

PRESEK LETNIK 47 (2019/2020) ŠTEVILKA 5

5



MATEMATIKA+FIZIKA+ASTRONOMIJA+RAČUNALNIŠTVO#



PRESEK



- APOLONIJEVA KROŽNICA
- CD STEREO-SPEKTROSKOP
- PERO IZ PAVJEGA REPA
- SANKTPETERBURŠKA ASTRONOMSKA OLIMPIJADA
- MINIMALNA VPETA DREVESNA

ISSN 0351-6652



9 770351 665753

Analiza gibanja morskega psa

↓↓↓

→ Kratkoplavuti morski pes vrste mako, ki ga mnogi opisujejo kot torpedo z zobmi, se lahko giblje s hitrostjo okrog 45 kilometrov na uro. Na prvi pogled bi se zdelo, da lahko takšno hitrost doseže le z zelo gladko kožo. V resnici pa mu tako hitro gibanje omogoča groba koža, pokrita z zobčastimi luskami (vidite jih lahko na sliki na strani 10). Zobčaste luske imajo tudi druge vrste morskih psov, a niso tako zelo prožne in upogljive. Ponekod so od kože odmaknjene celo za kot 50 stopinj. Čeprav se najprej zdi, da bo takšna koža gibanje ovirala, je raziskava s pomočjo matematike, hidrodinamike in hitrostnih preizkusov s pravo makovo kožo pokazala, da zobci zavirajo povratni tok blizu kože in tako zmanjšajo posledično upočasnitev v plasti vode ob koži oziroma telesu morskega psa. Tako zmanjšajo upor, ki je sorazmeren s hitrostjo gibanja ali njenim kvadratom, in morskemu psu omogočijo največjo hitrost in okretnost.

S pomočjo izkušenj z zobci skušajo znanstveniki izdelati umetne površine letal in ladij, ki bi zmanjšale povratni tok. Ločitev tokov se zgodi, ko pride zaradi spremembe oblike telesa do razlike v pritiskih in se toku ob telesu zamenja smer. Če bi nam uspelo zakasnitati ali nadzorovati povratni tok, bi s tem zmanjšali upor in porabo goriva.

Poznavanje rebrastih struktur na vrhu zobcev je navdahnilo tudi izdelavo posebnih plavalnih oblek. Te so se pri vrhunskih plavalcih izkazale za tako hitre, da so jih morali prepovedati. Tako bodo morali raziskovalci za športnike morda načrtovati počasnejšo plavalno obleko.

Več o koži morskega psa in povratnem toku si lahko preberete v članku *Experimental study of laminar and turbulent boundary layer separation control of shark skin*, ki so ga F. Afroz in sodelavci objavili v reviji *Bioinspiration and Biomimetics*.

× × ×

→

Presek

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje letnik 47, šolsko leto 2019/2020, številka 5

Uredniški odbor: Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Mojca Čepič, Mirko Dobovišek, Vilko Domanjko, Bojan Golli, Andrej Guštin (astronomija), Marjan Jerman (matematika), Martin Juvan, Maja Klavžar, Damjan Kobal, Lucijana Kračun Berc (tekmovanja), Peter Legiša (glavni urednik), Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Aleš Mohorič (odgovorni urednik), Marko Razpet, Jure Slak (računalništvo), Matjaž Vencelj, Matjaž Zaveršnik (tehnični urednik).

Dopisi in naročnine: DMFA–založništvo, Presek, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana, telefon (01) 4766 633, telefaks (01) 4232 460, 2517 281.

Internet: www.presek.si

Elektronska pošta: presek@dmfa.si

Naročnina za šolsko leto 2019/2020 je za posamezne naročnike 22,40 EUR – posamezno naročilo velja do preklica, za skupinska naročila učencev šol 19,60 EUR, posamezna številka 6,00 EUR, stara številka 4,00 EUR, letna naročnina za tujino pa znaša 30 EUR.

Transakcijski račun: 03100-1000018787.

List sofinancira Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih poljudno-znanstvenih periodičnih publikacij.

Založilo DMFA–založništvo

Oblikovanje Tadeja Šekoranja

Tisk Collegium Graphicum, Ljubljana

Naklada 1100 izvodov

© 2020 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – 2114

ISSN 2630-4317 (Online)

ISSN 0351-6652 (Tiskana izd.)

Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

Poština plačana pri pošti 1102 Ljubljana.

NAVODILA SODELAVCEM PRESEKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

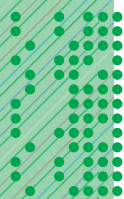
Presek objavlja poljudne in strokovne članke iz matematike, fizike, astronomije in računalništva. Poleg člankov objavlja Priказe novih knjig s teh področij in poročila z osnovnošolskih in srednješolskih tekmovanj v matematiki in fiziki. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, učencem višjih razredov osnovnih šol in srednješolcem.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev) in sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo). Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Slike v elektronski obliki morajo biti visoke kakovosti (jpeg, tiff, eps ...), velikosti vsaj 8 cm pri ločljivosti 300 dpi. V primeru slabše kakovosti se slika primerno pomanjša ali ne objavi. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Zaželena velikost črk je vsaj 12 pt, razmak med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku na naslov uredništva DMFA–založništvo, Uredništvo revije Presek, p. p. 2964, 1001 Ljubljana ali na naslov elektronske pošte presek@dmfa.si.

Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki oceni primernost članka za objavo. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem uredništvo prosi avtorja za izvirne datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TeX oziroma LaTeX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.



Kazalo

MATEMATIČNI TRENUTKI

- 2** Analiza gibanja morskoga psa

MATEMATIKA

- 4-7** Apolonijeva krožnica
(*Marjan Jerman*)
- 7-8** Prometna ureditev Zelenega gaja
(*Nika Novak*)
- 9-10** Preprosti številski trikotniki
(*Marko Razpet*)

FIZIKA

- 11-13** CD stereo-spektroskop
(*Andrej Likar*)
- 14-15** Pero iz pavjega repa
(*Andrej Likar*)

ASTRONOMIJA

- 18-21** 27. sanktpeterburška astronomska olimpijada (SAO)
(*Andrej Guštin*)

RAČUNALNIŠTVO

- 22-26** Minimalna vpeta drevesa
(*Sara Veber in Tim Poštuvan*)

RAZVEDRILO

- 16-17** Nagradna križanka
(*Marko Bokalič*)
- 27-29** Mednarodna juniorska naravoslovna olimpijada
(*Barbara Rovšek*)
- 30** Rešitev nagradne križanke Presek 47/4
(*Marko Bokalič*)
- 31** Naravoslovna fotografija – Stebrički slane
(*Jože Rakovec*)

TEKMOVANJA

- priloga** 63. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije – državno tekmovanje
- priloga** 19. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol – državno tekmovanje
- priloga** 19. tekmovanje v znanju matematike za dijake poklicnih šol – državno tekmovanje
- priloga** Tekmovanje iz fizike za srebrno Stefanovo priznanje – področno tekmovanje

SLIKA NA NASLOVNICI: Na sliki so kristali ledu na listju na tleh. To, da so kristali, nam pove, da je to slana (in ne morda ivje). Povečava slike pokaže, da so ti kristali večinoma v obliki stebričkov. Več o njih pa preberite v naravoslovni fotografiji (foto: Peter Legiša).

Apolonijeva krožnica

↓↓↓

MARJAN JERMAN

→

Uvod

Prispevek začnimo z navidez nepovezanima naloga-
ma.

- (1) Predstavljajmo si, da sedimo v čolnu. Radi bi prestregli ladjo, ki pluje naravnost s konstantno hitrostjo v_1 . Kam naj usmerimo čoln, da bomo po ravni poti s konstantno hitrostjo v_2 v enakem času prišli na isti položaj kot ladja?
- (2) S pomočjo šestila in ravnila načrtaj trikotnik z danima osnovnico c in težiščnico t_c na osnovnico ter razmerjem krakov $b : a$.

Prvo nalogo lahko prevedemo v geometrijski jezik takole: Do srečanja po pretečenem času t bo ladja opravila pot $v_1 t$, naš čoln pa pot $v_2 t$. Če označimo začetni položaj ladje z A , začetni položaj čolna z B , točko srečanja pa s C , velja

$$\blacksquare AC : BC = v_1 t : v_2 t = v_1 : v_2.$$

Recimo, da je \mathcal{L} množica točk, katerih oddaljenost od točk A in B je v razmerju $v_1 : v_2$. Potem je točka C presečišče premice skozi A v smeri premikanja ladje in množice \mathcal{L} . Tako dobimo točko, kamor moramo usmeriti čoln.

Tudi o drugi nalogi lahko premišljujemo takole: Naj bo $AB = c$ osnovnica trikotnika ABC in T njeno razpolovišče. Množica \mathcal{L} naj bo množica vseh takih točk C' , za katere velja $AC' : BC' = b : a$. Potem je točka C presečišče množice \mathcal{L} ter krožnice s središčem T in polmerom t_c .

Če je razmerje $b : a$ enako $1 : 1$, množico \mathcal{L} že poznamo. Tvorijo jo točke, ki so enako oddaljene od obeh točk A in B . Torej, množica \mathcal{L} je simetrala daljice AB .

V nadaljevanju bomo pokazali, da je v vseh ostalih primerih množica \mathcal{L} krožnica. Imenujemo jo po njenem izumitelju, starogrškem matematiku in astronomu Apoloniju iz Pergeja, starodavnega mesta, ki

danes leži na jugozahodni obali Turčije. Apolonij je živel približno med leti 265 in 170 pred našim štetjem in je zelo znan po študiju presekov stožca z ravninami. Na ta način je definiral elipse, hiperbole in parabole. Proslavil se je tudi s problemom načrtovanja krožnice, ki se dotika danih treh krožnic.

Običajno krožnico definiramo kot množico točk, ki so za polmer r oddaljene od njenega središča S . Pokazali bomo, da lahko krožnico definiramo tudi drugače:

Za dani različni točki A in B , ki ju imenujemo gorišči, krožnico tvorijo take točke C , za katere je razmerje oddaljenosti $AC : BC \neq 1 : 1$ fiksno.

Simetrali notranjega in zunanjega kota

Na poti do Apolonijeve krožnice bomo izpeljali nekaj pomožnih rezultatov iz geometrije, ki so zanimivi in pomembni že sami zase.

Naj bo ABC običajno označen neenakokraki trikotnik, $b = AC$, $a = BC$ in

$$\blacksquare b : a = \lambda \neq 1.$$

Z y označimo kot pri C , z $y' = \pi - y$ pa njegov zunanji kot.

Najprej izračunajmo, kakšen kot oklepata simetrali notranjega in zunanjega kota. Ta kot je enak

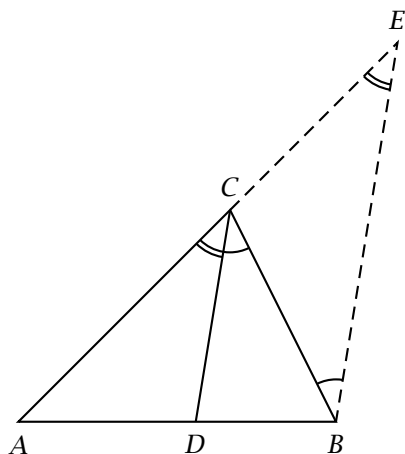
$$\blacksquare \frac{y}{2} + \frac{y'}{2} = \frac{y}{2} + \frac{\pi - y}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Torej: *simetrali notranjega in zunanjega kota oklepata pravi kot.*

Poglejmo si, kje simetrala kota y seka osnovnico AB (slika 1). To presečno točko označimo z D .

Stranico AC podaljšajmo v poltrak p_{AC} z začetkom v točki A . Narišimo še premico q , ki vsebuje točko B in je vzporedna simetrali kota pri C . Točka E naj bo presečišče poltraka p_{AC} in premice q . Ker sta kota ob prečnici BC enaka, velja

$$\blacksquare \angle BCD = \angle CBE = \frac{y}{2}.$$



SLIKA 1.

Razmerje, v katerem simetrala kota pri C deli osnovnico AB .

Prav tako sta enaka kota ob prečnici AE :

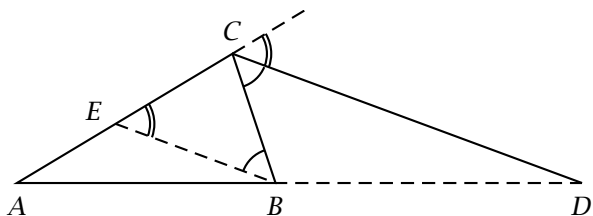
- $\angle ACD = \angle AEB = \frac{\gamma}{2}$.

Zato je trikotnik BEC enakokrak in velja $BC = EC$. Po Talesovem izreku o sorazmerjih je tako

- $AD : DB = AC : CE = AC : BC = \lambda$.

Tudi Tales je bil starogški matematik, ki je živel na današnji zahodni obali Turčije v Miletu, še dobrih tristo let pred Apolonijem.

Tako smo dokazali, da *simetrala kota razdeli osnovnico v razmerju dolžin krakov*.



SLIKA 2.

Razmerje, v katerem simetrala zunanega kota pri C deli osilko osnovnice AB .

Poglejmo si še podobno vprašanje za simetralo zunanega kota (slika 2).

Kot pri C ima dva suplementarna kota. Ker trikotnik ABC ni enakokrak, simetrala notranjega kota pri

C ne vsebuje višine. Oba zunanja kota pri C imata skupno simetralo, ki tako ni vzporedna z osnovnico AB in jo zato seka. Presečno točko označimo z D . Točka D leži na levem bregu premice AC (ko je $b < a$) ali na desnem bregu premice BC (ko je $b > a$). Obravnavajmo le primer, ko je $b > a$. Primer $b < a$ obravnavamo na enak način. Simetrali DC potegnimo vzporednico skozi točko B , ki seka krak AC v točki E .

Enako kot prej, zaradi kotov ob prečnicah BC in EC velja

- $\angle EBC = \angle BCD = \frac{\gamma'}{2} = \angle BEC$,

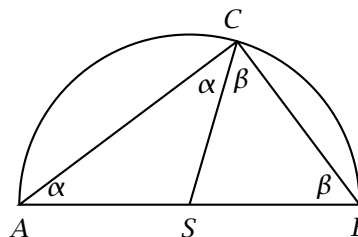
trikotnik EBC je zato enakokrak in $EC = BC$. Zopet izrek o sorazmerjih pove, da je

- $AD : BD = AC : EC = AC : BC = \lambda$.

Razmerje je presenetljivo enako razmerju, ki smo ga dobili v primeru simetrale notranjega kota, le da tokrat točka D ne leži na osnovnici AB .

Talesov izrek in njegov obrat

Verjetno večina bralcev že pozna Talesov izrek, ki pravi, da je kot nad premerom kroga pravi. Zaradi samozadostnosti prispevka ga dokažimo še enkrat.



SLIKA 3.

Talesov izrek

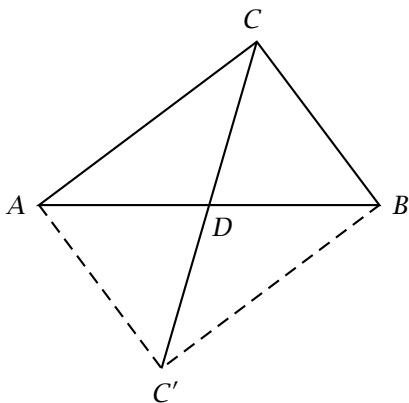
Naj bo trikotnik ABC včrtan v krog s središčem S in premerom AB . Trikotnika ACS in BCS sta enakokraka, zato je

- $\alpha = \angle SAC = \angle ACS$ in $\beta = \angle SBC = \angle SCB$.

Vsota kotov v trikotniku ABC je enaka iztegnjenemu kotu, zato je

- $\pi = \angle BAC + \angle ABC + \angle BCA = \alpha + \beta + (\alpha + \beta)$





SLIKA 4.
Obrat Talesovega izreka

in je

- $\angle BCA = \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$,

kar smo želeli pokazati.

Zanimivo je, da velja tudi obrat Talesovega izreka: Naj bo kot pri oglišču C nad stranico AB pravi. Pokažimo, da C leži na obodu kroga s premerom AB .

V točkah A in B potegnimo pravokotnici na stranici AC in BC , tako da dobimo pravokotnik $AC'BC$. Diagonali pravokotnika sta enako dolgi in se razpolavljata, zato daljica CC' razreže stranico AB na dva enaka dela $AD = DB = DC = DC'$. Točka D je tako središče trikotniku ABC očrtanega kroga.

Apolonijeva krožnica

Najprej pokažimo, da vse točke C , ki zadoščajo pogoju

- $AC : BC = \lambda \neq 1$

za izbrani različni točki A in B , ležijo na neki krožnici.

Poiščimo najprej kakšno točko C , ki zadošča gornjemu pogoju. Krožnica s središčem B in polmerom BC mora sekati krožnico s središčem A in polmerom $\lambda \cdot BC$. To je res, kadar obstaja trikotnik ABC , torej, ko velja trikotniška neenakost $AC + BC = BC(\lambda + 1) > AB$. Če točko C izberemo dovolj daleč od točke B ,

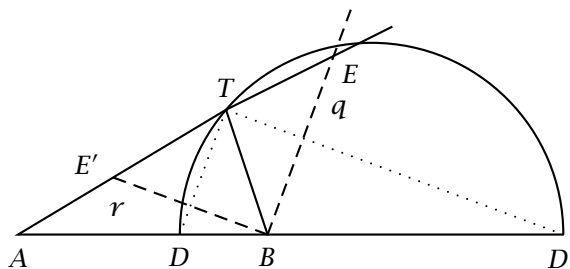
lahko zadostimo zadnjemu pogoju in tako najdemo točko C , za katero velja $AC : BC = \lambda$.

Narišimo trikotnik ABC . Z D označimo presek simetrale notranjega kota pri C z nosilko stranice AB , z D' pa presečišče simetrale zunanjega kota pri C z nosilko AB . Simetrali notranjega in zunanjega kota pri C oklepata pravi kot. Po obratu Talesovega izreka tako točka C leži na krožnici s premerom DD' .

Naj bo C' še kakšna druga točka, za katero velja

- $AC' : BC' = \lambda \neq 1$.

Pokazali smo, da simetrali notranjega in zunanjega kota pri C' trikotnika ABC' razdelita osnovnico AB v razmerju krakov $AC' : BC'$, zato simetrali notranjega in zunanjega kota pri C' ponovno sekata nosilko osnovnice AB v točkah D in D' , ki smo ju že dobili s simetralama kotov pri C v trikotniku ABC . Zato vse točke C , za katere velja $AC : BC = \lambda \neq 1$, ležijo na obodu kroga s premerom DD' .



SLIKA 5.
Za vse točke na krožnici s premerom DD' velja $AT : BT = \lambda$.

Pokažimo še, da velja tudi obratno. Izberimo si razmerje $\lambda \neq 1$. Na daljici AB izberimo točko D , tako da bo $AD : DB = \lambda$, na nosilki daljice AB pa točko D' , ki ne leži na AB , da bo tudi $AD' : D'B = \lambda$. Narišimo krožnico s premerom DD' in na njej izberimo poljubno točko T . Kot $\angle DTD'$ je po Talesovem izreku pravi. Pokazati moramo, da velja $AT : BT = \lambda$.

Narišimo trikotnik ABT . Skozi B potegnimo vzporednico q premici DT , ki seka poltrak p_{AT} v točki E . Prav tako skozi B potegnimo vzporednico r premici $D'T$, ki seka poltrak p_{AT} v točki E' . Ker imata kota $\angle E'BE$ in $\angle DTD'$ vzporedne krake, sta enaka in je tudi kot $\angle E'BE$ pravi.

Po Talesovem izreku o sorazmerjih je zaradi vzporednosti premice q in daljice DT

- $AT : TE = AD : DB = \lambda$

in na enak način zaradi vzporednosti premice r in daljice $D'T$

$$\blacksquare TA : TE' = D'A : D'B = \lambda.$$

Zato je $TE = TE'$ in je T razpolovišče daljice EE' .

Pokazali smo, da je kot $\angle E'BE$ pravi, zato po obratu Talesovega izreka točka B leži na krogu s premerom EE' in središčem T ter velja

$$\blacksquare TB = TE = TE'.$$

S tem smo dokaz končali. Po pravkar dokazanem namreč velja

$$\blacksquare TA : TB = TA : TE = \lambda.$$

Tako smo dobili iskano alternativno definicijo krožnice: *Apolonijeva krožnica je množica točk C , ki so od gorišč A in B oddaljene v predpisanem razmerju $AC : BC = \lambda \neq 1$.*

Zaključek

Sedaj lahko rešimo problem prestrežanja ladje, ki smo ga zastavili na začetku sestavka. Recimo, da se v nekem trenutku nahajamo v točki B , ladja pa v točki A . Ladjo bomo lahko prestregli, če bo ob nekem času t obstajal trikotnik ABC s krakoma $AC = v_1 t$ in $BC = v_2 t$. Vse takšne točke C ležijo na Apolonijevi krožnici z goriščema A in B in razmerjem $v_1 : v_2$. Prav tako mora točka prestrežanja ležati na premici, ki jo določa tir plovbe ladje. Zato moramo čoln usmeriti v točko, ki je presek nosilke tira ladje in Apolonijeve krožnice.

Prav tako znamo narisati trikotnik s podatki c , t_c in $b : a$. Najprej narišemo osnovnico $AB = c$ in njeno razpolovišče označimo z S . Potem je točka C presek krožnice s središčem S in polmerom t_c ter Apolonijeve krožnice z goriščema A in B in razmerjem $b : a$.

Radovedni bralec lahko s pridobljenim znanjem skuša narisati paralelogram z danima stranicama a in b in razmerjem diagonal $e : f$.

× × ×

www.presek.si

www.dmfa-zaloznistvo.si

Prometna ureditev Zelenega gaja

↓↓↓

NIKA NOVAK

→ Prebivalci ulice *Zeleni gaj*, ki je bila del cone z omejitvijo hitrosti 30 km/h, so v času vsakodnevnih prometnih konic opazili, da se je promet v sicer mirnem okolju povečal. Nekateri so si po njihovi ulici skrajšali pot, drugi pa so se le skušali izogniti čakanju v koloni. Ker pa se je večini mudilo, omejitve hitrosti niso upoštevali (ali pa je sploh niso opazili). Tako je prej mirna cesta postala nevaren poligon za pešce, kolesarje in otroke. Zato so se prebivalci odločili, da se obrnejo na občino s prošnjo za postavitve hitrostnih ovir.

Občinski uradniki so prošnjo proučili, nato pa policistom naročili, da en teden merijo hitrost vseh vozil, ki se peljejo po ulici *Zeleni gaj*. Ko so prejeli vse meritve, so prošnjo zavrnil z obrazložitvijo, da je povprečna hitrost enaka 35 km/h, kar ni veliko odstopanje od omejitve.

Na kakšen način bi se pobudniki umiritve prometa lahko pritožili na odločitev občine, ko so prejeli tabelo izmerjenih hitrosti (tabela 1)?

Iz danih podatkov izračunaj povprečno vrednost, mediano in modus. Izračunaj še delež voznikov, ki se držijo omejitve.





hitrost	število avtomobilov
do 30 km/h	1220
od 30 - 40 km/h	1313
od 40 - 50 km/h	2066
od 50 - 60 km/h	1998
od 60 - 70 km/h	624
od 70 km/h - 90 km/h	103

TABELA 1.

Kako izračunamo povprečno vrednost?

Dani podatki so porazdeljeni v frekvenčne razrede. Število avtomobilov predstavlja frekvence posameznih razredov. Za izračun povprečne vrednosti (aritmetične sredine) izračunamo povprečje vsakega intervala in za vsak podatek predpostavimo, da je enak povprečju pripadajočega intervala.

Povprečno vrednost dobimo tako, da posamezne srednje vrednosti razredov pomnožimo s frekvencami in delimo s skupnim številom podatkov. Za prvi razred je povprečna vrednost 15, ki jo dobimo kot sredino intervala med 0 in 30:

$$\bar{X} = \frac{15 \cdot 1220 + 35 \cdot 1313 + 45 \cdot 2066}{1220 + 1313 + 2066 + 1998 + 624 + 103} + \frac{55 \cdot 1998 + 65 \cdot 624 + 80 \cdot 103}{1220 + 1313 + 2066 + 1998 + 624 + 103} = 43,13.$$

Tako izračunana povprečna vrednost se razlikuje od prave, je pa izračun hitrejši in v primeru tako podanih podatkov edini mogoč.

Kako izračunamo mediano?

Mediana ali *središčnica* je hitrost, za katero velja, da je vsaj polovica voznikov vozila počasneje in vsaj polovica hitreje. Ker je vseh voznikov 7342, je mediana povprečna vrednost hitrosti 3671. in 3672. voznika. Ker je $1220 + 1313 < 3671$ in $1220 + 1313 + 2066 > 3672$, sta oba voznika vozila od 50 do 60 km/h. Zato bo tudi mediana v tem razredu. Izračunamo jo tako, da na interval od 50 do 60 enakomerno razporedimo vse voznike tega razreda. Prvemu pripišemo hitrost

50 km/h, zadnjemu pa 60 km/h. Zato interval med 50 in 60 razdelimo na $2066 - 1$ enakih delov. Ker je $1220 + 1313$ voznikov vozilo manj kot 50 km/h, je 3671. voznik $(3671 - (1220 + 1313) - 1)$. med 2065 hitrostmi znotraj intervala.

Enako izračunamo še hitrost 3672. voznika in izračunamo njuno povprečje:

$$\begin{aligned} \blacksquare \text{ Me} &= 50 + \frac{3671,5 - (1220 + 1313 + 1)}{2066 - 1} (60 - 50) \\ &= 55,51. \end{aligned}$$

Mediana je višja in bi že lahko prepričala občinske veljake, saj je polovica voznikov vozila hitreje kot 55 km/h v območju umirjene vožnje.

Kako izračunamo modus?

Modus ali *gostiščnica* je najpogostejša vrednost. Pri porazdelitvi v frekvenčne razrede imenujemo razred z največjo frekvenco *modalni razred*. Modalni razred je v našem primeru interval od 40 do 50 km/h, modus pa izračunamo po formuli:

$$\blacksquare \text{ Mo} = 40 + (50 - 40) \frac{2066 - 1313}{(2066 - 1313) + (2066 - 1998)} = 49,17.$$

Za modus tako izberemo vrednost znotraj modalnega razreda, čigar razdalja do sosednjih razredov je sorazmerna spremembi frekvence.

Previdni vozniki

Za konec izračunajmo še delež voznikov, ki vozi po predpisih:

$$\blacksquare \frac{1220}{7342} = 0,1662 = 16,62\%.$$

Po pritožbi in daljši statistični razpravi so se na občini le zganili in postavili hitrostne ovire. Zdaj pa se pritožujejo vozniki.

www.obzornik.si

www.dmfa.si

Preprosti številski trikotniki

↓↓↓

MARKO RAZPET

→ Razvrstimo po vrsti vsa liha števila v trikotnik tako, da bo v prvi vrstici eno število, v drugi dve števili, v tretji tri števila in tako dalje (številski trikotnik (1)). Zapišemo lahko seveda le nekaj vrstic, sicer pa je številski trikotnik neomejen.

$$\begin{array}{cccccc}
 1 & & & & & \\
 3 & 5 & & & & \\
 7 & 9 & 11 & & & \\
 13 & 15 & 17 & 19 & & \\
 21 & 23 & 25 & 27 & 29 & \\
 31 & 33 & 35 & 37 & 39 & 41 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
 \end{array} \quad (1)$$

Seštejmo v vsaki vrstici vsa števila. Takoj opazimo, da dobimo po vrsti kube naravnih števil: $1 = 1^3$, $3 + 5 = 8 = 2^3$, $7 + 9 + 11 = 27 = 3^3$, ... Ali to pravilo drži za vsako vrstico?

Za odgovor na zgornje vprašanje nam bo v veliko pomoč trikotna razdelitev vseh naravnih števil (številski trikotnik (2)).

$$\begin{array}{cccccc}
 1 & & & & & \\
 2 & 3 & & & & \\
 4 & 5 & 6 & & & \\
 7 & 8 & 9 & 10 & & \\
 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & \\
 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
 \end{array} \quad (2)$$

V prvo vrstico postavimo eno število, v drugo dve števili, v tretjo tri števila in tako dalje. Zadnje, skrajno desno število v n -ti vrstici je ravno vsota prvih n zaporednih naravnih števil. Rezultat nam je znan:

$$\blacksquare \quad T_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Vidimo, da je T_n ravno n -to trikotniško število. Trikotniška sestavljajo zaporedje $1, 3, 6, 10, 15, 21, \dots$

Liha števila prav tako sestavljajo zaporedje: $1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots$. Označimo k -to liho število z $\ell(k)$. Očitno je $\ell(k) = 2k - 1$. Podobno sode števila sestavljajo zaporedje $2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots$. Z $s(k)$ označimo k -to sodo število. Očitno je $s(k) = 2k$. Pri tem je k poljubno naravno število. Zaporedji lih in sodih števil sta aritmetični z razliko 2. Zaporedje trikotniških števil pa ni aritmetično, ker razlika $T_{n+1} - T_n = n + 1$ ni stalna, pač pa je zaporedje teh razlik aritmetično.

Podobno kot liha števila razvrstimo v trikotnik tudi vsa sode števila (številski trikotnik (3)).

$$\begin{array}{cccccc}
 2 & & & & & \\
 4 & 6 & & & & \\
 8 & 10 & 12 & & & \\
 14 & 16 & 18 & 20 & & \\
 22 & 24 & 26 & 28 & 30 & \\
 32 & 34 & 36 & 38 & 40 & 42 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
 \end{array} \quad (3)$$

Trikotnik naravnih števil (2) je v preprosti zvezi s trikotnikoma lih in sodih števil. Funkcija $k \mapsto \ell(k)$ ga povratno enolično preslika na trikotnik lih števil (1), funkcija $k \mapsto s(k)$ pa na trikotnik sodih števil (3). Pri tem se ohranja urejenost številskih trikotnikov.





V n -ti vrstici trikotnika (1) je n lihich števil. Zadnje je T_n -to liho število, to se pravi $\ell(T_n) = 2T_n - 1 = n(n + 1) - 1 = n^2 + n - 1$. V $(n - 1)$ -ti vrstici je za $n > 1$ zadnje število T_{n-1} -to liho število. Zato se n -ta vrstica v trikotniku (1) prične z $\ell(T_{n-1}) + 2 = 2T_{n-1} - 1 + 2 = n(n - 1) + 1 = n^2 - n + 1$. Vsota L_n vseh števil v n -ti vrstici je enaka vsoti n členov aritmetičnega zaporedja, kar lahko izrazimo kot produkt aritmetične sredine prvega in zadnjega člena s številom členov:

$$\begin{aligned} \blacksquare L_n &= \frac{(n^2 - n + 1) + (n^2 + n - 1)}{2} \cdot n \\ &= \frac{2n^2}{2} \cdot n = n^3. \end{aligned}$$

Torej je v n -ti vrstici številskega trikotnika, ki ga sestavljajo liha števila, vsota L_n enaka n^3 .

Prav tako je v n -ti vrstici trikotnika (3) n sodih števil. Zadnje je T_n -to sodo število, to se pravi $s(T_n) = 2T_n = n(n + 1) = n^2 + n$. V $(n - 1)$ -ti vrstici je za $n > 1$ zadnje število T_{n-1} -to sodo število. Zato se n -ta vrstica trikotnika (3) prične s $s(T_{n-1}) + 2 = 2T_{n-1} + 2 = (n - 1)n + 2 = n^2 - n + 2$. Vsota S_n vseh števil v n -ti vrstici je enaka vsoti n členov aritmetičnega zaporedja, kar spet lahko izrazimo kot produkt aritmetične sredine prvega in zadnjega člena s številom členov:

$$\begin{aligned} \blacksquare S_n &= \frac{(n^2 - n + 2) + (n^2 + n)}{2} \cdot n \\ &= \frac{2n^2 + 2}{2} \cdot n = n^3 + n. \end{aligned}$$

Torej je v n -ti vrstici številskega trikotnika, ki ga sestavljajo soda števila, vsota S_n enaka $n^3 + n$.

Posledično je v n -ti vrstici številskega trikotnika (2), ki ga sestavljajo vsa naravna števila, vsota enaka $(n^3 + n)/2$.

Kako bi ugotovili, kje v številskih trikotnikih (1) oziroma (3) je izbrano liho oziroma sodo naravno število m ? Najprej je treba poiskati tako naravno število k , za katero je $m = \ell(k)$ ($m = s(k)$). Nato določimo, kje v trikotniku naravnih števil je ta k . Vemo, da je treba poiskati tako naravno število n , za katero je $T_{n-1} + 1 \leq k \leq T_n$ oziroma $n^2 - n + 2 \leq 2k \leq n^2 + n$. Izkaže se, da je n celi del pozitivne rešitve kvadratne enačbe $x^2 - x + 2 - 2k = 0$:

$$\blacksquare n = \left\lfloor \frac{1 + \sqrt{8k - 7}}{2} \right\rfloor.$$

Celi del realnega števila ξ je največje celo število, ki ne presega ξ . To število označimo z $\lfloor \xi \rfloor$. Razlika $d = k - T_{n-1}$ pa pove, kateri po vrsti je k v n -ti vrstici trikotnika naravnih števil in s tem tudi, kje je m v n -ti vrstici trikotnika lihich oz. sodih števil.

Primer. Kje ima v trikotniku lihich števil svoje mesto število $m = 25$? Hitro ugotovimo, da je tedaj $k = 13$, $n = 5$ in $T_{n-1} = T_4 = 10$. S tem imamo še $d = 13 - 10 = 3$. Število 25 je zato tretje v peti vrsti trikotnika lihich števil.

Naloga. Poišči vsote po vrsticah v številskega trikotniku (4) za 2 zmanjšanih trikratnikov naravnih števil in poišči formulo za vsote števil po vrsticah. Na katerem mestu v trikotniku je število 2020?

1						
4	7					
10	13	16				
19	22	25	28			
31	34	37	40	43		
46	49	52	55	58	61	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

(4)

× × ×



SLIKA K MATEMATIČNEMU TRENUTKU.

× × ×

CD stereo-spektroskop

↓↓↓

ANDREJ LIKAR

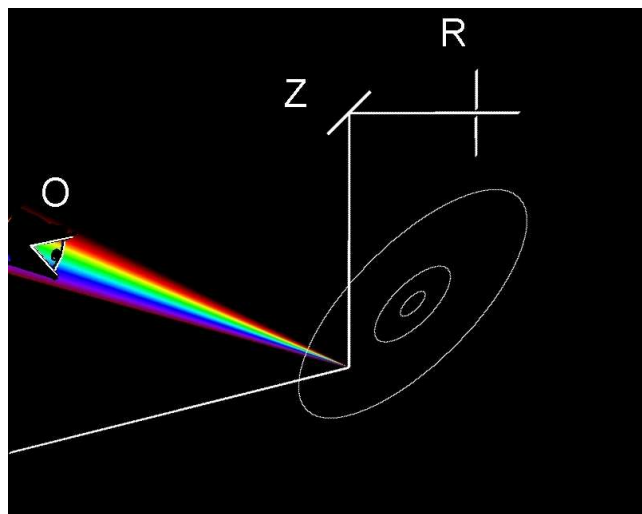
→ **CD ploščo lahko uporabimo kot optično mrežico in iz nje naredimo preprost, a presenetljivo dober optični spektroskop. Bralce bo ta zapis morda spodbudil, da si tak spektroskop naredijo sami. Optičnih mrežic navadno nimamo pri roki, kak star, morda celo odvržen CD pa se hitro najde.**

Na spletu najdemo nič koliko navodil, kako naredimo tako napravo. Tu predstavljamo stereo-spektroskop, kjer gledamo na spekter z obema očesoma hkrati. Vidimo spekter, kot da plava v prostoru. Gledanje z obema očesoma izostri nekatere zanimive podrobnosti spektrov. Tudi če imamo povsem oster vid, je stereo-opazovanje manj naporno, pri majhnih optičnih napakah oči, kot je na primer astigmatizem, pa te pri stereo opazovanju manj motijo.

Osnovni sestavini vsakega optičnega spektroskopa sta dovolj ozka in dovolj natančno izdelana reža in seveda optična mrežica ali prizma, ki prostorsko loči svetlobo z različnimi valovnimi dolžinami. Na CD plošči je digitalni zapis organiziran v obliki koncentričnih sledi, ki so 1600 nm narazen. Ker vidni svetlobni spekter sestavljajo valovi z dolžinami med 400 nm in 700 nm, na bralni strani osvetljene plošče hitro opazimo mavrične barve. Te nastanejo z interferenco svetlobe, ki se siplje na sledeh.

Spektroskop bo torej sestavljen po razmisleku, predstavljenem na sliki 1. Svetloba (denimo bela, kot na sliki), ki preide režo, pade na vrtljivo zrcalo Z, ki ga usmeri na CD ploščo, kjer se razkloni. Spekter opazujemo v snopu barvno razklonjene svetlobe. Iz reže v resnici izhaja divergentni snop svetlobe, ki jo oko zbere na mrežnici. Reža mora biti čim ožja, da se slika reže na mrežnici očesa, ki jo vidimo v določeni spektralni barvi, ne prekriva preveč s slikami sosednjih barv. Slike reže v različnih barvah so na-

mreč na mrežnici očesa premaknjene, ker se različne barve interferenčno ojačujejo pod različnimi koti. Širino reže pa moramo prilagoditi svetilnosti vira, saj pri preozki reži spektra sploh ne vidimo. Zato mora reža imeti nastavljivo širino. Prav tako moramo poskrbeti, da z zrcalom, vrtljivim okrog vodoravne osi, postavimo na mesto, primerno za udobno opazovanje.



SLIKA 1.

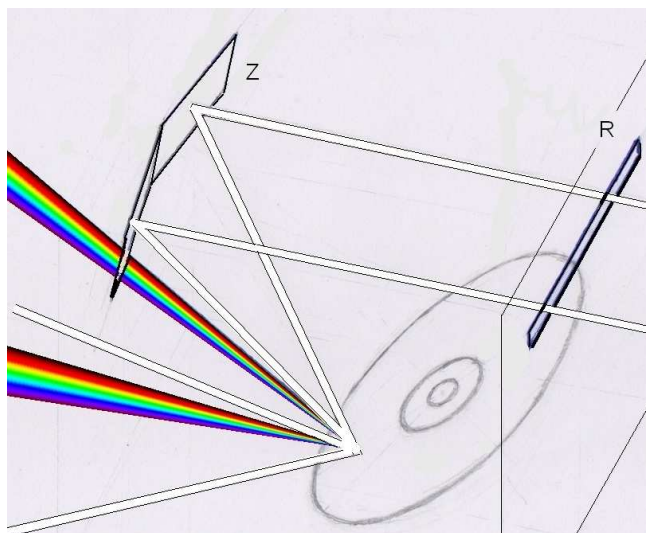
Zasnova spektroskopa. Svetlobni curek, ki se prebije skozi režo R in odbije od zrcala Z, se na CD plošči razkloni v spektralne barve, ki zadenejo oko O. Taka zasnova omogoča udobno opazovanje spektra.

V zgornji zasnovi lahko eno dolgo zrcalo nadomestimo z dvema, ki usmerjata spekter hkrati v obe očesi. Na sliki 2 je skicirana taka postavitev zrcal. Pri gradnji spektroskopa kot med zrcaloma nastavimo s poskušanjem. Pri tem si pomagamo z gubicami. Vse skupaj postavimo v trdno škatlo, ki jo znotraj počr-





nimo. Škatlo na sliki 3 smo zlepili iz parketnih deščic. Še beseda o reži z nastavljivo širino. Tu se rado zatakne, saj pogosto naletimo na navodilo, da mora reža imeti po vsej dolžini, kar se da enako širino. Tako režo je težko narediti, še posebno, če mora biti zelo ozka. Mi smo uporabili dve sladoleдни paličici, ki jih lahko kupimo v vrečki brez sladoleda (lučke ali ježka). Na sliki 4 je posneta taka reža. Spodnja paličica je prilepljena na ohišje, zgornja pa je vrtljiva okrog osi, ki jo določa vijak. Taka reža sicer nima povsod enake širine, kar pa ne vpliva na kvaliteto spektra. Tako dobimo imeniten stereo-spektroskop, ki ima res presenetljivo dobre lastnosti.

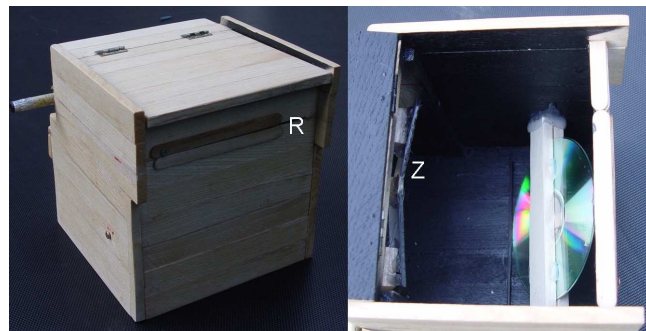


SLIKA 2.

Zrcali Z sta postavljeni pod kotom, ki zagotavlja obema očesoma hkrati pogled na spekter.

Pa si pogledjmo nekaj spektrov, ki smo jih s fotoaparatom posneli na našem spektroskopu. Pri tem seveda zajamemo na fotografski medij le sliko enega spektra, saj je fotoaparat »enooki opazovalec«. Spektri so pri opazovanju precej lepši kot ti na slikah.

Pred leti, ko še ni bilo LED sijalk, so na veliko priporočali živosrebrne nadomestke običajnih žarnic na žarilno nitko. Nekaj teh je še vedo v uporabi. Njihov spekter je prikazan na sliki 5. Spekter na sliki 6 je posnet pri daljši ekspoziciji, da se vidijo tudi črte v modrem in violičnem delu, ki jih sicer s prostimi očmi ne vidimo. Po odkritju modrih svetlečih



SLIKA 3.

Levo: zaprta škatla, v kateri sta zrcali in CD plošča, vidna je le reža R. Desno: odprt pokrov škatle, kjer vidimo zrcali Z in CD ploščo. Spekter opazujemo skozi okence pod zrcali Z na zadnji strani škatle.

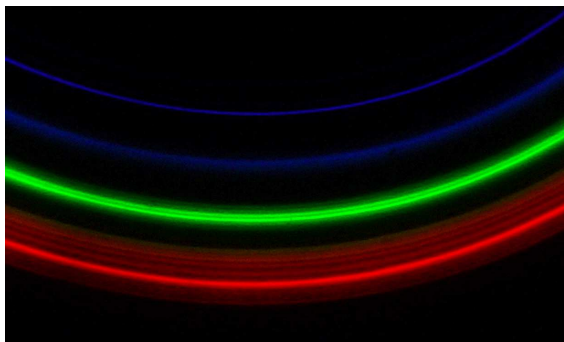


SLIKA 4.

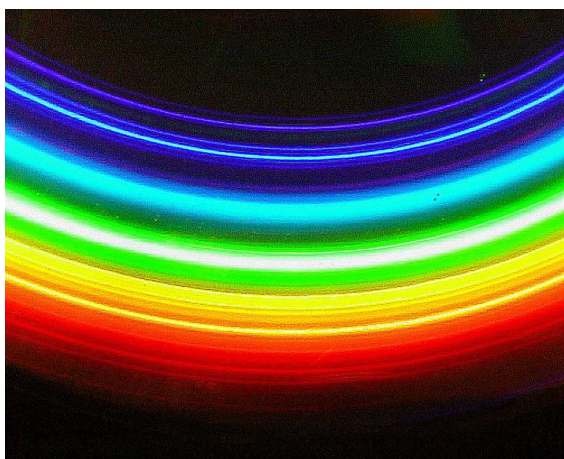
Režo s spremenljivo širino smo naredili iz paličic za sladoleđ.

diod (za kar je bila leta 2014 podeljena Nobelova nagrada za fiziko) so kmalu prišle na trg LED sijalke, ki za enako svetlost porabijo tudi petkrat manj moči od žarnic na nitko. Spekter take sijalke je na sliki 7. Lepo vidimo moder pas originalne svetlobe, ki jo potem premazi na steklu sijalke spremenijo v mešanico rdeče, rumene in zelene, primerno za osvetlitev prostorov.

Pri oceni kvalitete spektroskopa je pomembna njegova ločljivost. To je lastnost, da spektralne črte z bližnjimi valovnimi dolžinami še ločimo med seboj. Da preverimo ločljivost, je vredno pogledati spekter rumene svetlobe iz natrijeve žarnice. Ta vsebuje valovanje z dvema, zelo bližnjima valovnima dolžinama, in sicer 589,0 nm in 589,6 nm. Razlika valovnih dolžin je torej le 0,6 nm. Na sliki 8 smo posneli njun spekter. Ne le, da sta črti lepo ločeni, jasno je videti, da je svetloba z večjo valovno dolžino precej (v resnici dvakrat) šibkejša. Kljub preprosti izdelavi smo dobili presenetljivo dober spektroskop.

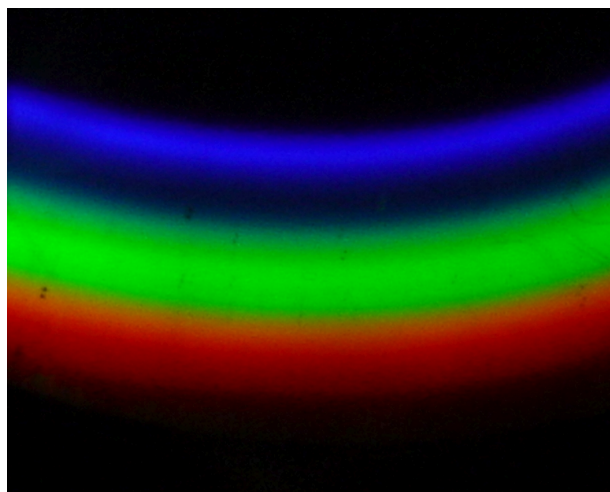


SLIKA 5.
Črtast spekter svetlobe varčne živosrebrne žarnice



SLIKA 6.
Spekter varčne žarnice pri daljši ekspoziciji

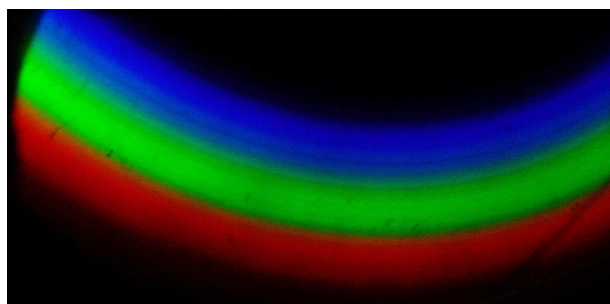
Končno pogledimo še spekter svetlobe, ki pride s Sonca. Na sliki 9 je prikazan tak spekter. Pri natančnejšem ogledu vidimo v njem temnejše črte. Dobro so vidne v modrem in modro-zelenem delu spektra. Posebno izrazita pa je črta v rumenem delu spektra, saj rumene barve skoraj ne vidimo. Svetloba s površja Sonca se mora namreč prebiti skozi Sončevo atmosfero, kjer jo v valovnem območju 589 nm natrijevi atomi precej oslabijo. Oslabijo jo tudi drugi atomi s prehodi iz osnovnega energijskega stanja v višja stanja. Pri tem se absorbira svetloba pri ostro določenih valovnih dolžinah, kjer imajo fotoni ravno pravšnjo energijo.



SLIKA 7.
Spekter LED sijalke



SLIKA 8.
Natrijeva dvojna rumena črta (dublet). Zgornja črta ($\lambda = 589,0nm$) je dvakrat močnejša kot spodnja ($\lambda = 589,6nm$).



SLIKA 9.
Spekter svetlobe iz Sonca kaže temne absorpcijske črte.

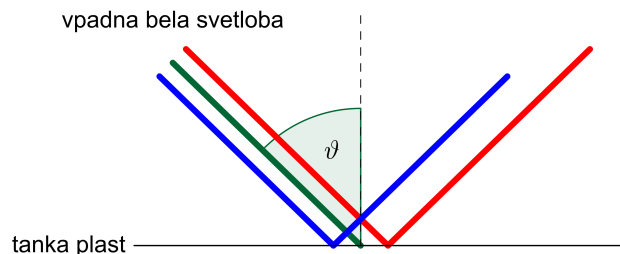
× × ×

Pero iz pavjega repa

↓↓↓

ANDREJ LIKAR

→ Odboj svetlobe na tankih plasteh pogosto opazujemo na milnih mehurčkih in lužah, na katerih plava tenka plast motornega olja. Pisane barve nastanejo zaradi interferenčne oslabitve odbite svetlobe pri določenih valovnih dolžinah v izbranih smereh (glej sliko 1). Vpadna bela svetloba se zato obarva. Rožnata barva, turkizno-zelena, rjava, škrlatna, magenta, cijan, zlata, indigo modra, olivna, to je le nekaj imen za te nespektralne barve. Svetloba teh barv ima širok spekter, je torej mešanica spektralnih barv, ki so, kot vemo, rdeča, oranžna, rumena, svetlo zelena, zelena, modro-zelena, modra in violečna ter seveda vsi odtenki med njimi.



SLIKA 1.

Odboj na tankih plasteh obarva belo vpadno svetlobo. Na sliki zelena svetloba pri odboju pri danem kotu ϑ destruktivno interferira. Odbita svetloba vsebuje le modro in rdečo, kar dojamemo kot škrlatno barvo, eno od opaženih barv pavjega peresa

Lepe barve imajo tudi nekatere živali, ki se obarvajo prav zaradi interference svetlobe na tankih plasteh. Med temi prevladujejo žuželke in ptice, med pticami pa izstopa pav s svojim perjem. Barva peresa pavjega repa se pred našimi očmi prelija od violečne preko modre do zelene, zlata in rožnate. Pred časom sem dobil dolgo pero iz pavjega repa z očesom

(glej sliko 2). Ta očesa so geometrijsko pravilno posejana po razkošni odprti vlečki, ko pav izvaja svoj paritveni ples. Na sliki 3 smo posneli to oko od blizu. Začudi nas izjemna natančnost vzorca na peresu.

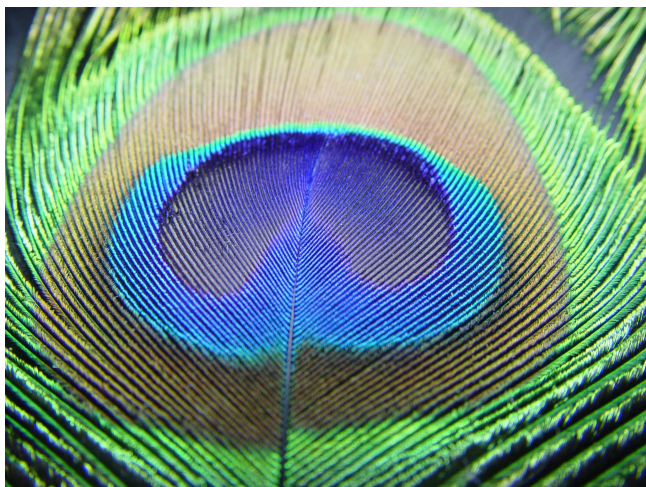


SLIKA 2.

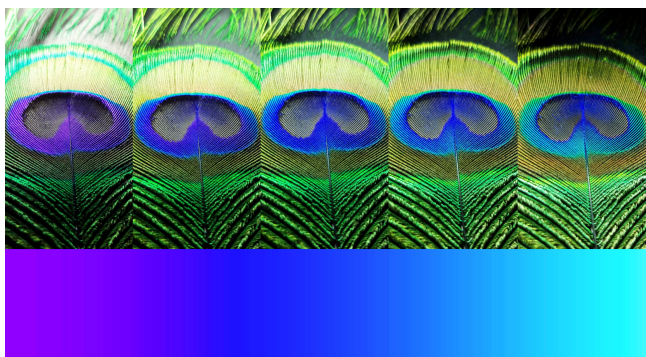
Pavje pero z očesom

Pa privzemimo, da gre pri obarvanosti delov peresa, ki so, glede na smer opazovanja, izrazito škrlatne, modre ali zelene barve, za interferenco na tankih plasteh. Posneli smo barvo tega dela očesa pri osvetlitvi z belo svetlobo pod različnimi odbojnimi koti. Slika 4 kaže te barve pri padajočem vpadnem kotu, prvo torej pri kotu blizu 90° stopinj, zadnjo pa pri

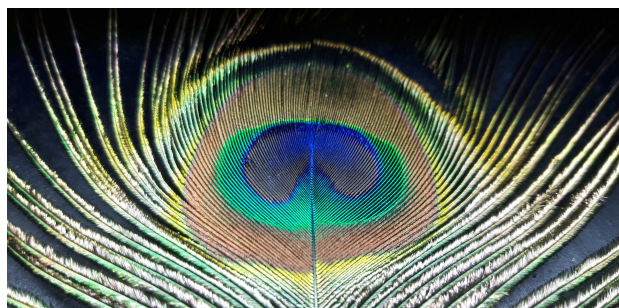
skoraj navpičnem vpadu. Barve se prelivajo iz škrlatne preko modre, zelene do rumeno-zelene. Za primerjavo smo izračunali barve pri različnih vpadnih kotih, ki jih pričakujemo pri vpadu bele svetlobe na tanko plast z izbrano debelino (slika 4 spodaj). Soledje barv se kar dobro ujema z barvami peresa. Na računalniškem zaslonu so te barve verjetno dosti bolj prepričljive kot na tiskani sliki. Pri povsem navpičnem vpadu se rožnato obarva tudi zunanji rob očesa, kot to vidimo na sliki 5.



SLIKA 3.
Oko na pavjem peresu od blizu



SLIKA 4.
Oko, osvetljeno z belo svetlobo pod različnimi koti. Spodaj je prikazan izračunan potek barve v odvisnosti od vpadnega kota. Na levi je vpadni kot blizu 90° , na desni pa 0° .



SLIKA 5.
Pod navpično osetljivijo postane obroba očesa rožnata.

Čudimo se in se sprašujemo, kako je lahko narava ustvarila tako ptico. Seveda ne bomo opustili prepričanja v evolucijo, a nas dvomljivci vseeno spravijo v zadrego, kot nas spravi v zadrego razlaga o netopirjevi orientaciji z zvokom, o natančnem kameleonomem lovu z jezikom in o še mnogih, res neverjetnih živalskih sposobnostih.

Pri pavu gre za spolni dimorfizem, torej pojav, kjer se osebki močno razlikujejo po spolu. Pavi so bistveno bolj okrašeni kot pavice, ki so podobne kuram. Na izrazit dimorfizem naletimo tudi pri rajskih pticah. Nekaj spolnega dimorfizma najdemo pri skoraj vseh živalski vrstah, tudi pri ljudeh.

Ni pa povsem jasno, kako se je izjemna, filigranska lepota pavje vlečke razvila. Najpreprostejša razlaga povezuje razvoj z izbiro samice, ki med vsemi samci izbere »najlepšega«, to pa je samec z najbolj izpopolnjeno vlečko, najizrazitejšo krono na glavi. Samčeva lepota je torej močno povezana s selekcijo, se torej s časom ne le ohranja, pač pa tudi izpopolnjuje. Pri tem nas nekoliko čudi samičina skoraj človeška sposobnost zaznati izjemne podrobnosti na samčevi zunanosti. Včasih smo pri teh vprašanjih preveč zaverovani sami vase. Ne pomislimo, da lahko samica vidi tudi ultraviolečno in infrardečo svetlobo, za katero smo ljudje povsem slepi. Prav lahko je izrazito pozorna na samčevo zunanost, saj ta nakazuje njegovo trdno zdravje in moč preživetja.

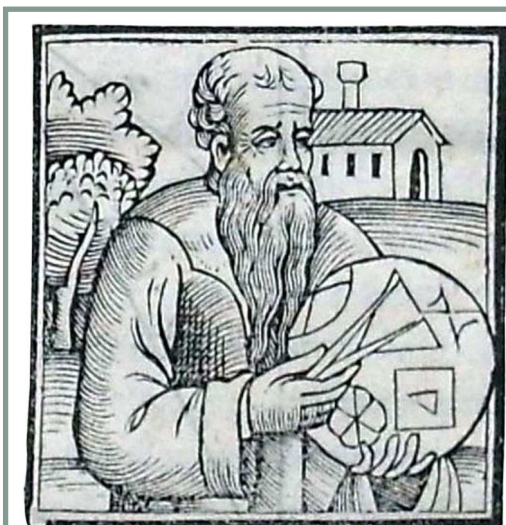
Literatura

- 1 A. Likar, *Kako na zaslonu prikazati barve milničnih mehurčkov?*, Presek 45 (2017/2018), 11–13.

× × ×

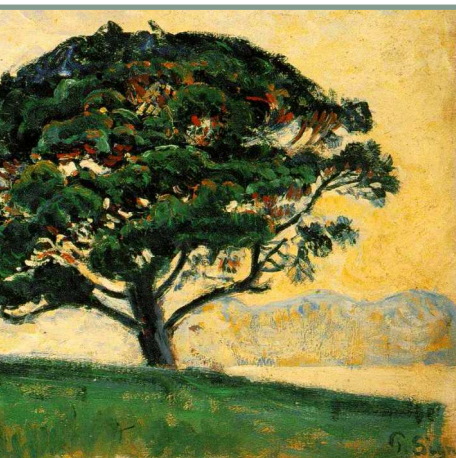


Nagradna križanka



AVTOR MARKO BOKALIČ	GRŠKI MITIČNI ENODKI VELIKANI	AZERBAJDŽANSKI POLOTOK V KASPLJ. JEZERU	SOSEDI CRKE R	NEPO-SREDNI MOŠKI POTOMEČ	UPLENITEV ZIVALI	PODDRUŽI-NA PAPIG S ŠČETI-NASTIM JEZIKOM	MALI ANDREJ	
DEL VESOLJ-SKE LADJE BREZ POTISNIH RAKET				6				
OZNAKA DRUGE NEZNANKE V ENAČBI								
KARMEN SVEGL			DEPATRTMA NA SEVERU FRANCJE					
PREMO-GOVI UGASKI			LADJISKI COLN	IZVOR, RESURS				
MERA JOH. JUTRO				IGRA NA SREČO				
CELINA ONSTRAN ANTLANTIKA					JAMES ENSOR			
					SUPEREGO			

GRAFIČNO OBLIKOVANJE MATEVŽ BOKALIČ	ZENIT	ANGLEŠKI FIZIK, ODKRITELJ ZAKONOV GIBANJA	AMERIŠKI ASTRONOM (GEORGE WILLIAM)	CITROENOV STARO-DOBNIK	MEJNA REKA NA SEVERO-VZHODU KITAJSKE	60 SEKUND			ČEŠKI PISATELJ (KAREL)		AGAVI PODOBNA RASTLINA	KONČNI DEL VODOVNE NAPELJAVE	UGAN-KARSTVO
PERIODIČNO GIBANJE MED SKRAJNIMA LEGAMA								EVROPSKA OTOŠKA DRŽAVA	PODKON-TINENT VZHODNO-SIBIRSKA POKRAJINA				
NESIMET-RIČNOST									NAŠ SLIKAR (RIHARD) POLJSKI PLES				
ŠVEDSKI PISATELJ, RAZSVET-LJENEC (OLOF VON)			3			DRAMA-TURGINJA RATEJ	GRŠKI BOG LJUBEZNI		BANJA SKLAD-NOST, KONGRU-ENCA			VELIKA AMERIŠKA ZVER	AM. POLITIK BIDEN
STARA ENOTA ZA POSPEŠEK				MLADA PEVKA AVSENIK	POUČNI IZLET REKA IN GROFLJA V ANGLIJI					1			EKLIPSA PO NAŠE
RIMSKA ZNAKA ZA 50 IN 100			JUŽNO-AMERIŠKI SADEŽ	HČI							LARS ONSAGER		KALCIJ
INDUS-TRIJSKI KRAJ V POSOČJU							OČKA	ZDRUŽENJE SORODNIH KONCERNOV					7
NEKONČ-NOST TRAJANJA								DIRKALIŠČE FORMULE 1 V ITALIJI					OPIS GLAVNIH ZNAČIL-NOSTI
JUNAK SREDNJE-VESKEGA DVORSKE-GA EPA						NAŠ GLASBENIK (GIANNI) ČRN PTIČ PEVEC				9			KRAJ PRI CERKNICI
ŠTORKLIJA V PREK-MURSKEM OKOLJU					TOPLOTNA OBDELAVA HRANE PRISLOV KRAJA								AMERIŠKI IGRALEC (LEONARDO) ROSVITA PESEK
PLEČATOST MAJHNEGA ČLOVEKA													JADRNIC
NEVTRAL ZA MNOŽENJE				PRI SMEJANJU IMAMO ODPRTA									VLAK, KI USTAVLJA LE NA GLAVNIH POSTAJAH
													GLASBENI INTERVAL, KI OBSEGA ŠEST STOPENJ
													TEMELJNA MATEMAT. TRITEV, KI SE NE DOKAZUJE



STAROGRŠKI MATEMATIK IZ ALEKSANDRIJE, ZNAN PO FORMULI ZA PLOŠČINO TRIKOTNIKA	MOTORNHO VOZILO, KI DRSI NA ZRAČNI BLAZINI	AMERIŠKI RAPER	NAŠA SOPRANISTKA (NORINA)	POČITNIŠKE VERSKE DELAVNICE ZA OTROKE	REKA V SANKT PETERBURGU
	4				
VELIKI KOSI POHIŠTVA					
NAŠ MATEMATIK, ZASLUŽNI PROFESOR (IVAN)					
METER, SEKUNDA, KILOGRAM, KELVIN DUO					



CANKARJEV JUNAK (MARTIN)	ŠKOTSKI FIZIK, PIONIR ELEKTROOPTIKE (JOHN)	BOTO, ČERNE, HREN, MOŠKON, SRŠEN	KOMPOST	NAŠ DIRIGENT (KRISTIJAN) VODNA RASTLINA							
	NEMŠKI ASTRONOM IN MATEMATIK (JOHANNES)						NEVTRAL ZA SESTEVANJE MEDSEBOJNI ODNOS				
	2 REKA NA PELOPONEZU, KI TEČE MIMO SPARTE						PLETENO OBLAČILO NAŠ MATEMATIK (ANDREJ)				
	VEČANJE STAROVEŠKO MESTO V MEZOPOTAMIJI				RUS. FIZIK (VLADIMIR) IT. PISATELJICA (ELSA)		AMERIŠKI COUNTRY GLASBENIK (GRAM)				
		JAZZOVSKJE PAVKE KIT. IZVORA NAŠ VIOLIST					SCOTTTOV ZGODOVINSKI ROMAN RAZKREKA				
	BELJAKOV. ŽIVILO NAŠ ZGODOVINAR (JOSIP)				PIONIR SL. PEDIJATRIJE (BOGDAN) REŠITELJICA TEZEJA				ŠVICARSKI NEVROLOG (AUGUSTE) HELLU		
DERIVAT AMONIAKA				DEBELEJŠI DROG				IZRAELSKO NARODNO GLEDALIŠČE V TEL AVIVU LAGODNOST			
ŠPANSKI SLIKAR (SALVADOR) ZASTRUPITEV KRVI				STAREJŠI ROMUNSKI DŽIP MUSLI-MANSTVO			NEKDANJA TELOVADNA PRIREĐITEV EKVATOR. OBMOČJA			ČAS ENEGA VRTLJAJA ZEMLJE OKOLI SVOJE OSI	
	PRIVRŽENKA LENINIZMA JANEZ EVANGELIST										
	ZAPRTA DRUŽBENA SKUPINA OZNAKA NEZNANKE					IZRASTEK NA GLAVI ŽIVALI					
			VODA V TRDNEM STANJU KAZALNI ZAIJEK			MAKEDONSKI PLES SPLETNA DØMENA AVSTRILJE					
					NAGEL, SILOVIT POJAV BOLEZEN, ZNAKOV			7			
					JUGOVZHOJNI PREDDEL GRČIJE Z ATENAMI						

POKOJNI PALESTINSKI VODITELJ (JASER)					
DOMISLJAVEC VPADLJIVEGA VEDENJA	MAKEDON. LETOVIŠČE OB ISTOIMENSKEM JEZERU			5	

NAGRADNI RAZPIS

→ Črke iz oštevilčenih polj vpišite skupaj z osebniimi podatki v obrazec na spletni strani www.presek.si/krizanka

ter ga oddajte do **15. maja 2020**, ko bomo izžrebali tri nagrajence, ki bodo prejeli **knjižno nagrado**.

27. sanktpeterburška astronomska olimpijada (SAO)

↓↓↓

ANDREJ GUŠTIN

→ 25. marca 2020 so organizatorji Sanktpeterburške astronomske olimpijade (SAO) objavili končne rezultate. Naši tekmovalci in tekmovalke so se odlično odrezali.

V kategoriji 8. razred osnovne šole je Tomaž Holc iz OŠ Breg, Ptuj prejel zlato medaljo, Žan Arsov iz OŠ Brezovica pri Ljubljani in Elizabeta Končan iz OŠ Cvetka Golarja, Škofja Loka pa sta prejela bronasto medaljo.

V kategoriji 9. razred osnovne šole je Peter Andolšek iz OŠ dr. Franceta Prešerna, Ribnica prejel srebrno medaljo, Brest Lenarčič iz OŠ Kozje pa bronasto medaljo.

V kategoriji srednja šola je Vid Kavčič iz Srednje šole Črnomelj prejel srebrno medaljo, Marcel Malovrh iz Gimnazije Kranj pa bronasto medaljo.

Vsem tekmovalcem in tekmovalkam, mentorjem in mentoricam čestitamo za izjemen uspeh!

Tokrat objavljamo naloge praktičnega dela letošnje SAO in rešitve nalog za 7. in 8. razred, ki smo jih objavili v prejšnji številki Preseka.

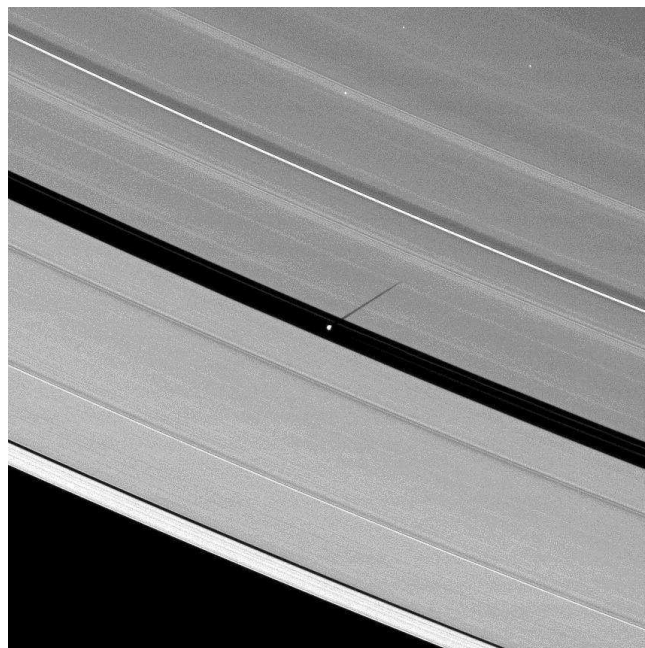
Praktični del 27. SAO 2020

7. in 8. razred osnovne šole

Gibajoča se kopica zvezd je skupina takih zvezd, ki imajo približno enake hitrosti in se po prostoru gibljejo kot enotna kopica v isti smeri. V tabeli 1 so podane razdalje do vesoljskih teles (r), njihove ekvatorialne koordinate (α , δ) galaktične koordinate (longituda l in latituda b) glede na ravnino naše Galaksije in tri komponente njihovih hitrosti (v_x , v_y , v_z) v smereh x , y , z v določenem koordinatnem sistemu. Na podlagi razpoložljivih podatkov v tabeli označi zvezde, ki pripadajo posamezni gibajoči se kopici. Oцени tudi velikost posamezne gibajoče se kopice.

9. razred osnovne šole

Na prvi fotografij (slika 1) je vidna Saturnova luna, ki se giblje v zunanem območju kolobarjev, na drugi (slika 2) pa je Saturn v negativu. Znano je, da je



SLIKA 1.



SLIKA 2.

Št.	r (parsek)	α	Δ	l	B	v_x (km/h)	v_y (km/h)	v_z (km/h)
1	88,1	9h31min16s	-64°14'27''	283,2°	-9,3°	-16,08	-30,4	-0,94
2	10,5	23h7min54s	+75°23'15''	116,4°	+13,9°	8,31	-11,2	-2,415
3	98,0	8h5min3s	-60°38'41''	277,6°	-10,0°	-19,44	-27,8	-2,22
4	89,1	21h14min32s	+63°35'35''	101,5°	+10,0°	-7,313	-19,12	-4,6
5	18,8	4h2min36s	-0°16'8''	190,7°	-36,9°	-7,85	-28	-11,79
6	91,7	9h20min37s	-63°10'0''	281,6°	-9,4°	-16,59	-27,9	-0,70
7	77,2	9h48min19s	-64°3'22''	284,5°	-8,0°	-16,28	-28,32	-0,903
8	36,5	3h33min13s	+46°15'26''	149,9°	-8,0°	-6,53	-27,84	-16,57
9	156,8	23h18min38s	+68°06'40''	114,2°	+6,5°	-10,15	-15,2	-3,7
10	32,3	14h47min33s	-0°16'53''	353,2°	+51,0°	-9,66	-28,07	-10,7
11	80,4	9h10min58s	-58°58'3''	277,6°	-7,4°	-1,53	-18,3	0,34
12	87,1	8h58min45s	-69°8'1''	284,9°	-15,1°	-16,59	-27,5	-1,44
13	174,0	23h30min2s	+58°32'56''	112,5°	-2,6°	-9,3	-30,1	-1,2
14	24,4	1h16min29s	+42°56'22''	127,8°	-19,7°	28,2	1,7	7,2
15	22,1	4h15min26s	+6°11'59''	186,7°	-30,5°	24,5	3,9	-1,6
16	33,3	2h12min15s	+23°57'30''	145,7°	-35,3°	-8,22	-27,41	-12,52
17	23,0	15h34min41s	+26°42'53''	41,9°	+53,8°	24,2	8,3	-0,3
18	38,8	3h9min42s	-9°34'36''	191,3°	-53,0°	-5,24	-27,92	-9,75
19	82,3	10h20min51s	-58°32'49''	284,7°	-1,3°	-14,44	-26,6	-3,772
20	34,5	22h20min7s	+49°30'12''	99,3°	-6,3°	-9,65	-23,44	-4,86
21	21,4	21h31min1s	+23°20'7''	74,3°	-20,1°	-6,5	-29,07	-13,15
22	23,6	1h49min23s	-10°42'13''	165,4°	-68,7°	27,6	4,7	3,5
23	18,8	4h9min35s	+69°32'29''	139,2°	+13,0°	-7,8	-24,02	-17,15
24	22,4	7h49min55s	+27°21'47''	193,3°	+24,1°	23,8	7,6	-0,5
25	22,8	1h36min43s	+7°49'54''	142,0°	-53,3°	-2,13	5,3	-12,8
26	160,2	23h3min21s	+58°33'50''	109,2°	-1,3°	-25,6	-18,1	7,4
27	28,3	0h18min20s	+30°57'22''	114,6°	-31,4°	-4,43	-27,8	-15,7
28	22,2	6h39min50s	-61°28'43''	271,2°	-25,0°	-7,71	-28,32	-14,37
29	1132	20h25min27s	-28°39'48''	14,5°	-32,0°	5,61	-15,22	-4,84
30	1231	19h35min57s	-53°0'31''	344,4°	-27,9°	-4,13	-18,24	7,5

TABELA 1.



→ bila v času opazovanja luna v ravnini, ki je pravokotna na kolobarje in hkrati na zveznici med središčema Sonca in Saturna. Kot med ravnino kolobarjev in smerjo proti Soncu je 1 stopinja. Polmer Saturna je 9-krat večji od polmera Zemlje.

Oceni premer lune in njen obhodni čas okoli Saturna. Vsake koliko časa je ta luna v konjunkciji s Saturnovo luno Titan? Titan se okoli Saturna giblje po krožnici s polmerom 1,2 milijona kilometrov, njegov obhodni čas pa je 16 dni. Opiši, kaj bi se zgodilo, če bi se Titan nahajal na isti orbiti kot opazovana luna.

Srednja šola

Podane so svetlobne krivulje v spektralnih območjih B, V in R za dve supernovi tipa Ia (sliki 5 in 6), ki so ju astronomi opazovali v dveh različnih galaksijah. Na abscisi grafov je čas v mesecih/dnevih, na ordinati pa navidezne magnitude v pripadajočih spektralnih območjih. Na fotografijah v negativu (slika 3 in 4) sta galaksiji, v katerih sta zasvetili supernovi. V preglednici so njune ekvatorialne koordinate.

Izračunaj oddaljenost obeh galaksij, če veš, da je absolutna magnituda supernov Ia v območju V, ko je njihov sij največji, -19 .

galaksija	α	Δ
1	$14^{\text{h}}03^{\text{m}}$	$+54^{\circ}21'$
2	$09^{\text{h}}56^{\text{m}}$	$+69^{\circ}41'$

TABELA 2.

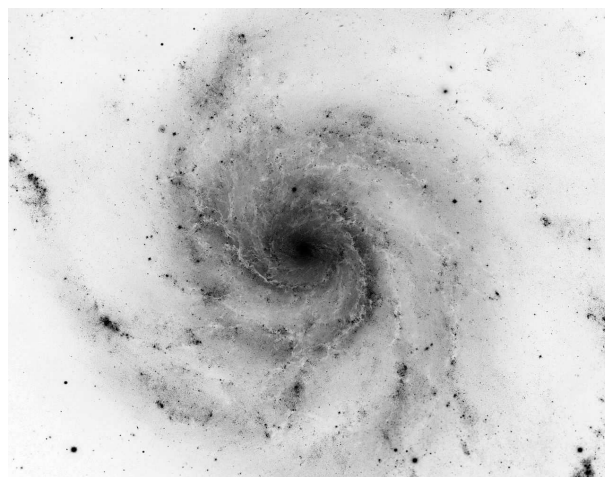
Rešitve nalog iz prejšnje številke Preseka

7. in 8. razred osnovne šole

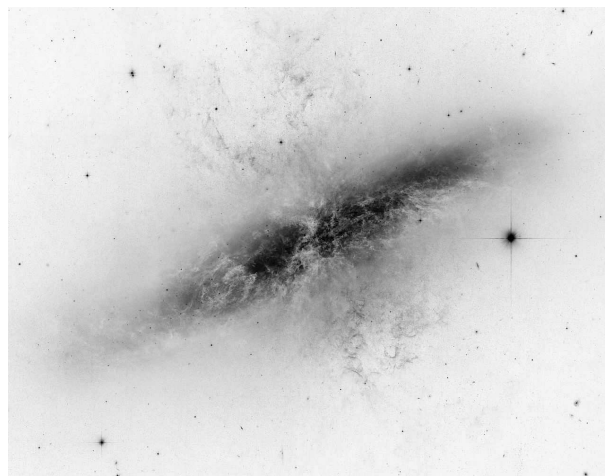
Naloge izbirnega kroga

1. naloga. Oddaljenost kraja je približno 38 kilometrov.

2. naloga. Asteroid 1995 SN55 se Zemlji lahko približa na 4,6 astronomske enote, kar je bistveno več kot 10-kratnik polmera Lunine orbite okoli Zemlje.



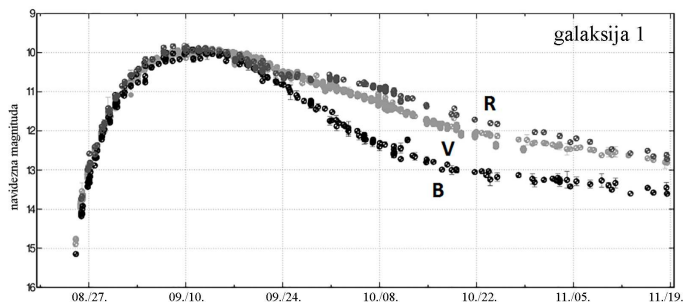
SLIKA 3.
Galaksija 1



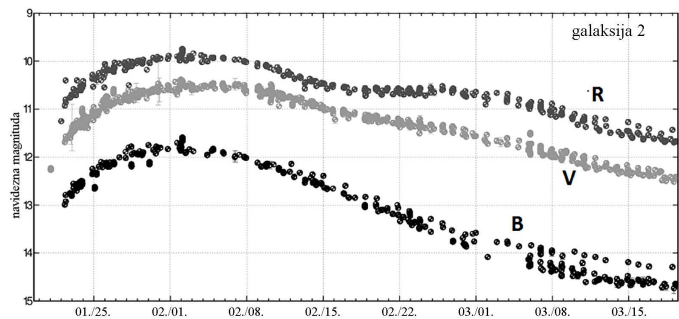
SLIKA 4.
Galaksija 2

3. naloga. Orbitalna hitrost Jupitra je 13 km/s, ker je podana najmanjša relativna hitrost neznanega planeta glede na Jupiter, ki je enaka razliki hitrosti Jupitra in planeta. Od tod sledi, da je orbitalna hitrost neznanega planeta 35 km/s. To pomeni, da je ta planet Venera.

4. naloga. Planetarna meglica M57 se širi s hitrostjo 38 km/s.



SLIKA 5.



SLIKA 6.

5. naloga. Kotna velikost repa kometa na Marsovem nebu je lahko med 0 in 180 stopinj.

Naloge teoretičnega kroga

1. naloga. Ko je Neptun v opoziciji, je ta najvišje na nebu okoli lokalne polnoči. Astronom je Neptun torej opazoval, ko je bila v Čilu polnoč. Takrat je bila ura v Sankt Peterburgu 6 zjutraj.

2. naloga. Iz podatkov ocenimo število zvezd N v kopici: $N = 2 \times 10^6$ oz. 2 milijona. Iz znanega premera Sonca izračunamo dolžino vrste d , če bi te zvezde stikoma razvrstili po prostoru: $d = 4,5 \times 10^{12} \text{ km} = 0,45$ svetlobnega leta. To je bistveno manj od razdalje med Soncem in najbližjo zvezdo Proksimo Kentavra, ki znaša približno 4,3 svetlobnega leta.

3. naloga. Iz podatkov lahko ugotovimo, da so bili 26. decembra 2019 Sonce, Luna in Jupiter na istem delu neba. Sonce se glede na zvezde in tudi glede na Jupiter navidezno pomika proti vzhodu. To pomeni, da je bilo Sonce 2. februarja 2020 vzhodno od Jupitra, kar pomeni, da je vzhajalo za planetom. Sledi, da je bilo takrat mogoče Jupiter videti zjutraj, preden je Sonce vzšlo.

4. naloga. Površinska gostota Kuiperjevega pasu je $5 \times 10^{-4} \text{ kg/m}^2$.

5. naloga. Ta naloga zahteva malo več razlage. Najprej ocenimo deklinacijo zvezd. Iz podatkov sledi, da je višina Altairja v spodnji kulminaciji za opazovalca v Sankt Peterburgu vsaj -25° :

$$\blacksquare -25^\circ \leq \varphi + \delta - 90^\circ = 60^\circ + \delta - 90^\circ = \delta - 30^\circ.$$

Zato je $\delta \geq 30^\circ - 25^\circ = 5^\circ$.

Tako je Altairjeva deklinacija pozitivna. Altair leži na severnem delu neba glede na nebesni ekvator in je zato viden po vsej severni polobli Zemlje, zlasti pa po vsej Rusiji. Največja višina nad obzorjem zvezde Alnair ustreza njeni zgornji kulminaciji:

$$\blacksquare 43^\circ = 90^\circ - |\varphi - \delta| = 90^\circ - |\delta|,$$

zato $|\delta| = 90^\circ - 43^\circ = 47^\circ$. Ugotoviti moramo še predznak deklinacije zvezde Alnair. Če vemo, da je Alnair Alfa Žerjava, je torej zvezda južnega neba, zato je njena deklinacija negativna: $\delta = -47^\circ$.

Zvezda je torej vidna, vsaj ob zgornji kulminaciji, na zemljepisnih širinah, manjših od 43° , kar ustreza najbolj južnim regijam Rusije.

× × ×

Minimalna vpeta drevesa

↓↓↓

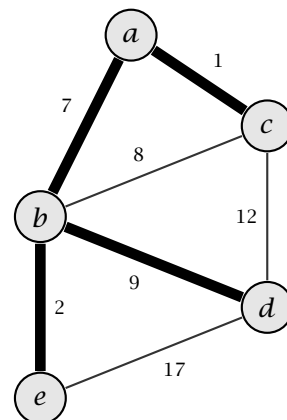
SARA VEBER IN TIM POŠTUVAN

→ V današnjem svetu so problemi postali kompleksni, zato jih človek ne more več reševati brez uporabe računalnika. Ker računalnik ni čudežna naprava, ki bi sama od sebe znala reševati probleme, mu moramo dati navodila, kako naj se problemov loti. Postopek reševanja se imenuje *algoritem*, tega pa računalniku opišemo s pomočjo različnih programskih jezikov. V članku si bomo ogledali primer iz resničnega življenja, ki ga bomo prevedli na problem iskanja *minimalnega vpetega drevesa*. Ta se navidez zdi težak, vendar se s pravnim pristopom zelo poenostavi.

Opis problema

Recimo, da vas najame podjetje, ki se ukvarja z infrastrukturo cestnega omrežja. Zgrajeno imajo cestno omrežje, kjer vsaka cesta povezuje dve mesti in ima določeno ceno vzdrževanja. Ker želijo prihraniti čim več denarja, bi radi nekatere ceste zaprli, a vseeno želeli, da mesta ostanejo med seboj povezana. Želijo torej minimizirati stroške vzdrževanja cest, a hkrati vseeno zagotoviti, da je iz vsakega mesta mogoče priti do vsakega drugega.

Na sliki 1 je primer majhnega cestnega omrežja. Mesta so označena z majhnimi krogi, ki so poimenovani s črkami od *a* do *e*. Ceste so črte, ki povezujejo pare mest, zraven njih pa so napisane številke, ki predstavljajo ceno vzdrževanja ceste. Tako sta mesti *a* in *b* povezani s cesto, vzdrževanje te ceste pa stane 7. Omrežje je povezano, saj lahko iz vsakega mesta pridemo do vsakega drugega. Od mesta *a* do mesta *d* lahko pridemo npr. do *c*, saj obstaja cesta med *a* in *c*, ter cesta med *c* in *d*.



SLIKA 1.

Primer cestnega omrežja

S takim opisom problema ni nič narobe, vendar vsebuje ogromno podatkov, ki za reševanje niso ključnega pomena. V resnici nam je čisto vseeno, ali imamo opravka z mesti ali letališči. Zaradi tega problem raje modelirajmo s pomočjo matematičnih struktur. Videli bomo, da je za naš problem najbolj primerna teorija grafov. Tako bomo ohranili samo tiste podatke, ki so res ključni za reševanje. Obstaja že veliko algoritmov, ki jih lahko uporabimo, če primerno modeliramo problem.

Matematični model problema

Pri modeliranju problema se bomo oprli na eno izmed vej matematike – teorijo grafov. Prej smo problem opisali s pomočjo mest in cest med njimi. V jeziku teorije grafov mestom rečemo vozlišča (angl. nodes), cestam pa povezave (angl. edges). Te povezave so lahko utežene ali pa ne. V našem primeru so utežene, saj ima vsaka cesta svojo ceno vzdrževanja. Strukturo, ki zajema vozlišča in povezave, imenujemo *graf*. Graf $G = (V, E)$ je množica vozlišč V

in povezav E . E je množica množic velikosti 2, kjer vsaka taka množica predstavlja eno povezavo. V našem primeru imamo utežen graf, zato moramo imeti še dodatno funkcijo w , ki slika iz množice povezav v realna števila. Graf zgornjega omrežja bi bil videti tako

- $V = \{a, b, c, d, e\}$
 $E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{d, c\}, \{e, b\}, \{d, e\}\}$

- $w: E \rightarrow \mathbb{R}$
 $\{a, b\} \mapsto 7$
 $\{a, c\} \mapsto 1$
 $\{b, c\} \mapsto 8$
 $\{b, d\} \mapsto 9$
 $\{d, c\} \mapsto 12$
 $\{e, b\} \mapsto 2$
 $\{d, e\} \mapsto 17$

Povezava $\{a, b\}$ predstavlja cesto med a in b , funkcija w pa tej povezavi priredi vrednost 7, kar je njena cena vzdrževanja.

Predstavitev omrežja smo si že pogledali, da pa ugotovimo, kaj je rešitev problema v matematičnem jeziku, moramo spoznati še pojme *vpetega podgrafa*, *drevesa* in *minimalnega vpetega drevesa*. Vpet podgraf $H = (V', E')$ grafa G dobimo tako, da odstranimo nekaj povezav grafa G , a vseeno ohranimo vsa vozlišča. Torej $V' = V$, saj ohranimo vsa vozlišča, vendar $E' \subseteq E$, ker odstranimo nekaj povezav. Primer vpetega podgrafa našega zgornjega grafa:

- $V = \{a, b, c, d, e\}$
 $E = \{\{b, c\}, \{b, d\}, \{d, c\}, \{e, b\}, \{d, e\}\}$.

Vidimo, da ima vpet podgraf enako množico mest, vendar drugačno množico cest. V tem vpetem podgrafu ni ceste med a in b ter ceste med a in c , torej je množica cest podmnožica cest osnovnega grafa.

Naslednja izredno pomembna struktura v teoriji grafov je drevo. Drevo je definirano kot povezani graf brez ciklov. Povezanost grafa pomeni, da lahko preko povezav pridemo iz vsakega vozlišča do vsakega drugega. Cikel pa je podmnožica vozlišč, ki so povezana v krog. Torej, če se začnemo sprehajati iz poljubnega vozlišča na ciklu in obiskujemo samo vozlišča na tem ciklu, a ne uporabimo iste povezave

večkrat, se lahko vrnemo v začetno vozlišče. Primer drevesa je na sliki 1 označen odebeljeno.

- $V = \{a, b, c, d, e\}$
 $E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, d\}, \{e, b\}\}$.

Vozlišča so kljub temu, da nimamo več vseh povezav, še vedno povezana. Zelo pomembna lastnost dreves je, da je med vsakim parom vozlišč natanko ena pot. Poleg tega ima drevo z n vozlišči natanko $n - 1$ povezav. Obe lastnosti sta razvidni iz primera.

Iz prejšnjih dveh definicij lahko sedaj sestavimo definicijo vpetega drevesa. To je vpet graf, ki je hkrati drevo. Nas pa bo zanimala prav posebna vrsta vpelih dreves - minimalna vpeta drevesa. Minimalna vpeta drevesa so taka vpeta drevesa, ki imajo najmanjši možen seštevek uteži. Na zgornji sliki je odebeljeno minimalno vpeto drevo, ki ima seštevek povezav enak 19. Z nekaj poskušanja se lahko prepričate, da v tem grafu ne obstaja vpeto drevo z manjšim seštevkom uteži.

Z uporabo teorije grafov smo problem prevedli na iskanje minimalnega vpetega drevesa v uteženem grafu. Hkrati smo dobili tudi trivialni algoritem za iskanje minimalnih vpelih dreves. Poiščemo vsa vpeta drevesa, seštejemo uteži povezav in vzamemo tistega, ki ima najmanjši seštevek uteži.

V grafu je lahko tudi eksponentno mnogo vpelih dreves glede na število vozlišč, zato je trenutni algoritem izredno neučinkovit. K sreči obstaja Kruskalov algoritem, ki hitro najde minimalno vpeto drevo. V nadaljevanju si ga bomo podrobneje ogledali, vendar moramo prej spoznati še pomembno *podatkovno strukturo*, ki jo uporablja. Za nas bo ključna podatkovna struktura *disjunktnih množic*.

Disjunktne množice

Učinkovitost algoritma je velikokrat odvisna od učinkovite podatkovne strukture. Dober primer je ravno Kruskalov algoritem, čigar učinkovitost je odvisna predvsem od podatkovne strukture disjunktnih množic. Disjunktne množice (angl. disjoint-set data structure) so podatkovna struktura, ki hrani *povezane komponente grafa*. Povezana komponenta grafa je podmnožica vozlišč, kjer je vsak par vozlišč iz te množice med seboj dostopen preko povezav. Podatkovna struktura se imenuje disjunktne množice,





ker so povezane komponente te strukture med seboj disjunktni. To pomeni, da je vsako vozlišče v največ eni povezani komponenti. S pomočjo disjunktnih množic znamo izredno hitro povezovati komponente grafa in ugotoviti, ali je par vozlišč povezan. V nadaljevanju si bomo podrobneje pogledali ti dve operaciji.

Podatkovna struktura si za vsako vozlišče hrani svojega starša – prvo vozlišče nad njim. Če vozlišče nima starša, je koren. Ko implementiramo podatkovno strukturo, si za starša takega vozlišča shranimo kar to isto vozlišče. Funkcija `initialize` ustvari začetno stanje komponent, kjer je vsako vozlišče svoja povezana komponenta. V skladu s prej povedanim je starš vsakega vozlišča kar vozlišče samo.

```
def initialize(n):
    parent = [0 for i in range(n)]
    for i in range(n):
        parent[i] = i
    return parent
```

Sedaj si pogledjmo, kako ugotoviti, če sta dve vozlišči v isti povezani komponenti. Opazimo lahko, da ima vsaka povezana komponenta natanko en koren. Ta pa je za vsa vozlišča znotraj iste povezane komponente enak. Torej sta dve vozlišči v isti povezani komponenti, če imata enak koren. Funkcija `find` najde koren vozlišča x , pri čemer mora imeti podano tabelo, ki smo jo dobili pri `initialize`. To naredi tako, da rekurzivno išče starša svojega starša, dokler ne pride do korena. V implementaciji uporabimo še kompresijo poti (angl. path compression), ki pospeši iskanje korena. Med iskanjem vsa vozlišča na poti do korena prevezuje direktno na koren. To pospeši iskanje, saj je hitrost odvisna od števila vozlišč na poti do korena.

```
def find(parent, x):
    # vozlišče je koren
    if parent[x] == x:
        return x
    # starša nastavimo na koren komponente
    parent[x] = find(parent[x])
    return parent[x]
```

Zadnja operacija, ki jo podatkovna struktura premore, je združevanje povezanih komponent. To naredi tako, da starša korena ene izmed obeh kompo-

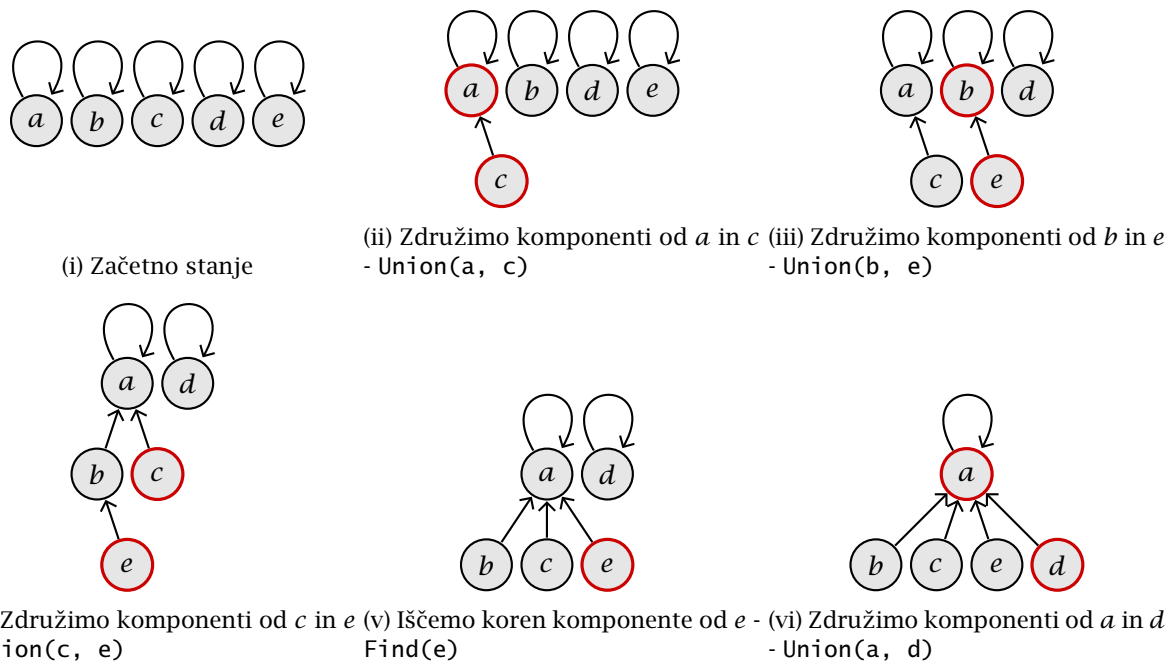
nent nastavi na koren druge komponente. To posledično spremeni tudi koren vseh vozlišč v tisti komponenti. Funkcija `union` naredi točno to, samo da pred združevanjem preveri, če sta vozlišči slučajno že v isti povezani komponenti. Če je temu tako, združevanje nima smisla, zato funkcija ne stori ničesar.

```
def union(parent, x, y):
    # korena komponent od x in y
    root_x = find(parent, x)
    root_y = find(parent, y)
    if root_x != root_y:
        parent[root_x] = root_y
```

Za boljše razumevanje si pogledjmo še primer na sliki 2. Na (i) vidimo začetno stanje, kjer je vsako vozlišče svoja povezana komponenta. Pri (ii) povežemo komponenti od a in c . Koren komponente od a je na začetku kar a , koren komponente od c pa c . Ker želimo komponenti povezati, nastavimo starša od c na a . Pri (iii) naredimo isto, vendar z b in e . Korak (iv) je podoben (ii). Koren komponente od c je a , koren komponente od e pa b . Nato nastavimo starša od b na a . Slika (v) ilustrira kompresijo poti. Ko iščemo koren komponente od e , starše vozlišč, ki jih sreča na poti do korena, nastavimo na koren. V tem primeru nastavi starša od b in e na koren. Korak (vi) je spet podoben (ii), le da povežemo komponenti od a in d .

Kruskalov algoritem

Sedaj, ko smo spoznali vsa potrebna orodja, se lahko osredotočimo na iskanje minimalnih vpetih dreves. Za iskanje minimalnih vpetih dreves bomo uporabili Kruskalov algoritem. Algoritem je leta 1956 razvil Joseph Kruskal. Spada med požrešne algoritme, saj na vsakem koraku izbere najboljšo izmed možnosti, a je kljub temu končna rešitev optimalna. Algoritem poteka v naslednjih korakih. Na začetku uredi povezave glede na uteži, tako da so povezave z manjšo utežjo pred tistimi z večjo. V tem vrstnem redu potem obravnava povezave. Recimo, da ima trenutna povezava krajšiči x in y . Če sta x in y v različnih povezanih komponentah, povezavo doda. Tako x in y pristaneta v isti povezani komponenti. Če sta x in y v isti komponenti, potem bi dodajanje te povezave povzročilo cikel. To se seveda ne sme zgoditi,



SLIKA 2.

Primer zaporedja ukazov na disjunktnih množicah

ker drevo ne sme imeti ciklov. To je razumljivo tudi s stališča osnovnega problema, saj to pomeni, da bi ohranili še eno cesto, čeprav je ne potrebujemo. S tem bi se po nepotrebnem povečali stroški vzdrževanja. Povezav torej ne smemo dodajati tako, da bi delali cikle. Vendar to še vedno ne pomeni, da bomo s takim postopkom prišli do optimalne rešitve. Zakaj pa ne bi raje vzeli trenutne povezave in odstranili eno izmed ostalih na ciklu. S tem bi se prav tako izognili ciklu? Odgovor je, da so vrednosti uteži na vseh prej dodanih povezavah manjše od trenutne, zato bi z dodajanjem te povezave samo povečali vrednost končnega vpetega drevesa. To je intuitivni dokaz pravilnosti algoritma. Z dodajanjem povezav nadaljujemo, dokler nam ne ostane samo ena povezana komponenta. Ta komponenta je drevo in ima minimalen seštevek uteži, zato je minimalno vpeto drevo. Za združevanje in preverjanje pripadnosti komponent uporabimo prej omenjene disjunktno množice.

Desno je koda Kruskalovega algoritma v Pythonu. Vozlišča (a , b , ...) bomo označili s številom (0, 1, ...), saj je bolj priročno za implementacijo.

```

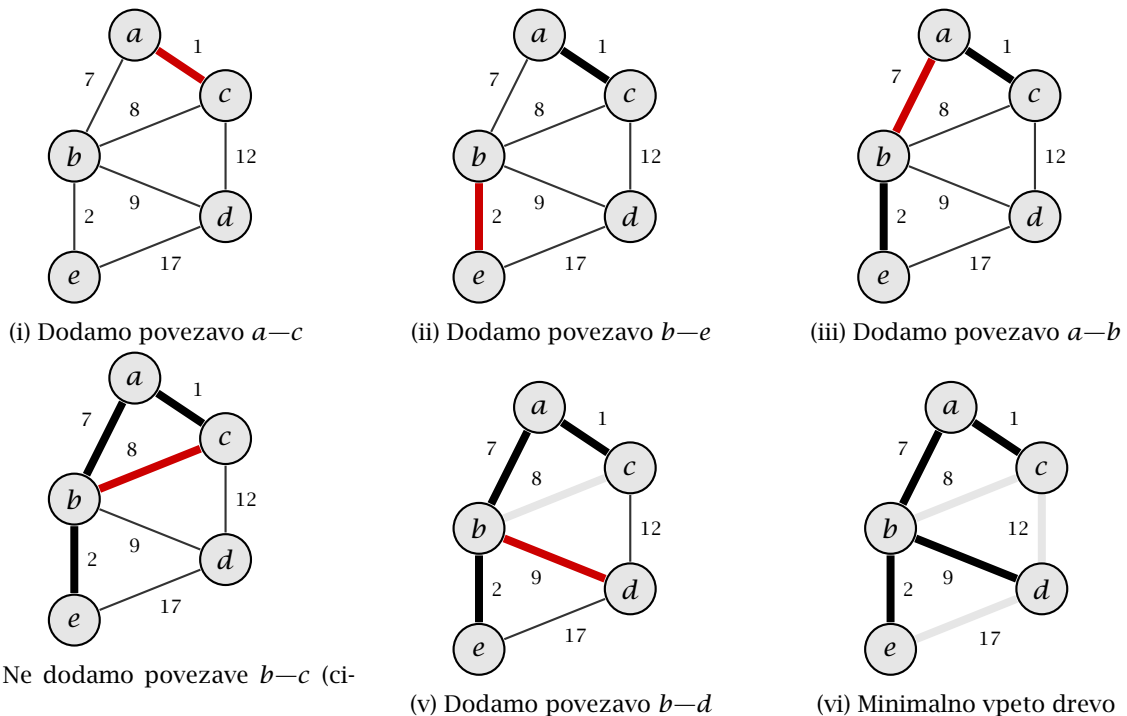
a, b, c, d, e = (0, 1, 2, 3, 4)
# Povezave oblike (cena, prvo vozlišče, drugo vozlišče)
edges = [(7, a, b), (1, a, c), (8, c, b), (9, b, d),
         (12, c, d), (2, b, e), (17, e, d)]

# Uredimo povezave naraščajoče, sortira se najprej po prvi komponenti
edges.sort()
parents = initialize(5)
minimum_spanning_tree = 0.0
for edge in edges:
    # Razpakiramo podatke o povezavi: vozlišči x in y s ceno cost
    cost, x, y = edge
    # Korena komponent od x in y
    root_x = find(parents, x)
    root_y = find(parents, y)
    # Če sta korena različna, dodamo povezavo
    if root_x != root_y:
        union(parents, x, y)
        minimum_spanning_tree += cost
    
```

Oglejmo si še potek algoritma na grafu iz slike 1. Na sliki 3 so prikazani posamezni koraki. Z rdečo je pobarvana trenutna povezava, z odebeljeno črno pa že dodane povezave. Najmanjšo utež ima povezava $a-c$. Ker sta a in c v različnih povezanih komponentah, jo dodamo v graf. Trenutna cena vpetega podgrafa je 1. Pri dodajanju povezave v korakih (ii) in (iii) ne ustvarimo cikla, zato obe povezavi dodamo v minimalno vpeto drevo. Korak (iv) je prvi, pri katerem povezave ne vzamemo. Lahko vidimo, da povezave $a-b$, $a-c$ in $b-c$ tvorijo cikel, zato $b-c$ ne smemo dodati. Na sliki se vidi tudi, da sta uteži obeh povezav na ciklu manjši, zato trenutne povezave ni vredno zamenjati z že obstoječo (sklep zgoraj). V koraku (v) povezavo spet vzamemo in dobimo minimalno vpeto drevo s ceno 19, prikazano na sliki (vi).

Literatura

- [1] T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest in C. Stein, *Introduction to Algorithms*, The MIT Press, 3rd Ed., 2009.
- [2] S. Halim *Competitive Programming 3*, 3rd Ed., 2013.
- [3] *Kruskal's algorithm*, dostopno na en.wikipedia.org/wiki/Kruskal%27s_algorithm, ogled 8. 4. 2020.
- [4] *Disjoint-set data structure*, dostopno na en.wikipedia.org/wiki/Disjoint-set_data_structure, ogled 8. 4. 2020.



SLIKA 3. Iskanje minimalnega vpetega drevesa za začetni graf

× × ×

Mednarodna juniorska naravoslovna olimpijada

↓↓↓

BARBARA ROVŠEK



→ V začetku decembra 2019 je skupina slovenskih devetošolcev in devetošolk in treh odraslih oseb odpotovala v toplejše kraje. Natančneje, na Bližnji vzhod, v Doho, glavno mesto emirata Katar, ki kot polotok sega v Perzijski zaliv. Katar je na račun svojih zalog nafte ena najbogatejših držav na svetu. Po seznamu Svetovne banke iz leta 2013 je prav na vrhu seznama držav po kupni moči svojih prebivalcev. Od bogastva države smo imeli nekaj tudi mi: možnost, da se Slovenija prvič v zgodovini udeleži Mednarodne juniorske naravoslovne olimpijade – kljub temu, da smo interes za udeležbo izrazili tik pred zdajci, ko so bili vsi roki za prijavo že za nami, so nas organizatorji olimpijade povabili, da se je udeležimo s celotno ekipo.

Mednarodna juniorska naravoslovna olimpijada (International Junior Science Olympiad, IJSO¹) je v Dohi potekala že 16.-ič, na njej pa je sodelovalo rekordno število držav, 66. Prvič so jo organizirali leta 2004 v Indoneziji. Že takrat je na IJSO sodelovalo 31 držav (med njimi tudi naši sosedi Hrvati in Madžari). Namenjena je mlajšim naravoslovcem; učencem in dijakom, ki do konca leta, v katerem je tekmovanje, še niso dopolnili 16 let. Če bomo v prihodnosti še lahko sodelovali (in upamo, da bomo), bodo ekipo sestavljale slovenske devetošolke in devetošolci.

Olimpijada je **naravoslovna**, kar pomeni, da so v



SLIKA 1.

Satelitska slika Bližnjega vzhoda – Arabskega polotoka (prispevek Google Maps), kjer na izrastku v Perzijskem zalivu leži Katar in njegovo glavno mesto Doha.

njenem učnem načrtu² zastopane vse tri glavne naravoslovne vede: fizika, kemija in biologija, v enakih deležih. Idealno je, če se vsebine različnih naravoslovnih ved v nalogah povezujejo. To predstavlja velik izziv za avtorje nalog, ker smiselnega povezovanja v razmeroma enostavnih nalogah ni vedno lahko doseči. Večina nalog³ je zato še vedno enodisciplinskih, razen kompleksnejših eksperimental-

²Učni načrt IJSO, preveden v slovenščino, je na spletni strani DMFA Slovenije na naslovu www.dmfa.si/ODrustvu/NovicaPrikaz.aspx?itemid=322, originalna angleška verzija pa na spletni strani www.dmfa.si/_CmsFiles/2019/12/ijso-syllabus-accepted-20091204.pdf

³Spletna stran, kjer so na voljo naloge s preteklih olimpijad (v angleščini) www.ijsoweb.org/downloads

¹Spletna stran olimpijade: www.ijsoweb.org





SLIKA 2.

Organizatorji olimpijade so nam razkazali nekaj katarskih znamenitosti. Med večje znamenitosti in dragocenosti sodijo njihovi konji. Arabci, seveda.

تحفيز جيل اليوم لمهارات الغد

Inspiring today's young generation for the skills of tomorrow



16th International Junior Science Olympiad
3-12 December 2019

أولمبياد العلوم الدولي للناشئين السادس عشر

SLIKA 3.

Znak 16. IJSO v barvah Katarja, beli in katarsko-bordojsko-rdeči, ki jo bomo še videli vsaj do leta 2022, ko bo Doha gostila svetovno prvenstvo v nogometu.

nih nalog, pri katerih je posamezno lastnost narave ali pojav lažje opazovati skozi različna naravoslovna očala. Poleg poznavanja naravoslovnih vsebin je treba znati tudi nekaj matematike: ni slabo, če tekmovalci poznajo kotne funkcije, eksponentno in logaritemsko funkcijo, osnove vektorskega računa, pa še kaj.

Ker smo se olimpijade v tem šolskem letu udeležili

prvič in ker so organizatorji nanjo v zadnjem hipu povabili celotno ekipo tekmovalcev in vodij, smo opravili izbor učencev, ki potujejo na olimpijado, na osnovi njihovih lanskih rezultatov na državnih tekmovanjih iz fizike in kemije. V ekipo so se uvrstili učenci, ki so lani obiskovali 8. razred, letos pa so v 9.: Brest Lenarčič z OŠ Kozje in Vid Bauman z OŠ Kajetana Koviča Poljčane, zmagovalec in drugouvrščeni na lanskem državnem tekmovanju v znanju fizike za Stefanova priznanja za osmošolce, ter 4 zmagovalci na lanskem državnem tekmovanju v znanju kemije za Preglova priznanja Sofija Štefan z OŠ Šmarje pri Kopru, Matic Prevec z OŠ Bežigrad, Nino Kolander z JZOŠ Marjana Nemca Radeče in Jožica Bec z OŠ Milana Majcna Šentjanž.



SLIKA 4.

Zemljevid Slovenije, v katerem so označene lege osnovnih šol, ki jih letos še obiskujejo člani olimpijske ekipe za IJSO 2019.

Pred odhodom v Doho se je ekipa na kratko, a intenzivno, kolikor se da, pripravljala na tekmovanje. Učni načrt olimpijade je namreč kar precej obsežnejši od učnih načrtov naravoslovnih predmetov v predmetniku slovenske osnovne šole – in tudi kjer ni, to ne pomeni, da so vsebine že znane in utrjene (člani ekipe so trenutno šele v 9. razredu, in letošnje šolsko leto se je pred olimpijado šele dobro začelo). Zelo motivirani devetošolci so prišli v Ljubljano 3-krat. V petek popoldne so imeli dobre 4 ure priprav, v soboto dopoldne še enkrat toliko, in to 3 vikende zapored. Na fizikalni in kemijski del tekmovanja so se pripravljali na Pedagoški fakulteti, na biološki pa v bolj opremljenih laboratorijih Oddelka za biolo-

gijo Biotehniške fakultete. V treh sivih novembrskih petkih in treh enako sivih novembrskih sobotah se je nabralo za dobrih 24 ur priprav!

V 9-dnevnem urniku olimpijade so bili 3 dnevi tekmovalni. Na prvi tekmovalni dan so učenci 4 ure reševali 30 nalog izbirnega tipa, pri katerih so vsebine fizike, kemije in biologije zastopane enakomerno. Enakomerno so te vede zastopane tudi v teoretičnih nalogah, s katerimi so se učenci ukvarjali 4 ure v drugem tekmovalnem dnevu, ter eksperimentalnih, ki so jih reševali na tretji tekmovalni dan.⁴ Teoretične naloge so reševali kot posamezniki, pri poskusih pa so po 3 učenci združili moči v eni eksperimentalni ekipi (naši učenci so tekmovali v 2 eksperimentalnih ekipah).

Na olimpijadi je sodelovalo 409 tekmovalcev, ki so bili v povprečju 1 leto starejši od naših. Najboljših 10 % je osvojilo zlate medalje; njihovi prejemniki so v veliki večini mladi iz dežel Daljnega vzhoda. Naslednjih 20 % je prejemnikov srebrnih medalj in naslednjih 30 % prejemnikov bronastih medalj. Sloveniji sta 2 bronasti medalji priborila Brest Lenarčič in Nino Kolander, le malo je do nje manjkalo tudi Vidu Baumanu. Tudi preostali 3 učenci pa so se dobro izkazali in upamo, da bodo vsi skupaj še naprej vlagali toliko energije in volje v razvozlavanje naravoslovnih problemov, kot v dveh mesecih pred Doho.

Letošnja olimpijada je potekala med 3. in 12. decembrom 2019 in tudi prihodnje leto bo olimpijada zimska. Godila se bo med 2. in 12. decembrom 2020 v Frankfurtu v Nemčiji. Gotovo te zanima, kako se zrišeš v ekipo: tekmuješ v znanju fizike in kemije, ko si v 8. razredu, in po možnosti zmagaj ... Brez heca: v širši izbor 24–30 kandidatov za ekipo se uvrstiš z dobrim rezultatom na letošnjih državnih tekmovanjih v znanju fizike in/ali kemije. Tekmovanje iz biologije trenutno ni prilagojeno učnemu načrtu biologije v osnovni šoli, zato rezultati na tem tekmovanju ne vplivajo na izbiro olimpijske ekipe. Če postaneš kandidat v širšem izboru, te bomo o tem obvestili maja 2020. Konec avgusta in v septembru bomo za vse izbrane organizirali vsebinske priprave, ki bodo potekale 3 petke in sobote v Ljubljani. Oktobra bo potekalo izbirno tekmovanje, ki bo obsegalo teore-

⁴Vse naloge s 16. IJSO, prevedene v slovenščino, so na spletni strani DMFA na naslovu www.dmfa.si/0Drustvu/NovicaPrikaz.aspx?itemid=323



SLIKA 5.

Čepijo, z leve, Brest, Jožica, Sofija, Matic, Nino in Vid. Stojimo, z desne, Domen, Majed (vodil naših fantov), Barbara in Margareta.

tični in eksperimentalni del. Od izbirnega tekmovanja naprej pa se piše zgodovina ...

Prvo odpravo na IJSO sta, naslednje pa še bosta, družno organizirali društvi DMFA Slovenije in ZOTKS (Zveza organizacij za tehnično kulturo Slovenije). DMFA organizira tekmovanja osnovnošolcev v znanju fizike, ZOTKS pa tekmovanja v znanju kemije. Priprave na olimpijado so izvedli mentorji Domen Vaupotič, Margareta Obrovnik Hlačar, Tinka Bačič, Iztok Tomažič in Barbara Rovšek. Ekipo so v Dohi vodili Domen Vaupotič, Margareta Obrovnik Hlačar in Barbara Rovšek.



SLIKA 6.

Opomba. Prispevek je bil spisan preden nas je doletela epidemija Covid-19. Ta hip datumi letošnjih tekmovanj in naslednje olimpijade še niso znani.

× × ×

Astronomska literatura



Govert Schilling,
Lars Lindberg Christensen

OČI, ZAZRTE V NEBO
400 let odkritij s teleskopi

136 strani
format 17 × 24 cm
trda vezava, barvni tisk

24,99 EUR



Dintinjana Fabjan,
Mikuž, Zwitter

NAŠE NEBO 2020
Astronomske efemeride

80 strani
format 16 × 23 cm
mehka vezava



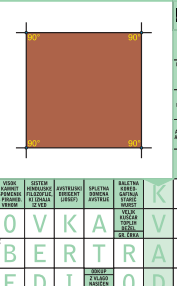







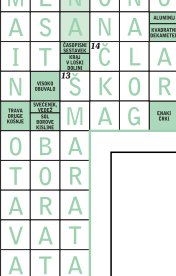

10,00 EUR

Ponujamo še veliko drugih astronomskih del. Podrobnejše predstavitve so na naslovu:

<http://www.dmfa-zaloznistvo.si/astro/>

Individualni naročniki revije Presek imate ob naročilu pri DMFA-založništvo 20 % popusta na zgornje cene. Dodatne informacije lahko dobite v uredništvu Preseka po telefonu (01) 4766 633.



REŠITEV NAGRADNE KRIŽANKE PRESEK 47/4

→ Pravilna rešitev nagra-
dne križanke iz prve
številke Preseka je **Po-
sebne okoliščine**. Izmed
pravih rešitev so bili
izžrebani MARJANA MA-
RINŠEK iz Celja, IVAN LI-
SAC iz Kopra in MIHA ŠU-
ŠTERŠIČ iz Postojne, ki
bodo razpisane nagrade
prejeli po pošti.

Stebrički slane

↓↓↓

JOŽE RAKOVEC

→ Naslovnica kaže odpadel list, na katerem je nastala slana. Povečan izsek na sliki 1 pokaže, da imajo kristali slane obliko stebričkov.



SLIKA 1.

Stebrički slane (foto: Peter Legiša)

Pri še večji povečavi (slika 2) pa opazimo, da so stebrički večinoma votli in vsaj na koncih razširjeni – kot v nekake visoke kozarce.

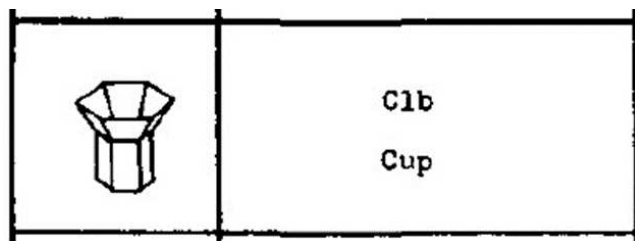
Kako pride do najrazličnejših oblik ledenih kristalov? Zaradi tega, ker sta v molekuli vode dva vodika vezana s kisikom tako, da tvorita kraka njunih vezi kot okrog 105° , so osnovne kristalizacijske oblike ledu šestkotniki (manjši od nanometra). Kadar se ti osnovni šestkotniki nalagajo predvsem eni na druge (pri ne prehudem mrazu), nastajajo bolj podolgovati stebrički, ob nižjih temperaturah ob nalaganju enih ob druge pa ploščice. Ob takem »zlaganju zidakov« nastajajo najrazličnejše oblike – glej npr. snowcrystals.com. Pri »zidanju« pa lahko pride tudi do kakšnih napak in tako ob morebitnih tujkih ali kakih drugih vzrokih za »dislokacije« (www.daviddarling.info/encyclopedia/D/dislocation), lahko npr. ploščica polžasto raste v pira-



SLIKA 2.

Povečava dela slike 1, zavrtena za 180°

mido ali pa obratno v votel stebriček. Če se ob tem, s kako ponovno napako, premer votlega stebrička še poveča, dobimo lahko tudi kristal v obliki kozarca ali čaše. Take kristale sta Magono in Lee klasificirala kot C1b – glej njuno klasifikacijo na hdl.handle.net/2115/8672. Iz nje povzemamo skico na sliki 3, ki je še najbolj podobna kristalom na povečani sliki.



SLIKA 3.

Razred ledenih kristalov C1b po klasifikaciji Magona in Leeja

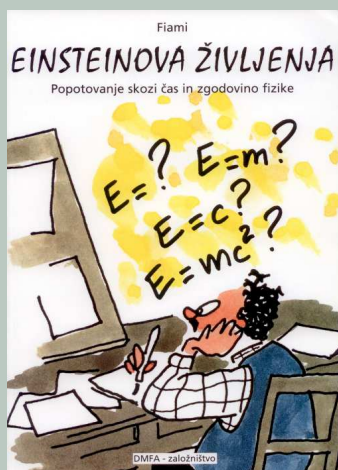
So pa te oblike kristalčkov ledu zelo, zelo redke in zato jih marsikatera novejša klasifikacija oblik ledenih naravnih kristalov ledu sploh ne obravnava več posebej. Torej je na fotografiji ne samo lep, ampak v resnici precej redek naravni pojav!

× × ×

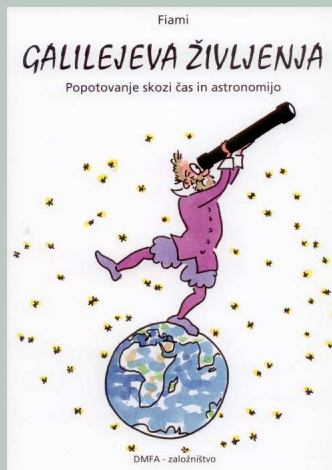
Zgodovina znanosti v stripu

Sredi decembra 2012 je Center za mladinsko književnost in knjižničarstvo pri Mestni knjižnici Ljubljana že tretjič podelil priznanja Zlata hruška. Z njimi so tokrat odlikovali kakovostno najboljših deset odstotkov otroške in mladinske književnosti, ki je izšla v letu 2011. DMFA-založništvo je priznanje prejelo za strip *Življenje Marie Curie*.

Švicarski avtor Raphaël Fiammingo, s kratkim umetniškim imenom Fiami, v tem stripu večjega formata duhovito predstavlja nekaj izsekov iz zgodovine kemije, od Aristotela do današnjega časa. V vsakem razdelku nastopa dekle ali ženska, katere ime je različica imena Marija, v čast veliki znanstvenici Marie Curie. Zgodbice ilustrirajo tudi vlogo žensk v raznih zgodovinskih obdobjih. Predvsem pa so zabavne in obenem poučne, saj zvemo marsikakšno zanimivo podrobnost o nastanku znanstvenih odkritij. Med najbolj posrečenimi je zgodbica o Mendeljejevu in njegovem sestavljanju periodnega sistema elementov. Tudi druge pripovedi ne zaostajajo. Knjigo je odlično prevedel prof. dr. Alojz Kodre.



7,68 EUR



7,68 EUR



8,31 EUR

Pri DMFA-založništvo sta v Presekovi knjižnici izšli še dve knjigi istega avtorja

- *Galilejeva življenja*, z zgodbami iz zgodovine astronomije, od Babiloncev do danes, ter
- *Einsteinova življenja*, z zgodbami iz zgodovine fizike, vse od Sokrata do danes.

Ta dva stripa je prav tako izvrstno prevedel Alojz Kodre. Sta enako zanimiva, zabavna in poučna in bosta bralcu brez dvoma polepšala dan.

Poleg omenjenih ponujamo tudi druga matematična, fizikalna in astronomska dela. Podrobnejše predstavitve so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse publikacije tudi naročite:

<http://www.dmfa-zaloznistvo.si/>

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA Slovenije, dijaki in študentje imate ob naročilu pri DMFA-založništvo 20 % popusta na zgornje cene - izkoristite ga! Dodatne informacije lahko dobite v uredništvu Preseka po telefonu (01) 4766 633.