

MATEMATIČNO MODELIRANJE GIBANJA TELES POD VPLIVOM GRAVITACIJSKE SILE

Vladimir Grubelnik

Fakulteta za elektrotehniko, računalništvo in informatiko, Univerza v Mariboru

Povzetek: V prispevku obravnavamo matematično modeliranje gibanja teles pod vplivom gravitacijske sile. Zapišemo matematični model in izvedemo numerično simulacijo za različne primere. Obravnavamo poseben primer gibanja v homogenem gravitacijskem polju, gibanje teles okoli fiksne točke in gibanje teles okoli skupnega težišča.

Abstract: In the paper, mathematical modelling of bodies influenced by the gravitational force is discussed. The mathematical model is formulated and the numerical simulation is performed for different examples. The case of the motion of a body in homogeneous gravitational field, the motion of bodies around the fixed point, and the motion of bodies around the common center of mass is described.

UVOD

Obravnavo gibanja teles pod vplivom gravitacijske sile lahko zasledimo na različnih stopnjah izobraževanja. S pojmom gravitacijske sile se učenci srečajo že v osnovni šoli pri pouku fizike [1]. Pri enakomerno pospešenem gibanju obravnavajo tudi prosti pad, kot posledico delovanja teže [2]. V srednji šoli to nadgradijo z vodoravnim metom in kroženjem nebesnih teles v gravitacijskem polju [3].

V nadaljevanju se bomo osredotočili na posamezne primere gibanja teles pod vplivom gravitacijske sile, kjer bomo izpostavili tire teles pri treh različnih pogojih. Obravnavali bomo gibanje teles v homogenem gravitacijskem polju, kjer je tir gibanja parabola oziroma premica [3,4], gibanje nebesnih teles okoli fiksne točke, kjer je tir gibanja ustrezna stožnica (krožnica, elipsa, parabola, hiperbola) [4,5], in gibanje teles okoli skupnega težišča.

Omenjeni primeri so sicer analitično rešljivi, vendar za obravnavo na področju izobraževanja v osnovni in srednji šoli običajno prezahtevni. V nadaljevanju se bomo zato osredotočili na možnost obravnave omenjenih primerov z vidika numeričnega reševanja diferencialnih enačb. Na podlagi gravitacijske sile in II. Newtonovega zakona [3] bomo zapišali osnovni matematični model, ki ga bomo v nadaljevanju v okviru posameznih primerov ustrezno dopolnili.

Numerično simulacijo bomo izvedli z uporabo preproste Eulerjeve metode [6], kjer diferencialne enačbe zapišemo v diferenčni obliki. Diferencial dx/dt nadomestimo z $\Delta x/\Delta t=(x(t+\Delta t)-x(t))/\Delta t$, kjer vrednosti količine $x(t)$ računamo po časovnih korakih Δt . Pri tem si pomagamo s tabelarično orientiranimi računalniškimi programi, kot je Microsoft Excel [7], oziroma z grafično orientiranimi računalniškimi programi [8, 9], ki na pregleden in enostaven način omogočajo izgradnjo in simulacijo dinamičnih sistemov.

MATEMATIČNI MODEL

Zapisati želimo osnovni matematični model, ki bo opisoval gibanje dveh teles pod vplivom gravitacijske sile. Zaradi enostavnosti se bomo omejili na gibanje v ravnini. Velikost gravitacijske sile, s katero se privlačita telesi z masama m_1 in m_2 , je [3]:

$$F_g = \frac{Gm_1m_2}{r^2} \quad (1)$$

pri čemer je r razdalja med težiščema teles in G gravitacijska konstanta, katere vrednost je $G=6,67 \cdot 10^{-11}m^3/kg s^2$. Zaradi delovanja gravitacijske sile \vec{F}_g , ki deluje na telo z maso m_1 , in sile $-\vec{F}_g$, ki deluje na telo z maso m_2 (slika 1), se telesi gibljeta s pospeškoma $\vec{a}_1=\vec{F}_g/m_1$ in $\vec{a}_2=-\vec{F}_g/m_2$. Za prvo ($i=1$) in drugo ($i=2$) telo lahko iz pospeška \vec{a}_i in hitrosti \vec{v}_i , ki sta definirana kot:

$$\vec{a}_i=d\vec{v}_i/dt, \vec{v}_i=d\vec{r}_i/dt, \quad (2a, b)$$

izračunamo tir gibanja $\vec{r}_i(t)$.

Z namenom numeričnega reševanja diferencialnih enačb (2a in 2b) z uporabo preproste Eulerjeve metode ($dx/dt=\Delta x/\Delta t=(x(t+\Delta t)-x(t))/\Delta t$, [6]) zapišimo enačbe po posameznih komponentah v diferenčni obliki:

$$v_{x,i}(t+\Delta t)=v_{x,i}(t)+a_{x,i}(t) \cdot \Delta t, \quad (3a)$$

$$v_{y,i}(t+\Delta t)=v_{y,i}(t)+a_{y,i}(t) \cdot \Delta t. \quad (3b)$$

$$x_i(t+\Delta t)=x_i(t)+v_{x,i}(t) \cdot \Delta t, \quad (3c)$$

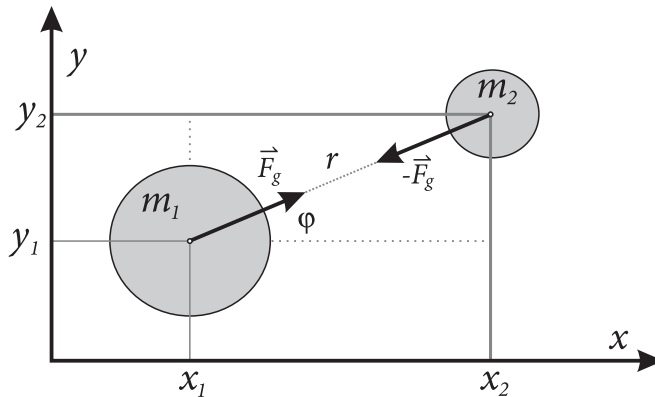
$$y_i(t+\Delta t)=y_i(t)+v_{y,i}(t) \cdot \Delta t, \quad (3d)$$

kjer je pospešek gibajočega se telesa po posameznih koordinatah ($a_{x,i}$, $a_{y,i}$) posledica delovanja gravitacijske sile na prvo ($i=1$) in drugo ($i=2$) telo (glej sliko 1):

$$a_{x,1} = \frac{F_g}{m_1} \cdot \cos\varphi = Gm_2 \frac{x_2 - x_1}{r^3}, \quad a_{y,1} = \frac{F_g}{m_1} \cdot \sin\varphi = Gm_2 \frac{y_2 - y_1}{r^3}. \quad (4a, b)$$

$$a_{x,2} = -\frac{F_g}{m_2} \cdot \cos\varphi = -Gm_1 \frac{x_1 - x_2}{r^3}, \quad a_{y,2} = -\frac{F_g}{m_2} \cdot \sin\varphi = -Gm_1 \frac{y_2 - y_1}{r^3}, \quad (4c, d)$$

$$r = \sqrt{(x^2 - x^1)^2 + (y^2 - y^1)^2}. \quad (5)$$



Slika 1: Prikaz gravitacijske sile med telesoma z masama m_1 in m_2 , katerih težišči sta oddaljeni za r .

S tem prevedemo sistem diferencialnih enačb (2a, b) na sistem preprostih algebraskih enačb (3a–3d), ki ob upoštevanju enačb (4a–4d) ter ustreznih začetnih pogojev $x_1(0)$, $y_1(0)$, $v_{x,1}(0)$, $v_{y,1}(0)$, $x_2(0)$, $y_2(0)$, $v_{x,2}(0)$, $v_{y,2}(0)$ določajo hitrost in lego gibajočih se teles v nekem trenutku. Pri tem velja omeniti, da se telesi z masama m_1 in m_2 gibljeta okoli skupnega težišča [4].

Simulacijo enačb (3a–3d) si lahko časovno skrajšamo s pomočjo računalnika. Uporabimo lahko tabelarično orientirane računalniške programe, kot je Microsoft Excel, ki z vnosom enačb omogoča izračun posameznih vrednosti po časovnih korakih (Δt) v obliki tabele.

GIBANJE TELES V HOMOGENEM GRAVITACIJSKEM POLJU

Najprej si oglejmo najpreprostejši primer, kjer sta masa in velikost prvega telesa precej večji od drugega ($m_1 \gg m_2$). Ob upoštevanju, da njuno skupno težišče miruje, je gibanje prvega telesa zanemarljivo. Predpostavimo še, da so premiki drugega telesa zanemarljivi v primerjavi z razsežnostjo prvega telesa. V tem primeru lahko predpostavimo, da se drugo telo giblje v homogenem gravitacijskem polju prvega telesa:

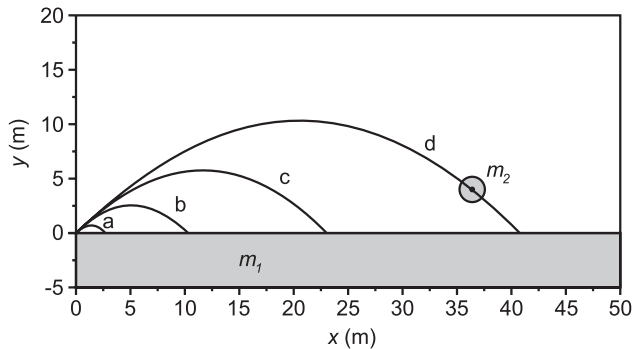
$$F_g = \frac{Gm_1m_2}{r^2} = m_2g. \quad (6)$$

Z zgoraj omenjenimi predpostavkami se sistem diferenčnih enačb (3a–3d) reducira le na drugo telo, enačbi (4c, d) pa lahko zapišemo kot:

$$a_{x,2} = 0, a_{y,2} = -g. \quad (7a, b)$$

Na sliki 2 so prikazani rezultati simulacije (enačbe 3a–3d) za različne začetne pogoje in pospešek $g=9,81 \text{ m/s}^2$. Na sliki lahko vidimo, da je tir gibanja parabola, kar poznamo že iz analitične rešitve, zapisane v parametrični obliki [4]:

$$x = v_0 \cos(\varphi_0)t, y = v_0 \sin(\varphi_0)t - gt^2/2. \quad (8a, b)$$



Slika 2: Rezultati simulacije (3a–3d) z računalniškim programom Microsoft Excel [7] za $m_1 \gg m_2$ indane parametre: $x_{0,2}=0, y_{0,2}=0, v_{0x,2}=v_0 \cos(\varphi_0), v_{0y,2}=v_0 \sin(\varphi_0), \varphi_0=45^\circ, a_{x,2}=0, a_{y,2}=-9,81 \text{ m/s}^2$. a) $v_0=5 \text{ m/s}$, b) $v_0=10 \text{ m/s}$, c) $v_0=15 \text{ m/s}$, d) $v_0=20 \text{ m/s}$.

GIBANJE TELES OKOLI FIKSNE TOČKE

Kadar je eno telo precej masivnejše od drugega, se njuno skupno težišče nahaja v središču masivnejšega telesa, kar pomeni, da lahko gibanje masivnejšega telesa zanemarimo in obravnavamo gibanje lažjega telesa okoli fiksne točke.

Kot primer takšnega gibanja si bomo ogledali gibanje satelitov okoli Zemlje [3,4] v primeru, da je masa m_2 satelita zanemarljiva v primerjavi z maso Zemlje ($m_1=6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$). Na satelit, ki kroži okoli Zemlje, deluje radialni pospešek (a_r), ki je enak gravitacijskemu pospešku. Na površju Zemlje je ta $g_0 = 9,81 \text{ m/s}^2$. Ob upoštevanju, da je radialni pospešek $a_r = v_2^2/r_0$, kjer je v_2 hitrost satelita in r_0 polmer Zemlje ($r_0=6378 \text{ km}$ [10]), dobimo hitrost, ki bi jo moral imeti satelit, če bi krožil okoli Zemlje tik nad njenim površjem. To hitrost imenujemo prva kozmična hitrost in je dana z enačbo [3, 4, 11]: $v_1 = \sqrt{g_0 r_0} = 7,9 \text{ km/s}$.

Ko satelite izstrelimo v krožne tirnice na določeno oddaljenost od površja Zemlje (h), je zahtevana krožilna hitrost satelitov, zaradi zmanjšanja gravitacijskega pospeška, manjša od prve kozmične hitrosti. Ob upoštevanju, da se gravitacijski pospešek $g=g_0(r_0/r_0+h)^2$ [4] z oddaljenostjo zmanjšuje, je tako imenovana krožilna hitrost satelita na določeni višini [11]:

$$v_k = v_1 \sqrt{r_0/(r_0+h)}. \quad (9)$$

Če ima satelit hitrost, ki je večja od krožilne hitrosti, se giblje po eliptičnem tiru, pri čemer je Zemlja v gorišču elipse [5, 11].

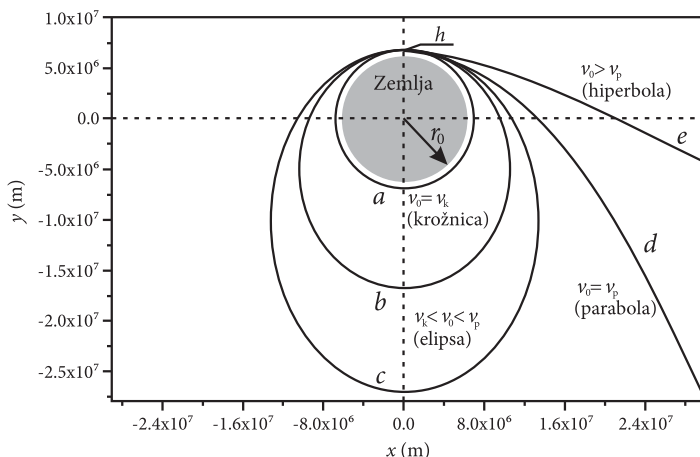
Če hitrost satelita še povečujemo, lahko pobegne privlačnosti Zemlje. Hitrost, pri kateri telo pobegne privlačnosti Zemlje na določeni višini h , imenujemo parabolična hitrost [11]:

$$v_p = v_{II} \sqrt{r_0/(r_0+h)}, \quad (10)$$

kjer je $v_{II} = \sqrt{2g_0 r_0}$ druga kozmična hitrost [3, 4, 11], ki jo mora imeti telo na površju Zemlje, da pobegne njeni privlačnosti. Telo, ki ima na določeni razdalji od Zemlje parabolično hitrost, se ne giblje več po elipsi, ampak po paraboli ter s tem pobegne privlačnosti Zemlje. Telo, ki ima večjo hitrost od parabolične, pa se giblje po hiperboli [5, 11].

Omenjeni hitrosti (enačba 9 in 10) lahko relativno enostavno izpeljemo s srednješolskim znanjem fizike [3], medtem ko izpeljava posameznih tirov (krožnica, elipsa, parabola, hiperbola, [5]) običajno presega matematično znanje v srednji šoli. V nadaljevanju bomo zato predstavili tire gibanja z numerično simulacijo matematičnega modela (enačbe 3a–3d), kjer bomo ob predpostavki, da je $m_1 \gg m_2$, enačbe gibanja reducirali le na drugo telo.

Kot primer numeričnega izračuna gibanja satelita okoli Zemlje vzemimo satelit, ki ga postavimo na višino h nad površjem in ga usmerimo z določeno hitrostjo pravokotno glede na radialno smer. Začetne pogoje v tem primeru definiramo kot: $x_2(0)=0$ m, $y_2(0)=r_0+h$, $v_{y,2}(0)=0$ m/s, medtem ko $v_{x,2}(0)=v_0$ poljubno spreminjamo. Numerični rezultati, ki jih dobimo s pomočjo diferenčnih enačb (3a–3d), so grafično prikazani na sliki 3.



Slika 3: Rezultati simulacije (enačbe 3a–3d) z računalniškim programom Berkeley Madonna [8] prikazujejo tire gibanja satelita pri različnih začetnih hitrostih. $x(0)=0$, $y(0)=r_0+h=6728$ km, $v_x(0)=v_0$, $v_y(0)=0$, **a)** $v_0=v_k=7,69$ km/s, **b)** $v_k < v_0 < v_p$, **c)** $v_k < v_0 < v_p$, **d)** $v_0=v_p=10,88$ km/s, **e)** $v_0 > v_p=13,65$ km/s.

Iz slike 3 je razvidno, da je tir gibanja krožnica (tir *a*), ko je hitrost satelita na višini h enaka krožilni hitrosti v_k (enačba 9). Tir gibanja postane elipsa z Zemljo v gorišču (tir *b* in *c*), ko je hitrost satelita na določeni višini večja od krožilne hitrosti v_k in manjša od parabolične hitrosti v_p [5]. V primeru, da je hitrost satelita enaka parabolični hitrosti v_p (enačba 10), je tir gibanja parabola [5] (tir *d*) in satelit pobegne privlačnosti Zemlje. Pri hitrosti večji od v_p pa postane tir gibanja hiperbola [5], česar sicer iz krivulje na sliki 3 (tir *e*) ni mogoče natančno razbrati.

Z istim matematičnim modelom ter drugimi parametri in začetnimi pogoji bi lahko proučevali tudi tire planetov in kometov okoli Sonca ter gibanje lun okoli planetov.

GIBANJE TELES OKOLI SKUPNEGA TEŽIŠČA

Oglejmo si še primere, kjer ne moremo predpostaviti, da eno telo miruje, ampak moramo upoštevati gibanje teles okoli skupnega težišča. Kot prvi primer omenimo gibanje dveh zvezd, ki se gravitacijsko privlačita. Kot drugi primer obravnavajmo Zemljo in Luno. Če želimo za opazovalca na Zemlji opisati gibanje Lune okoli Zemlje, lahko gibanje težišča Zemlje okoli skupnega težišča med Zemljo in Luno zanemarimo. Kadar želimo pojasniti, zakaj se plima in oseka ponovita dvakrat dnevno, pa moramo upoštevati tudi gibanje težišča Zemlje okoli skupnega težišča [4]. Podobno kot za Zemljo velja tudi za druge planete, okoli katerih krožijo lune.

V nadaljevanju si nekoliko podrobneje oglejmo Jupiter, okoli katerega krožijo številne lune [12]. Pri obravnavi gibanja lun okoli Jupitra lahko gibanje njegovega težišča zanemarimo. Če pa nas zanima gibanje Jupitrovega težišča zaradi gibanja lun, moramo obravnavati matematični model za gibanje teles okoli skupnega težišča. Če upoštevamo štiri največje Jupitrove lune (Io, Evropa, Ganimed in Kalisto) [12] in zanemarimo gravitacijsko silo med njimi, imamo opravka z reševanjem sistema 20-tih diferenčnih enačb ($3a-3d$; $i=1-5$). Zaradi zelo majhnih ekscentričnosti tirov posameznih lun [12] lahko privzamemo, da se lune gibljejo po krožnicah s polmerom r s hitrostjo $v_{0,i} = 2\pi r_i / t_{0,i}$, kjer je $t_{0,i}$ obhodni čas posamezne lune. Konstante in začetni pogoji, ki jih vstavimo v model, so predstavljeni v tabeli 1 [12].

Tabela 1: Štiri največje Jupitrove lune.

| | masa m (kg) | polmer kroženja r (m) | obhodni čas t_0 (s) | hitrost kroženja v_0 (m/s) |
|---------|----------------------|----------------------------|--------------------------|---------------------------------|
| Io | $8,93 \cdot 10^{22}$ | $4,22 \cdot 10^8$ | $1,53 \cdot 10^5$ | $1,73 \cdot 10^4$ |
| Evropa | $4,80 \cdot 10^{22}$ | $6,71 \cdot 10^8$ | $3,07 \cdot 10^5$ | $1,37 \cdot 10^4$ |
| Ganimed | $14,8 \cdot 10^{22}$ | $10,7 \cdot 10^8$ | $6,18 \cdot 10^5$ | $1,09 \cdot 10^4$ |
| Kalisto | $10,8 \cdot 10^{22}$ | $18,8 \cdot 10^8$ | $14,4 \cdot 10^5$ | $0,82 \cdot 10^4$ |

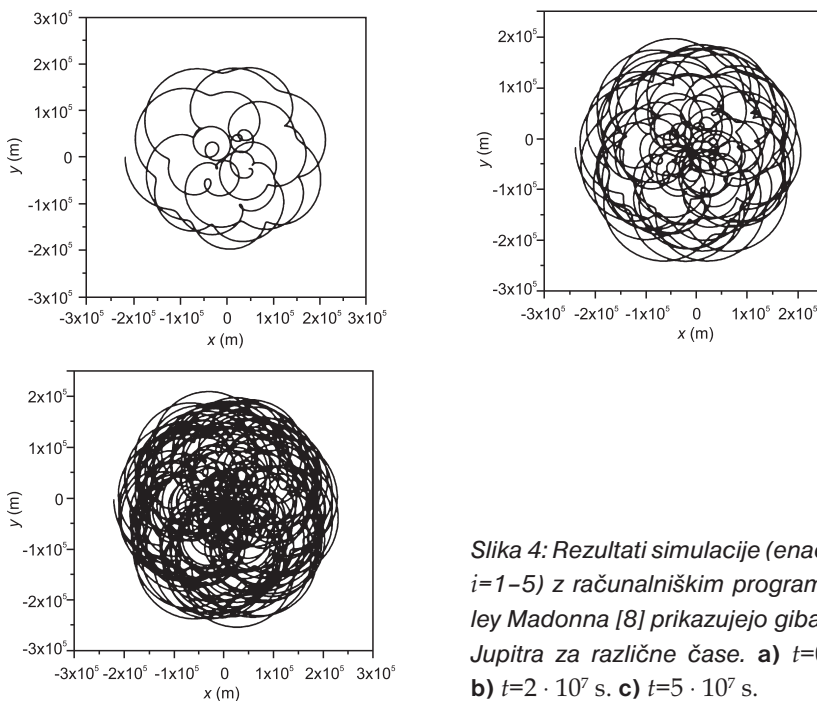
Za začetno stanje predpostavimo, da so vsa telesa (Jupiter, $i=1$; lune (tabela 1), $i=2-5$) na osi x , pri čemer se lune gibljejo v smeri osi y , Jupiter pa v nasprotni smeri. Ob predpostavki, da težišče sistema ostaja na mestu v izhodišču koordinatnega sistema, mora biti začetni položaj Jupitra z maso $m_1 = 1,9 \cdot 10^{27}$ kg [13]:

$$x_{0,1} = - \frac{1}{m_1} \sum_{i=2}^5 m_i r_i = -2,27 \cdot 10^5 \text{ m} \quad (11)$$

in njegova začetna hitrost:

$$v_{0,1} = -\frac{1}{m_1} \sum_{i=2}^5 m_i v_{0,i} = 2,47 \text{ m/s} . \quad (12)$$

Na sliki 4 lahko vidimo rezultate simulacije, ki prikazuje gibanje težišča Jupitra zaradi gibanja lun. Težišče opleta v območju s polmerom, ki je več kot 300-krat manjši od polmera Jupitra (ta znaša $7,15 \cdot 10^7 \text{ m}$ [13]). S povečevanjem časa vidimo, da gre za neperiodično gibanje, ki je značilno za kaotične sisteme. Če bi želeli ugotoviti, ali gre v tem primeru res za kaotično gibanje, bi morali uporabiti druge metode, kar pa presega obseg tega prispevka.



Slika 4: Rezultati simulacije (enačbe 3a–3d, $i=1-5$) z računalniškim programom Berkeley Madonna [8] prikazujejo gibanje težišča Jupitra za različne čase. a) $t=0,5 \cdot 10^7 \text{ s}$. b) $t=2 \cdot 10^7 \text{ s}$. c) $t=5 \cdot 10^7 \text{ s}$.

ZAKLJUČEK

V prispevku smo prikazali primer matematičnega modeliranja gibanja teles pod vplivom gravitacijske sile. Z zapisom diferencialnih enačb v diferenčni obliki in s simulacijo modela pri različnih pogojih smo pokazali, da je mogoče na ta način obravnavati različne primere tudi na nivoju srednješolskega izobraževanja. Dobljene tire gibanj lahko v nekaterih primerih primerjamo z znanimi analitičnimi rezultati, katerih izpeljava je z vidika matematičnega znanja v srednji šoli običajno prezahtevna. Na podoben način bi lahko obravnavali tudi gibanje teles pod vplivom drugih sil. Kot primer omenimo silo upora, ki jo v želji po analitični rešitvi običajno zanemarimo ter s tem žal velikokrat povzročimo prevelik razkorak med teorijo in prakso.

VIRI:

- [1] A. Demšar, *Zakaj se dogaja? Sile in energija 8*, Založba Rokus Klett, Ljubljana 2009, st. 31–53.
- [2] A. Demšar, *Zakaj se dogaja? Gibanje in elektrika 9*, Založba Rokus Klett, Ljubljana 2010, st. 22–25.
- [3] R. Kladnik, *Fizika za srednješolce 1 – Gibanje, sila, snov*, DZS, Ljubljana 1994, st. 111–113.
- [4] R. Kladnik, *Visokošolska fizika 1. del – Mehanski in toplotni pojavi*, DZS, Ljubljana 1991.
- [5] T. W. B. Kibble, F. H. Berkshire, *Classical mechanics*, Longman, Harlow 1996.
- [6] Z. Bohte, *Numerične metode*, DMFA, Ljubljana 1987.
- [7] Microsoft Corporation, Microsoft Excel, <http://office.microsoft.com>
- [8] R. Macea in G. Oster, *Berkeley Madonna*, University of California at Berkeley. Povzeto 29.11.2010 s strani: <http://www.berkeleymadonna.com>
- [9] W. Hupfeld, *Dynasys*. Povzeto 20.4.2013 s strani: <http://www.hupfeld-software.de>
- [10] *Polmer Zemlje*. Povzeto 20.4.2013 s strani: <http://sl.wikipedia.org>.
- [11] F. Avsec, M. Prosen, *Astronomija za 4. razred gimnazije*, DMFA, Ljubljana 1993.
- [12] *Jupitrovi naravni sateliti*. Povzeto 20.4.2013 s strani: http://sl.wikipedia.org/wiki/Jupitrovi_naravni_sateliti
- [13] *Jupiter*. Povzeto 20.4.2013 s strani: <http://sl.wikipedia.org/wiki/Jupiter>.