External mechanical influences are not taken in account, but the solved examples show how e. g. hydrostatic pressure could be taken in account.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведено описание напряжения в эластичном континууме при помощи напряжения упругости. Рассмотрено значение компонент деформационной упругости. На основании экспериментально установленной связи между напряжением и деформацией при одноосевом натяжном опыте выведена связь между компонентами этих двух упругостей.

С расширением деформационной упругости, нпр. когда присутствует также изотропно температурное растяжение материала, приведена ещё более в общем виде линейная связь между напряжением и деформацией. Вместе с движущим уравнением для эластичного континуума служит для вычисления температурных напряжений.

Соответственные дифференциальные уравнения при-

ведены также в форме цилиндрических и шарообразных координат.

Между практическими примерами рассматривается появление напряжения вследствие осесимметричного изменения температуры цилиндрического тела, напряжения на примере натягивания корпуса на ось вала, также наступления напряжений вследствие центрально симметричного изменения температуры шара.

Употреблён аналитический метод решения дифференциальных уравнений. Внешние механические влияния не были приняты во внимание, хотя из разрешённых примеров можно видеть, что не представляло бы препятствия, если бы, например, учитывали гидроstaticческое давление.