ZNAČILNE TOČKE TRIKOTNIKA KOT FUNKCIJE

BOJAN HVALA

Fakulteta za naravoslovje in matematiko
Univerza v Mariboru

Math. Subj. Class. (2010): 51M05; 51A20

Kimberlingova enciklopedija značilnih točk trikotnika vsebuje že več kot 5600 točk. V članku definiramo pojem značilne točke trikotnika, kot je to storil Kimberling, in spoznamo nekaj z njimi povezanih zanimivosti.

TRIANGLE CENTERS AS FUNCTIONS

Clark Kimberling's Encyclopedia of triangle centers contains well over 5600 centers. In the article we explain Kimberling's definition of a triangle center and present some related curiosities.

Uvod

Kimberlingovo Enciklopedijo značilnih točk trikotnika [4] uvaja naslednji zapis:

> Pred davnimi časi je nekdo narisal trikotnik in čezenj potegnil tri daljice. Vsaka od njih se je začela v oglišču trikotnika in se končala na sredi nasprotne stranice. Daljice so se sekale v skupni točki. Bil je navdušen in je ponovil poskus, tokrat na trikotniku drugačne oblike. Daljice so se spet sekale. Narisal je še tretji trikotnik, tokrat zelo natančno, z enakim rezultatom. Povedal je svojim prijateljem. Na njihovo presenečenje in navdušenje je do istega pojava prišlo tudi pri njih. Vest o tem se je razširila in čarobnost treh daljic so pripisali delovanju višjih sil. Stoletja so minila, in nekdo je *dokazal*, da se težiščnice v trikotniku res sekajo v točki, ki jo sedaj imenujemo *težišče*. Že v starem veku so našli še druge točke, ki jih danes imenujemo *središče včrtane krožnice*, *središče očrtane krožnice* in *višinska točka*. Spet so minila stoletja, odkrili smo nove in nove tovrstne točke, in pojavila se je definicija *značilne točke trikotnika*. Tako kot pri definiciji zvezne funkcije tudi tej definiciji zadošča neskončno mnogo objektov, od katerih jih bo le končno mnogo kadarkoli našlo svoje mesto v literaturi.

Tekst nas je od začetkov civilizacije v hitrem loku pripeljal do konca 20. stoletja in do glavne teme našega članka – definicije *značilne točke trikotnika*. Ker smo po tem loku zdrveli nekoliko prehitro, zapis osvetlimo s še nekaj dodatnimi informacijami.

Najstarejše starogrške značilne točke trikotnika imajo nekatere preproste geometrijske značilnosti. Središče očrtane krožnice O je enako oddaljeno od vseh treh oglišč trikotnika, središče včrtane krožnice I pa je enako oddaljeno od vseh treh stranic. Če težišče G povežemo z oglišči trikotnika, trikotnik razrežemo na tri ploščinsko enake dele. Najverjetneje je najstarejša značilna točka trikotnika, ki je stari Grki še niso poznali, tako imenovana *Fermatova točka* F_e (*Pierre de Fermat*, 1601–1665). Tudi ta ima lepo geometrijsko značilnost: njene zveznice z oglišči trikotnika razrežejo polni kot pri točki F_e na tri skladne kote po $120°$.

Skoraj 2000 let po Evklidu je bila torej na seznam štirih značilnih točk trikotnika dodana peta točka. 18. stoletje sicer ni prineslo novih točk, je pa Euler ugotovil marsikako zanimivost, povezano z že obstoječimi – med drugim to, da tri od njih ležijo na premici, ki jo danes imenujemo *Eulerjeva premica*. Nove značilne točke trikotnika so se začele pojavljati spet v začetku 19. stoletja. Tako smo v naslednjih desetletjih dobili značilne točke trikotnika, ki so svoja imena dobile po matematikih, kot so *Joseph Diaz Gergonne* (1771–1859), *Jakob Steiner* (1796–1863), *Christian Heinrich von Nagel* (1803–1882), *Emile Lemoine* (1840–1912), *Frank Morley* (1860–1937) itd., pa tudi po nematematikih, kot je to v primeru *prve in druge Napoleonove točke*. Seznam se je z zmernim tempom večal nekako do leta 1980, ko je pojav programov za dinamično geometrijo rojevanje novih značilnih točk izrazito pospešil. V razmerah desetin in stotin novih značilnih točk trikotnika se je pojavila potreba po preciznejšem konceptu in sistematičnejšem pristopu. Zanj se moramo zahvaliti ameriškemu matematiku *Clarku Kimberlingu*.

Ta je pojem *značilne točke trikotnika* (v angleščini *triangle center*) definiral v članku [9] iz leta 1993 in nato idejo razvijal v članku [7]. Leta 1998 je izdal knjigo [8], kjer je pregledno predstavil seznam 400 značilnih točk trikotnika in jih zaporedoma označil z $X(n)$. Kasneje je seznam preselil na splet in nastala je Kimberlingova *Enciklopedija značilnih točk trikotnika* (ETC) [4], ki jo avtor ureja še danes. Število točk se veča (že zdavnaj je preseglo 5600), prav tako pa tudi količina z njimi povezanih podatkov. Spletna stran med drugim ponuja tudi učinkovit sistem, s katerim preverimo, ali je morda točka, na katero smo naleteli sami, že uvrščena na seznam. Ob enciklopediji je Clark Kimberling tudi avtor številnih drugih tehtnih publikacij o tej tematiki.

V tem sestavku bomo spoznali glavno idejo Kimberlingove definicije *značilne točke trikotnika kot funkcije* ter nekaj iz nje izhajajočih dejstev. Ob koncu bomo predstavljena spoznanja komentirali, razmišljanja pa začinili z nekaterimi iskrivimi premisleki ameriškega matematika Douglasa Hofstadterja iz uvoda v Kimberlingovo knjigo [8].

Nekaj tehnične predpriprave

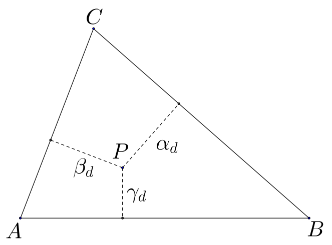
Naj bo vseskozi ABC pozitivno orientiran trikotnik. Dolžine njegovih stranic bomo kot običajno označevali z a, b, c, velikosti notranjih kotov z A, B, C, ploščino pa s S. V nadaljevanju bomo potrebovali trilinearne in baricentrične koordinate v ravnini glede na referenčni trikotnik ABC. Prve so bile v Obzorniku že predstavljene, in sicer v članku [10], druge pa so prvim precej podobne in zanje veljajo tudi podobni rezultati. Zato ponovimo le najnujnejše.

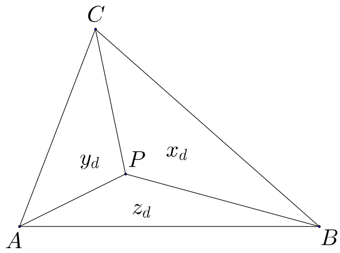
Pri danem trikotniku ABC poljubni točki P v ravnini priredimo trojico števil $\alpha_d, \beta_d, \gamma_d$, ki so predznačene razdalje točke P do nosilk stranic a, b in c. Natančneje: število α_d je enako razdalji točke P do nosilke stranice a s predznakom $+$, če točka leži na istem bregu te nosilke kot oglišče A, ter s predznakom $-$ sicer. Drugi dve števili sta definirani analogno. Trojici $(\alpha_d, \beta_d, \gamma_d)$ rečemo *dejanske trilinearne koordinate* točke P. Točka P natanko določa svoje dejanske trilinearne koordinate in obratno: trojica dejanskih trilinearnih koordinat natanko določa točko P. Pravzaprav je točka P določena že z dvema dejanskima koordinatama: če poznamo npr. α_d in β_d, točko P dobimo kot presečišče dveh vzporednic stranicama a in b na ustrezni razdalji in na ustreznem bregu. Zato je jasno, da dve dejanski trilinearni koordinati določata tretjo. Za točko P znotraj trikotnika ABC je ploščina trikotnika ABC enaka vsoti ploščin trikotnikov ABP, BCP in APC, od koder sledi:

$$a\alpha_d + b\beta_d + c\gamma_d = 2S. \tag{1}$$

Ni težko videti, da ta zveza velja tudi za točke zunaj trikotnika. Zdaj je jasno, kako dve dejanski koordinati določata tretjo. Ta ugotovitev nam omogoča, da lahko namesto z dejanskimi trilinearnimi koordinatami delamo z njihovimi večkratniki. Trojico (α, β, γ) imenujemo *homogene trilinearne koordinate* (ali kar *trilinearne koordinate*) točke P, če obstaja neničelno realno število k, da velja $(\alpha, \beta, \gamma) = k(\alpha_d, \beta_d, \gamma_d)$. Zaradi te definicije homogene trilinearne koordinate označujemo takole: $\alpha : \beta : \gamma$. Iz homogenih trilinearnih koordinat zlahka dobimo dejanske koordinate: te so homogene koordinate, deljene z nekim faktorjem k, ki ga izračunamo iz zveze (1).

Če točki P namesto trojice $(\alpha_d, \beta_d, \gamma_d)$ predznačenih razdalj do nosilk stranic priredimo trojico predznačenih ploščin trikotnikov $((BCP), (CAP), (ABP))$, dobimo *dejanske baricentrične koordinate* točke P, ki jih običajno označujemo (x_d, y_d, z_d). Zveza z dejanskimi trilinearnimi koordinatami je preprosta: $x_d = \frac{1}{2}a\alpha_d$, podobno za preostali koordinati. Enakost (1) tokrat nadomesti še preprostejša zveza $x_d + y_d + z_d = S$. Analogno potem definiramo tudi *(homogene) baricentrične koordinate* $x : y : z$. Omenimo





Slika 1. Trilinearne in baricentrične koordinate.

še, da iz zveze (1) sledi, da za trilinearne koordinate točk v ravnini velja $a\alpha + b\beta + c\gamma \neq 0$, analogno za baricentrične koordinate $x + y + z \neq 0$.

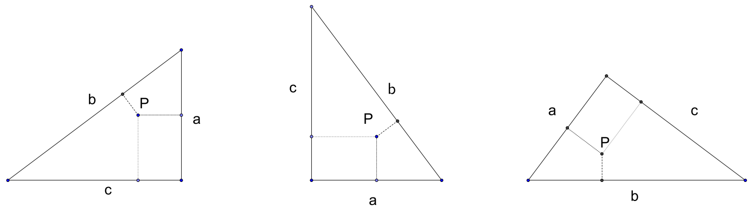
Dilema, ali uporabljati trilinearne ali baricentrične koordinate, je ena od vsakokratnih odločitev pri delu na tem področju matematike. Včasih so bistveno ugodnejše ene, drugič spet druge. Tokratna odločitev je kombinacija obeh. Nekatere sklepe je namreč laže izpeljati, če razmišljamo o razdaljah in ne o ploščinah; zato bomo v začetku uporabljali trilinearne koordinate. Baricentrične koordinate pa tudi imajo svoje prednosti. Ena največjih je preprosto delo z vektorji. Če so namreč $x : y : z$ baricentrične koordinate točke P in so $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{P}$ radij vektorji točk A, B, C in P, potem velja: $\vec{P} = \frac{x}{x+y+z}\,\vec{A} + \frac{y}{x+y+z}\,\vec{B} + \frac{z}{x+y+z}\,\vec{C}$. Od tod je jasno, da je pri delu z vektorji ugodno, če pri računih uporabljamo normirane baricentrične koordinate, torej take, za katere velja $x + y + z = 1$.

Pojem značilne točke trikotnika

Značilna točka trikotnika je predpis, ki vsakemu trikotniku Δ priredi točko P_Δ v ravnini. Točka P_Δ je seveda odvisna od lege trikotnika Δ, zato njeno lego najlaže opišemo z dejanskimi trilinearnimi koordinatami te točke glede na trikotnik Δ, torej $P_\Delta = (\alpha_P, \beta_P, \gamma_P)$. S trojico (a, b, c) dolžin stranic trikotnika Δ je oblika trikotnika določena. Ker je smiselno predpostaviti, da je relativna lega točke P_Δ glede na trikotnik Δ odvisna le od oblike trikotnika, ne pa od njegove lege, lahko dejanske trilinearne koordinate točke P_Δ zapišemo v obliki $(f_d(a, b, c), g_d(a, b, c), h_d(a, b, c))$. Iz tega vidimo, da lahko značilno točko trikotnika razumemo kot preslikavo

$$(a, b, c) \mapsto (f_d(a, b, c), g_d(a, b, c), h_d(a, b, c)),$$

ki trojici dolžin stranic trikotnika priredi dejanske (zato indeks d) trilinearne koordinate prirejene točke.



Slika 2. Ciklična zamenjava stranic.

Funkcije f_d, g_d in h_d so funkcije treh spremenljivk. Natančneje, njihovo definicijsko območje je množica trojic (a, b, c), ki so stranice trikotnika, torej:

$$T = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3;\ 0 < a < b + c,\ 0 < b < a + c,\ 0 < c < a + b\}.$$

Za nekatere značilne točke trikotnika je to definicijsko območje preveliko. Take so denimo značilne točke trikotnika, ki niso definirane, kadar je trikotnik enakostraničen. Zanje definicijsko območje pač ustrezno zmanjšamo.

V nadaljevanju bomo spoznali naravne zahteve, ki jim morajo zadoščati nastopajoče funkcije, da bo predpis $(a, b, c) \mapsto (f_d(a, b, c), g_d(a, b, c), h_d(a, b, c))$ res prinašal to, kar od pojma *značilna točka trikotnika* pričakujemo.

Prva zahteva je, da predpis spoštuje ciklično zamenjavo stranic. Če smo trikotniku s trojico dolžin stranic (a, b, c) priredili točko $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$, bomo (skladnemu) trikotniku s trojico (b, c, a) priredili točko $(\beta_0, \gamma_0, \alpha_0)$ (slika 2), trikotniku s trojico (c, a, b) pa točko $(\gamma_0, \alpha_0, \beta_0)$. Izhajali smo iz pričakovanja, da se morajo tedaj, ko srednji in desni trikotnik na sliki 2 izrežemo in ga položimo na levega, tudi prirejene točke prekriti. Iz te zahteve izhaja, da je $g_d(a, b, c) = f_d(b, c, a)$ in $h_d(a, b, c) = f_d(c, a, b)$. Značilno točko trikotnika torej določa ena sama funkcija f_d treh spremenljivk.

Druga zahteva se nanaša na zamenjavo dveh stranic $(a, b, c) \mapsto (a, c, b)$. Ustrezna trikotnika sta tudi tokrat skladna. Zato lahko enega od njiju izrežemo, dvignemo in položimo na drugega. Zahteva, da se morata prirejeni točki tudi zdaj prekriti, tokrat pomeni, da se morata v trojicah $(f_d(a, b, c), f_d(b, c, a), f_d(c, a, b))$ in $(f_d(a, c, b), f_d(c, b, a), f_d(b, a, c))$ prvi komponenti ujemati, preostali dve pa se morata zamenjati. Zlahka vidimo, da je potreben in zadosten pogoj za to lastnost $f_d(a, b, c) = f_d(a, c, b)$ za vse $(a, b, c) \in T$.

Tretja zahteva pa se nanaša na raztege ravnine. Naravno je zahtevati, da bodo v trikotniku $(\lambda a, \lambda b, \lambda c)$, ki ga iz trikotnika (a, b, c) dobimo z raztegom s koeficientom λ, tudi dejanske trilinearne koordinate značilne točke pomnožene z istim koeficientom. Od tod dobimo zahtevo $f_d(\lambda a, \lambda b, \lambda c) = \lambda f_d(a, b, c)$. Funkcija f_d je torej homogena stopnje 1.

To je vse: značilna točka trikotnika je torej preslikava

$$(a, b, c) \mapsto (f_d(a, b, c), f_d(b, c, a), f_d(c, a, b)),$$

ki trikotniku Δ z dolžinami stranic a, b, c priredi točko P_Δ z dejanskimi trilinearnimi koordinatami $(f_d(a, b, c), f_d(b, c, a), f_d(c, a, b))$, pri čemer je f_d homogena funkcija stopnje 1 z lastnostjo $f_d(a, b, c) = f_d(a, c, b)$ za vse $(a, b, c) \in T$.

Iz določenih praktičnih razlogov pa bomo namesto s funkcijo f_d v nadaljevanju raje delali z neko drugo, z njo tesno povezano funkcijo F. Ker so $(f_d(a, b, c), f_d(b, c, a), f_d(c, a, b))$ dejanske trilinearne koordinate neke točke v ravnini, velja:

$$af_d(a, b, c) + bf_d(b, c, a) + cf_d(c, a, b) = 2S.$$

Definirajmo

$$F(a, b, c) = \frac{af_d(a, b, c)}{2S}.$$

Zanjo velja:

(i) je homogena funkcija stopnje 0;

(ii) $F(a, b, c) + F(b, c, a) + F(c, a, b) = 1$ za vse $(a, b, c) \in T$ in

(iii) $F(a, b, c) = F(a, c, b)$ za vse $(a, b, c) \in T$.

Če je bila $f_d(a, b, c)$ prva od dejanskih trilinearnih koordinat prirejene točke, je $\frac{af_d(a,b,c)}{2}$ prva od dejanskih baricentričnih koordinat, $F(a, b, c)$ pa (zaradi (ii)) prva od normiranih baricentričnih koordinat.

Vsaka funkcija F, ki zadošča zahtevam (i)–(iii), določa preslikavo trikotnika (a, b, c) v točko z normiranimi baricentričnimi koordinatami $F(a, b, c) : F(b, c, a) : F(c, a, b)$. Ta ustreza zgoraj predstavljenim zahtevam in je zato *značilna točka trikotnika*. Funkciji F bomo rekli *trikotniška funkcija* ustrezne značilne točke.

Značilne točke trikotnika so torej preslikave, ki slikajo trikotnike v točke ravnine in jih definiramo prek *trikotniških funkcij*, tj. funkcij treh spremenljivk, ki zadoščajo zahtevam (i), (ii) in (iii).

Posebej preprosto lahko trikotniško funkcijo $F(a,b,c)$ definiramo takole. Naj bo $p(a,b,c)$ homogeni polinom stopnje n z lastnostjo $p(a,b,c) = p(a,c,b)$ za vse $a,b,c \in \mathbb{R}$. Če $p(a,b,c)+p(b,c,a)+p(c,a,b)$ ni ničelni polinom, lahko definiramo

$$F(a,b,c) = \frac{p(a,b,c)}{p(a,b,c)+p(b,c,a)+p(c,a,b)}.$$

To je trikotniška funkcija, saj zadošča zahtevam (i)–(iii). Ker je definirana s pomočjo polinoma, značilni točki trikotnika, ki pripada tovrstni trikotniški funkciji, rečemo *polinomska značilna točka trikotnika*. Omenimo, da je imenovalec tovrstne trikotniške funkcije simetričen polinom treh spremenljivk. Če ima ta za kako trojico $(a,b,c) \in T$ ničelno vrednost, funkcija F ni definirana na celi množici T, kar v praksi pomeni, da za nekatere trikotnike ustrezna polinomska značilna točka trikotnika ne obstaja.

Nekatere znane značilne točke

Oglejmo si najprej štiri klasične antične značilne točke trikotnika, ki so tudi v Kimberlingovi enciklopediji umeščene čisto na začetek.

Središče včrtane krožnice I nosi Kimberlingovo oznako $X(1)$. Dejanske trilinearne koordinate te točke so (r,r,r), kjer je r radij trikotniku včrtane krožnice. Zato je $f_d(a,b,c) = r$, trikotniška funkcija pa $F(a,b,c) = \frac{ar}{2S} = \frac{a}{a+b+c}$. V zadnji enakosti smo upoštevali, da je $S = rs$, kjer je s polovica obsega trikotnika. Središče včrtanega kroga je torej polinomska značilna točka trikotnika, pripadajoča polinomu $p(a,b,c) = a$.

Nadaljujmo s težiščem G trikotnika s Kimberlingovo oznako $X(2)$. Ker daljice AG, BG, CG razrežejo trikotnik na tri ploščinsko enake dele, za dejanske trilinearne koordinate $(\alpha_G, \beta_G, \gamma_G)$ točke G velja $\frac{a\alpha_G}{2} = \frac{b\beta_G}{2} = \frac{c\gamma_G}{2} = \frac{S}{3}$. Od tod dobimo $f_d(a,b,c) = \frac{2S}{3a}$ in $F(a,b,c) = \frac{1}{3}$. Tudi tokrat imamo polinomsko značilno točko trikotnika s pripadajočim polinomom $p(a,b,c) = 1$.

Središče trikotniku očrtane krožnice O ima Kimberlingovo oznako $X(3)$. Radij krožnice označimo z R. Če upoštevamo zvezo med središčnim in obodnim kotom, zlahka izračunamo dejanske trilinearne koordinate točke O, ki so $(R\cos A, R\cos B, R\cos C)$. Vrednost R dobimo iz znane zveze $S = \frac{abc}{4R}$, $\cos A$ pa izrazimo iz kosinusnega izreka. Tako dobimo $f_d(a,b,c) = \frac{a(b^2+c^2-a^2)}{8S}$ in

$$F(a,b,c) = \frac{a^2(b^2+c^2-a^2)}{16S^2} = \frac{a^2(b^2+c^2-a^2)}{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}.$$

Tudi tokrat gre za polinomsko značilno točko trikotnika, definirano s polinomom $p(a,b,c) = a^2(b^2+c^2-a^2)$. Ob tem je treba preveriti še, ali je zapisani imenovalec enak $p(a,b,c)+p(b,c,a)+p(c,a,b)$. Funkcijo F smo definirali s pomočjo dejanskih trilinearnih koordinat in s tem zagotovili, da zadošča lastnosti (ii). Ker je imenovalec vseh treh členov v tej enakosti enak, vsoto lahko damo na skupni imenovalec, in enakost takoj sledi. To se zgodi pri vsaki racionalni funkciji F z lastnostjo (ii), katere imenovalec je simetričen polinom danih treh spremenljivk.

Podobno bi ugotovili, da je tudi višinska točka $H = X(4)$ polinomska značilna točka trikotnika s pripadajočim polinomom $p(a,b,c) = (a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)$.

Če je bila preprostost polinomov pri točkah $X(1)$ in $X(2)$ v skladu z našimi pričakovanji, bi pri točkah $X(3)$ in $X(4)$ morda pričakovali preprostejše polinome. V tem kontekstu naj omenimo debato o *najpomembnejših značilnih točkah trikotnika*, h kateri se bomo vrnili v zadnjem razdelku. V tovrstnem tehtanju nekateri matematiki točkama H in O »zamerijo«, da v topokotnih trikotnikih zapustita trikotnik. Glede na to pomanjkljivost torej niti nista tako zelo »lepi«. V tej luči tudi niso presenetljivi faktorji oblike $(b^2+c^2-a^2)$, ki nastopajo v njunih polinomskih funkcijah.

Omenimo še, da so v dodatku članka [2] predstavljene polinomske funkcije vseh polinomskih značilnih točk trikotnika $X(n)$ za vrednosti $n \leq 100$. Takih je kar 92. Kratek izbor iz tega seznama je predstavljen v tabeli 1.

Morda bi bilo zanimivo spoznati še kako značilno točko trikotnika, ki ni polinomska. Taka je npr. Fermatova točka $X(13)$. Na podlagi zgornjega računa za točko $X(3)$ je mogoče zaslutiti, kaj se lahko zgodi. Če namreč v računu nastopi ploščina S na sodo potenco, je ob upoštevanju Heronovega obrazca to polinom spremenljivk a,b,c. Če pa bi ploščina S nastopila z liho potenco, to ne bi bil več polinom. Točno to se zgodi Fermatovi točki, ki ima trikotniško funkcijo s števcem $a^4 + a^2(b^2+c^2+4\sqrt{3}S) - 2(b^2-c^2)^2$.

Polinomske značilne točke s polinomi prve in druge stopnje

Začnimo s homogenim polinomom prve stopnje. Če naj zadošča lastnosti $p(a,b,c) = p(a,c,b)$, mora biti oblike $p_{u,v}(a,b,c) = ua + v(b+c)$ za neka realna parametra u in v. Trikotniška funkcija je torej oblike $F_{u,v}(a,b,c) = \frac{ua+v(b+c)}{(u+2v)(a+b+c)}$. Označimo $t = \frac{v}{u+2v}$ in dobimo družino trikotniških funkcij $F_t(a,b,c) = \frac{(1-2t)a+t(b+c)}{a+b+c} = \frac{(1-3t)a+t(a+b+c)}{a+b+c}$. Takoj opazimo, da gre pri $t=0$ za središče včrtanega kroga I in pri $t=\frac{1}{3}$ za težišče G.

V drugem razdelku smo omenili, da je prednost dela z baricentričnimi koordinatami možnost prehoda na delo z vektorji: če z $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ označimo

X_n		ime	$p(a,b,c)$
X_1	I	središče včrtane krožnice	a
X_2	G	težišče	1
X_3	O	središče očrtane krožnice	$a^2(b^2+c^2-a^2)$
X_4	H	višinska točka	$(a^2+b^2-c^2)(a^2-b^2+c^2)$
X_5	O_9	središče krožnice K_9	$a^2(b^2+c^2)-(b^2-c^2)^2$
X_6	K	Lemoineova točka	a^2
X_7	G_e	Gergonnova točka	$(a+b-c)(a-b+c)$
X_8	N_a	Nagelova točka	$b+c-a$
X_9	M	Mittenpunkt	$a(b+c-a)$
X_{10}	S_p	Spiekerjeva točka	$b+c$
X_{11}		Feuerbachova točka	$(b-c)^2(b+c-a)$
X_{20}		de Longchampsova točka	$3a^4-2a^2(b^2+c^2)-(b^2-c^2)^2$
X_{21}		Schifflerjeva točka	$a(a+b)(a+c)(b+c-a)$
X_{23}		točka daleč zunaj	$a^2(-a^4+b^4+c^4-b^2c^2)$
X_{39}		Brocardovo razpolovišče	$a^2(b^2+c^2)$
X_{115}		središče Kiepertove hiperbole	$(b^2-c^2)^2$

Tabela 1. Izbor polinomskih značilnih točk trikotnika.

radij vektorje do oglišč trikotnika in so $x : y : z$ normirane baricentrične koordinate točke T, potem je radij vektor točke T preprosto $\vec{T} = x\vec{A}+y\vec{B}+z\vec{C}$. Naj bo T_t značilna točka trikotnika, pripadajoča trikotniški funkciji F_t. Ker so $F_t(a,b,c) : F_t(b,c,a) : F_t(c,a,b)$ normirane baricentrične koordinate, je radij vektor te točke

$$\begin{aligned}
\vec{T_t} &= F_t(a,b,c)\vec{A} + F_t(b,c,a)\vec{B} + F_t(c,a,b)\vec{C} \\
&= (1-3t)\left(\frac{a}{a+b+c}\vec{A} + \frac{b}{a+b+c}\vec{B} + \frac{c}{a+b+c}\vec{C}\right) + \\
&\qquad + 3t\left(\frac{1}{3}\vec{A} + \frac{1}{3}\vec{B} + \frac{1}{3}\vec{C}\right) \\
&= (1-3t)\vec{I} + 3t\vec{G} = \vec{I} + 3t(\vec{G}-\vec{I}).
\end{aligned}$$

Točke $T_t,\ t \in \mathbb{R}$, torej ležijo na premici skozi točki G in I, ki ji rečemo tudi *Nagelova premica*, saj na njej leži Nagelova točka $X(8) = T_1$.

Če trikotnik ni enakostraničen ($G \neq I$), polinomske značilne točke s polinomskimi funkcijami prve stopnje tvorijo Nagelovo premico. Ta seka Eulerjevo premico trikotnika ABC v težišču G. Če ima še kaka točka z Eulerjeve premice polinomsko funkcijo prve stopnje, Nagelova in Eulerjeva premica sovpadata. Tedaj točka I leži na Eulerjevi premici, torej je trikotnik enakokrak. Tako vidimo, da v raznostraničnem trikotniku z izjemo težišča G nobena značilna točka z Eulerjeve premice ni polinomska točka s polinomsko funkcijo prve stopnje.

Posvetimo se zdaj homogenim polinomom druge stopnje. Če naj tak polinom zadošča dodatni zahtevi $p(a,b,c) = p(a,c,b)$, je oblike $p(a,b,c) = sa^2 + t(b^2+c^2) + ubc + va(b+c)$. Ustrezna trikotniška funkcija je tedaj:

$$F(a,b,c) = \frac{sa^2 + t(b^2+c^2) + ubc + va(b+c)}{(s+2t)(a^2+b^2+c^2) + (u+2v)(ab+ac+bc)}.$$

Gre za štiriparametrično družino. Naš nadaljnji načrt je naslednji: fiksirajmo parametra v imenovalcu, recimo $s+2t = 1, u+2v = 2$ in s tem namesto štiriparametrične družine dobimo dvoparametrično družino značilnih točk trikotnika. V konkretno navedenem primeru je to

$$F_{t,v}(a,b,c) = \frac{(1-2t)a^2 + t(b^2+c^2) + va(b+c) + 2(1-v)bc}{(a+b+c)^2}.$$

Naj bo (a,b,c) poljuben raznostranični trikotnik in P poljubna točka v ravnini z normiranimi baricentričnimi koordinatami $x:y:z$. Premislimo, ali je točka P lahko značilna točka trikotnika (a,b,c), določena z eno od funkcij iz zgornje dvoparametrične družine. To je res, če je rešljiv sistem enačb:

$$F_{t,v}(a,b,c) = x, \qquad F_{t,v}(b,c,a) = y, \qquad F_{t,v}(c,a,b) = z.$$

Ker velja $x+y+z = 1$ in je tudi vsota levih strani enačb enaka 1, zadoščata prvi dve enačbi. Če sta izpolnjeni ti, je tretja izpolnjena avtomatično. Upoštevajmo definicijo funkcije $F_{t,v}$ in dobimo sistem dveh linearnih enačb za spremenljivki t in v:

$$\begin{aligned} t(b^2+c^2-2a^2) + v(ab+ac-2bc) &= x(a+b+c)^2 - a^2 - 2bc \\ t(c^2+a^2-2b^2) + v(bc+ba-2ca) &= y(a+b+c)^2 - b^2 - 2ca \end{aligned}$$

z determinanto

$$\begin{aligned} &(b^2+c^2-2a^2)(bc+ba-2ca) - (ab+ac-2bc)(c^2+a^2-2b^2) = \\ &\qquad = -3(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c). \end{aligned}$$

Ker determinanta ni enaka nič, je sistem enolično rešljiv.

Pri fiksnem raznostraničnem trikotniku torej že samo slike značilnih točk iz naše dvoparametrične družine pokrijejo celotno ravnino. Vsaka točka v ravnini je torej »značilna točka« tega trikotnika glede na eno od funkcij iz te dvoparametrične družine. To pa seveda ni edina dvoparametrična družina polinomov druge stopnje, ki jo lahko sestavimo. Spomnimo se, da smo začeli s štiriparametrično družino in potem dva koeficienta v imenovalcu preprosto določili. Če bi ju določili drugače, bi dobili novo dvoparametrično družino, katere slike pri fiksnem trikotniku bi spet pokrile celo ravnino. Tovrstnih disjunktnih družin polinomov druge stopnje pa imamo ogromno. Pri izbranem raznostraničnem trikotniku in izbrani točki v ravnini že samo med polinomskimi značilnimi točkami trikotnika s polinomom stopnje 2 najdemo neskončno takih, ki konkretni trikotnik preslikajo v izbrano točko. Da o polinomih višjih stopenj sploh ne govorimo.

Na podlagi teh ugotovitev nehote dobimo občutek, da je definicija značilne točke trikotnika zelo široka, morda preširoka. Pojavi se občutek, da bi predstavljenim pogojem, ki jim mora zadoščati značilni točki trikotnika pripadajoča trikotniška funkcija, lahko dodali še kak pogoj, pa bi mu še vedno zadoščala glavnina točk iz Kimberlingove enciklopedije.

V korespondenci s Clarkom Kimberlingom sem preveril, ali morda pozna kak tovrsten poskus, ki bi bil splošneje sprejet. Zdi se, da tvorec definicije značilne točke trikotnika potrebe po bolj restriktivni definiciji ne čuti. Mnenja je, da gre pač za družino funkcij in se torej ni treba preveč ozirati na množico slik enega elementa definicijskega območja, torej enega trikotnika, z vsemi funkcijami iz družine. Podobno, kot se pri realnih funkcijah ni smiselno ustavljati pri fiksnem realnem številu (recimo $\frac{\pi}{4}$) in negodovati nad tem, da ga npr. več trigonometričnih funkcij preslika enako in da množica slik te točke s funkcijami iz družine vseh trigonometričnih funkcij tvori celotno realno os.

A videti je, da vsi matematiki niso povsem njegovega mnenja in je razmišljanje o dodatnih pogojih in alternativnih definicijah v zraku. Tako je npr. japonski matematik Yoshio Agaoka v članku [2] predstavil pojem *stopnje polinomske značilne točke trikotnika* in ugotovil, da je ta za veliko večino začetnih značilnih točk trikotnika iz Kimberlingove enciklopedije racionalno število iz množice $\{(-2)^k,\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\infty\}$. Pri tem imajo stopnjo ∞ tiste polinomske značilne točke trikotnika, ki za enakostranični trikotnik niso definirane. Dejansko mi je doslej znana ena sama polinomska značilna točka trikotnika, katere stopnja ne leži v zgornji množici, to je $X(944)$ s stopnjo -20. Vsekakor iz dodatka k omenjenemu članku izhaja, da imajo stopnjo v tej množici prav vse polinomske točke $X(n)$ za $n \leq 100$.

Morda obstaja kak geometrijski argument, da bi definirana stopnja morala ležati prav v tej množici in bi to dejstvo kot pogoj vgradili v izpopolnjeno verzijo definicije značilne točke trikotnika. Tovrstni dodatni pogoj bi morda izločil kako značilno točko iz Kimberlingovega seznama, bi pa pomenil želeno zožitev presplošne definicije.

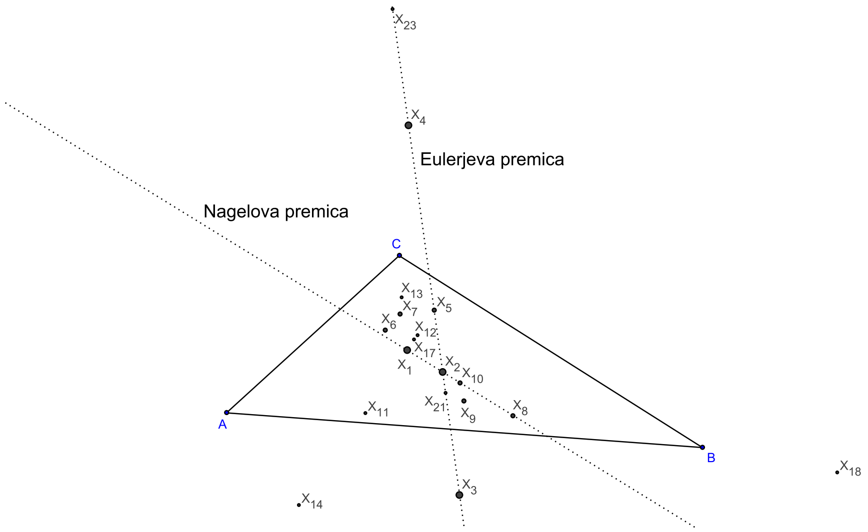
Idejo za kako alternativno in bolj restriktivno definicijo značilne točke trikotnika bi lahko iskali v teoriji množic, kjer so znani paradoksi nakazali potrebo po skrbnejšem pristopu k izgradnji množic. Tako bi tudi v našem primeru množico značilnih točk trikotnika lahko gradili postopoma, induktivno, pri čemer bi začeli npr. z dvema točkama (npr. G in I), nadaljnje pa iz predhodnih induktivno pridobivali na podlagi v ta namen izbranih postopkov. Agaoka [2] predlaga dva postopka: transformacijo ravnine (ki značilni točki priredi novo značilno točko) in dvomestno operacijo, ki novo značilno točko priredi paru (P, Q) značilnih točk. Konkretno gre za izogonalno transformacijo (definirano v [10]) in za $P-$Cevovo transformacijo točke Q. Agaoka je idejo poskusil povezati s prej omenjeno teorijo stopenj polinomskih značilnih točk. Delo je nadaljeval v članku [3], a kljub obsežnosti narejenega zlahka opazimo, da je teorija še precej v povojih: hipotez je veliko, končnih odgovorov pa malo. Z zanimanjem lahko pričakujemo nadaljnji razvoj dogodkov.

Sklepni komentar

O značilnih točkah trikotnika je v uvodu h Kimberlingovi knjigi [8] zanimivo razmišljanje predstavil tudi slavni ameriški znanstvenik Douglas R. Hofstadter. Ta je javnosti najbolj znan kot pisec odmevne in nagrajevane knjige *Gödel, Escher, Bach* [5], v kateri raziskuje skupne značilnosti – predvsem sorodne miselne zanke – v delih treh velikih ustvarjalcev: matematika, slikarja in glasbenika. Hofstadter je po osnovni izobrazbi matematik (mimogrede, po njem so poimenovane tri značilne točke trikotnika, $X(359), X(360)$ in že omenjena $X(944)$). Poleg matematike in fizike se ukvarja tudi z ozadji človeškega uma, torej s problemi inteligence, jaza, umetne inteligence, zavesti, analogij, vzorcev itd., skratka z vprašanji, ki sodijo v multidisciplinarno področje, imenovano *kognitivna znanost*. V slovenskem prevodu imamo knjigo [6], katere sourednik in soavtor je in v kateri so izpod peres različnih avtorjev predstavljeni nekateri vidiki naštetih tematik.

Vrnimo se k značilnim točkam trikotnika in nekaterim Hofstadterjevim razmišljanjem na to temo.

Rdeča nit njegovega razmišljanja je (na prvi pogled morda naivno) vprašanje: *Katera je najpomembnejša značilna točka trikotnika?* Odgovora na to vprašanje avtor ne poda, zato pa predstavi tri zanimive vzporednice. Prva je sorodno vprašanje o najpomembnejših človeških organih in o organih, ki so najtesneje povezani z našim jazom. Tu po avtorjevem mnenju lahko rečemo vsaj to, da v ožji izbor ne morejo priti organi, brez katerih lahko preživimo, recimo lasje, uhlji ali prsti. Tako tudi v trikotniku prvenstva ne moremo zlahka podeliti, lahko pa določene značilne točke iz natečaja



Slika 3. Značilne točke trikotnika (zaradi preglednosti so namesto z $X(n)$ označene z X_n).

izločimo. Razlog za to bi po avtorjevem mnenju lahko bil že ta, da v kakem trikotniku značilna točka ni znotraj trikotnika.

Druga vzporednica je uteženi volilni sistem. Hofstadter najprej s presenečenjem opazi, da je vsaj pri začetnih značilnih točkah trikotnika iz Kimberlingovega seznama mnogo točk kolinearnih. Če bi vzeli 100 točk v splošni legi, bi te določale 4950 različnih premic. Če vzamemo prvih 100 točk s Kimberlingovega seznama, te določajo le kakih 100 tako imenovanih *centralnih premic*. Od tod ideja, da bi pomembnost točke sodili po tem, na koliko pomembnih centralnih premicah se ta nahaja. Seveda pa se tu ujamemo v zanko: pomembne centralne premice so najbrž tiste, ki vsebujejo pomembne značilne točke trikotnika. In smo pri uteženem volilnem sistemu: ko glasujemo o neki temi, bi bilo treba glasove utežiti glede na to, kolikšna avtoriteta je vprašani na določenem področju. Da pa bi to avtoriteto izmerili, bi bilo treba povpraševati ljudi s tega področja, pri čemer bi kompetentnejši vprašanci spet morali imeti večjo težo ...

Tretjič pa Hofstadter ob debati o najpomembnejši značilni točki trikotnika potegne vzporednico s problemom izbora najpomembnejše matematične konstante. Ob tem opazi, da se je v zgodovini naše civilizacije vsaj eden resnih kandidatov za prvenstvo, število e, pojavilo sorazmerno pozno, šele v času Eulerja. Zato dopušča možnost, da so sedanji kandidati za najpomembnejšo značilno točko trikotnika, ne glede na obsežnost Kimberlingove enciklopedije, šele na nivoju očitnih konstant 1 in 0 in bomo morebiti točki na nivoju konstant π in e šele odkrili. Tovrstno upanje pomeni tudi veliko vzpodbudo za nadaljnje raziskovanje.

Končajmo s še eno analogijo, o kateri v predgovoru govori tudi Hofstadter, a je nanjo pred tem opozoril že Kimberling. Gre za primerjavo raziskovanja značilnih točk trikotnika in opazovanja zvezd. Grki so poznali štiri značilne točke trikotnika, podobno kot prosto oko na večernem nebu opazi le najsvetlejše zvezde. Temnejša je noč in bolje kot se pripravimo k opazovanju, več zvezd, tudi manj svetlih, utegnemo opaziti. Včasih se lahko zgodi, da se – gledano iz nekega položaja – dve zvezdi prekrivata. Tudi pri značilnih točkah trikotnika se to pri kakem posebnem trikotniku lahko zgodi. Če pa se iz tega položaja le malo premaknemo (če trikotnik le malo spremenimo), se izkaže, da sta zvezdi dejansko dve (da se značilni točki trikotnika ne prekrivata več). Pogled na zvezdno nebo se tako od točke do točke v vesolju spreminja, nekatere konstelacije pa vendarle ostajajo nespremenjene. Podobno konstelacije značilnih točk trikotnika pri različnih oblikah trikotnikov ohranjajo nekatere osnovne značilnosti.

Tudi v smislu te primerjave ugotovitev iz prejšnjega razdelka nismo preveč veseli. Preneseno na zvezde bi ta spoznanja pomenila, da na nočnem nebu ob pozornejšem opazovanju ni samo več in več zvezd, pač pa, da dejansko sveti čisto vsaka točka na nebu. Zgoraj omenjena potreba po zožitvi definicije značilne točke trikotnika tako dobi še dodaten argument.

LITERATURA

[1] S. Abu-Saymeh in M. Hajja, *Coincidence of centers for scalene triangles*, Forum Geom. **7** (2007), 137–146.

[2] Y. Agaoka, *Degree of triangle centers and a generalization of the Euler line*, Beiträge Algebra Geom. **51** (2010), 63–89.

[3] Y. Agaoka, *Triangle centers defined by quadratic polynomials*, Math. J. Okayama Univ. **53** (2011), 185–216.

[4] *Encyclopedia of Triangle centers*, dostopno na `http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html`, povzeto dne 7. 1. 2013

[5] D. R. Hofstadter, *Gödel, Escher, Bach: an eternal golden braid*, Hassocks: Harvester Press, cop. 1979.

[6] D. R. Hofstadter in D. C. Denett, *Oko duha: fantazije in refleksije o jazu in duši*, Založba Mladinska knjiga, Ljubljana, 1990.

[7] C. Kimberling, *Central points and central lines in the plane of a triangle*, Math. Magazine **67** (1994), 163–187.

[8] C. Kimberling, *Triangle centers and central triangles*, Congr. Numerantium **129**, 1998.

[9] C. Kimberling, *Triangle centers as functions*, Rocky Mountain J. Math. **23** (1993), 1269–1286.

[10] T. Veber, *Kubične krivulje trikotnika*, Obzornik mat. fiz. **59** (2012), 50–62.