Narodna in univerzitetna knjižnica
v Ljubljani

161604

164

A/57

7327 Schulbuch

Lehrbuch der Geometrie

für

Lehrerbildungsanstalten.

Von

Dr. Franz Ritter von Močnik.

Mit 227 in den Text eingedruckten Holzschnitten.

IGN. V. KLEINMAYER & FEDOR BAMBERG'S BUCHHANDLUNG, BUCHDRUCKEREI & ZEITUNGS-COMPTOIR IN LAIBACH

Wien.
Druck und Verlag von Carl Gerold's Sohn.
1878.

161604

161604

Narodna in univerzitetna knjižnica
Ljubljana

FZC 309/1959

Inhalt.

Zweiter Theil.
Die Stereometrie.

Erster Abschnitt.
Gerade Linien und Ebenen im Raume.

Zweiter Abschnitt.
Von den Körpern im Allgemeinen.

Dritter Abschnitt.
Größenbestimmung der Körper.

Dritter Theil.
Grundzüge der ebenen Trigonometrie.

Erster Abschnitt.
Die Goniometrie.

Zweiter Abschnitt.
Die ebene Trigonometrie.

Anhang.
Einiges über die Aufnahme von Grundstücken.

Einleitung.

§. 1. Ein von allen Seiten begrenzter Theil des Raumes wird ein **Körper** genannt. Die Grenzen eines Körpers heißen **Flächen**, die Grenzen einer Fläche **Linien**, die Grenzen einer Linie **Punkte**.

Punkte, Linien, Flächen und Körper nennt man **Raumgebilde**.

Ein Körper hat drei Ausdehnungen: **Länge**, **Breite** und **Höhe** (Tiefe, Dicke); eine Fläche hat nur zwei Ausdehnungen: **Länge** und **Breite**; eine Linie hat nur eine Ausdehnung: die **Länge**.

Körper, Flächen und Linien werden, da sie Ausdehnung besitzen, auch **Raumgrößen** genannt.

Der Punkt hat keine Ausdehnung und ist daher auch keine Raumgröße.

Die Raumgebilde können durch **Bewegung** erzeugt werden. Bewegt sich ein Punkt, so ist der von ihm zurückgelegte Weg eine Linie. Wenn sich eine Linie, jedoch nicht in sich selbst, bewegt, so durchläuft sie eine Fläche. Bewegt sich eine Fläche, jedoch nicht in sich selbst, so entsteht ein Körper.

§. 2. Eine Linie, welche durch zwei Punkte bestimmt ist, heißt eine **gerade Linie**, auch blos **Gerade**. Sie wird erzeugt, wenn sich der eine Punkt in unveränderter Richtung nach dem andern Punkte hin fortbewegt. Die beständige Richtung, in welcher sich der Punkt bewegt, heißt auch die **Richtung** der durch die Bewegung erzeugten **Geraden**.

Eine Linie, welche aus geraden Linien zusammengesetzt ist, aber selbst nicht gerade ist, wird eine **gebrochene Linie** genannt.

Eine Linie, von der kein Theil gerade ist, heißt **krumm**. Sie wird erzeugt, wenn ein sich bewegender Punkt fortwährend die Richtung seiner Bewegung ändert.

Eine Fläche, welche durch drei Punkte, die nicht in einer Geraden liegen, bestimmt ist, heißt eine **ebene Fläche** oder eine **Ebene**. Sie hat die Eigenschaft, daß jede Gerade, welche zwei Punkte der Ebene verbindet, ganz in die Ebene hineinfällt.

Eine Fläche, von der kein Theil eben ist, heißt **krumm**.

Jede begrenzte Fläche wird eine **Figur** genannt. Eine ebene Figur ist entweder **geradlinig** oder **krummlinig**, je nachdem sie von geraden oder krummen Linien begrenzt wird. Die Grenzlinien einer Figur heißen *Seiten* derselben; die Gesammtheit aller Seiten bildet den *Umfang* der Figur.

Ein Körper, welcher von lauter Ebenen begrenzt wird, heißt *ebenflächig* (eckig); ein Körper, welcher nicht von lauter ebenen Flächen begrenzt wird, heißt *krummflächig* (rund).

§. **3.** Eine Größe *messen* heißt angeben, wie vielmal eine als *Einheit* angenommene Größe derselben Art in ihr enthalten ist. Die Zahl, welche dieses angibt, heißt die *Maßzahl* der Größe.

Jede Raumgröße kann nur durch eine *gleichartige* Raumgröße gemessen werden, also eine Linie nur durch eine Linie, eine Fläche nur durch eine Fläche, ein Körper nur durch einen Körper.

Die Größe einer begrenzten Linie heißt deren *Länge*, die Größe einer begrenzten Fläche deren *Flächeninhalt*, die Größe eines Körpers dessen *Cubikinhalt* oder *Volumen*.

§. **4.** Die Wissenschaft von den Raumgebilden, insofern an ihnen die Eigenschaften des Raumes betrachtet werden, heißt *Geometrie*. Sie zerfällt in zwei Haupttheile: die *Planimetrie* und die *Stereometrie*.

Die *Planimetrie* oder *ebene Geometrie* handelt von jenen Raumgebilden, welche in einer und derselben Ebene liegen; die *Stereometrie* beschäftigt sich dagegen mit jenen Raumgebilden, die nicht in einer einzigen Ebene liegen, sondern sich auch noch außerhalb derselben ausdehnen.

§. **5.** Die Geometrie behandelt ihren Stoff in *Erklärungen*, *Grundsätzen*, *Lehrsätzen* und *Aufgaben*.

Eine *Erklärung* ist die Angabe der wesentlichen Merkmale eines Begriffes. Im weiteren Sinne versteht man darunter die Angabe alles dessen, was bei einer folgenden Entwicklung zu Grunde gelegt wird.

Ein *Grundsatz* (Axiom) ist ein Satz, dessen Wahrheit als von selbst einleuchtend vorausgesetzt wird. Die allgemeinen mathematischen Grundsätze, die in der Arithmetik (§. 7) angeführt wurden, kommen auch in der Geometrie zur Anwendung.

Ein *geometrischer Lehrsatz* ist ein Satz, welcher eine geometrische Wahrheit ausspricht, deren Richtigkeit nicht an und für sich einleuchtet, sondern erst bewiesen werden muß. Seine Theile sind: die *Voraussetzung*, welche die Bedingungen enthält, unter welchen der Satz gelten soll; die *Behauptung*, welche die unter der gegebenen Voraussetzung stattfindende Wahrheit ausspricht; und der *Beweis*, daß die Behauptung aus der Voraussetzung mit Nothwendigkeit folgt. Der Beweis ist entweder *direct* oder *indirect*. Bei dem directen Beweise werden die Gründe, aus denen die Wahrheit des Satzes hervorgeht, unmittelbar angegeben; der indirecte Beweis zeigt, daß das Gegentheil der Behauptung unmöglich ist.

Unter der Umkehrung eines Lehrsatzes versteht man einen Satz, welcher die Voraussetzung des ersten als Behauptung, und die Behauptung des ersten als Voraussetzung enthält. Wenn ein Lehrsatz wahr ist, so ist nicht immer auch dessen Umkehrung wahr; sie muß besonders bewiesen werden.

Sätze, welche unmittelbar oder durch einfache Schlüsse aus den vorhergehenden Lehrsätzen abgeleitet werden können, heißen Folgesätze oder Zusätze.

Eine geometrische Aufgabe spricht die Forderung aus, ein geometrisches Gebilde darzustellen, welches gegebenen Bedingungen entspricht. Jede Aufgabe erfordert eine Auflösung, d. i. die Angabe des Verfahrens, wodurch die in der Aufgabe verlangte Construction (Zeichnung) ausgeführt wird.

Außer den geometrischen Constructionsaufgaben gibt es auch geometrische Rechnungsaufgaben, d. i. Aufgaben, welche sich auf die Berechnung der Raumgrößen mit Hilfe der Zahlen beziehen.

Erster Theil.

Die Planimetrie.

Erster Abschnitt.

Gerade Linien und Winkel.

1. Richtung und Länge der Geraden.

§. 6. Durch einen Punkt lassen sich unzählig viele gerade Linien in allen möglichen Richtungen ziehen. Ist noch ein zweiter Punkt gegeben, so wird es unter allen früheren Richtungen der Geraden eine einzige geben, in welcher die Gerade durch beide Punkte geht. Durch zwei Punkte ist eine gerade Linie vollkommen bestimmt.

Zwei Gerade, welche zwei Punkte gemeinschaftlich haben, fallen zusammen und bilden eine einzige Gerade.

Zwei von einander verschiedene Gerade können nur einen gemeinschaftlichen Punkt haben. Man sagt: sie schneiden sich in diesem Punkte, und nennt den gemeinschaftlichen Punkt ihren Durchschnittspunkt.

§. 7. Die unbegrenzte Gerade wird durch jeden in ihr liegenden Punkt in zwei Theile getheilt, deren jeder sich nur nach einer Richtung unbegrenzt ausdehnt. Eine durch einen Punkt halb begrenzte Gerade heißt Stral. Eine durch zwei Punkte ganz begrenzte Gerade heißt Strecke; die beiden Grenzpunkte nennt man ihre Endpunkte.

Die Strecke zwischen zwei Punkten bestimmt die Entfernung oder den Abstand derselben.

Ein Stral wird durch den Grenzpunkt und einen zweiten in ihm liegenden Punkt, eine Strecke durch ihre Endpunkte bezeichnet.

Unbegrenzte oder halb begrenzte Linien lassen sich nur der Richtung nach, Strecken der Richtung und der Länge nach mit einander vergleichen.

§. 8. Um zwei Strecken bezüglich ihrer Länge mit einander zu vergleichen, lege man dieselben so auf einander, daß der eine Endpunkt und die Richtungen derselben zusammenfallen. Wenn dann auch die anderen zwei Endpunkte zusammenfallen, die Strecken sich also decken, so sind diese einander gleich; fallen aber die anderen zwei Endpunkte nicht zusammen, so sind die Strecken ungleich, und zwar ist diejenige die kleinere, deren zweiter Endpunkt zwischen den Endpunkten der anderen Strecke liegt.

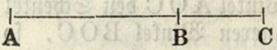
§. 9. Um eine gegebene Strecke zu messen, untersucht man, wie vielmal eine andere als Längeneinheit angenommene Strecke in derselben enthalten ist. Die Zahl, welche dieses angibt, ist die Maßzahl der Geraden.

Die Einheit des Längenmaßes ist in den meisten europäischen Staaten das Meter. Ein Meter (^{m}) wird in 10 Decimeter (^{dm}) à 10 Centimeter (^{cm}) à 10 Millimeter (^{mm}) eingetheilt. 1000 Meter sind ein Kilometer (^{Km}), 10000 Meter sind ein Myriameter (^{Mm}).

§. 10. Verlängert man (Fig. 1) die Strecke AB um die Strecke BC, so ist die erhaltene Strecke AC die Summe der beiden Strecken AB und BC; also

$$AB + BC = AC.$$

Fig. 1.



Trägt man auf eine Strecke AC eine kleinere Strecke BC von C bis B auf, so ist die übrigbleibende Strecke AB die Differenz der beiden Strecken AC und BC; also

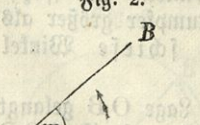
$$AC - BC = AB.$$

Wie werden zwei gegebene Strecken a) addirt, b) subtrahirt?

2. Winkel.

§. 11. Gehen in einer Ebene von einem Punkte aus zwei Stralen, so heißt die Größe der Drehung, welche der eine Stral in dieser Ebene um den gemeinschaftlichen Punkt machen muß, um in die Richtung des zweiten Strales zu gelangen, der Winkel der beiden Stralen. Die zwei Stralen, welche den Winkel bilden, heißen seine Schenkel; den gemeinschaftlichen Punkt, von dem sie ausgehen, nennt man den Scheitel oder die Spitze des Winkels. Die zwischen den Schenkeln liegende ebene Fläche, worin die Drehung als vollbracht betrachtet wird, heißt die Winkelfläche.

Fig. 2.



Einen Winkel bezeichnet man entweder mit einem einzigen Buchstaben, den man zwischen die Schenkel setzt, oder mit dem Buchstaben am Scheitel, oder mit drei Buchstaben, von denen einer am Scheitel und zwei an den Schenkeln stehen und der am Scheitel stehende immer in die Mitte gesetzt wird. In Fig. 2 sind OA und OB die Schenkel, O der Scheitel des Winkels, und dieser selbst heißt entweder der Winkel m, oder der Winkel O, oder der Winkel AOB oder BOA.

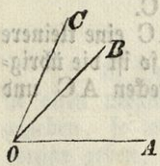
§. 12. Um zwei Winkel in Bezug auf ihre Größe zu vergleichen, lege man ihre Winkelflächen so auf einander, daß der Scheitel und ein

Schenkel des einen Winkels auf den Scheitel und einen Schenkel des anderen zu liegen kommen. Fallen dann auch die zweiten Schenkel der Richtung nach zusammen, so sind die beiden Winkel gleich; fallen aber die zweiten Schenkel nicht zusammen, so sind die zwei Winkel ungleich, und zwar ist derjenige kleiner, dessen zweiter Schenkel zwischen die Schenkel des anderen Winkels fällt.

Umgekehrt: Wenn zwei Winkel gleich sind, so können sie mit ihren Winkelflächen so auf einander gelegt werden, daß, wenn die Scheitel und ein Paar Schenkel derselben zusammenfallen, auch die anderen zwei Schenkel zusammenfallen.

§. **13.** Dreht man in dem Winkel AOB (Fig. 3) den Schenkel OB von OA weg um den Winkel BOC, so daß er in die Richtung OC kommt, so ist der neu entstehende Winkel AOC die Summe der beiden Winkel AOB und BOC; also

Fig. 3.



$$AOB + BOC = AOC.$$

Dreht man dagegen in dem Winkel AOC den Schenkel OC gegen OA um den kleineren Winkel BOC, so daß er in die Richtung OB kommt, so ist der übrigbleibende Winkel AOB die Differenz der Winkel AOC und BOC; also

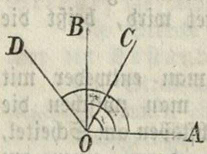
$$AOC - BOC = AOB.$$

Wie werden zwei Winkel a) addirt, b) subtrahirt?

§. **14.** Dreht sich ein Stral um seinen Grenzpunkt in einer Ebene herum, so nimmt er nach und nach alle Richtungen an, welche in der Ebene von diesem Punkte aus möglich sind, und bildet daher mit seiner anfänglichen Richtung alle um jenen Punkt möglichen Winkel.

1. Legt der bewegliche Stral den vierten Theil einer vollständigen Umdrehung zurück, so heißt der dadurch erzeugte Winkel ein rechter Winkel. Alle rechten Winkel sind einander gleich. Der rechte Winkel wird gewöhnlich mit dem Buchstaben R bezeichnet.

Fig. 4.



Ein Winkel, zu dessen Entstehung weniger als eine Vierteldrehung erforderlich ist, heißt ein spitzer, und ein Winkel, zu dessen Erzeugung mehr als eine Viertel-, aber weniger als die halbe Umdrehung erfordert wird, ein stumpfer Winkel. Ein spitzer Winkel ist demnach kleiner, ein stumpfer größer als ein rechter; beide werden auch schiefe Winkel genannt.

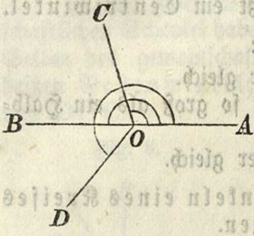
Hat (Fig. 4) der Stral OA, wenn er in die Lage OB gelangt ist, den vierten Theil einer vollen Umdrehung zurückgelegt, so ist AOB ein rechter, AOC ein spitzer und AOD ein stumpfer Winkel.

Zwei Winkel, welche sich zu einem Rechten ergänzen, heißen Complementwinkel, wie z. B. AOC und COB.

2. Wenn der bewegliche Stral eine halbe Umdrehung gemacht hat, so kommt er in eine Richtung, welche seiner anfänglichen Richtung

entgegengesetzt ist. Der Winkel, welcher durch diese Drehung erzeugt wird, dessen Schenkel daher entgegengesetzt in einer geraden Linie liegen, heißt ein gestreckter Winkel. Ein gestreckter Winkel ist gleich zwei Rechten. Alle gestreckten Winkel sind einander gleich.

Fig. 5.



Ein Winkel, der kleiner als ein gestreckter ist, heißt ein hohler, und ein Winkel, der größer als ein gestreckter ist, ein erhabener Winkel. In Fig. 5 ist AOB ein gestreckter, AOC ein hohler, AOD ein erhabener Winkel. Jedem hohlen Winkel zweier Stralen entspricht immer auch ein erhabener Winkel derselben; wenn jedoch nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt wird, ist unter dem Winkel zweier Stralen stets der hohle Winkel zu verstehen.

Zwei Winkel, welche sich zu zwei Rechten oder zu einem gestreckten Winkel ergänzen, heißen Supplementwinkel, wie z. B. AOC und COB.

3. Nach einer ganzen Umdrehung gelangt der bewegliche Stral wieder in seine ursprüngliche Lage. Der Winkel, der durch diese Drehung entsteht, heißt ein voller Winkel. Seine Schenkel fallen zusammen. Ein voller Winkel ist gleich zwei gestreckten Winkeln oder vier Rechten.

§. **15.** Um einen Winkel zu messen, nimmt man irgend einen bekannten Winkel als Einheit an und untersucht, wie vielmal derselbe in dem gegebenen Winkel enthalten ist.

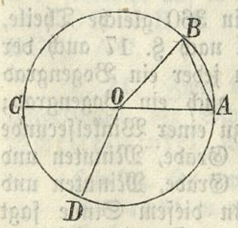
Die Einheit des Winkelmaßes ist der Grad (°), d. i. der 360ste Theil eines vollen Winkels. Ein Grad wird in 60 Minuten (′), eine Minute in 60 Secunden (″) eingetheilt.

Wie viel Grade hat a) ein voller, b) ein erhabener, c) ein gestreckter, d) ein rechter, e) ein spitzer, f) ein stumpfer Winkel?

Das einfachste Mittel der Winkelmessung bietet die Kreislinie.

§. **16.** Dreht sich eine Strecke OA (Fig. 6) um den Punkt O in derselben Ebene herum, bis sie wieder in ihre ursprüngliche Lage kommt, so beschreibt während dieser Drehung der Punkt A eine krumme Linie ABCDA, welche Kreislinie oder Kreis heißt.

Fig. 6.



Die Kreislinie ist demnach eine Linie, deren alle Punkte von einem innerhalb liegenden Punkte gleich weit abstehen. Dieser Punkt heißt der Mittelpunkt oder das Centrum, und jede vom Mittelpunkte nach der Kreislinie gezogene Strecke, wie OA, OB, ein Halbmesser (radius) des Kreises.

Eine Strecke AB, welche zwei Punkte der Kreislinie verbindet, heißt Sehne. Geht die Sehne durch den Mittelpunkt, wie AC, so heißt sie ein Durchmesser des Kreises.

Jeder Theil der Kreislinie, wie AMB, heißt ein **Bogen** (arcus), und die ganze Kreislinie der **Umfang** oder die **Peripherie** des Kreises. Die Hälfte des Umfanges heißt insbesondere ein **Halbkreis**, der vierte Theil desselben ein **Quadrant**.

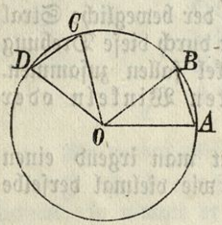
Ein Winkel AOB, dessen Scheitel im Mittelpunkte des Kreises liegt, dessen Schenkel also Halbmesser sind, heißt ein **Centriwinkel**.

Aus den voranstehenden Erklärungen folgt:

a) Alle Halbmesser eines Kreises sind einander gleich.
b) Jeder Durchmesser eines Kreises ist doppelt so groß als ein Halbmesser.
c) Alle Durchmesser eines Kreises sind einander gleich.

§. 17. **Lehrsatz.** **Zu gleichen Centriwinkeln eines Kreises gehören gleiche Sehnen und gleiche Bogen.**

Fig. 7.



Vorauss. Es sei O (Fig. 7) der Mittelpunkt des Kreises und Winkel AOB = COD.

Behaupt. Sehne AB = CD und
Bogen AB = CD.

Beweis. Legt man den Winkel COD so auf den Winkel AOB, daß die Halbmesser OC und OD auf die Halbmesser OA und OB zu liegen kommen, was wegen der Gleichheit der beiden Winkel möglich ist, so müssen wegen der Gleichheit der Halbmesser auch die Punkte C und D auf die Punkte A und B fallen; folglich ist die Sehne AB = CD. Fallen aber die Sehnen AB und CD auf einander, so müssen sich auch die Bogen AB und CD decken, weil sonst nicht alle Punkte derselben vom Mittelpunkte gleich weit entfernt wären; also ist auch Bogen AB = CD.

§. 18. Um einen Kreisbogen zu **messen**, nimmt man irgend einen bekannten Bogen desselben Kreises als Einheit an und untersucht, wie vielmal derselbe in dem gegebenen Bogen enthalten ist.

Die **Einheit des Bogenmaßes** ist ein **Bogengrad** (^{0}), d. i. der 360ste Theil des ganzen Kreisumfanges. Einen Bogengrad theilt man in 60 **Bogenminuten** ($'$), eine Bogenminute in 60 **Bogensecunden** ($''$) ein.

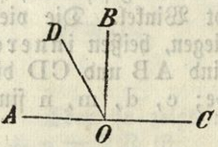
Wird der volle Centriwinkel eines Kreises in 360 gleiche Theile, Winkelgrade, getheilt, so wird durch die Schenkel nach §. 17 auch der Umfang des Kreises in 360 gleiche Bogen, deren jeder ein Bogengrad ist, getheilt. Zu einem Winkelgrade gehört also auch ein Bogengrad; ebenso zu einer Winkelminute eine Bogenminute, zu einer Winkelsecunde eine Bogensecunde. Hiernach drückt die Zahl der Grade, Minuten und Secunden eines Kreisbogens zugleich die Zahl der Grade, Minuten und Secunden des zugehörigen Centriwinkels aus. In diesem Sinne sagt man: Der Kreisbogen ist das Maß des zugehörigen Centriwinkels.

Auf der Messung der Winkel durch Kreisbogen beruht der Gebrauch des **Transporteurs**.

Wie wird ein gezeichneter Winkel mit Hilfe des Transporteurs gemessen?
Wie wird ein in Graden gegebener Winkel mit Hilfe des Transporteurs gezeichnet?

§. **19**. Zwei Winkel, welche denselben Scheitel und einen gemeinschaftlichen Schenkel haben, und deren andere Schenkel auf entgegengesetzten Seiten des gemeinschaftlichen Scheitels in einer geraden Linie liegen, heißen **Nebenwinkel**; z. B. (Fig. 8) AOB und BOC, ebenso AOD und DOC.

Fig. 8.



Lehrsatz. Die Summe zweier Nebenwinkel ist gleich zwei Rechten.

Denn sie bilden zusammen einen gestreckten Winkel.

Wie groß ist der Nebenwinkel eines Winkels von a) 58°, b) 110°, c) 97°, d) 82° 35′, e) 136° 12′, f) 73° 8′ 43″?

Folgesätze.

a) **Sind zwei Nebenwinkel gleich, so ist jeder von ihnen ein rechter; sind zwei Nebenwinkel ungleich, so ist der eine ein spitzer, der andere ein stumpfer Winkel.**

b) **Die Summe aller Winkel, welche auf einer Seite einer geraden Linie liegen und einen gemeinschaftlichen in ihr liegenden Scheitel haben, ist gleich zwei Rechten.**

Denn alle diese Winkel betragen zusammen einen gestreckten Winkel.

c) **Die Summe aller Winkel, welche in einer Ebene um einen Punkt herum liegen, ist gleich vier Rechten.**

Denn verlängert man einen beliebigen Schenkel eines dieser Winkel über den Scheitel hinaus, so betragen die Winkel auf jeder Seite dieses verlängerten Schenkels 2 R, folglich alle Winkel zu beiden Seiten desselben 4 R.

§. **20**. Bildet eine Gerade mit einer andern rechte Winkel, so heißen die beiden Geraden **senkrecht**, sonst **schief** auf einander. So ist (Fig. 8) BO senkrecht auf AC, DO schief auf AC, wenn der Winkel AOB = COB = R ist. Daß BO auf AC senkrecht steht, wird angezeigt: BO ⊥ AC.

§. **21**. Zwei Winkel, bei denen die Schenkel des einen die Verlängerungen der Schenkel des andern über den Scheitel sind, heißen **Scheitelwinkel**, wie a und c, oder b und d (Fig. 9).

Lehrsatz. Je zwei Scheitelwinkel sind einander gleich.

Vorauss. a und c sind Scheitelwinkel.

Behaupt. a = c.

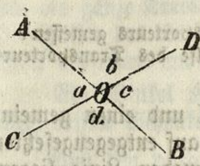


Fig. 9.

Beweis. $a + b = 2R$ als Nebenwinkel,
$b + c = 2R$ „ „
───────────
also $a + b = b + c$, und wenn man beiderseits b wegnimmt, $a = c$.

Eben so kann man beweisen, daß $b = d$ ist.

3. Parallele Linien.

§. **22.** Werden zwei gerade Linien von einer dritten geschnitten, so entstehen an den beiden Durchschnittspunkten acht Winkel. Die vier Winkel, welche zwischen den geschnittenen Geraden liegen, heißen *innere*, die anderen vier *äußere* Winkel. In Fig. 10 sind AB und CD die geschnittenen Geraden, EF die schneidende Gerade; c, d, m, n sind innere, a, b, o, p sind äußere Winkel.

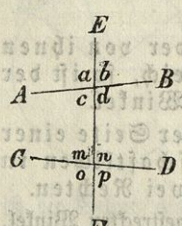


Fig. 10.

Ein äußerer und ein innerer Winkel auf derselben Seite der Schneidenden und an verschiedenen Scheiteln heißen *Gegenwinkel*; wie a und m, b und n, c und o, d und p.

Zwei äußere oder auch innere Winkel auf den entgegengesetzten Seiten der Schneidenden und an verschiedenen Scheiteln werden *Wechselwinkel* genannt; wie a und p, b und o, c und n, d und m.

Zwei äußere oder zwei innere Winkel auf derselben Seite der Schneidenden und an verschiedenen Scheiteln heißen *Anwinkel*; wie a und o, b und p, c und m, d und n.

§. **23.** **Lehrsätze.** 1. *Wenn beim Durchschnitte zweier Geraden durch eine dritte irgend zwei Gegenwinkel gleich sind, so sind a) auch je zwei andere Gegenwinkel gleich, b) je zwei Wechselwinkel gleich und c) je zwei Anwinkel Supplementwinkel.* (Fig. 11.)

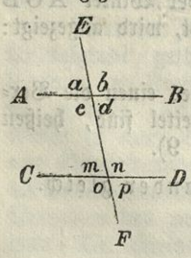


Fig. 11.

Voraussetzung. $a = m$.

Erste Behaupt. $b = n$, $c = o$, $d = p$.

Beweis. $a + b = 2R$ als Nebenwinkel,
$m + n = 2R$ als Nebenwinkel,
───────────
$a + b = m + n$,
$a = m$ nach der Voraussetzung,
───────────
folglich $b = n$.

Eben so wird bewiesen, daß $c = o$ ist.

Endlich ist $a = d$ als Scheitelwinkel,
$m = p$ als Scheitelwinkel,
$a = m$ nach der Voraussetzung,
also auch $d = p$.

Zweite Behaupt. $a = p$, $b = o$, $c = n$, $d = m$.
Beweis. $a = m$ nach der Voraussetzung,
$p = m$ als Scheitelwinkel,
also $a = p$.

Ebenso zeigt man, daß $b = o$, $c = n$, $d = m$ ist.

Dritte Behaupt. $a + o = 2R$, $b + p = 2R$,
$c + m = 2R$, $d + n = 2R$.
Beweis. $a + c = 2R$ als Nebenwinkel,
$c = o$ als Gegenwinkel,
$a + o = 2R$.

Eben so zeigt man, daß $b + p = 2R$, $c + m = 2R$ und $d + n = 2R$ ist.

2. Wenn beim Durchschnitte zweier Geraden durch eine dritte irgend zwei Wechselwinkel gleich sind, so sind a) auch je zwei andere Wechselwinkel gleich, b) je zwei Gegenwinkel gleich, und c) je zwei Anwinkel Supplementwinkel.

Beweis. Es sei $c = n$. Da $c = b$ als Scheitelwinkel, so ist auch $b = n$. Sind aber zwei Gegenwinkel gleich, so müssen (nach 1.) auch alle übrigen in dem Lehrsatze enthaltenen Behauptungen als bewiesen angesehen werden.

3. Wenn beim Durchschnitte zweier Geraden durch eine dritte irgend zwei Anwinkel Supplementwinkel sind, so sind auch a) je zwei andere Anwinkel Supplementwinkel, b) je zwei Gegenwinkel gleich, und c) je zwei Wechselwinkel gleich.

Beweis. Es sei $a + o = 2R$. Da auch $a + c = 2R$, so muß $a + c = a + o$, daher $c = o$ sein. Sind aber zwei Gegenwinkel gleich, so treffen (nach 1.) auch alle übrigen Behauptungen zu. — Ebenso wird der Beweis geführt, wenn man $c + m = 2R$ annimmt.

§. **24**. Zwei gerade Linien, welche in derselben Ebene liegen und, so weit sie auch verlängert werden, in keinem Punkte zusammentreffen, heißen parallel. Um anzuzeigen, daß zwei Gerade AB und CD parallel sind, schreibt man AB || CD.

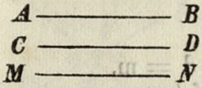
Zwei nicht parallele Gerade, welche in derselben Ebene liegen, müssen hinreichend verlängert in einem Punkte zusammentreffen.

Grundsatz. Durch einen Punkt außerhalb einer Geraden kann zu dieser nur **eine** Parallele gezogen werden.

Folgesatz. Sind zwei gerade Linien mit einer und derselben dritten parallel, so sind sie unter einander parallel.

Ist (Fig. 12) $AB \parallel MN$ und $CD \parallel MN$, so ist auch $AB \parallel CD$.

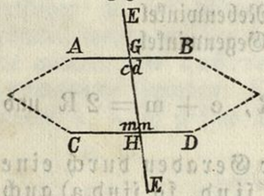
Fig. 12.



Denn wäre die Gerade AB nicht parallel mit den Geraden CD, so müßte sie hinreichend verlängert dieselbe in einem Punkte schneiden; dann aber gäbe es durch diesen Durchschnittspunkt zwei Parallele zu MN, was nach dem obigen Grundsatze nicht möglich ist.

§. 25. **Lehrsätze.** 1. *Werden zwei Gerade von einer dritten so geschnitten, daß entweder zwei Wechselwinkel oder zwei Gegenwinkel gleich, oder zwei Anwinkel Supplementwinkel sind, so sind die geschnittenen Geraden parallel.* (Fig. 13.)

Fig. 13.



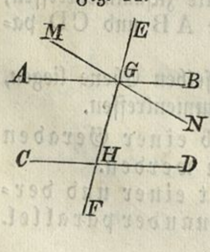
Beweis. Werden die Geraden AB und CD von der EF so geschnitten, daß $c = n$, also auch $d = m$ ist, so kann man (§. 12) den auf der einen Seite von EF zwischen GB, GH und HD liegenden Theil der Ebene BGHD so in den auf der andern Seite liegenden Theil CHGA bringen, daß GH auf HG, GB in die Richtung HC und HD in die Richtung GA fällt. Würden nun die Geraden AB und CD auf der einen Seite von EF in einem Punkte zusammentreffen, so müßte diesem Durchschnittspunkte auch einer auf der anderen Seite entsprechen; dann hätten aber AB und CD zwei Punkte gemeinschaftlich, was der Grundvorstellung der geraden Linien widerspricht. Die Geraden AB und CD können also nicht zusammentreffen; folglich muß $AB \parallel CD$ sein.

Da (§. 23) zwei Wechselwinkel auch gleich sind, wenn zwei Gegenwinkel einander gleich, oder wenn zwei Anwinkel Supplementwinkel sind, so ist der obige Lehrsatz vollständig bewiesen.

2. *Werden zwei parallele Gerade von einer dritten Geraden geschnitten, so sind a) je zwei Wechselwinkel gleich, b) je zwei Gegenwinkel gleich, und c) je zwei Anwinkel Supplementwinkel.* (*Umkehrung des Lehrsatzes* 1.)

Man braucht hier nur zu zeigen, daß unter der gegebenen Voraussetzung zwei Wechselwinkel gleich sind, indem dann nach §. 23 auch die übrigen Behauptungen zutreffen.

Fig. 14.



Vorauss. $AB \parallel CD$ (Fig. 14).

Behaupt. W. $BGH = CHG$.

Beweis. Wenn BGH nicht $= CHG$, so ist $BGH > CHG$ oder $BGH > CHG$. Wäre $BGH > CHG$, so ziehe man die Gerade MN so durch G, daß $NGH = CHG$ wird; dann wäre $MN \parallel CD$, was nicht möglich ist, da nach der Voraussetzung $AB \parallel CD$ ist und durch einen Punkt G zu einer Geraden nur *eine* Parallele gezogen werden kann. Ebenso läßt sich zeigen, daß BGH nicht kleiner als CHG sein könne. Es muß also $BGH = CHG$ sein.

Zwei Parallele AB und CD werden von der Geraden EF in den Punkten G und H so geschnitten, daß der Winkel AGE

a) 57°, b) 81° 49′, c) 123° 8′ 36″

beträgt; wie groß ist in jedem Falle jeder der übrigen an den Durchschnittspunkten entstehenden Winkel?

§. **26**. Wenn zwei Gerade in einer Ebene nicht parallel sind, so heißen sie nach der Seite ihres Durchschnittes hin convergirend, nach der anderen Seite hin divergirend.

Lehrsatz. Werden zwei Gerade von einer dritten so geschnitten, daß die Summe der inneren Anwinkel auf einer Seite der Schneidenden kleiner ist als zwei Rechte, so convergiren die beiden Geraden nach dieser Seite hin. (Fig. 14.)

Vorauss. $NGH + GHD < 2R$.

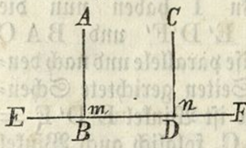
Behaupt. Die Geraden MN und CD convergiren nach rechts.

Beweis. Es sei die Gerade $AGB \parallel CD$ gezogen; dann ist
$BGH + GHD = 2R$ (§. 25), und weil
$NGH + GHD < 2R$ (nach der Vorauss.),
so ist auch $BGH > NGH$.

Es fällt also GN zwischen GB und HD; folglich convergiren die Geraden MN und CD nach rechts.

§. **27**. Lehrsätze. 1. Stehen zwei Gerade auf einer dritten senkrecht, so sind sie parallel (Fig. 15).

Fig. 15.



Vorauss. $AB \perp EF$ und $CD \perp EF$.

Behaupt. $AB \parallel CD$.

Beweis. Da $AB \perp EF$, ist $m = R$; da $CD \perp EF$, ist auch $n = R$; folglich ist $m = n$, daher $AB \parallel CD$ (§. 25, 1).

2. Steht von zwei Parallelen die eine auf einer Geraden senkrecht, so steht auch die andere auf ihr senkrecht. (Umkehrung von 1.)

Vorauss. $AB \parallel CD$ und $AB \perp EF$.

Behaupt. $CD \perp EF$.

Beweis. Weil $AB \parallel CD$, so ist $m = n$ (§. 25, 2); da $AB \perp EF$, ist $m = R$; folglich ist auch $n = R$, d. i. $CD \perp EF$.

3. Von einem Punkte außerhalb einer Geraden kann zu dieser nur eine Senkrechte gezogen werden.

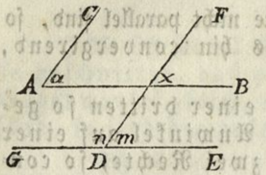
Indireter Beweis. Ließen sich von dem gegebenen Punkte zu der gegebenen Geraden mehrere Senkrechte ziehen, so müßten sie nach 1. einander parallel sein, was nicht möglich ist, da sie einen gemeinschaftlichen Punkt hätten.

4. In einem Punkte einer Geraden kann auf diese nur eine Senkrechte errichtet werden.

Beweis wie zu 3.

§. 28. Ist (Fig. 16) DE || AB und DF || AO, so sind m und a zwei Winkel, deren parallele Schenkel nach derselben Seite gerichtet sind;

Fig. 16.



sie sind einander gleich, weil beide dem gemeinschaftlichen Gegenwinkel x gleich sind; also m = a.

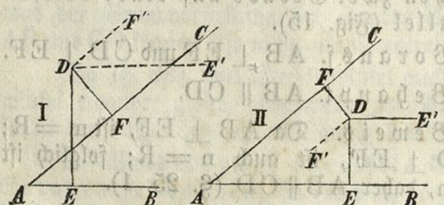
Die Schenkel der Winkel n und a sind auch paarweise parallel, es sind jedoch nur zwei parallele Schenkel nach derselben Seite, die beiden andern aber nach entgegengesetzten Seiten gerichtet; da n + m = 2 R ist und statt m auch der Winkel a gesetzt werden kann, so ist auch n + a = 2 R.

Daraus folgt:

Zwei Winkel, deren Schenkel paarweise parallel sind, sind a) einander gleich, wenn beide Paare der Schenkel nach derselben Seite gerichtet sind; dagegen b) Supplementwinkel, wenn zwei Schenkel nach derselben Seite, die beiden anderen aber nach entgegengesetzten Seiten gerichtet sind.

§. 29. Es sei (Fig. 17) DE ⊥ AB und DF ⊥ AC. Man drehe die Schenkel DE und DF des Winkels EDF als eine feste Verbindung um den Scheitel D um einen rechten Winkel, so daß sie in die Lage DE′ und DF′ kommen.

Fig. 17.



In I haben nun die Winkel E′D′F′ und BAC paarweise parallele und nach denselben Seiten gerichtete Schenkel; also ist Winkel E′D′F = = BAC, folglich auch Winkel EDF = BAC. In II sind auch die Schenkel der Winkel E′D′F und BAC paarweise parallel, jedoch ein Paar nach derselben, das andere Paar nach entgegengesetzten Seiten gerichtet; also ist

E′D′F′ + BAC = 2 R,

folglich auch Winkel EDF + BAC = 2 R.

Zwei Winkel, deren Schenkel paarweise auf einander senkrecht stehen, sind entweder einander gleich oder Supplementwinkel.

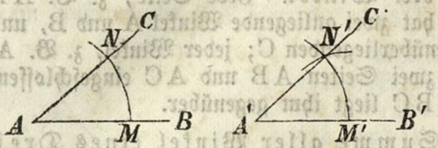
Wann findet die erste und wann die zweite Beziehung statt?

Constructions-Aufgaben.

1. In einem Punkte A′ (Fig. 18) an eine Gerade A′B′ einen Winkel zu verzeichnen, welcher einem gegebenen Winkel BAC gleich ist.

Auflösung. Man beschreibe aus A mit einem beliebigen Halbmesser einen Kreisbogen, welcher die Schenkel des gegebenen Winkels in M und N schneidet; mit demselben Halbmesser beschreibe man auch aus A' einen Bogen, welcher die A'B' in M' durchschneidet; endlich beschreibe man mit dem Abstande der Punkte M und N als Halbmesser aus M' einen Kreisbogen, welcher den von A' aus beschriebenen Bogen in N' schneidet. Zieht man nun durch A' und N' die Gerade A'C', so ist B'A'C' der verlangte Winkel.

Fig. 18.

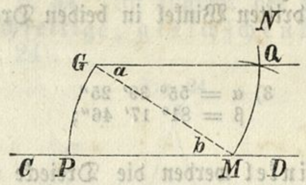


Beweis durch Deckung.

2. Durch einen Punkt G außerhalb einer Geraden CD mit dieser eine Parallele zu ziehen.

Auflösung. 1. Man ziehe (Fig. 13) durch G eine Gerade, welche die CD in H schneidet, und construire in G an der GH den Winkel HGB = FHD; der zweite Schenkel GB des construirten Winkels ist die gesuchte Parallele (§. 25, 1).

Fig. 19.



Auflösung 2. Man beschreibe (Fig. 19) aus G mit einem hinreichend großen Halbmesser den Bogen MN, aus M mit demselben Halbmesser den Bogen GP, endlich aus M mit der Sehne GP als Halbmesser einen Bogen, welcher den Bogen MN in Q schneidet; die durch G und Q gezogene Gerade ist die gesuchte Parallele.

Denn nach der Auflösung der 1. Aufgabe ist a = b, und daher GQ || CD (§. 25, 1).

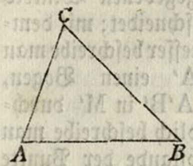
Zweiter Abschnitt.

Von den geradlinigen Figuren im Allgemeinen.

1. Das Dreieck.

§. 30. Eine von drei Strecken begrenzte ebene Figur wird ein Dreieck genannt.

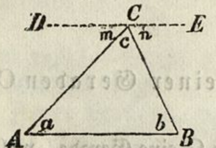
Fig. 20.



Bei jedem Dreiecke hat man auf sechs Bestandstücke Rücksicht zu nehmen, auf drei Seiten und auf drei Winkel. Jede Seite, z. B. AB (Fig. 20) hat zwei anliegende Winkel A und B, und einen gegenüberliegenden C; jeder Winkel, z. B. A, wird von zwei Seiten AB und AC eingeschlossen, die dritte BC liegt ihm gegenüber.

§. 31. **Lehrsatz.** Die Summe aller Winkel eines Dreieckes ist gleich zwei Rechten.

Fig. 21.



Beweis. Zieht man durch C (Fig. 21) $DE \parallel AB$, so ist $\left.\begin{array}{l} a = m, \\ b = n, \end{array}\right\}$ nach §. 25, 2;

daher $a + b + c = m + n + c$;

nun ist $m + n + c = 2\,R$ (§. 19, Folges. b),

folglich muß auch $a + b + c = 2\,R$ sein.

Folgesätze.

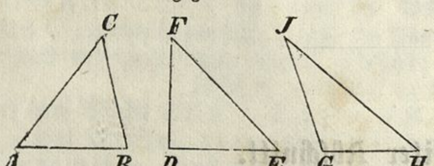
a) Die Summe zweier Winkel ist kleiner als zwei Rechte; ein Dreieck kann daher nur einen rechten, sowie auch nur einen stumpfen Winkel enthalten, und die beiden anderen müssen spitze Winkel sein.

b) Sind zwei Winkel eines Dreieckes zwei Winkeln eines andern Dreieckes gleich, so müssen auch die dritten Winkel in beiden Dreiecken gleich sein.

In einem Dreiecke sind zwei Winkel
1) $\alpha = 68^\circ$, $\beta = 73^\circ$; 2) $\alpha = 35^\circ\ 57'$, $\beta = 102^\circ\ 18'$; 3) $\alpha = 55^\circ\ 39'\ 25''$, $\beta = 81^\circ\ 17'\ 46''$;
wie groß ist der dritte Winkel γ?

§. 32. Mit Rücksicht auf die Winkel werden die Dreiecke in spitzwinklige, rechtwinklige und stumpfwinklige eingetheilt (Fig. 22).

Fig. 22.

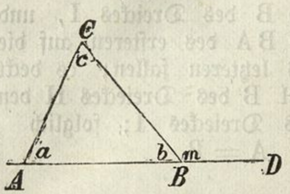


Ein Dreieck heißt spitzwinklig, wenn alle drei Winkel spitz sind; rechtwinklig, wenn darin ein rechter; stumpfwinklig, wenn darin ein stumpfer Winkel vorkommt. ABC ist ein spitzwinkliges, DEF ein rechtwinkliges und GHJ ein stumpfwinkliges Dreieck.

In einem rechtwinkligen Dreiecke heißt die Seite EF, welche dem rechten Winkel gegenüber liegt, die Hypotenuse: die beiden Seiten DE und DF, welche den rechten Winkel bilden, werden die Katheten genannt. Das spitz- und das stumpfwinklige Dreieck bezeichnet man mit dem gemeinschaftlichen Namen schiefwinklige Dreiecke.

§. **33.** Verlängert man in einem Dreiecke eine Seite, so heißt der Winkel, welcher von dieser Verlängerung mit der anstoßenden Seite gebildet wird, ein Außenwinkel des Dreieckes; z. B. CBD (Fig. 23) ist ein Außenwinkel des Dreieckes ABC.

Fig. 23.



Lehrsatz. Jeder Außenwinkel eines Dreieckes ist gleich der Summe der beiden inneren ihm nicht anliegenden Winkel.

Beweis. Es ist $m + b = 2$ R, ferner $a + b + c = 2$ R; daher auch $m + b = a + b + c$, oder wenn man beiderseits den Winkel b wegnimmt, $m = a + c$.

Folgesatz. Jeder Außenwinkel eines Dreieckes ist größer als ein innerer ihm nicht anliegender Winkel.

Wie groß ist die Summe aller drei Außenwinkel eines Dreieckes?

Zwei innere Winkel eines Dreieckes sind

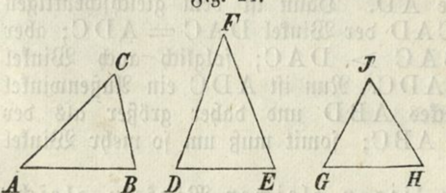
a) 43^0 und 71^0, b) $59^0\ 27'\ 45''$ und $102^0\ 8'\ 52''$;

wie groß ist der gegenüberliegende Außenwinkel?

In einem rechtwinkligen Dreiecke ist der eine Außenwinkel an der Hypotenuse a) 98^0, b) $124^0\ 31'$, c) $145^0\ 28'\ 50''$; wie groß ist der zweite Außenwinkel an der Hypotenuse?

§. **34.** In Hinsicht der Seiten werden die Dreiecke in ungleichseitige, gleichschenklige und gleichseitige eingetheilt (Fig. 24).

Fig. 24.



Ein Dreieck, in welchem jede Seite von jeder anderen verschieden ist, heißt ungleichseitig, wie ABC; ein Dreieck, in welchem zwei Seiten gleich sind, heißt gleichschenklig, wie DEF; ein Dreieck, in welchem alle drei Seiten gleich sind, heißt gleichseitig, wie GHI.

Im gleichschenkligen Dreiecke nennt man die beiden gleichen Seiten DF und EF die Schenkel, die dritte Seite DE die Grundlinie, und den dieser gegenüberliegenden Eckpunkt F die Spitze oder den Scheitel.

§. **35.** Beziehungen zwischen den Seiten eines Dreieckes und den ihnen **gegenüberliegenden Winkeln**.

1. Gleichen Seiten eines Dreieckes liegen gleiche Winkel gegenüber (Fig. 25).

Voraussf. $AC = BC$.

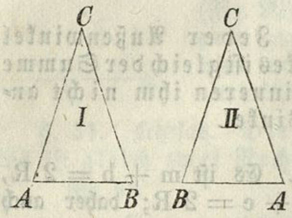
Behaupt. $B = A$.

Beweis. Man stelle sich das Dreieck I noch einmal, jedoch umgewendet, vor, wie in II, und lege das Dreieck II so auf I, daß C auf

C und die Seiten CB und CA des Dreieckes II längs der Seiten CA und CB des Dreiecks I zu liegen kommen, was möglich ist, weil die Winkel C in beiden Dreiecken gleich sind. Dann müssen wegen BC = AC auch die Punkte B und A des Dreieckes II in die Punkte A und B des Dreieckes I, und somit die Seite BA des ersteren auf die Seite AB des letzteren fallen; es deckt also der Winkel B des Dreieckes II den Winkel A des Dreieckes I; folglich

A = B.

Fig. 25.



Folgesätze.

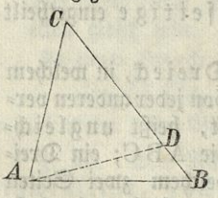
a) In einem gleichschenkligen Dreiecke sind die Winkel an der Grundlinie einander gleich. Durch einen Winkel eines gleichschenkligen Dreieckes sind alle bestimmt.

b) Der Außenwinkel am Scheitel eines gleichschenkligen Dreieckes ist doppelt so groß als jeder Winkel an der Grundlinie (§. 33).

c) In einem gleichseitigen Dreiecke sind alle drei Winkel einander gleich, und daher jeder 60^0.

2. In jedem Dreiecke liegt der größeren Seite auch der größere Winkel gegenüber (Fig. 26).

Fig. 26.



Vorauss. BC > AC.

Behaupt. W. BAC > ABC.

Beweis. Man mache CD = AC und ziehe die Strecke AD. Dann ist dem gleichschenkligen Dreiecke CAD der Winkel DAC = ADC; aber Winkel BAC > DAC; folglich auch Winkel BAC > ADC. Nun ist ADC ein Außenwinkel des Dreieckes ABD und daher größer als der innere entgegengesetzte Winkel ABC; somit muß um so mehr Winkel BAC > ABC sein.

3. In jedem Dreiecke liegen gleichen Winkeln gleiche Seiten gegenüber (Fig. 25).

Vorauss. A = B.

Behaupt. BC = AC.

Beweis. Wäre BC nicht = AC, so müßte BC $\gtrless$ AC sein. Allein dann wäre nach dem vorhergehenden Satze auch A $\gtrless$ B, was der Voraussetzung A = B widerspricht. Es muß daher BC = AC sein.

4. In jedem Dreiecke liegt dem größeren Winkel auch die größere Seite gegenüber.

Es sei (Fig. 26) der Winkel BAC > ABC. Gesetzt, es sei nicht BC > AC, so müßte BC = AC oder BC < AC sein. Aus der ersten Annahme würde folgen, daß BAC = ABC ist; aus der zweiten, daß BAC < ABC ist; beides widerstreitet der Voraussetzung BAC > ABC. Es muß daher BC > AC sein.

Folgesätze.

a) Im rechtwinkligen Dreiecke ist die Hypotenuse größer als jede Kathete.

b) Im stumpfwinkligen Dreiecke ist die dem stumpfen Winkel gegenüberstehende Seite die größte.

Der Winkel am Scheitel eines gleichschenkligen Dreieckes ist α (62° 36′); wie groß ist jeder Winkel an der Grundlinie?

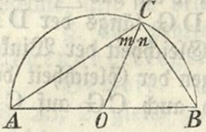
In einem gleichschenkligen Dreiecke ist ein Winkel an der Grundlinie β (49° 27′ 25″); wie groß ist der Winkel am Scheitel?

Wie groß ist jeder Winkel an der Grundlinie eines gleichschenkligen rechtwinkligen Dreieckes?

Wie groß sind die Winkel in einem gleichschenkligen Dreiecke, wenn der Winkel am Scheitel a) eben so groß, b) doppelt so groß, c) halb so groß als einer der Winkel an der Grundlinie ist?

§. **36.** Verbindet man einen beliebigen Punkt eines Halbkreises mit den Endpunkten seines Durchmessers durch zwei Sehnen, so bilden diese einen rechten Winkel.

Fig. 27.



Voraussf. Es sei O (Fig. 27) der Mittelpunkt und AB der Durchmesser eines Halbkreises.

Behaupt. Winkel $ACB = R$.

Beweis. Man ziehe OC; dann ist $OA = OC = OB$, daher (nach §. 35, 1) $m = A$, $n = B$; folglich $m + n = ACB = A + B$.

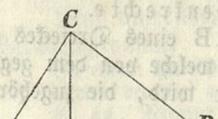
Daraus folgt

$$2\,ACB = A + B + ACB = 2\,R, \text{ und}$$
$$ACB = R.$$

§. **37.** Beziehungen zwischen den Seiten eines Dreieckes.

1. In jedem Dreiecke ist die Summe je zweier Seiten größer als die dritte Seite.

Fig. 28.



Es sei ABC (Fig. 28) ein Dreieck, dessen größte Seite AB ist. Denkt man sich $CD \perp AB$, so ist (nach §. 35, 4. Folges. a)

$$AC > AD, \text{ und}$$
$$BC > BD, \text{ daher}$$
$$\overline{AC + BC > AD + BD}, \text{ oder}$$
$$AC + BC > AB.$$

Daß $AB + BC > AC$ und $AB + AC > BC$ ist, folgt unmittelbar aus der Voraussetzung.

2. In jedem Dreiecke ist die Differenz je zweier Seiten kleiner als die dritte Seite (Fig. 28).

Nach dem vorhergehenden Satze ist

$$AB < AC + BC \text{ und } BC < AB + AC,$$

folglich auch

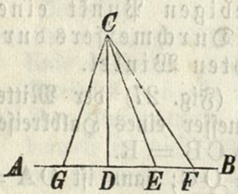
$$AB - AC < BC,\ AB - BC < AC \text{ und } BC - AC < AB.$$

§. 38. Wird von einem Punkte außerhalb einer Geraden zu dieser eine senkrechte oder eine schiefe Gerade gezogen, so heißt ihr Durchschnitt mit der gegebenen Geraden der Fußpunkt der anderen Geraden.

Lehrsatz. Zieht man von einem Punkte außerhalb einer Geraden zu dieser eine senkrechte und mehrere schiefe Strecken, so ist

1. die Senkrechte die kürzeste unter allen Strecken;
2. zwei schiefe Strecken, deren Fußpunkte auf der gegebenen Geraden von dem Fußpunkte der Senkrechten gleich weit abstehen, sind einander gleich; und
3. von zwei schiefen Strecken, deren Fußpunkte auf der Geraden von dem Fußpunkte der Senkrechten ungleiche Entfernungen haben, ist die entferntere die größere.

Fig. 29.



1. Ist (Fig. 29) CD ⊥ AB, so ist in den rechtwinkligen Dreiecken CDE, CDF, CDG die Kathete CD kürzer als jede der Hypotenusen CE, CF, CG.

2. Ist CD ⊥ AB und DE = DG, so muß, wenn man das △CDG so auf das △CDE legt, daß CD auf CD und DG längs der DE zu liegen kommt, wegen der Gleichheit der Winkel CDG und CDE und wegen der Gleichheit der Strecken DG und DE der Punkt G auf E, also auch CG auf CE fallen; folglich ist CE = CG.

3. Ist CD ⊥ AB, so ist in dem rechtwinkligen Dreieck △ CDE der Winkel CED spitz, daher sein Nebenwinkel CEF stumpf, und somit im stumpfwinkligen △ CEF die Seite CF > CE.

Folgesatz. Von einem Punkte außerhalb einer Geraden können zu dieser immer zwei, aber auch nur zwei gleich lange schiefe Strecken gezogen werden.

Zusatz. Unter der Entfernung oder dem Abstande eines Punktes von einer Geraden versteht man die kürzeste Linie zwischen beiden, also die von dem Punkte zu der Geraden gezogene Senkrechte.

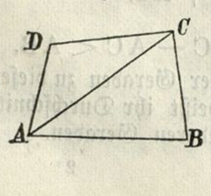
§. **39.** Nimmt man irgend eine Seite AB eines Dreieckes als Grundlinie an, so heißt die Senkrechte CD, welche von dem gegenüberliegenden Eckpunkte auf diese Seite gefällt wird, die zugehörige Höhe des Dreieckes.

Die Lage der Höhe eines Dreieckes hängt von den Winkeln an der Grundlinie ab.

Wann fällt die Höhe a) innerhalb des Dreieckes, b) in eine Seite, c) außerhalb des Dreieckes?

2. Das Viereck.

Fig. 30.



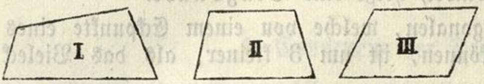
§. **40.** Eine von vier Strecken begrenzte ebene Figur heißt ein Viereck.

Die Strecke AC (Fig. 30), welche zwei gegenüberstehende Eckpunkte des Viereckes verbindet, heißt eine Diagonale.

Ein Viereck hat vier Seiten, vier Winkel und zwei Diagonalen.

§. **41.** Mit Rücksicht auf die gegenseitige Lage der Seiten werden die Vierecke in Trapezoide, Trapeze und Parallelogramme eingetheilt (Fig. 31).

Fig. 31.



Ein Trapezoid ist ein Viereck, in welchem keine Seite mit einer andern parallel ist, wie I. Ein Trapez ist ein Viereck, in welchem nur zwei gegenüberstehende Seiten parallel, die andern zwei Seiten aber nicht parallel sind, wie II. Ein Parallelogramm ist ein Viereck, in welchem je zwei gegenüberstehende Seiten parallel sind, wie III.

§. **42.** Lehrsatz. Die Summe aller Winkel eines Viereckes ist gleich vier Rechten.

Beweis. Theilt man (Fig. 30) das Viereck durch eine Diagonale in zwei Dreiecke, so beträgt die Winkelsumme in jedem derselben zwei Rechte, also in beiden zusammen vier Rechte.

§. **43.** Lehrsatz. In einem Parallelogramm sind je zwei gegenüberliegende Winkel gleich.

Beweis. Je zwei an einer Seite liegende Winkel sind nach §. 25, 2 gleich zwei Rechten, daher je zwei gegenüberliegende Winkel gleich.

Da in einem Parallelogramme je zwei gegenüberliegende Winkel einander gleich und je zwei an einer Seite liegende Winkel Supplementwinkel sind, so folgt:

a) Ist in einem Parallelogramme ein Winkel ein rechter, so sind es auch die anderen.

b) Ist ein Winkel des Parallelogramms ein schiefer, so sind es auch die anderen.

Man unterscheidet daher rechtwinklige und schiefwinklige Parallelogramme.

In einem Parallelogramme ist ein Winkel a) 59° 37′, b) 102° 18′ 45″; wie groß ist jeder der drei anderen Winkel?

§. **44.** Nimmt man in einem Parallelogramme irgend eine Seite als Grundlinie an, so heißt die Senkrechte, welche von einem beliebigen Punkte der gegenüberstehenden Seite auf die Grundlinie gefällt wird, die zugehörige Höhe des Parallelogramms. In einem rechtwinkligen Parallelogramme betrachtet man von zwei zusammentreffenden Seiten die eine als Grundlinie und die andere als Höhe.

Unter der Höhe eines Trapezes versteht man die Senkrechte, welche von einem Punkte der einen parallelen Linie auf die andere parallele Seite gezogen wird.

3. Das Vieleck.

§. **45.** Jede von mehreren Strecken begrenzte ebene Figur heißt ein Vieleck oder Polygon.

Ein Vieleck hat so viele Seiten als Winkel, und eben so viele Eckpunkte. Die Winkel können hohl oder erhaben sein.

Eine Strecke, welche zwei nicht unmittelbar auf einander folgende Eckpunkte des Vieleckes verbindet, heißt eine **Diagonale**.

Die Anzahl der Diagonalen, welche von einem Eckpunkte eines Vieleckes gezogen werden können, ist um 3 kleiner, als das Vieleck Seiten hat.

Jedes Vieleck läßt sich durch Diagonalen, die von einem Eckpunkte aus gezogen werden, in Dreiecke zerlegen, deren Zahl um 2 kleiner ist, als das Vieleck Seiten hat.

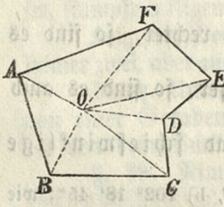
§. **46.** Mit Rücksicht auf die **Anzahl der Seiten** unterscheidet man dreiseitige Vielecke oder Dreiecke, vierseitige oder **Vierecke**, fünfseitige oder **Fünfecke**, . . . nseitige oder nEcke.

Hinsichtlich der **Größe der Seiten und Winkel** werden die Vielecke in **gleichseitige** und **ungleichseitige**, in **gleichwinklige** und **ungleichwinklige** Vielecke eingetheilt.

Ein gleichseitiges und gleichwinkliges Vieleck heißt **regelmäßig**, jedes andere Vieleck **unregelmäßig**.

§. **47.** Lehrsatz. **Die Summe aller Winkel eines Vieleckes beträgt so vielmal zwei Rechte, als das Vieleck Seiten hat, weniger vier Rechte.**

Fig. 32.



Es sei das Vieleck ABCD... (Fig. 32) ein n-Eck. Nimmt man innerhalb desselben einen Punkt O so an, daß die Geraden, welche man von demselben zu allen Eckpunkten zieht, in das Vieleck fallen, so entstehen n Dreiecke; die Summe ihrer Winkel ist $2nR$, die Summe der Winkel um O herum $4R$, somit die Summe aller Winkel des Vieleckes $2nR - 4R$.

Aus diesem Satze folgt:

a) Die Summe der Winkel
eines Dreieckes ist $2R = 180^0$,
" Viereckes " $4R = 360^0$,
" Fünfeckes " $6R = 540^0$,
" Sechseckes " $8R = 720^0$ u. s. w.

b) Jeder Winkel eines regelmäßigen n-Eckes beträgt $2R - \frac{4R}{n}$; daher der Winkel eines regelmäßigen Dreieckes $180^0 - \frac{360}{3}{}^0 = 60^0$,
" " " " Viereckes $180^0 - \frac{360}{4}{}^0 = 90^0$,
" " " " Fünfeckes $180^0 - \frac{360}{5}{}^0 = 108^0$,
" " " " Sechseckes $180^0 - \frac{360}{6}{}^0 = 120^0$ u. s. w.

Dritter Abschnitt.

Congruenz der geradlinigen Figuren.

1. Congruenz der Dreiecke.

§. 48. Zwei Raumgebilde, welche sich nur durch den Ort, an dem sie sich befinden, von einander unterscheiden, heißen congruent. Zwei congruente Raumgebilde können so auf einander gelegt werden, daß sie sich decken, d. h. daß alle Punkte des einen Raumgebildes mit den entsprechenden Punkten des andern zusammenfallen. Umgekehrt: Können zwei Raumgebilde zur Deckung gebracht werden, so sind sie congruent.

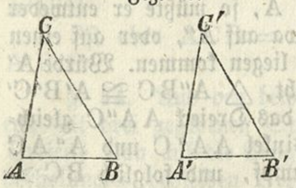
§. 49. Damit sich zwei Dreiecke, wenn sie auf einander gelegt werden, decken können, müssen in denselben alle sechs Bestandstücke, nämlich alle drei Seiten und alle drei Winkel, paarweise gleich sein. Daraus folgt:

In congruenten Dreiecken sind die Seiten, welche den gleichen Winkeln gegenüberliegen, einander gleich, und ebenso sind die Winkel, welche den gleichen Seiten gegenüberliegen, einander gleich.

Da die Seiten und Winkel eines Dreieckes von einander nicht unabhängig sind, so genügen oft schon drei Stücke, um aus ihrer Uebereinstimmung in zwei Dreiecken auf deren Congruenz schließen zu können. Die Fälle, in denen dieses stattfindet, sind in den folgenden vier Lehrsätzen über die Congruenz der Dreiecke enthalten:

§. 50. I. Congruenzsatz. Zwei Dreiecke sind congruent, wenn in denselben eine Seite und die beiden anliegenden Winkel paarweise gleich sind (Fig. 33).

Fig. 33.



Voraussf. Seite $AB = A'B'$, Winkel $A = A'$ und $B = B'$.

Behaupt. $\triangle ABC \cong A'B'C'$.

Beweis. Man lege das $\triangle A'B'C'$ so auf ABC, daß die Punkte A' und B' auf die Punkte A und B fallen, was möglich ist, weil $AB = A'B'$ ist. Weil der Winkel $A = A'$ ist, so muß $A'C'$ längs AC fallen; ebenso muß wegen $B = B'$ die Seite $B'C'$ längs BC zu liegen kommen. Wenn aber die Strecken $A'C'$ und $B'C'$ längs den Strecken AC und BC fallen, so muß auch der Durchschnittspunkt C' der ersteren auf den Durchschnittspunkt C der letzteren fallen. Die beiden Dreiecke ABC und $A'B'C'$ decken sich also, über einander gelegt, vollkommen, folglich sind sie congruent.

Folgesatz. Zwei Dreiecke sind congruent, wenn in denselben eine Seite, ein anliegender und der gegenüberliegende Winkel paarweise gleich sind. (§. 31, Folges. b.)

§. 51. (II. Congruenzsatz.) Zwei Dreiecke sind congruent, wenn in denselben zwei Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel paarweise gleich sind (Fig. 33).

Vorausf. Es sei $AC = A'C'$, $BC = B'C'$ und $C = C'$.

Behaupt. $\triangle ABC \cong A'B'C'$.

Beweis. Man lege das Dreieck $A'B'C'$ so auf das Dreieck ABC, daß C' auf C, $C'A'$ in die Richtung CA und $C'B'$ in die Richtung CB fällt, was möglich ist, da nach der Voraussetzung die Winkel C' und C gleich sind; wegen $AC = A'C'$ muß auch der Punkt A' auf A, und wegen $BC = B'C'$ der Punkt B' auf B, also die Seite $A'B'$ auf AB fallen; folglich ist $\triangle ABC \cong A'B'C'$.

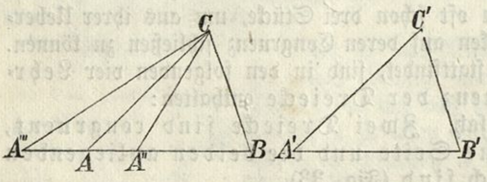
Folgesatz. Zwei rechtwinklige Dreiecke sind congruent, wenn in denselben beide Katheten paarweise gleich sind.

§. 52. (III. Congruenzsatz.) Zwei Dreiecke sind congruent, wenn in denselben zwei Seiten mit dem der größeren dieser Seiten gegenüberliegenden Winkel paarweise gleich sind (Fig. 34).

Vorausf. $AC = A'C'$, $BC = B'C'$, ferner $AC > BC$, somit auch $A'C' > B'C'$, endlich W. $B = B'$.

Behaupt. $\triangle ABC \cong A'B'C'$.

Fig. 34.

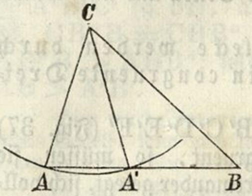


Beweis. Man lege das Dreieck $A'B'C'$ so auf das Dreieck ABC, daß B' auf B, C' auf C und $B'A'$ in die Richtung BA fällt, was wegen der Gleichheit der Seiten BC und $B'C'$ und wegen der Gleichheit der Winkel B und B' möglich ist. Dann muß auch A' auf A fallen. Denn fiele der Punkt A' nicht auf A, so müßte er entweder auf einen Punkt innerhalb der Seite AB, etwa auf A'', oder auf einen Punkt ihrer Verlängerung, etwa auf A''', zu liegen kommen. Würde A' auf A'' fallen, so wäre, wenn man $A''C$ zieht, $\triangle A''BC \cong A'B'C'$ (§. 51), daher $A''C = A'C' = AC$, somit das Dreieck $AA''C$ gleichschenklig, es müßten also in demselben die Winkel $AA''C$ und $A''AC$ spitz sein; dann wäre der Winkel $BA''C$ stumpf, und folglich $BC > A''C$ (§. 35, 4. b), somit auch $BC > AC$, was der Voraussetzung widerspricht. Ebenso würde sich ein Widerspruch ergeben, wenn A' auf A''' fiele. Der Punkt A' muß also auf A fallen; dann aber ist $\triangle ABC \cong A'B'C'$.

Folgesatz. Zwei rechtwinklige Dreiecke sind congruent, wenn in denselben die Hypotenuse und eine Kathete paarweise gleich sind. (§. 35, 4. a.)

Zusatz. Die Schlußfolgerungen des obigen Beweises stützen sich auf die vorausgesetzte Bedingung, daß der Winkel, in welchem beide Dreiecke übereinstimmen, der größeren der zwei übereinstimmenden Seiten gegenüber liegt. Ist diese Bedingung nicht vorhanden, so können auch nicht jene Schlüsse gemacht werden.

Fig. 35.

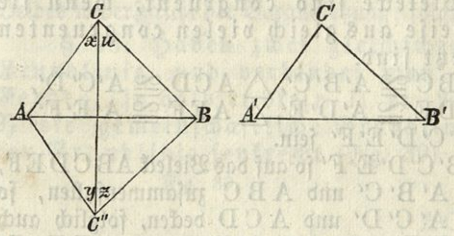


Wenn daher in zwei Dreiecken zwei Seiten mit dem kleineren diesen Seitengegenüberliegenden Winkel wechselseitig gleich sind, so ist es nicht gestattet, auf die Congruenz der Dreiecke zu schließen. Wirklich haben die Dreiecke ABC und A'BC (Fig. 35) die Seite AC = A'C, BC = BC, wo AC = A'C < BC ist, und den Winkel B = B, und doch sind sie nicht congruent, da das △ A'BC nur ein Theil des △ ABC ist.

§. **53.** (IV. **Congruenzsatz.**) Zwei Dreiecke sind congruent, wenn in denselben alle drei Seiten paarweise gleich sind (Fig. 36).

Voraussetz. AB = A'B', AC = A'C' und BC = B'C'.
Behaupt. △ ABC ≅ A'B'C'.

Fig. 36.



Beweis. Man lege das Dreieck A'B'C' so an das Dreieck ABC, daß sich die zwei größten Seiten A'B' und AB decken und daß der Punkt C' auf die entgegengesetzte Seite von AB nach C'' fällt. Dann sind nach der Voraussetzung die Dreiecke ACC'' und BCC'' gleichschenklig, also sind die Winkel an der Grundlinie gleich, x = y, u = z; folglich ist auch x + u = y + z, oder ACB = AC''B = A'C'B'.

Ist aber ACB = A'C'B', so ist (nach §. 51) △ ABC ≅ A'B'C'.

§. **54.** Aus den bewiesenen Congruenzsätzen folgt, daß alle Dreiecke mit drei gegebenen Stücken, aus deren Uebereinstimmung in zwei Dreiecke man auf die Congruenz dieser letzteren schließen kann, nur Wiederholungen desselben Dreieckes sind, oder, daß sich aus jenen drei Stücken nur ein einziges Dreieck construiren läßt. Ein Dreieck ist demnach vollkommen bestimmt:

1. durch eine Seite mit zwei Winkeln;
2. durch zwei Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel;
3. durch zwei Seiten mit dem der größeren dieser Seiten gegenüberliegenden Winkel;
4. durch alle drei Seiten.

Unter den Bestimmungsstücken eines Dreieckes muß sich immer wenigstens eine Seite befinden.

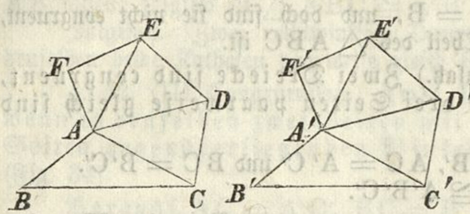
2. Congruenz der Vielecke.

§. 55. Damit zwei Vielecke zur Deckung gebracht werden, also congruent sein können, müssen in denselben alle Seiten und alle Winkel in derselben Ordnung gleich sein.

Lehrsätze. 1. Zwei congruente Vielecke werden durch übereinstimmend gezogene Diagonalen in congruente Dreiecke zerlegt.

Es seien die Vielecke ABCDEF und A'B'C'D'E'F' (Fig. 37) congruent, so müssen sie übereinander gelegt, sich vollkommen decken. Dann fallen auch die gleichliegenden Eckpunkte der beiden Vielecke, folglich auch die übereinstimmend gezogenen Diagonalen zusammen; mithin decken sich die dadurch gebildeten Dreiecke.

Fig. 37.



2. Umgekehrt. Zwei Vielecke sind congruent, wenn sie auf übereinstimmende Weise aus gleich vielen congruenten Dreiecken zusammengesetzt sind.

Es sei (Fig. 37) $\triangle$ ABC $\cong$ A'B'C', $\triangle$ ACD $\cong$ A'C'D', $\triangle$ ADE $\cong$ A'D'E', $\triangle$ AEF $\cong$ A'E'F'; so muß ABCDEF $\cong$ A'B'C'D'E'F' sein.

Legt man das Vieleck A'B'C'D'E'F' so auf das Vieleck ABCDEF, daß die congruenten Dreiecke A'B'C' und ABC zusammenfallen, so werden sich auch die Dreiecke A'C'D' und ACD decken, folglich auch die Dreiecke A'D'E' und ADE, also auch A'E'F' und AEF. Es decken sich also die beiden Vielecke selbst.

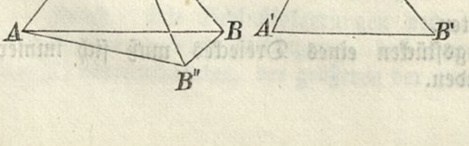
Wann sind a) zwei Parallelogramme, b) zwei regelmäßige Vielecke congruent?

3. Anwendung der Congruenzsätze.

Sätze von den Dreiecken.

§. 56. Sind in zwei Dreiecken zwei Seiten paarweise gleich, die von ihnen eingeschlossenen Winkel aber ungleich, so sind auch die dritten Seiten ungleich, und zwar ist diejenige die größere, welche dem größeren Winkel gegenüberliegt (Fig. 38).

Fig. 38.



Voraussetz. AC = A'C', BC = B'C' und Winkel ACB > A'C'B'.

Behaupt. AB > A'B'.

Beweis. Man mache den Winkel $ACB = A'C'B'$ und die Strecke $CB'' = C'B'$, wobei der Punkt B'' außerhalb des Dreieckes ABC falle. Dann ist, wenn man AB'' und BB'' zieht, $\triangle AB''C \cong A'B'C'$ (§. 51), also $AB'' = A'B'$. Wegen $BC = B''C$ ist nun W. $CB''B = CBB''$, also $CB''B > ABB''$, und um so mehr $AB''B > ABB''$; folglich ist (nach §. 35, 4) $AB > AB''$, somit auch $AB > A'B'$.

Hier wurde angenommen, daß der Punkt B'' außerhalb des Dreieckes ABC falle. Derselbe kann auch in die Seite AB, oder innerhalb des Dreieckes ABC zu liegen kommen. Wie stellt sich der Beweis in diesen beiden Fällen?

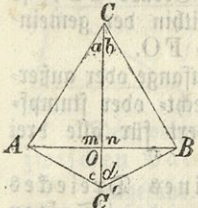
§. **57.** Sind in zwei Dreiecken zwei Seiten paarweise gleich, die dritten Seiten aber ungleich, so sind auch die diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel ungleich, und zwar ist derjenige der größere, welcher der größeren Seite gegenüberliegt.

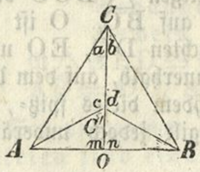
Es sei (Fig. 38) $AC = A'C'$, $BC = B'C'$ und $AB = A'B'$; zu beweisen ist, daß $ACB > A'C'B'$ sein muß.

Wäre $ACB = A'C'B'$, so müßte (nach §. 51) auch $AB = A'B'$ sein; wäre $ACB < A'C'B'$, so müßte (nach §. 56) auch $AB < A'B'$ sein. Beides widerspricht der Voraussetzung; folglich muß $ACB > A'C'B'$ sein.

§. **58.** Haben zwei gleichschenklige Dreiecke dieselbe Grundlinie, und verbindet man ihre Scheitel durch eine Gerade, so halbirt diese 1) die Winkel an den Scheiteln, 2) die gemeinschaftliche Grundlinie, und 3) sie steht auf der Grundlinie senkrecht (Fig. 39).

Fig. 39.





Vorauss. $AC = BC$, $AC' = BC'$.

1. Behauptung. $a = b$, $c = d$.

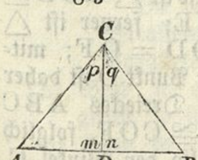
Beweis. $\triangle ACC' \cong BCC'$ (§. 53), daher $a = b$, $c = d$.

2. und 3. Behauptung. $AO = BO$, $CO \perp AB$.

Beweis. $\triangle AOC \cong BOC$ (§. 51); folglich $AO = BO$, und $m = n$ oder $CO \perp AB$.

§. **59.** Verbindet man in einem gleichschenkligen Dreiecke die Mitte der Grundlinie mit dem Scheitel durch eine Gerade, so steht diese auf der Grundlinie senkrecht und halbirt den Winkel am Scheitel (Fig. 40).

Fig. 40.



Vorauss. $AC = BC$, $AD = BD$.

Behaupt. $CD \perp AB$ und $p = q$.

Beweis. $\triangle ACD \cong BCD$ (§. 53), daher $m = n$ oder $CD \perp AB$, und $p = q$.

2. Die Senkrechte, welche von der Spitze eines gleichschenkligen Dreieckes auf die Grundlinie gezogen wird, halbirt die Grundlinie und den Winkel am Scheitel (§. 52).

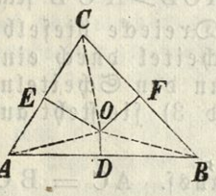
3. Wird der Winkel am Scheitel eines gleichschenkligen Dreieckes durch eine Gerade halbirt, so halbirt diese auch die Grundlinie und steht auf der Grundlinie senkrecht (§. 51).

4. Die Gerade, welche man in der Mitte der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreieckes auf diese senkrecht errichtet, geht durch den Scheitel.

Folgt aus 1., da die Verbindungslinie zwischen dem Scheitel und der Mitte der Grundlinie auf dieser senkrecht steht, durch die Mitte der Grundlinie aber auf dieselbe nur eine einzige Senkrechte gezogen werden kann.

§. **60.** 1. Die Mittellothe eines Dreieckes, d. i. die in den Mitten der Seiten errichteten Senkrechten, schneiden sich in einem Punkte, welcher von den drei Eckpunkten gleichen Abstand hat.

Fig. 41.

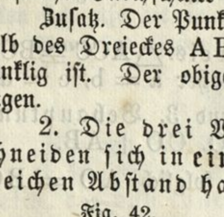


Es sei (Fig. 41) $AD = BD$, $AE = CE$ und $BF = CF$, ferner $DO \perp AB$ und $EO \perp AC$. Daß sich die Senkrechten aus D und E überhaupt in einem Punkte O schneiden, folgt aus §. 26. Zieht man AO, BO, CO, so ist (nach §. 59, 4) $AO = BO$ und $AO = CO$, daher auch $BO = CO$; der Punkt O ist also von den drei Ecken gleich weit entfernt. Zieht man nun im gleichschenkligen $\triangle$ BOC die Gerade OF, so ist diese (nach §. 59, 1) senkrecht auf BC. O ist mithin der gemeinschaftliche Durchschnitt der Senkrechten DO, EO und FO.

Zusatz. Der Punkt O liegt innerhalb, auf dem Umfange oder außerhalb des Dreieckes ABC, je nachdem dieses spitz-, recht- oder stumpfwinklig ist. Der obige Beweis gilt jedoch unverändert für alle drei Lagen.

2. Die drei Winkelhalbirungslinien eines Dreieckes schneiden sich in einem Punkte, welcher von den drei Seiten gleichen Abstand hat.

Fig. 42.

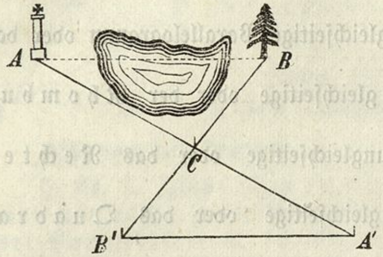


Es seien (Fig. 42) AO und BO die Halbirungslinien der Winkel A und B, und O ihr Durchschnitt (§. 26). Zieht man $OD \perp AB$, $OE \perp AC$ und $OF \perp BC$, so ist $\triangle AOD \cong AOE$, folglich $OD = OE$; ferner ist $\triangle BOD \cong BOF$, folglich $OD = OF$; mithin auch $OE = OF$. Der Punkt O ist daher von den drei Seiten des Dreieckes ABC gleich weit entfernt. Zieht man CO, so ist $\triangle COE \cong COF$, folglich der Winkel $ECO = FCO$; die Gerade CO halbirt also den Winkel C, mithin ist O der gemeinschaftliche Durchschnitt der Winkelhalbirungslinien AO, BO, CO.

Beispiel einer praktischen Anwendung der Congruenzlehre.

Die Entfernung zweier Punkte auf dem Felde zu bestimmen, wenn sich dieselbe wegen eines dazwischen befindlichen Hindernisses nicht unmittelbar messen läßt, wenn man aber von einem dritten Punkte aus zu beiden hin messen kann.

Fig. 43.

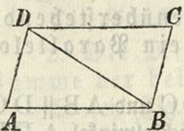


Es seien A und B (Fig. 43) die beiden Punkte, deren Entfernung man wissen will, zwischen welchen aber z. B. ein Teich liegt, so daß eine unmittelbare Messung nicht stattfinden kann. Man wähle einen solchen Standpunkt C, daß man von ihm nach den beiden anderen Punkten in gerader Linie messen kann, und messe die Strecken CA und CB mit den Meterstäben oder mit der Meßschnur; sodann verlängere man dieselben über den Scheitel C hinaus, trage die gemessenen Längen auf die entsprechenden Verlängerungen bis A' und B' auf und messe die Strecke A' B'. Ihre Länge gibt die gesuchte Entfernung AB an, da das $\triangle$ ABC $\cong$ A'B'C und daher AB = A'B' ist.

Sätze von den Parallelogrammen.

§. **61.** In einem Parallelogramme sind je zwei gegenüberliegende Seiten einander gleich.

Fig. 44.



Vorauss. Es sei ABCD (Fig. 44) ein Parallelogramm, also AB || DC, AD || BC.

Behaupt. AB = DC, AD = BC.

Beweis. Zieht man eine Diagonale BD, so ist $\triangle$ ABD $\cong$ CDB (§. 25, 2. und §. 50), daher AB = DC, AD = BC.

Den obigen Satz pflegt man auch so auszudrücken: Parallele zwischen Parallelen sind einander gleich.

Folgesätze.

a) Sind zwei Gerade parallel, so sind alle Punkte der einen Geraden von der andern gleich weit entfernt.

Denn die Senkrechten, welche die Entfernungen der Punkte der einen Parallelen von der andern angeben, sind nach §. 27, 1 parallel.

Die constante Entfernung eines jeden Punktes der einen zweier Parallelen von der andern heißt der Abstand der beiden Parallelen.

b) Sind in einem Parallelogramme zwei zusammentreffende Seiten gleich, so sind es auch die anderen.

c) Sind in einem Parallelogramme zwei zusammentreffende Seiten ungleich, so sind es auch die anderen.

Man unterscheidet daher gleichseitige und ungleichseitige Parallelogramme.

Nimmt man sowohl auf die Seiten als auch auf die Winkel (§. 43) Rücksicht, so ergeben sich vier Arten von Parallelogrammen:

Fig. 45.

1. das schiefwinklige und ungleichseitige Parallelogramm oder das Rhomboid (Fig. 45, I);

2. das schiefwinklige und gleichseitige oder der Rhombus (Fig. 45, II);

3. das rechtwinklige und ungleichseitige oder das Rechteck (Fig. 45, III);

4. das rechtwinklige und gleichseitige oder das Quadrat (Fig. 45, IV).

§. **62**. Umkehrungen des Lehrsatzes in §. 61.

1. Sind in einem Vierecke die gegenüberstehenden Seiten gleich, so ist dasselbe ein Parallelogramm.

Es sei in dem Vierecke ABCD (Fig. 44) AB = DC und AD = BC. Dann ist $\triangle$ ABD $\cong$ CDB (§. 53), also sind die Wechselwinkel ABD und BDC, ebenso ADB und CBD gleich, woraus AB $\parallel$ DC und AD $\parallel$ BC folgt.

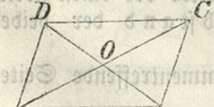
2. Sind in einem Vierecke zwei gegenüberstehende Seiten gleich und parallel, so ist dasselbe ein Parallelogramm.

In dem Vierecke ABCD (Fig. 44) sei AB = DC und AB $\parallel$ DC Dann ist $\triangle$ ABD $\cong$ CDB (§. 51), also sind die Wechselwinkel ADB und CBD gleich, woraus AD $\parallel$ BC folgt.

Folgesatz. Sind zwei Punkte einer Geraden von einer anderen Geraden auf derselben Seite gleich weit entfernt, so sind die beiden Geraden parallel.

§. **63**. 1. Jede Diagonale theilt das Parallelogramm in zwei congruente Dreiecke. (Beweis in §. 61.)

Fig. 46.

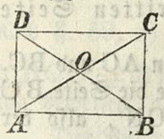


2. Die Diagonalen eines jeden Parallelogrammes halbiren einander.

Es sei ABCD (Fig. 46) ein Parallelogramm, also AB $\parallel$ DC und AD $\parallel$ BC. Dann ist $\triangle$ AOB $\cong$ COD (§. 50), woraus AO = CO und BO = DO folgt.

3. Die Diagonalen eines Rechteckes sind einander gleich.

Fig. 47.

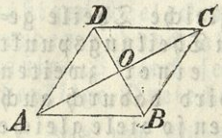


Die rechtwinkligen Dreiecke ABC und BAD (Fig. 47) sind congruent, daher $AC = BD$.

4. Die Diagonalen eines Rhombus stehen senkrecht auf einander. (Fig. 48.)

Denn BDA und BDC sind gleichschenklige Dreiecke und daher $AC \perp BD$ (§. 58.)

Fig. 48.



5. Die Diagonalen eines Quadrates sind einander gleich und stehen senkrecht auf einander.

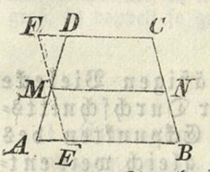
Beweis wie zu 3 und 4.

Zusatz. Die Sätze 2, 3, 4 und 5 gelten auch in ihren Umkehrungen.

Sätze von den Trapezen.

§. 64. 1. Zieht man in einem Trapeze durch die Mitte einer der nicht parallelen Seiten eine Parallele mit den zwei Parallelseiten, so wird dadurch auch die andere der nichtparallelen Seiten halbirt.

Fig. 49.



Es sei (Fig. 49) $AB \parallel DC$, ferner $AM = DM$ und $MN \parallel AB \parallel DC$. Zieht man durch M die $EF \parallel BC$ und verlängert CD bis F, so ist $\triangle AEM \cong DFM$, daher $EM = FM$; aber $EM = BN$ und $FM = CN$, mithin auch $BN = CN$.

Zusatz. Dieser Satz läßt sich umkehren. Der Beweis wird indirect geführt.

Die Strecke MN heißt die Mittellinie des Trapezes.

2. Die Mittellinie des Trapezes ist gleich der halben Summe der beiden parallelen Seiten derselben.

Es sei (Fig. 49) $AB \parallel CD$, ferner $AM = DM$ und $MN \parallel AB$. Zieht man durch M die $EF \parallel BC$ und verlängert CD bis F, so ist $\triangle AEM \cong DFM$, daher $AE = DF$. Ferner ist $MN = BE = AB - AE$ und $MN = CF = DC + DF$, folglich $2\,MN = AB + DC$, und $MN = \frac{AB + CD}{2}$.

Sätze von den Parallelen im Dreiecke.

Fig. 50.

§. 65. 1. Zieht man in einem Dreiecke durch die Mitte einer Seite eine Parallele mit einer zweiten Seite, so wird dadurch die dritte Seite halbirt (Fig. 50).

Voraus s. $AM = CM$, $MN \parallel AB$.

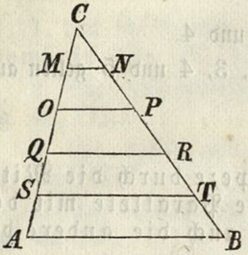
Behaupt. $BN = CN$.

Beweis. Zieht man $MP \parallel CB$, so ist $\triangle AMP \cong MCN$ (§. 51), daher $MP = CN$; allein $MP = BN$, folglich $BN = CN$.

2. Zieht man durch die Mitten zweier Seiten eines Dreieckes eine Gerade, so ist diese mit der dritten Seite parallel.

Es seien M und N (Fig. 50) die Mitten der Seiten AC und BC. Schneidet die durch M mit AB parallel gezogene Gerade die Seite BC in irgend einem Punkte N', so muß (nach 1.) $BN' = CN'$, also der Punkt N' mit N identisch, d. i. $MN \parallel AB$ sein.

Fig. 51.



3. Wird in einem Dreiecke eine Seite in mehrere gleiche Theile getheilt und durch jeden Theilungspunkt eine Parallele mit einer zweiten Seite gezogen, so wird dadurch auch die dritte Seite in eben so viele gleiche Theile getheilt. (Fig. 51).

Vorauss. $CM = MO = OQ = QS = SA$ und $MN \parallel OP \parallel QR \parallel ST \parallel AB$.

Behaupt.

$$CN = NP = PR = RT = TB.$$

Beweis. $CN = NP$ (nach 1.), und $NP = PR = RT = TB$ (nach §. 64, 1).

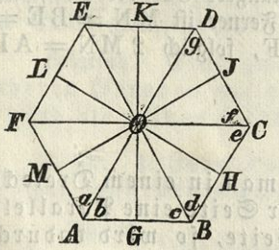
Sätze von den regelmäßigen Vielecken.

§. **66.** Halbirt man in einem regelmäßigen Vielecke zwei auf einander folgende Winkel, so ist der Durchschnittspunkt der Halbirungslinien a) von allen Eckpunkten des Vieleckes, b) von allen Seiten des Vieleckes gleich weit entfernt (Fig. 52).

Vorauss. $AB = BC = CD = DE = \ldots$

W. $A = B = C = D = \ldots$

Fig. 52.



Halbirt man die Winkel A und B, so daß $a = b$, $c = d$ wird, verbindet den Durchschnittspunkt O der Halbirungslinien (§. 26) mit allen übrigen Eckpunkten und fällt aus ihm Senkrechte auf alle Vielecksseiten, so ist

Behaupt.

a) $AO = BO = CO = DO = \ldots$

b) Senkrechte $OG = OH = OJ = OK = \ldots$

Beweis. a) $\triangle AOB \cong BOC$ (§. 51), daher $AO = OC$ und $b = e$. Wegen $A = C$ und $b = \frac{A}{2}$ ist daher auch $e = \frac{C}{2} = f$, folglich $\triangle BOC \cong COD$, somit $BO = DO$ und $d = g$. Eben so kann man beweisen, daß $\triangle COD = DOE$, also $CO = EO$ u. s. w. ist. Da nun im $\triangle AOB$ wegen $b = c$ die Seite $BO = AO$ ist, so hat man

$$AO = BO = CO = DO = EO = \ldots$$

b) Da die Dreiecke AOB und BOC gleichschenklig sind, so ist (nach §. 59, 2) $BG = \frac{AB}{2}$ und $BH = \frac{BC}{2}$, daher $BG = BH$ und $\triangle BGO \cong BHO$ (§. 51), folglich $OG = OH$. Auf dieselbe Art kann man beweisen, daß $OH = OJ$, $OJ = OK, \ldots$ ist.

Der Punkt O heißt der **Mittelpunkt** des regelmäßigen Vieleckes.

Folgesatz. **Verbindet man den Mittelpunkt eines regelmäßigen Vieleckes mit allen Eckpunkten durch Strecken, so werden dadurch alle Vieleckswinkel halbirt, und das regelmäßige Vieleck selbst wird in so viele congruente gleichschenklige Dreiecke zerlegt, als es Seiten hat.**

Ziehe vom Mittelpunkte eines regelmäßigen n-Eckes zu allen Eckpunkten Strecken; wie groß ist a) der Winkel am Scheitel; b) der Winkel an der Grundlinie in jedem der dadurch gebildeten gleichschenkligen Dreiecke?

Berechne diese Winkel insbesondere

a) für das gleichseitige Dreieck;	b) für das Quadrat;
c) „ „ regelmäßige Fünfeck;	d) „ „ regelmäßige Sechseck;
e) „ „ „ Zehneck;	f) „ „ „ Zwölfeck.

In welchem regelmäßigen Vielecke ist der Winkel am Scheitel der gleichschenkligen Dreiecke, in welche es vom Mittelpunkte aus getheilt werden kann, a) eben so groß, b) doppelt so groß, c) halb so groß als jeder Winkel an der Grundlinie?

Constructions-Aufgaben.

1. **Eine gegebene Strecke AB (Fig. 53) zu halbiren.**

Man beschreibe aus den Endpunkten A und B nach oben und unten mit demselben Halbmesser Kreisbogen, welche sich in den Punkten C und D schneiden; die durch diese Punkte gezogene Gerade halbirt die Strecke AB im Punkte E.

Der Beweis folgt unmittelbar aus §. 58.

Fig. 53.

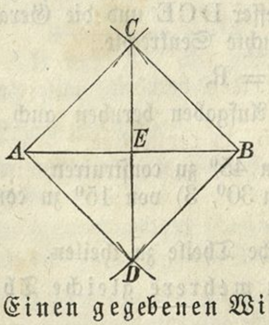
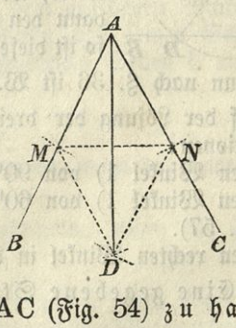


Fig. 54.



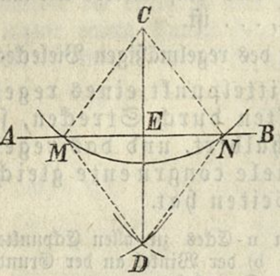
2. **Einen gegebenen Winkel BAC (Fig. 54) zu halbiren.**

Man mache $AM = AN$ und beschreibe aus den Endpunkten M und N mit demselben Halbmesser Kreisbogen, die sich in D schneiden;

zieht man dann durch die Punkte A und D die Gerade AD, so halbirt diese den Winkel BAC.

Die Richtigkeit der Auflösung ergibt sich aus §. 58.

Fig. 55.

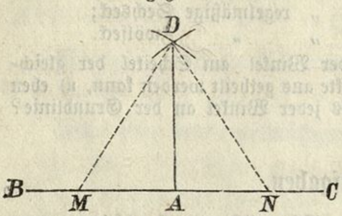


3. **Von einem Punkte C (Fig. 55) außerhalb einer Geraden AB auf diese eine Senkrechte zu ziehen.**

Man beschreibe aus C einen Kreisbogen, welcher die Gerade AB in zwei Punkten M und N durchschneidet; aus diesen Punkten beschreibe man wieder mit demselben Halbmesser Kreisbogen, welche sich in D schneiden; verbindet man dann C und D durch die Gerade CD, so ist diese die verlangte Senkrechte.

Der Beweis folgt aus §. 58.

Fig. 56.

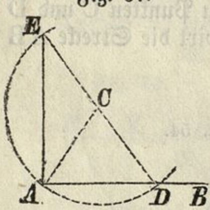


4. **In einem gegebenen Punkte A (Fig. 56) einer Geraden BC auf diese eine Senkrechte zu errichten.**

Man mache AM = AN, beschreibe aus den Punkten M und N mit demselben Halbmesser Kreisbogen, welche sich in D schneiden, und ziehe AD.

Daß AD $\perp$ MN ist, folgt aus §. 59, 1.

Fig. 57.



5. **Im Endpunkte A (Fig. 57) einer Geraden AB auf diese eine Senkrechte zu errichten.**

Man beschreibe aus einem nicht in der AB liegenden Punkte C mit dem Halbmesser CA einen Kreis, welcher die AB in D schneidet; zieht man dann den Durchmesser DCE und die Gerade AE, so ist diese die gesuchte Senkrechte.

Denn nach §. 36 ist W. DAE = R.

Auf der Lösung der drei letzten Aufgaben beruhen auch folgende Constructionen:

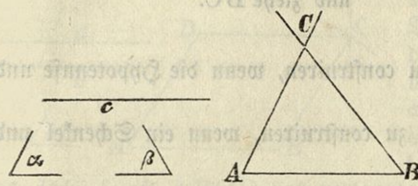
a) Einen Winkel 1) von 90°, 2) von 45° zu construiren.
b) Einen Winkel 1) von 60°, 2) von 30°, 3) von 15° zu construiren (Fig. 57).
c) Einen rechten Winkel in drei gleiche Theile zu theilen.

6. **Eine gegebene Strecke in mehrere gleiche Theile zu theilen.**

Man ziehe (Fig. 51) durch einen Endpunkt der gegebenen Strecke eine beliebige zweite Gerade, trage auf dieser so viele unter einander gleiche Theile auf, als Theile verlangt werden, verbinde den letzten Theilungspunkt mit dem zweiten Endpunkte der gegebenen Strecke durch eine Gerade und ziehe mit dieser auch durch die übrigen Punkte Parallele, so wird dadurch die gegebene Strecke in die verlangte Anzahl gleicher Theile getheilt (§. 65, 3).

7. Ein Dreieck zu construiren, wenn eine Seite c und die beiden anliegenden Winkel α und β gegeben sind. (Fig. 58).

Fig. 58.



Man ziehe eine Strecke AB, welche der gegebenen Seite c gleich ist, trage an der AB in den Punkten A und B die Winkel α und β auf und verlängere die freien Schenkel derselben bis zum Durchschnittspunkte C; dann ist ABC das verlangte Dreieck.

Unter welcher Bedingung ist die Auflösung dieser Aufgabe nur möglich? (§. 31, a.)

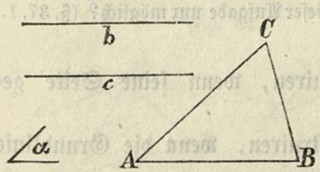
Besondere Fälle dieser Aufgabe sind:

a) Ein rechtwinkliges Dreieck zu construiren, wenn gegeben sind 1. die Hypotenuse und ein anliegender Winkel; 2. eine Kathete und ein spitzer Winkel.

b) Ein gleichseitiges Dreieck zu construiren, wenn seine Höhe gegeben ist.

c) Ein gleichschenkliges Dreieck zu construiren, wenn gegeben sind: 1. Die Grundlinie und ein Winkel; 2. ein Schenkel und ein Winkel.

Fig. 59.



8. Ein Dreieck zu construiren, wenn zwei Seiten b und c mit dem eingeschlossenen Winkel α gegeben sind (Fig. 59).

Man construire in A einen Winkel, welcher dem gegebenen Winkel α gleich ist, schneide von seinen Schenkeln die Stücke AB und AC ab, welche den gegebenen Seiten b und c gleich sind, und ziehe die Strecke BC.

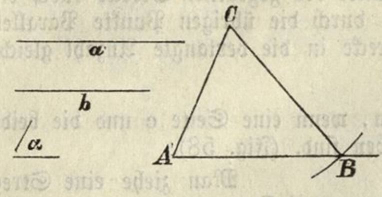
Besondere Fälle:

a) Ein rechtwinkliges Dreieck zu construiren, wenn die beiden Katheten gegeben sind.

b) Ein gleichschenkliges Dreieck zu construiren, wenn die Grundlinie und die Höhe gegeben sind.

9. Ein Dreieck zu construiren, wenn zwei Seiten a und b mit dem der größeren Seite a gegenüberliegenden Winkel α gegeben sind (Fig. 60).

Fig. 60.



Man construire in A einen Winkel, welcher dem gegebenen Winkel α gleich ist, mache den einen Schenkel AC gleich der kleineren Seite b, beschreibe aus C mit der größeren Seite a als Halbmesser einen Bogen, welcher den zweiten Schenkel in B schneidet, und ziehe BC.

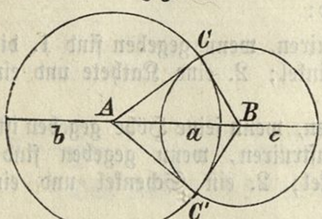
Besondere Fälle:

a) Ein rechtwinkliges Dreieck zu construiren, wenn die Hypotenuse und eine Kathete gegeben sind.

b) Ein gleichschenkliges Dreieck zu construiren, wenn ein Schenkel und die Höhe gegeben sind.

10. Ein Dreieck zu construiren, wenn seine drei Seiten a, b und c gegeben sind (Fig. 61).

Fig. 61.



Man ziehe die Strecke AB = c, beschreibe aus A mit dem Halbmesser b und aus B mit dem Halbmesser a Kreisbogen, welche sich in C schneiden; zieht man AC und BC, so erhält man das verlangte Dreieck.

Da sich die beiden Kreisbogen auch im Punkte C′ schneiden, so erhält man noch ein zweites Dreieck ABC′, welches jedoch mit ABC congruent ist.

Unter welcher Bedingung ist die Auflösung dieser Aufgabe nur möglich? (§. 37, 1.)

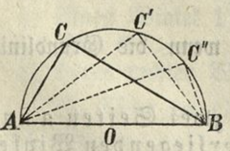
Besondere Fälle:

a) Ein gleichseitiges Dreieck zu construiren, wenn seine Seite gegeben ist.

b) Ein gleichschenkliges Dreieck zu construiren, wenn die Grundlinie und ein Schenkel gegeben sind.

11. Ueber einer gegebenen Strecke AB (Fig. 62) als Hypotenuse ein rechtwinkliges Dreieck zu construiren.

Fig. 62.



Man halbire AB in O, beschreibe aus O mit dem Halbmesser OA einen Halbkreis und verbinde einen beliebigen Punkt C desselben mit A und B durch Sehnen; dann ist Winkel ACB = R (§. 36) und daher ACB das verlangte Dreieck.

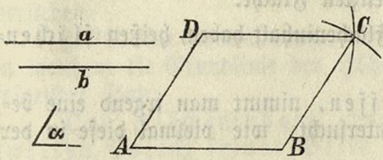
Es gibt unzählig viele verschiedene Dreiecke ACB, AC′B, AC″B..., welche der Aufgabe genügen; die Aufgabe ist also unbestimmt.

12. Ein Dreieck zu zeichnen, welches mit einem gegebenen Dreiecke congruent ist.

Construction mit Hilfe der drei Seiten des gegebenen Dreieckes nach Aufgabe 10.

13. Ein Parallelogramm zu construiren, wenn zwei Seiten a und b mit dem von ihnen eingeschlossenen Winkel α gegeben sind (Fig. 63).

Fig. 63.



Man construire in A einen Winkel, welcher dem gegebenen Winkel α gleich ist, schneide auf dessen Schenkeln die Stücke AB = a und AD = b ab und beschreibe aus B und D mit den Halbmessern b und a Kreisbogen, die sich in C schneiden; zieht man dann BC und DC, so ist ABCD das verlangte Parallelogramm.

Besondere Fälle:

a) Einen Rhombus zu construiren, wenn eine Seite und ein Winkel gegeben sind.

b) Ein Rechteck zu construiren, wenn zwei zusammentreffende Seiten gegeben sind.

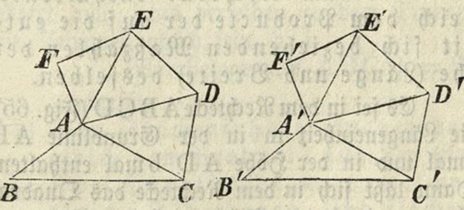
c) Ein Quadrat zu beschreiben, wenn seine Seite gegeben ist.

14. Den Mittelpunkt eines regelmäßigen Vieleckes zu bestimmen.

Die Auflösung ergibt sich unmittelbar aus §. 66.

15. Ein Vieleck zu construiren, das mit einem gegebenen Vielecke ABCDEF (Fig. 64) congruent ist.

Fig. 64.



Man zerlege das gegebene Vieleck ABCDEF von A aus durch Diagonalen in Dreiecke, beschreibe mittelst der Durchschnitte von Kreisbogen eben so viele in derselben Ordnung liegende Dreiecke, die mit denen des gegebenen Vieleckes congruent sind. Das dadurch entstehende Vieleck A'B'C'D'E'F' ist mit dem gegebenen congruent (§. 55).

Es ist hier nicht nöthig, die Diagonalen wirklich zu ziehen; dieselben können in dem gegebenen wie in dem gesuchten Vielecke blos gedacht werden.

Vierter Abschnitt.

Flächeninhalt der geradlinigen Figuren.

Bestimmung des Flächeninhaltes und Gleichheit der Flächen.

§. **67**. Unter dem Flächeninhalte einer Figur versteht man die Größe der von ihrem Umfange begrenzten Fläche.

Zwei Figuren, welche gleichen Flächeninhalt haben, heißen flächengleich.

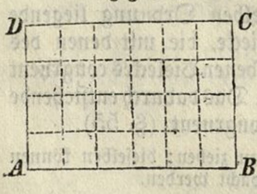
§. **68**. Um eine Fläche zu messen, nimmt man irgend eine bekannte Fläche als Einheit an und untersucht, wie vielmal diese in der gegebenen Fläche enthalten ist.

Als Flächeneinheit wird die Fläche eines Quadrates angenommen, dessen Seite der Längeneinheit gleich ist. Nimmt man das Meter als Längeneinheit an, so ist das Quadratmeter ($\square^{m}$) die Flächeneinheit. Ein Quadratmeter hat 100 Quadratdecimeter ($\square^{dm}$) à 100 Quadratcentimeter ($\square^{cm}$) à 100 Quadratmillimeter ($\square^{mm}$). 100 $\square^{m}$ als Bodenflächenmaß nennt man ein Ar, 100 Ar sind ein Hektar.

Die Ausmessung einer Fläche kann mittelst des wirklichen Auftragens der Flächeneinheiten nur in wenigen Fällen ausgeführt werden; daher werden wir hier die Sätze ableiten, nach denen man, wenn die Maßzahlen der Strecken, von denen die Größe der Figur abhängt, bekannt sind, aus denselben durch bloße Rechnung den Flächeninhalt bestimmen kann.

§. **69**. Die Zahl der in einem Rechtecke enthaltenen Flächeneinheiten ist gleich dem Producte der auf die entsprechende Längeneinheit sich beziehenden Maßzahlen der Grundlinie und der Höhe (Länge und Breite) desselben.

Fig. 65.



Es sei in dem Rechtecke ABCD (Fig. 65) die Längeneinheit m in der Grundlinie AB amal und in der Höhe AD bmal enthalten. Dann läßt sich in dem Rechtecke das Quadrat über m, d. i. die Flächeneinheit, längs der Grundlinie amal auftragen, und ein solcher Streifen von a Flächeneinheiten kann nach der Höhe bmal aufgetragen werden. Das ganze Rechteck enthält also a . b Flächeneinheiten; man hat demnach, wenn die Zahl der im Rechtecke enthaltenen Flächeneinheiten durch f bezeichnet wird,

$$f = a \,.\, b.$$

Z. B. für $a = 6^{m}$ und $b = 4^{m}$ ist $f = 6 \,.\, 4 = 24 \square^{m}$.

Bestimme auf gleiche Weise durch gehörige Zerlegung den Flächeninhalt eines Rechteckes, dessen Grundlinie $4\frac{1}{2}^m$ und dessen Höhe $3\frac{1}{4}^m$ beträgt.

Den hier bewiesenen Lehrsatz pflegt man kürzer so auszudrücken: Der Flächeninhalt eines Rechteckes ist gleich dem Producte aus der Grundlinie und der Höhe.

Dieser abgekürzten Ausdrucksweise werden wir uns auch in dem Folgenden bedienen. Wenn daher von Producten der Linien geredet werden wird, sind darunter immer nur die Maßzahlen derselben zu verstehen.

§. **70.** Da jedes Quadrat als ein Rechteck betrachtet werden kann, in welchem die Grundlinie der Höhe gleich ist, so ergibt sich aus §. 69 folgender Satz:

Der Flächeninhalt eines Quadrates ist gleich der zweiten Potenz seiner Seite.

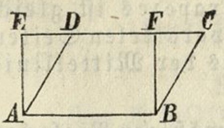
Ist f der Flächeninhalt eines Quadrates und s die Maßzahl seiner Seite, so ist

$$f = s.s = s^2.$$

Daher kommt es, daß man auch in der Arithmetik die zweite Potenz einer Zahl das Quadrat derselben nennt.

§. **71.** Jedes schiefwinklige Parallelogramm ist einem Rechtecke flächengleich, das mit ihm gleiche Grundlinie und gleiche Höhe hat.

Fig. 66.



Zieht man (Fig. 66) von den Eckpunkten A und B des schiefwinkligen Parallelogramms ABCD zu der Seite CD die Senkrechten AE und BF, so erhält man das Rechteck ABFE, welches mit dem Parallelogramme ABCD gleiche Grundlinie und gleiche Höhe hat. Die rechtwinkligen Dreiecke BFC und AED sind congruent; addirt man jedes derselben zu dem Trapeze ABFD, so müssen auch die Summen gleich sein, d. i.

Parallelogramm ABCD = Rechteck ABFE.

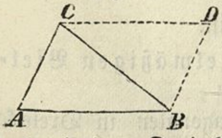
Folgesätze.

a) Der Flächeninhalt eines jeden Parallelogramms ist gleich dem Producte aus der Grundlinie und der Höhe.

b) Zwei Parallelogramme, welche gleiche Grundlinie und gleiche Höhe haben, sind flächengleich.

§. **72.** Ein Dreieck ist die Hälfte eines Parallelogramms, welches mit ihm gleiche Grundlinie und gleiche Höhe hat.

Fig. 67.



Zieht man durch die Punkte B und C (Fig. 67) des Dreieckes ABC mit den gegenüberstehenden Seiten Parallele, welche sich in D schneiden, so entsteht ein Parallelogramm ABDC, das mit dem Dreiecke ABC gleiche Grundlinie und Höhe hat und von welchem dieses Dreieck die Hälfte ist.

Folgesätze.

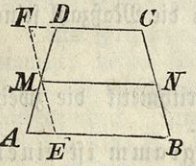
a) Der Flächeninhalt eines Dreieckes ist gleich dem halben Producte aus der Grundlinie und der Höhe.

b) Der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreieckes ist gleich dem halben Producte aus den beiden Katheten.

c) Dreiecke von gleicher Grundlinie und gleicher Höhe sind flächengleich.

§. 73. Jedes Trapez ist einem Parallelogramme flächengleich, das mit ihm gleiche Höhe hat, und dessen Grundlinie gleich ist der Mittellinie, d. i. der halben Summe der parallelen Seiten des Trapezes.

Fig. 68.



Halbirt man (Fig. 68) eine der nicht parallelen Seiten des Trapezes, AD, in M, und zieht durch M eine Gerade EF || BC, welche die Seite AB in E und die verlängerte Seite CD in F schneidet, so ist $\triangle$ AEM $\cong$ DFM. Es ist daher auch

$$AEM + EBCDM = DFM + EBCDM,$$

oder Trapez ABCD = Parallelogramm EBCF. Die Höhe des Parallelogramms EBCF ist nun die Höhe des Trapezes, und die Grundlinie desselben ist

$$EB = MN = \frac{AB + DC}{2} \text{ (§. 64, 2).}$$

Folgesatz. Der Flächeninhalt eines Trapezes ist gleich dem Producte aus der halben Summe der parallelen Seiten und der Höhe, oder gleich dem Producte aus der Mittellinie und der Höhe.

§. 74. Der Flächeninhalt eines regelmäßigen Vieleckes ist gleich dem Producte aus dem Umfange desselben und dem halben Abstande des Mittelpunktes von einer Seite.

Es seien s, r und f bezüglich die Maßzahlen einer Seite, der vom Mittelpunkte auf einer Seite gefällten Senkrechten und des Flächeninhaltes eines regelmäßigen n-Eckes. Zieht man vom Mittelpunkte zu allen Eckpunkten gerade Linien, so zerfällt dadurch das n-Eck (nach §. 66, Folges.) in n congruente Dreiecke. Der Flächeninhalt eines solchen Dreieckes ist $\frac{s.r}{2}$, daher

$$f = n \cdot \frac{s.r}{2} = n\,s \cdot \frac{2}{r},$$

wo n s die Maßzahl des Umfanges des Vieleckes ist.

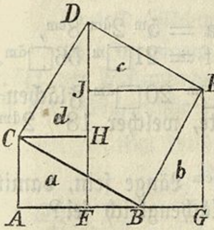
§. 75. Der Flächeninhalt eines unregelmäßigen Vieleckes wird auf eine der folgenden Arten bestimmt:

a) Man zerlege das gegebene Vieleck durch Diagonalen in Dreiecke und berechne den Flächeninhalt eines jeden derselben; die Summe der Dreiecksflächen gibt den Flächeninhalt des Vieleckes.

b) Man ziehe durch zwei Eckpunkte des gegebenen Vieleckes eine Diagonale und fälle darauf von allen übrigen Eckpunkten Senkrechte, wodurch das Vieleck in Dreiecke und Trapeze zerfällt; werden die Flächen derselben einzeln berechnet und entsprechend verbunden, so erhält man den Flächeninhalt des gegebenen Vieleckes.

§. **76.** Pythagoräischer Lehrsatz. In jedem rechtwinkligen Dreiecke ist das Quadrat über der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate über den beiden Katheten.

Fig. 69.



Es sei das Dreieck BAC (Fig. 69) in A rechtwinklig. Zu beweisen ist, daß das über BC beschriebene Quadrat der Summe aus den Quadraten über AB und AC gleich ist, was wir so schreiben wollen:

$$\square BC = \square AB + \square AC.$$

Beschreibt man über der Hypotenuse BC das Quadrat BCDE, fällt von den Punkten D und E auf AB die Senkrechten DF und EG, und von den Punkten C und E auf DF die Senkrechten CH und EJ, so sind die rechtwinkligen Dreiecke BAC, EGB, EJD und DHC, welche wir folgeweise durch a, b, c und d bezeichnen wollen, congruent (§§. 28, 29 und 50).

Addirt man nun zu dem Fünfecke BCHJE einmal die Dreiecke c und d, dann aber die Dreiecke a und b, so müssen die Summen gleich sein; also

$$BCHJE + c + d = BCHJE + a + b,$$

oder

$$BCDE = FJEG + ACHF.$$

Nun ist $BCDE = \square BC$; ferner ist, wie man leicht ersieht, $FJEG = \square AB$ und $ACHF = \square AC$. Man hat daher

$$\square BC = \square AB + \square AC.$$

Folgesatz. In jedem rechtwinkligen Dreiecke ist das Quadrat über der einen Kathete gleich dem Quadrate über der Hypotenuse, vermindert um das Quadrat über der andern Kathete.

Denn aus $\square BC = \square AB + \square AC$

folgt

$$\square AB = \square BC - \square AC, \text{ und}$$
$$\square AC = \square BC - \square AB.$$

Rechnungsaufgaben.

1. Die Seite eines Quadrates ist a) 42^m, b) $0{\cdot}835^m$, c) $1^m\ 4^{dm}\ 7^{cm}$; wie groß ist der Flächeninhalt?

2. Der Umfang eines Quadrates ist $23^m\ 2^{dm}$; wie groß ist der Flächeninhalt?

3. Man will in einem quadratförmigen Garten, dessen Seite 58^m 5^{dm} ist, ringsherum einen Weg machen, der eine Breite von 1^m 2^{dm} haben soll; welchen Flächenraum wird dieser Weg einnehmen?

4. Die zusammentreffenden Seiten eines Rechteckes sind a und b, der Flächeninhalt ist f; aus zweien dieser Größen die dritte zu bestimmen.

$$f = ab; \qquad a = \frac{f}{b}; \qquad b = \frac{f}{a}.$$

Gegeben sind:

1) $a = 3^m\ 4^{dm}$,	2) $b = 5 \cdot 7^m$,	3) $a = 5^m\ 2^{dm}\ 8^{cm}$,
$b = 2^m\ 5^{dm}$;	$f = 54 \cdot 72 \square^m$;	$f = 21 \square^m\ 56 \square^{dm}$.

5. Jemand vertauscht einen Acker, welcher $746 \square^m$ $20 \square^{dm}$ Flächeninhalt hat, gegen einen andern von gleichem Inhalte, welcher 18^m 2^{dm} breit ist; wie lang muß dieser Acker sein?

6. Wie breit muß ein Rechteck von $2^m\ 1^{dm}\ 8^{cm}$ Länge sein, damit es einem Quadrate, dessen Seite $5^m\ 8^{dm}$ beträgt, flächengleich sei?

7. In einem Dreiecke ist a die Grundlinie, h die Höhe und f der Flächeninhalt; aus zweien dieser Größen die dritte zu bestimmen.

$$f = \frac{ah}{2}; \qquad a = \frac{2f}{h}; \qquad h = \frac{2f}{a}.$$

Gegeben sind:

1) $a = 3 \cdot 5^m$,	2) $h = 5 \cdot 6^m$,	3) $a = 5^m\ 3^{dm}$,
$h = 3 \cdot 2^m$;	$f = 40 \cdot 32 \square^m$;	$f = 20 \square^m\ 67 \square^{dm}$.

8. In einem rechtwinkligen Dreiecke sind die Katheten $29^m\ 3^{dm}$ und $18^m\ 4^{dm}$; wie groß ist der Flächeninhalt?

9. In einem Rhombus sind d und d^1 die beiden Diagonalen; wie groß ist der Flächeninhalt f?

$$f = \frac{dd^1}{2} \text{ (§. 63, 4).}$$

10. Eine Tischplatte von 12^{dm} Länge und 9^{dm} Breite enthält in der Mitte als Verzierung einen Rhombus, dessen Diagonalen 4^{dm} und 3^{dm} sind; um wie viel ist die Tischfläche größer als der Inhalt dieses Rhombus?

11. In einem Trapeze sind a und b die beiden parallelen Seiten, h ist die Höhe und f der Flächeninhalt; aus dreien dieser Größen die vierte zu bestimmen.

$$f = \frac{a+b}{2} \cdot h; \quad h = \frac{2f}{a+b}; \quad a = \frac{2f}{h} - b; \quad b = \frac{2f}{h} - a.$$

Gegeben sind:

1) $a = 3^m\ 2^{dm}\ 8^{cm}$,	2) $a = 5 \cdot 5^m$,	3) $a = 12 \cdot 8^m$,
$b = 2^m\ 7^{dm}\ 2^{cm}$,	$b = 4 \cdot 4^m$,	$h = 6 \cdot 4^m$,
$h = 4^m\ 5^{dm}$;	$f = 18 \cdot 81 \square^m$;	$f = 124 \cdot 8 \square^m$.

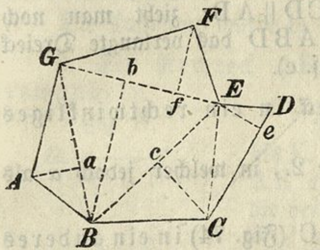
12. Der Flächeninhalt eines Trapezes ist 13·8 □^{m}, die Höhe 4^m und die Differenz der beiden Parallelseiten 2·1^m; wie groß ist jede der letzteren?

13. Ein Walmdach soll mit Blech gedeckt werden. Die obere Länge des Daches (Firstlänge) beträgt 25^m 4^{dm}, die untere 30^m 2^{dm}, die Dachbreite 7^m 2^{dm}, der Abstand des Firstes von der Traufe 8^m 2^{dm} und die Walmhöhe 8^m 4^{dm}. Wie viele Blechtafeln braucht man zur Deckung dieses Daches, wenn eine solche Tafel 3^{dm} lang und 2·7^{dm} breit ist; und wie hoch kommt das ganze Blech zu stehen, wenn eine Blechtafel 25 kr. kostet und man für Falze und Verschnitt 5% hinzurechnet?

Zwei Dachflächen sind Trapeze, die beiden anderen Dreiecke.

14. In einem regelmäßigen Achtecke, dessen Seite 1·4^m ist, beträgt der Abstand des Mittelpunktes von einer Seite 1·69^m; wie groß ist der Flächeninhalt?

Fig. 70.

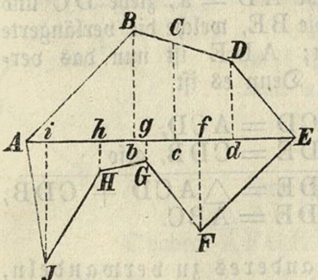


15. In dem Vielecke ABCDEFG (Fig. 70) ist

BG = 39^m, Aa = 11·6^m,
BE = 42·5^m, Cc = 19·7^m,
CD = 31·5^m, Ee = 12·1^m,
EG = 39·5^m, Bb = 35·4^m,
Ff = 16·4^m;

wie groß ist der Flächeninhalt des Vieleckes?

Fig. 71.



16. In dem Vielecke ABCDEFGHJ (Fig. 71) ist

Ai = 9·1^m, Ji = 63·4^m,
ih = 29·2^m, Hh = 17·1^m,
hb = 22·1^m, Bb = 60·5^m,
bg = 6·1^m, Gg = 12·1^m,
gc = 19·2^m, Cc = 57·2^m,
cf = 16·4^m, Ff = 52·3^m,
fd = 21·8^m, Dd = 46^m,
dE = 41·6^m;

wie groß ist der Flächeninhalt des Vieleckes?

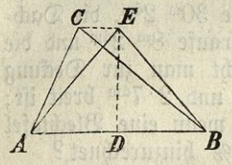
Constructions-Aufgaben.

(Verwandlung und Theilung geradliniger Figuren.)

Eine Figur in eine andere verwandeln heißt, eine andere Figur construiren, welche mit der gegebenen flächengleich, jedoch nicht congruent ist.

1. Ein ungleichseitiges Dreieck ABC (Fig. 72) in ein gleichschenkliges zu verwandeln, das mit ihm gleiche Grundlinie hat.

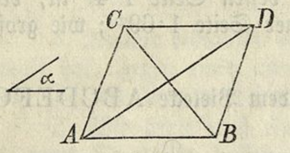
Fig. 72.



Man halbire die Seite AB in D, ziehe $DE \perp AB$ und aus C die $CE \parallel AB$; verbindet man den Durchschnittspunkt E mit A und B, so ist ABE das verlangte gleichschenklige Dreieck.

Die Richtigkeit der Lösung erhellet aus §. 72, Folges. c und §. 58, 4.

Fig. 73.



2. Ein gegebenes Dreieck ABC (Fig. 73) in ein anderes zu verwandeln, das einen gegebenen Winkel α enthält.

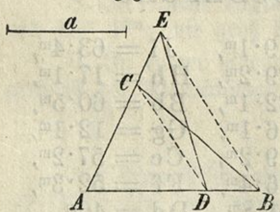
Man construire den Winkel $BAD = \alpha$ und ziehe $CD \parallel AB$; zieht man noch DB, so ist ABD das verlangte Dreieck (§. 72, Folges. c).

3. Ein schiefwinkliges Dreieck in ein rechtwinkliges zu verwandeln.

Die Auflösung wie bei der Aufgabe 2., in welcher jedoch α als rechter Winkel angenommen werden muß.

4. Ein gegebenes Dreieck ABC (Fig. 74) in ein anderes zu verwandeln, das eine gegebene Grundlinie a hat.

Fig. 74.

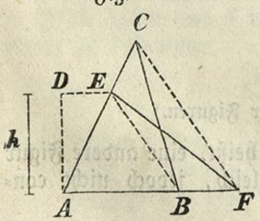


Man mache $AD = a$, ziehe DC und damit parallel die BE, welche die verlängerte AC in E trifft; ADE ist nun das verlangte Dreieck. Denn es ist

$$\triangle ACD = ACD,$$
$$\triangle CDE = CDB, \text{ also}$$
$$\triangle ACD + CDE = \triangle ACD + CDB,$$
$$\text{oder } \triangle ADE = ABC.$$

5. Ein Dreieck (Fig. 75) in ein anderes zu verwandeln, das eine gegebene Höhe h hat.

Fig. 75.

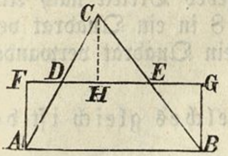


Man errichte $AD = h$ senkrecht auf AB, ziehe $DE \parallel AB$, dann die EB, und damit parallel die CF. Verbindet man nun E und F durch eine Strecke, so ist

$$\triangle AEF = ABC.$$

Der Beweis wird so wie bei der Aufgabe 4 geführt.

Fig. 76.



6. Ein gegebenes Dreieck ABC (Fig. 76) in ein Rechteck zu verwandeln, das mit ihm gleiche Grundlinie hat.

Man halbire die Seiten AC und BC in D und E, ziehe durch diese Punkte eine Gerade, und errichte in A und B die Senkrechten AF und BG, so ist ABGF das gesuchte Rechteck. Denn zieht man $CH \perp DE$, so ist

$$\begin{aligned} \triangle AFD &= CHD, \\ \triangle BGE &= CHE, \\ \text{Trap. } ABED &= ABED, \text{ also} \\ \hline AFD + BGE + ABED &= CHD + CHE + ABED, \end{aligned}$$

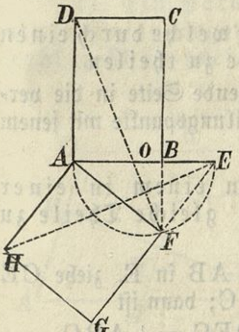
oder Rechteck $ABGF = \triangle ABC$.

7. Ein Trapez ABCD (Fig. 68) in ein Parallelogramm zu verwandeln.

Die Auflösung wurde in §. 73 angeführt.

8. Ein Rechteck ABCD (Fig. 77) in ein Quadrat zu verwandeln.

Fig. 77.



Man verlängere die kleinere Seite AB bis E, so daß $AE = AD$ wird, beschreibe über AE aus der Mitte O einen Kreisbogen, welcher die verlängerte Seite CB in F trifft. Zieht man AF und beschreibt dann darüber das Quadrat AFGH, so ist dieses dem gegebenen Rechtecke flächengleich.

Beweis. Da der Winkel $AFE = R$ ist (§. 36), so ist EFG eine gerade Linie. Zieht man nun HE und DF, so ist nach §. 72

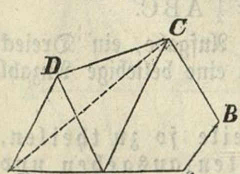
$$\begin{aligned} \triangle AHE &= \tfrac{1}{2} \text{ Quadrat } AFGH, \\ \triangle FAD &= \tfrac{1}{2} \text{ Rechteck } ABCD. \end{aligned}$$

Nun ist

$$\triangle AHE \cong FAD, \text{ daher auch}$$

Quadrat $AFGH =$ Rechteck ABCD.

Fig. 78.



9. Ein Vieleck ABCD (Fig. 78) in ein anderes zu verwandeln, welches eine Seite weniger hat.

Man schneide durch eine Diagonale CE von dem gegebenen Vielecke ein Dreieck CDE ab, lege durch D mit CE eine Parallele DF, welche die verlängerte Seite AE in F schneidet, und ziehe CF; dann ist das Vieleck $ABCDE =$ Vieleck ABCF, weil beide aus gleichen Theilen bestehen.

Zusatz. Durch wiederholtes Verfahren läßt sich hiernach jedes Vieleck in ein Dreieck verwandeln; und da sich jedes Dreieck nach Aufgabe 6 in ein Rechteck und dieses nach Aufgabe 8 in ein Quadrat verwandeln läßt, so kann auch jedes Vieleck in ein Quadrat verwandelt werden.

10. Ein Quadrat zu construiren, welches gleich ist der Summe zweier gegebener Quadrate.

Man construire ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten gleich sind den Seiten der gegebenen Quadrate; die Hypotenuse dieses Dreieckes ist die Seite des verlangten Quadrates (§. 76).

Durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens kann man auch ein Dreieck construiren, das

a) der Summe mehrerer gegebener Quadrate gleich ist,

b) dreimal, viermal, fünfmal so groß ist als ein gegebenes Quadrat.

11. Ein Quadrat zu construiren, welches gleich ist der Differenz zweier gegebener Quadrate.

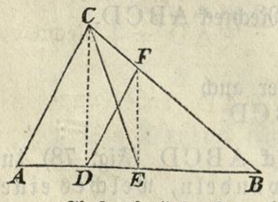
Man construire ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse gleich der Seite des größeren, und dessen eine Kathete gleich der Seite des kleineren Quadrates ist; dann ist die zweite Kathete die Seite des verlangten Quadrates (§. 76, Folges.).

12. Ein Dreieck durch gerade Linien, welche durch einen Eckpunkt gehen, in mehrere gleiche Theile zu theilen.

Man theile die dem Eckpunkte gegenüberliegende Seite in die verlangte Anzahl gleicher Theile und verbinde die Theilungspunkte mit jenem Eckpunkte durch Strecken (§. 72, Folges. c).

13. Ein Dreieck ABC (Fig. 79) von einem in einer Seite liegenden Punkte D aus in zwei gleiche Theile zu theilen.

Fig. 79.



Man halbire die AB in E, ziehe CE und CD, und EF || DC; dann ist

$$\triangle BDF = ADFC = \tfrac{1}{2} ABC.$$

Denn $\triangle EFD = EFC$ (§. 72, Folges. c).

$$\triangle BEF = BEF$$

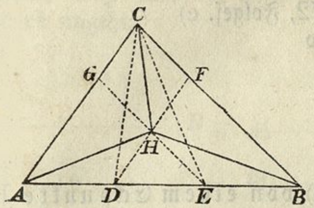
$$\triangle BDF = BCE = \tfrac{1}{2} ABC,$$

daher auch $ADFC = \tfrac{1}{2} ABC$.

Auf ähnliche Art kann auch die allgemeine Aufgabe, ein Dreieck von einem in einer Seite liegenden Punkte aus in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zu theilen, gelöst werden.

14. Ein Dreieck in drei gleiche Theile so zu theilen, daß die Theilungslinien von den Eckpunkten ausgehen und in einem gemeinschaftlichen Punkte innerhalb des Dreieckes zusammentreffen.

Fig. 80.



Man theile (Fig. 80) eine Seite AB in den Punkten D und E in drei gleiche Theile, ziehe DF || AC und EG || BC; die vom Durchschnittspunkte H aus gezogenen Strecken AH, BH und CH sind die verlangten Theilungslinien.

Zieht man die Hilfslinien CD und CE, so ist △ ACH = ACD und △ BCH = BCE; daher muß auch △ ABH = DCE sein. Nun sind die Dreiecke ACD, DCE, BCE unter einander gleich, folglich müssen auch die Dreiecke ACH, ABH, BCH gleich sein.

15. **Ein Dreieck in vier congruente Dreiecke zu theilen.**

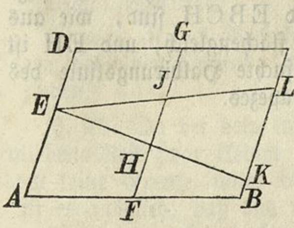
Man verbinde die Halbirungspunkte der drei Seiten durch Strecken.

16. **Ein Parallelogramm durch Gerade, welche einer Seite parallel sind, in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zu theilen.**

Man theile die dieser Seite anliegenden Gegenseiten in die verlangte Anzahl gleicher Theile und verbinde die gegenüberstehenden Theilungspunkte durch Strecken (§. 71, Folges. b).

17. **Ein Parallelogramm ABCD (Fig. 81) von einem in einer Seite liegenden Punkte E aus in eine bestimmte Anzahl, z. B. in drei gleiche Theile zu theilen.**

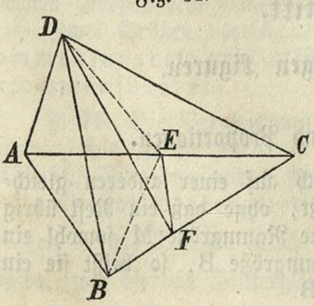
Fig. 81.



Man verbinde die Halbirungspunkte F und G der Gegenseiten, in welchen der gegebene Punkt nicht liegt, durch die Strecke FG, theile diese in drei gleiche Theile, und ziehe durch E und die Theilungspunkte H und J die Strecken EHK und EJL; dann ist
Trap. ABKE = △ EKL = Trap. ELCD = $\frac{1}{3}$ ABCD.

Der Beweis ergibt sich aus den §§. 73 und 72.

Fig. 82.



18. **Ein Viereck ABCD (Fig. 82) von einem Eckpunkte D aus in zwei gleiche Theile zu theilen.**

Man ziehe die beiden Diagonalen AC und BD, und durch die Mitte E der ersteren die Strecke EF || DB, so ist, wenn man noch D mit F verbindet, die Strecke DF die Halbirungslinie des Viereckes.

Beweis. Zieht man DE und BE, so ist

$\triangle$ DBF = DBE (§. 72, Folges. c)

$\triangle$ ABD = ABD, also

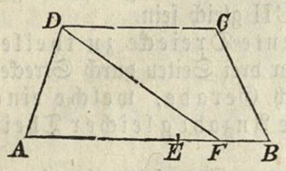
Viereck ABFD = ABED.

Nun ist ABED = $\frac{1}{2}$ ABCD,

also auch ABFD = $\frac{1}{2}$ ABCD.

19. Ein Trapez ABCD (Fig. 83) von einem Eckpunkte D aus in zwei gleiche Theile zu theilen.

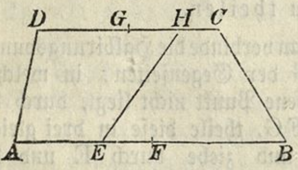
Fig. 83.



Man trage die kleinere Parallelseite CD auf der größeren AB von A bis E auf, halbire EB in F und ziehe die Strecke DF; das gegebene Trapez wird dadurch in zwei Theile getheilt, welche flächengleich sind (§§. 72 und 73).

20. Ein Trapez ABCD (Fig. 84) von einem in einer der Parallelseiten liegenden Punkte E aus in zwei gleiche Theile zu theilen.

Fig. 84.



Man halbire die beiden parallelen Seiten in F und G, mache HG = EF und ziehe die Strecke EH; die Trapeze AEHD und EBCH sind, wie aus §. 73 folgt, flächengleich, und EH ist somit die gesuchte Halbirungslinie des gegebenen Trapezes.

Fünfter Abschnitt.

Aehnlichkeit der geradlinigen Figuren.

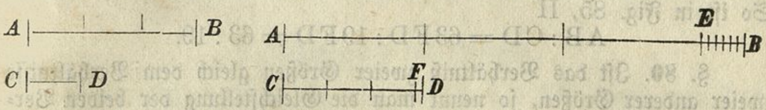
1. Geometrische Verhältnisse und Proportionen.

§. 77. Eine Raumgröße, welche sich auf einer anderen gleichartigen Raumgröße mehrmal auftragen läßt, ohne daß ein Rest übrig bleibt, heißt ein Maß derselben. Ist eine Raumgröße M sowohl ein Maß der Raumgröße A als auch der Raumgröße B, so heißt sie ein gemeinschaftliches Maß von A und B.

Um ein *gemeinschaftliches Maß zweier Strecken* zu erhalten, trage man die kleinere Strecke auf die größere so vielmal auf, als es angeht.

Fig. 85.

I. II.



a) Ist die kleinere Strecke CD (Fig. 85, I) in der größeren AB mehrmal, z. B. 3mal, enthalten, so daß kein Rest übrig bleibt, so ist CD selbst ein gemeinschaftliches Maß zwischen AB und CD.

b) Läßt sich aber die kleinere Strecke auf der andern nicht genau auftragen, ist z. B. die Strecke CD (Fig. 85, II) in der AB 3mal enthalten, und es bleibt noch ein Rest EB übrig, so trage man den Rest EB auf CD so oft auf, als es angeht; es sei EB in CD 3mal enthalten, und es bleibe noch die Strecke FD übrig. Diesen Rest wird man wieder auf den nächst vorhergehenden EB auftragen, in welchem er genau 6mal enthalten sei. Man hat dann

$$EB = 6\,FD$$
$$CD = 3\,EB + FD = 19\,FD,$$
$$AB = 3\,CD + EB = 63\,FD.$$

Die Strecken AB und CD haben demnach das gemeinschaftliche Maß FD, und zwar ist dieses in der AB 63mal, in der CD 19mal enthalten.

Analog ist das Verfahren, um das gemeinschaftliche Maß zweier Bogen desselben Kreises, zweier Winkel, zweier Flächen oder Körper zu finden.

§. 78. Da bei dem im §. 77 angeführten Verfahren der jedesmal gebliebene Rest zwar kleiner als der vorhergehende sein muß, demselben jedoch keine Grenze, unter die er nicht kommen könnte, vorgezeichnet ist, so ist es möglich, daß das wiederholte Auftragen der Reste ohne Ende fortgesetzt wird, ohne daß man je auf einen Rest kommt, welcher ein Maß des vorhergehenden wäre. In diesem Falle haben die beiden gegebenen Größen kein gemeinschaftliches Maß.

Zwei Größen, welche ein gemeinschaftliches Maß haben, heißen *commensurabel*; zwei Größen, die kein gemeinschaftliches Maß haben, *incommensurabel*.

§. 79. Die Vergleichung zweier gleichartiger Größen, um zu bestimmen, wie oft die zweite in der ersten enthalten ist, heißt ein *Verhältniß*. Von den beiden Größen heißt die erste das *Vorderglied*, die zweite das *Hinterglied* des Verhältnisses. Das Verhältniß der Größen A und B wird durch $A:B$ oder $\frac{A}{B}$ angezeigt. Die Zahl, welche angibt, wie oft das Hinterglied in dem Vordergliede enthalten ist, ist der Quotient des Verhältnisses. Zwei Verhältnisse sind einander gleich, wenn sie denselben Quotienten haben.

Das Verhältniß zweier Raumgrößen ist gleich dem Verhältnisse ihrer Maßzahlen, d. i. der unbenannten Zahlen, durch welche die beiden Raumgrößen in Beziehung auf dasselbe Maß ausgedrückt sind. So ist in Fig. 85, II

$$AB : CD = 63 FD : 19 FD = 63 : 19.$$

§. **80.** Ist das Verhältniß zweier Größen gleich dem Verhältnisse zweier anderer Größen, so nennt man die Gleichstellung der beiden Verhältnisse eine Proportion. Sind die Verhältnisse $A:B$ und $C:D$ einander gleich, so ist $A:B = C:D$ eine Proportion; A und D sind die äußeren, B und C die inneren Glieder der Proportion.

Eine Proportion, in welcher die beiden inneren Glieder gleich sind, heißt eine stetige Proportion; z. B. $A:B = B:C$; das mittlere Glied wird die mittlere geometrische Proportionale zwischen den beiden äußeren Gliedern, und das vierte Glied die dritte stetige Proportionale zu dem ersten und mittleren Gliede genannt.

Ist eine Strecke AC in einem Punkte B so getheilt, daß die Proportion $AC : AB = AB : BC$ stattfindet, so heißt die Strecke im Punkte B nach stetiger Proportion, oder im mittleren und äußeren Verhältnisse getheilt.

Wenn zwei Arten von Größen so von einander abhängen, daß das Verhältniß zwischen je zwei Größen der einen Art gleich ist dem Verhältnisse der beiden zugehörigen Größen der anderen Art, in derselben Ordnung genommen, so sagt man: die beiden Arten von Größen stehen in geradem Verhältnisse, oder sie sind gerade proportionirt. Hängen dagegen zwei Arten von Größen so von einander ab, daß das Verhältniß zwischen je zwei Größen der einen Art gleich ist dem Verhältnisse der zwei zugehörigen Größen der anderen Art, aber in umgekehrter Ordnung genommen, so sagt man: die beiden Arten von Größen stehen in verkehrtem Verhältnisse, oder sie sind verkehrt proportionirt.

§. **81.** Da nach dem im §. 77 angegebenen Verfahren zur Aufsuchung des gemeinschaftlichen Maßes zweier Raumgrößen für den Fall, daß diese incommensurabel sind, der nach dem wiederholten Auftragen übrigbleibende Rest nach und nach kleiner wird, als jede noch so kleine Größe derselben Art, so kann man ihn endlich vernachlässigen und dann den letzten aufgetragenen Rest als gemeinschaftliches Maß der beiden Größen annehmen. Man erhält dadurch ein angenähertes Verhältniß der zwei incommensurablen Größen, dessen Unterschied von dem wahren Verhältnisse jedoch um so kleiner wird, je kleiner man das Maß annimmt, und bei fortgesetzter Verkleinerung des Maßes kleiner gemacht werden kann, als jede noch so kleine angebbare Größe. Hieraus folgt: Sind zwei gleichartige Größen für den Fall, daß sie commensurabel sind, zwei anderen gleichartigen Größen, welche mit den ersteren immer zugleich zu oder abnehmen, proportionirt, so sind sie denselben auch dann proportionirt, wenn jene ersteren Größen incommensurabel sind.

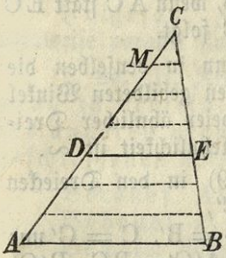
Wir können uns daher bei den nachfolgenden Vergleichungen der Raumgrößen auf den Fall beschränken, daß diese commensurabel sind.

2. Aehnlichkeit der Dreiecke.

§. 82. Sätze über die proportionale Theilung der Seiten eines Dreieckes.

1. Zieht man in einem Dreiecke mit einer Seite eine Parallele, so werden durch dieselbe die beiden anderen Seiten proportionirt geschnitten (Fig. 86).

Fig. 86.



Voraussf. DE || AB.

Behaupt. $CD : DA = CE : EB$,
$CA : DA = CB : EB$,
$CA : CD = CB : CE$.

Beweis. Es sei CM ein gemeinschaftliches Maß der Strecken CD und DA, und zwar $CD = m \, . \, CM$, $DA = n \, . \, CM$; dann ist
$$CD : DA = m : n.$$

Theilt man nun die CD in m und die DA in n gleiche Theile und zieht durch jeden Theilungspunkt eine Parallele mit AB, so wird dadurch (§. 65, 2) auch CB in $m + n$ gleiche Theile getheilt, von denen m auf CE und n auf EB kommen; es ist also
$$CE : EB = m : n.$$

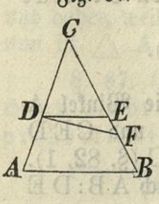
Aus dieser und der früheren Proportion folgt:
$$CD : DA = CE : EB.$$

Aus der Proportion $CD : DA = CE : EB$ ergibt sich auch die Richtigkeit der zweiten und dritten der oben aufgestellten Proportionen. Man hat

$(CD + DA) : DA = (CE + EB) : EB$ oder $CA : DA = CB : EB$
und $(CD + DA) : CD = (CE + EB) : CE$ oder $CA : CD = CB : CE$.

2. Werden zwei Seiten eines Dreieckes von einer Geraden proportionirt geschnitten, so ist dieselbe mit der dritten Seite des Dreieckes parallel. (Umkehrung des Lehrsatzes 1.)

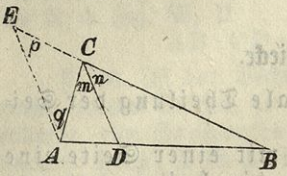
Fig. 87.



Es sei (Fig. 87) $CA : CD = CB : CE$. Würde die durch D parallel mit AB gezogene Gerade nicht durch E gehen, sondern die CB in einem anderen Punkte F schneiden, so wäre (nach 1.)
$$CA : CD = CB : CF.$$
Dann aber muß mit Rücksicht auf die Voraussetzung $CF = CE$ d. h. der Punkt F mit E identisch sein. Folglich ist DE || AB.

3. Halbirt man einen Winkel eines Dreieckes, so wird durch die Halbirungslinie die gegenüberstehende Seite in zwei Abschnitte getheilt, welche den ihnen anliegenden Seiten des Dreieckes proportionirt sind.

Fig. 88.



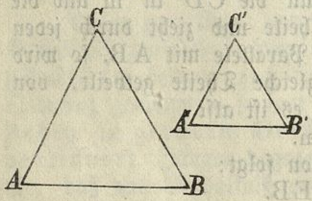
Vorauss. Es sei im Dreiecke ABC (Fig. 88) der Winkel C durch die Gerade CD halbirt, so daß $m = n$ wird.

Behaupt. $AD : DB = AC : BC$.

Beweis. Man verlängere BC und ziehe durch A mit DC eine Parallele, welche die Verlängerung der BC in E schneidet. Es ist nun $m = q$ als Wechselwinkel, $n = p$ als Gegenwinkel, und wegen $m = n$ auch $q = p$, folglich $EC = AC$. In dem Dreiecke ABE ist $CD \parallel EA$, daher findet die Proportion $AD : DB = EC : BC$ statt, woraus, wenn AC statt EC gesetzt wird, die Proportion $AD : DB = AC : BC$ folgt.

§. **83.** Zwei Dreiecke heißen **ähnlich**, wenn in denselben die gleichliegenden Seiten proportionirt und die von ihnen gebildeten Winkel paarweise gleich sind. Die gleichliegenden Seiten zweier ähnlicher Dreiecke heißen homologe Seiten. Das Zeichen der Aehnlichkeit ist $\sim$.

Fig. 89.



Ist (Fig. 89) in den Dreiecken ABC und A'B'C',

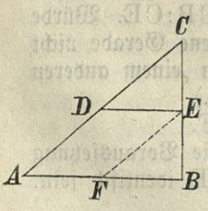
Winkel $A = A'$, $B = B'$, $C = C'$ und $AB : A'B' = AC : A'C' = BC : B'C'$, so ist $\triangle ABC \sim A'B'C'$.

Aus dieser Erklärung ergibt sich, daß zur Aehnlichkeit zweier Dreiecke sechs Bedingungen erforderlich sind: die Gleichheit dreier Paare von Winkeln, und die Gleichheit der Verhältnisse zwischen je zwei Paaren der Seiten. Da jedoch diese Bedingungen nicht unabhängig von einander sind, so kann man häufig schon aus dem Zutreffen nur zweier Bedingungen auf die Aehnlichkeit der beiden Dreiecke schließen.

Die Möglichkeit ähnlicher Dreiecke ergibt sich aus folgendem Lehrsatze:

Zieht man in einem Dreiecke mit einer Seite eine Parallele, so ist das gegebene Dreieck dem durch die Parallele abgeschnittenen Dreiecke ähnlich.

Fig. 90.



Vorauss. $DE \parallel AB$ (Fig. 90).

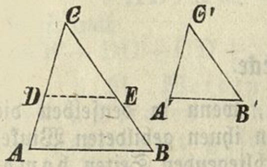
Behaupt. $\triangle ABC \sim DEC$.

Beweis. Der W. $C = C$, die Winkel A und B sind ihren Gegenwinkeln CDE und CED gleich; ferner ist $AC : DC = BC = EC$ (§. 82, 1). Es bleibt noch zu beweisen übrig, daß auch $AB : DE$

$= BC : EC$ ist. Zu diesem Ende ziehe man $EF \parallel CA$; dann ist nach (§. 82, 1) $AB : AF = BC : EC$; aber $AF = DE$, daher auch $AB : DE = BC : EC$, und folglich $\triangle ABC \sim DEC$.

§. 84. (I. Aehnlichkeitssatz.) Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn in denselben zwei Winkel paarweise gleich sind (Fig. 91).

Fig. 91.



Vorauss. $A = A'$ und $C = C'$.

Behaupt. $\triangle ABC \sim A'B'C'$.

Beweis. Man mache $CD = C'A'$ und ziehe $DE \parallel AB$, so ist Winkel $CDE = A = A'$, daher $\triangle DEC \cong A'B'C'$ (§. 50). Nun ist $\triangle ABC \sim DEC$ (§. 83), mithin auch $\triangle ABC \sim A'B'C'$.

Folgesatz. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn alle drei Seiten paarweise parallel sind oder auf einander senkrecht stehen. (§§. 28 u. 29).

§. 85. (II. Aehnlichkeitssatz.) Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn in denselben zwei Seiten des einen zweien Seiten des anderen proportionirt und die von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel gleich sind (Fig. 91).

Vorauss. $AC : A'C' = BC : B'C'$ und $C = C'$.

Behaupt. $\triangle ABC \sim A'B'C'$.

Beweis. Man mache $CD = C'A'$ und ziehe $DE \parallel AB$, so ist $AC : CD = BC : CE$, oder $AC : A'C' = BC : CE$. Allein nach der Voraussetzung ist $AC : A'C' = BC : B'C'$; folglich $CE = B'C'$ und daher $\triangle DEC \cong A'B'C'$ (§. 51); nun ist $\triangle ABC \sim DEC$, also auch $\triangle ABC \sim A'B'C'$.

§. 86. (III. Aehnlichkeitssatz.) Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn in denselben zwei Seiten des einen zweien Seiten des anderen proportionirt und die den größeren dieser Seiten gegenüberliegenden Winkel gleich sind (Fig. 91).

Vorauss. $AC : A'C' = BC : B'C'$, ferner $BC > AC$, also auch $B'C' > A'C'$, und W. $A = A'$.

Behaupt. $\triangle ABC \sim A'B'C'$.

Beweis. Man mache $CD = C'A'$ und ziehe $DE \parallel AB$; dann ist $AC : CD = BC : CE$, oder $AC : A'C' = BC : CE$. Nach der Voraussetzung ist aber $AC : A'C' = BC : B'C'$; folglich $CE = B'C'$, und daher, weil W. $CDE = A = A'$ ist, $\triangle DEC \cong A'B'C'$ (§. 52); nun ist $\triangle ABC \sim DEC$, also auch $\triangle ABC \sim A'B'C'$.

§. 87. (IV. Aehnlichkeitssatz.) Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn die drei Seiten des einen den drei Seiten des anderen proportionirt sind (Fig. 91).

Vorauss. $AC : A'C' = AB : A'B'$ und
$AC : A'C' = BC : B'C'$.

Behaupt. $\triangle ABC \sim A'B'C'$.

Beweis. Man mache $CD = C'A'$ und ziehe $DE \parallel AB'$ dann ist $AC : CD = AB : DE$ und $AC : CD = BC : CE$, oder $AC : A'C' = AB : DE$ und $AC : A'C' = BC : CE$.

Vergleicht man diese zwei Proportionen mit den in der Voraussetzung enthaltenen, so folgt $DE = A'B'$ und $CE = B'C'$, mithin $\triangle CDE \cong A'B'C'$ (§. 53); nun ist $\triangle ABC \sim CDE$, also auch $\triangle ABC \sim A'B'C'$.

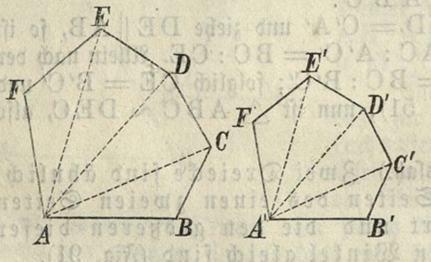
3. Aehnlichkeit der Vielecke.

§. 88. Zwei Vielecke heißen ähnlich, wenn in denselben die gleichliegenden Seiten proportionirt und die von ihnen gebildeten Winkel paarweise gleich sind. Auch hier werden die gleichliegenden Seiten homologe Seiten genannt.

Folgesatz. Zwei regelmäßige Vielecke von gleicher Seitenanzahl sind ähnlich.

§. 89. Lehrsätze. 1. Zwei ähnliche Vielecke werden durch gleichliegende Diagonalen in gleich viele ähnliche Dreiecke zerlegt.

Fig. 92.



Voraussf. Es sei (Fig. 92) Vieleck $ABCDEF \sim A'B'C'D'E'F'$.

Behaupt. $\triangle ABC \sim A'B'C'$, $\triangle ACD \sim A'C'D'$ u. s. w.

Beweis. Daß $\triangle ABC \sim A'B'C'$ ist, folgt unmittelbar aus der Aehnlichkeit der Vielecke nach §. 85.

Hieraus folgt dann, daß W. $ACB = A'C'B'$ und $AB : A'B' = AC : A'C' = CD : C'D'$ ist. Weil nun nach der Voraussetzung W. $BCD = B'C'D'$ ist, so ist auch $BCD - ACB = B'C'D' - A'C'B'$ oder W. $ACD = A'C'D'$; hieraus aber, in Verbindung mit der vorhergehenden Proportion, ergibt sich, daß $\triangle ACD = A'C'D'$ ist (§. 85).

Ebenso folgt die Aehnlichkeit eines jeden nächstfolgenden Paares der Dreiecke aus der Aehnlichkeit des vorhergehenden Paares und aus der Aehnlichkeit der Vielecke selbst.

2. Umgekehrt: Zwei Vielecke sind ähnlich, wenn sie sich auf übereinstimmende Weise in gleich viele ähnliche Dreiecke zerlegen lassen.

Beweis. Aus der Voraussetzung läßt sich die Gleichheit der gleichliegenden Winkel der Vielecke und die Proportionalität der gleichliegenden Seiten leicht nachweisen.

Folgesatz. In zwei ähnlichen Vielecken verhalten sich je zwei gleichliegende Diagonalen wie zwei gleichliegende Seiten.

§. **90**. In ähnlichen Vielecken verhalten sich die Umfänge wie zwei homologe Seiten.

Denn ist (Fig. 92)

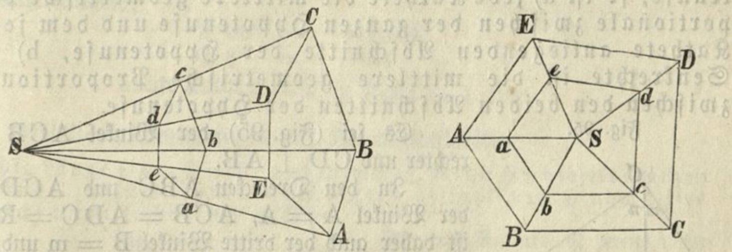
$$AB : A'B' = BC : B'C' = CD : C'D' = \ldots$$

so ist auch

$$(AB + BC + CD + \ldots) : (A'B' + B'C' + C'D' + \ldots) = AB : A'B'.$$

§. **91**. Werden die von einem Punkte S (Fig. 93) gezogenen Stralen in den Punkten A und a, B und b, C und c,... proportionirt geschnitten, so sind die Vielecke ABCD.. und abcd.. ähnlich.

Fig. 93.



Es sei $SA : Sa = SB : Sb = SC : Sc \ldots$ dann sind die Dreiecke SAB und Sab, SBC und Sbc, SCD und Scd,... ähnlich, daher $AB : ab = BC : bc$, weil beide Verhältnisse dem Verhältnisse $SB : Sb$ gleich sind. Ebenso folgt $BC : bc = CD : cd \ldots$ In den Vielecken ABCD.. und abcd.. sind also die gleichliegenden Seiten proportionirt.

Weil ferner $AB \parallel ab$, $BC \parallel bc$, $CD \parallel cd$,.. ist, so sind auch die Winkel A und a, B und b, C und c,.. paarweise gleich.

Die beiden Vielecke sind demnach ähnlich.

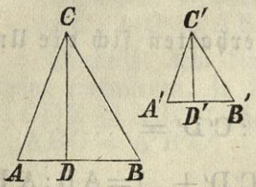
Zwei ähnliche Vielecke können durch entsprechende Verschiebung immer in eine solche Lage gebracht werden, daß von ihren Umfangspunkten die von einem Punkte S ausgehenden Stralen proportionirt geschnitten werden. Diese Lage zweier ähnlicher Vielecke nennt man die perspectivische Lage; der Punkt S heißt der Aehnlichkeitspunkt der ähnlichen Vielecke.

4. Anwendung der Aehnlichkeitssätze.

§. **92**. In ähnlichen Dreiecken sind die Höhen den Grundlinien proportionirt, wenn man zu den letzteren zwei homologe Seiten annimmt.

Es sei (Fig. 94) das $\triangle ABC \sim A'B'C'$, und man nehme die homologen Seiten AB und $A'B'$ als die Grundlinien, CD und $C'D'$ als die Höhen der beiden Dreiecke an; zu beweisen hat man, daß $CD : C'D' = AB : A'B'$ ist. — Die Dreiecke ACD und $A'C'D'$ haben zwei Winkel paarweise gleich, sind daher ähnlich; mithin findet die Proportion

Fig. 94.

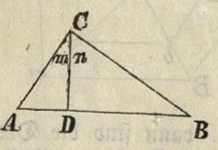


$$CD : C'D' = AC : A'C'$$

statt. Weil nach der Annahme $\triangle ABC \sim A'B'C'$, so ist auch $AB : A'B' = AC : A'C'$. Aus den beiden Proportionen folgt dann $CD : C'D' = AB : A'B'$.

§. **93**. Zieht man in einem rechtwinkligen Dreiecke vom Scheitel des rechten Winkels eine Senkrechte auf die Hypotenuse, so ist a) jede Kathete die mittlere geometrische Proportionale zwischen der ganzen Hypotenuse und dem jener Kathete anliegenden Abschnitte der Hypotenuse, b) die Senkrechte ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen den beiden Abschnitten der Hypotenuse.

Fig. 95.



Es sei (Fig. 95) der Winkel ACB ein rechter und $CD \perp AB$.

In den Dreiecken ABC und ACD ist der Winkel $A = A$, $ACB = ADC = R$, es ist daher auch der dritte Winkel $B = m$ und das $\triangle ABC \sim ACD$. Ebenso ist $\triangle ABC \sim BCD$; und folglich auch $\triangle ACD \sim BCD$.

a) Da $\triangle ABC \sim ACD$ ist, so folgt $AB : AC = AC : AD$; da $\triangle ABC \sim BCD$, so ist auch $AB : BC = BC : BD$.

b) Da $\triangle ACD \sim BCD$ ist, so folgt $AD : CD = CD : BD$.

§. **94**. Ist (Fig. 95) $AC = a$, $BC = b$, $AB = c$, $AD = p$, $BD = q$, wo a, b, c, p und q die Maßzahlen der bezüglichen Strecken bedeuten, so ergibt sich aus den in §. 93 unter a) aufgestellten Proportionen

$$c : a = a : p, \quad c : b = b : q,$$

daher $cp = a^2, \quad cq = b^2$.

Addirt man diese letzten Gleichungen, so erhält man

$$cp + cq = a^2 + b^2.$$

Allein es ist $cp + cq = c\,(p + q) = c \cdot c = c^2$; daher

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

In jedem rechtwinkligen Dreiecke ist also das Quadrat der Maßzahl der Hypotenuse gleich der Summe aus den Quadraten der Maßzahlen der beiden Katheten.

Dies ist der arithmetische Ausdruck für den Pythagoräischen Lehrsatz, dessen Richtigkeit im geometrischen Sinne wir schon in §. 76 bewiesen haben.

Mit Hilfe dieses Satzes kann man, wenn zwei Seiten eines rechtwinkligen Dreieckes bekannt sind, durch Rechnung die dritte Seite finden.

1. Sind die beiden Katheten bekannt, so erhebt man jede Kathete zum Quadrate, addirt die Quadrate, diese Summe gibt das Quadrat der Hypotenuse; um die Hypotenuse selbst zu erhalten, braucht man nur aus jener Summe die Quadratwurzel auszuziehen.

Ist z. B. die eine Kathete 36^{cm}, die andere 160^{cm}, so hat man

$$36^2 = 1296$$
$$160^2 = 25600$$
$$\text{Hypotenuse} = \sqrt{26896} = 164^{cm}.$$

2. Sind die Hypotenuse und eine Kathete bekannt, so erhebe man beide zum Quadrate, subtrahire vom Quadrate der Hypotenuse das Quadrat der bekannten Kathete, der Rest gibt das Quadrat der anderen noch unbekannten Kathete; will man diese Kathete selbst finden, so darf man nur aus jenem Reste die Quadratwurzel ausziehen.

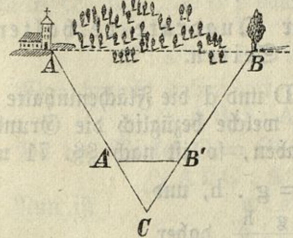
Es sei z. B. die Hypotenuse $2^m\ 8^{cm}$, eine Kathete 8^{dm}; wie groß ist die zweite Kathete?

$$2{\cdot}08^2 = 4{\cdot}3264$$
$$0{\cdot}8^2 = 0{\cdot}64$$
$$\text{zweite Kathete} = \sqrt{3{\cdot}6864} = 1{\cdot}92^m.$$

Praktische Anwendungen der Aehnlichkeitssätze.

a) Die Länge einer Strecke zu bestimmen, wenn sich dieselbe wegen eines zwischen ihren Endpunkten befindlichen Hindernisses nicht unmittelbar messen läßt.

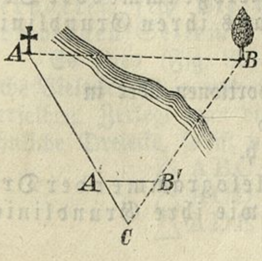
Fig. 96.



Für diese Aufgabe ist bereits unter den Anwendungen der Congruenzsätze eine Auflösung angegeben worden, die jedoch nicht ausführbar ist, wenn der Boden keine Verlängerung der Strecken AC und BC gestattet. In diesem Falle messe man ebenfalls (Fig. 96) die Strecken CA und CB, trage aber dann nur einen bestimmten, z. B. den 4ten Theil der erhaltenen Länge CA von C bis A', und ebenso den 4ten Theil der CB von C bis B' auf. Mißt man nun die Entfernung A'B', so ist diese wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke CA'B' und CAB der 4te Theil der gesuchten Entfernung AB.

b) Die Länge einer Strecke zu bestimmen, wenn man nur zu einem Endpunkte derselben gelangen kann.

Fig. 97.

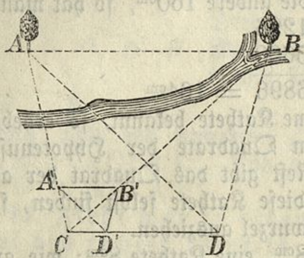


Man wähle zuerst einen dritten Standpunkt C (Fig. 97), von dem man zu einem der beiden Punkte A und B hin messen kann, messe wirklich zu dem zugänglichen Punkte A hin, und trage von der gefundenen Länge z. B. den 4ten Theil von C bis A' auf. In A' wird ein Winkel CA'B' abgesteckt, welcher so groß ist als der Winkel CAB, und in dessen Schenkel A'B' derjenige Punkt B' bestimmt, welcher zugleich in der CB liegt. Mißt man dann die Entfernung A'B', so darf man nur dieselbe mit 4 multipliciren, um die verlangte Länge AB zu finden.

c) Die Länge einer Strecke zu bestimmen, die an ihren beiden Endpunkten unzugänglich ist.

Es sei z. B. die Entfernung der beiden Bäume A und B (Fig. 98), welche sich jenseits eines Flusses befinden, zu bestimmen. Man wähle zwei solche Standpunkte C und D, daß man zwischen ihnen unmittelbar messen, und von ihnen aus nach den beiden gegebenen Punkten A und B sehen kann. Man messe die Standlinie CD, und trage darauf von C aus z. B. ihren 4ten Theil bis D' auf. In dem Punkte D' steckt man einen Winkel CD'A' aus, welcher dem Winkel CDA gleich ist, und geht auf dem Schenkel D'A' so weit fort, bis man in die Richtung CA nach A' kommt. Ebenso steckt man in D' einen Winkel CD'B' ab, welcher eben so groß ist als der Winkel CDB, und geht auf dem Schenkel D'B' so weit, bis man in die Richtung CB nach B' kommt. Endlich messe man A'B' und multiplicire die erhaltene Länge mit 4, so hat man den gesuchten Abstand AB.

Fig. 98.



Der §. 243 enthält unter 4., 5. und 6. die trigonometrische Lösung der voranstehenden drei Aufgaben.

5. Flächenverhältnisse der geradlinigen Figuren.

§. 95. Bezeichnen Q und q die Flächeninhalte, S und s die bezüglichen Seiten zweier Quadrate, so ist nach §. 70

$$Q = S^2 \text{ und } q = s^2, \text{ daher}$$
$$Q : q = S^2 : s^2; \text{ d. h.}$$

Die Flächeninhalte zweier Quadrate verhalten sich wie die zweiten Potenzen ihrer Seiten.

§. 96. 1. Sind P und p, oder D und d die Flächeninhalte zweier Parallelogramme oder zweier Dreiecke, welche bezüglich die Grundlinien G und g und die Höhen H und h haben, so ist nach §§. 71 und 72

$$P = G \,.\, H, \; p = g \,.\, h, \text{ und}$$
$$D = \frac{G \,.\, H}{2}, \; d = \frac{g \,.\, h}{2}, \text{ daher}$$
$$P : p = G \,.\, H : g \,.\, h, \text{ und}$$
$$D : d = G \,.\, H : g \,.\, h; \text{ d. h.}$$

Die Flächeninhalte zweier Parallelogramme oder Dreiecke verhalten sich wie die Producte aus ihren Grundlinien und Höhen.

2. Für H = h gehen die obigen Proportionen über in

$$P : p = G : g, \text{ und}$$
$$D : d = G : g; \text{ d. h.}$$

Die Flächeninhalte zweier Parallelogramme oder Dreiecke von gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundlinien.

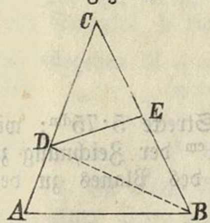
3. Für $G = g$ folgt eben so

$$P : p = H : h, \text{ und}$$
$$D : d = H : h; \text{ d. h.}$$

Die Flächeninhalte zweier Parallelogramme oder Dreiecke von gleicher Grundlinie verhalten sich wie ihre Höhen.

§. **97.** Die Flächeninhalte zweier Dreiecke, welche einen gleichen Winkel haben, verhalten sich so wie die Producte aus den Maßzahlen der Seiten, die den gleichen Winkel einschließen.

Fig. 99.



Es seien in den Dreiecken ABC und DEC (Fig. 99) die Maßzahlen der Seiten AC und BC, CD und CE, welche den Winkel C einschließen, M und N, m und n. Zieht man BD, so ist nach §. 96, 2

$$\triangle ABC : DBC = AC : CD = M : m \text{ und}$$
$$\triangle DBC : DEC = BC : CE = N : n,$$

woraus durch Multiplication

$$\triangle ABC : DEC = M.N : m.n \text{ folgt.}$$

§. **98.** Die Flächeninhalte zweier ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate der Maßzahlen ihrer homologen Seiten.

Es sei (Fig. 89) $\triangle ABC \sim A'B'C'$, ferner seien a, b, c die Maßzahlen der Seiten BC, AC, AB und a', b', c' die Maßzahlen der Seiten B'C', A'C', A'B'; dann ist

$$a : a' = b : b' = c : c', \text{ daher auch}$$
$$a^2 : a'^2 = b^2 : b'^2 = c^2 : c'^2.$$

Man braucht daher nur zu beweisen, daß

$$\triangle ABC : A'B'C' = a^2 : a'^2 \text{ ist.}$$

Da der Winkel $C = C'$ ist, so hat man nach §. 97

$$\triangle ABC : A'B'C' = a.b : a'.b'.$$

Nun ist
$$a : a' = a : a',$$
$$b : b' = a : a',$$

daher
$$a.b : a'.b' = a^2 : a'^2,$$

folglich
$$\triangle ABC : A'B'C' = a^2 : a'^2.$$

§. **99.** Die Flächeninhalte zweier ähnlicher Vielecke verhalten sich wie die Quadrate der Maßzahlen ihrer homologen Seiten.

Es seien (Fig. 92) ABCDEF und A'B'C'D'E'F' zwei ähnliche Vielecke und a und a' die Maßzahlen zweier gleichliegender Seiten derselben. Zerlegt man die Vielecke durch Diagonalen aus A und A' in ähnliche Dreiecke, so ist nach §. 98

$$\triangle ABC : A'B'C' = a^2 : a'^2,$$
$$\triangle ACD : A'C'D' = a^2 : a'^2,$$
$$\triangle ADE : A'D'E' = a^2 : a'^2, \text{ u. s. w.}$$

daher auch

$$(ABC + ACD + ADE + ..) : (A'B'C' + A'C'D' + A'D'E' + ..) = a^2 : a'^2,$$

oder

$$ABCDEF : A'B'C'D'E'F' = a^2 : a'^2.$$

Wird daher eine in der Wirklichkeit aufgenommene Figur im verjüngten Maße gezeichnet, so daß jede Seite nur $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, .. \frac{1}{m}$ der wirklich gemessenen Länge beträgt, so ist der Flächeninhalt der gezeichneten Figur $\frac{1}{4}, \frac{1}{9}, ... \frac{1}{m^2}$ des Flächeninhaltes der ähnlichen, in der Wirklichkeit aufgenommenen Figur.

Rechnungsaufgaben.

1. Auf einem Katastralplane beträgt eine Strecke $5 \cdot 75^{dm}$; wie groß ist die natürliche Länge derselben, a) wenn 1^{cm} der Zeichnung zu 30^{m} angenommen wird, b) wenn sich die Maße des Planes zu den natürlichen Längenmaßen wie 1 : 2500 verhalten?

2. Welche Länge wird eine Strecke, welche in der Wirklichkeit 648^{m} mißt, in der Zeichnung erhalten, wenn die Längenmaße im Verhältnisse 1 : 7500 der natürlichen Größe gezeichnet werden sollen?

3. In einem Bauplane, in welchem 4^{cm} des gewählten Maßstabes 3^{m} vorstellen sollen, beträgt der Flächeninhalt des Grundrisses $5 \square^{dm}$ $20 \square^{cm}$; wie groß ist die wirkliche Baufläche?

4. Der Schatten eines Thurmes ist 62^{m} lang, während gleichzeitig die Schattenlänge eines 1^{m} hohen verticalen Stabes $1 \cdot 6^{m}$ beträgt; wie hoch ist der Thurm?

5. In einem rechtwinkligen Dreiecke sind die Katheten

a) 35^{m},	b) $1^{m}\ 4^{dm}\ 7^{cm}$	c) $5 \cdot 342^{m}$,
12^{m};	$1^{m}\ 4^{dm}$;	$3 \cdot 405^{m}$;

wie groß ist die Hypotenuse?

6. In einem rechtwinkligen Dreiecke ist

die Hypotenuse	a) 125^{m},	b) $3^{m}\ 4^{dm}\ 8^{cm}$,	c) $5 \cdot 925^{m}$,
die eine Kathete	a) 35^{m},	b) $2^{m}\ 2^{dm}\ 9^{cm}$,	c) $3 \cdot 0912^{m}$;

wie groß ist die andere Kathete?

7. Wie lang muß eine Leiter sein, um bis an das obere Ende einer $4 \cdot 3^{m}$ hohen Mauer zu reichen, wenn sie unten $2 \cdot 6^{m}$ von der Mauer absteht?

8. Die Seite eines Quadrates ist a) $1 \cdot 3^{m}$, b) $37 \cdot 5^{dm}$, c) $2 \cdot 903^{m}$; wie groß ist dessen Diagonale?

9. Die Diagonale eines Quadrates beträgt a) 28^{cm}, b) $1 \cdot 048^{m}$, c) $2^{m}\ 1^{dm}\ 2^{cm}$; wie groß ist dessen Flächeninhalt?

10. Die Seiten eines Rechteckes sind $3^{m}\ 4^{dm}\ 5^{cm}$ und $2^{m}\ 1^{dm}\ 8^{cm}$; wie groß ist die Diagonale?

11. In einem Rechtecke beträgt eine Seite 14^{dm}, die Diagonale $21 \cdot 4^{dm}$; wie groß ist dessen Flächeninhalt?

12. In einem gleichseitigen Dreiecke ist a die Seite, h die Höhe und f der Flächeninhalt; aus einer dieser Größen die zwei anderen zu berechnen.

$$h = \frac{a}{2}\sqrt{3}, \qquad a = \frac{2h}{3}\sqrt{3}, \qquad a = 2\sqrt{\frac{f\sqrt{3}}{3}},$$

$$f = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}; \qquad f = \frac{h^2}{3}\sqrt{3}; \qquad h = \sqrt{f\sqrt{3}}.$$

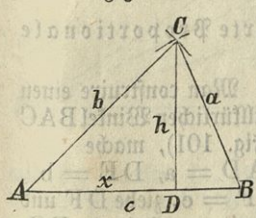
Gegeben sind:
a) $a = 2^{m}\ 5^{dm}\ 9^{cm}$; b) $h = 1\cdot35^{m}$; c) $f = 36\frac{3}{4}\ \square^{dm}$.

13. Es sei in einem gleichschenkligen Dreiecke a die Grundlinie, b ein Schenkel, h die Höhe und f der Flächeninhalt.

a) Gegeben ist $a = 124^{cm}$, $b = 165^{cm}$; zu suchen h und f.
b) „ „ $a = 3\cdot5^{dm}$, $h = 5\cdot4^{dm}$; „ „ b „ f.
c) „ „ $a = 2\cdot34^{m}$, $f = 3\cdot76\square^{m}$; „ „ h „ b.
d) „ „ $h = 7\cdot8^{m}$, $f = 32\square^{m}$; „ „ a „ b.

14. In einem Dreiecke sind die drei Seiten gegeben; man berechne die zu einer Seite gehörige Höhe und den Flächeninhalt.

Fig. 100.



Es sei in dem Dreiecke ABC (Fig. 100) die Seite $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, die Höhe $CD = h$ und die Strecke $AD = x$, daher $BD = c - x$. Zur Bestimmung von x hat man nach §. 94
aus dem $\triangle ADC$ .. $h^2 = b^2 - x^2$,
„ „ $\triangle BDC$ .. $h^2 = a^2 - (c-x)^2$;
daher ist $b^2 - x^2 = a^2 - (c-x)^2$, woraus man erhält:

$$x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}.$$

Da nun $h^2 = b^2 - x^2 = (b + x) \cdot (b - x)$ ist, so ergibt sich, wenn man für x den eben gefundenen Werth substituirt,

$$h^2 = \left(b + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}\right) \cdot \left(b - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}\right)$$
$$= \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2c} \cdot \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2c}$$
$$= \frac{(b + c)^2 - a^2}{2c} \cdot \frac{a^2 - (b - c)^2}{2c}$$
$$= \frac{(b + c + a)\ (b + c - a)\ (a + b - c)\ (a - b + c)}{4c^2},$$

folglich

$$h = \frac{1}{2c}\sqrt{(b + c + a)\ (b + c - a)\ (a + b - c)\ (a - b + c)}.$$

Drückt man den halben Umfang des Dreieckes durch s aus, setzt also $a + b + c = 2s$, so erhält man, wenn von dieser Gleichung folgeweise $2a$, $2b$, $2c$ subtrahirt wird,

$$b + c - a = 2(s - a),$$
$$a - b + c = 2(s - b),$$
$$a + b - c = 2(s - c);$$ folglich ist
$$h = \frac{2}{c}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Bezeichnet man den Flächeninhalt des Dreieckes ABC durch f, so ist $f = \frac{c.h}{2}$; mithin

$$f = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Wie wird diese Formel mit Worten ausgedrückt?

15. In einem Dreiecke ist

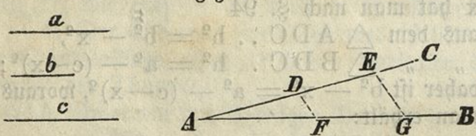
a) $a = 35^m$,	b) $a = 28 \cdot 2^m$,	c) $a = 2^m\, 5^{dm}\, 7^{cm}$,
$b = 46^m$,	$b = 37 \cdot 5^m$,	$b = 3^m\, 1^{dm}\, 1^{cm}$,
$c = 53^m$;	$c = 40 \cdot 5^m$;	$c = 1^m\, 8^{dm}\, 4^{cm}$;

wie groß ist der Flächeninhalt des Dreieckes?

Constructions-Aufgaben.

1. Zu drei gegebenen Strecken die vierte Proportionale zu finden.

Fig. 101.

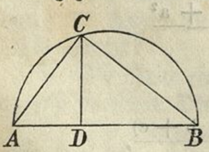


Man construire einen willkürlichen Winkel BAC (Fig. 101), mache $AD = a$, $DE = b$, $AF = c$, ziehe DF und damit parallel die EG, so ist FG die vierte Proportionale zu a, b, c.

Wären hier statt der Strecken a und b ihre Maßzahlen m und n gegeben, so müßte man auf AD m, auf DE n gleiche Theile auftragen und weiter wie vorhin verfahren.

2. Zu zwei gegebenen Strecken a und b die dritte stetige Proportionale zu construiren.

Fig. 102.



Auflös. 1. Nach Aufg. 1, indem man dort $c = b$ setzt.

Auflös. 2. Man ziehe (Fig. 102) $CD \perp AB$, mache $AD = a$, $CD = b$, ziehe ferner AC und senkrecht darauf CB bis zur Verlängerung der AD; dann ist $AD : CD = CD : DB$ (§. 94, b), oder $a : b = b : DB$, folglich DB die dritte stetige Proportionale zu a und b.

Auflös. 3. Ist $a > b$, so kann man folgende einfachere Construction anwenden: Man mache $AB = a$, beschreibe über AB als

Durchmesser einen Halbkreis und aus A mit dem Halbmesser b einen Bogen, welcher jenen Kreis in C schneidet; dann ist $AB : AC = AC : AD$ (§. 36 und 94, a), oder $a : b = b : AD$.

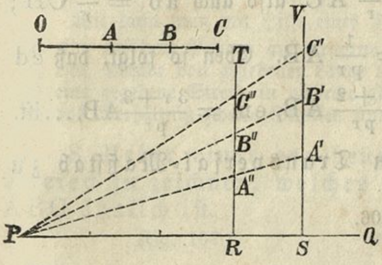
3. Zu zwei gegebenen Strecken a und b die mittlere geometrische Proportionale zu construiren.

Auflös. 1. Man mache (Fig. 102) $AD = a$, $DB = b$, beschreibe über AB einen Halbkreis und errichte in D die $DC \perp AB$, so ist DC die mittlere geometrische Proportionale zwischen AD und DB (§. 36 und 94, b).

Auflös. 2. Man mache AB gleich der größeren Strecke a, und $AD = b$, beschreibe über AB einen Halbkreis und ziehe $DC \perp AB$; dann ist die Sehne AC die gesuchte mittlere Proportionale zu a und b (§. 36 und 94, a).

4. Mehrere Strecken nach einem gegebenen Verhältnisse zu verkleinern oder zu vergrößern.

Fig. 103.

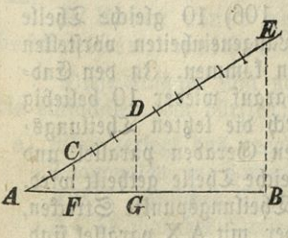


Um die gegebenen Strecken OA, OB, OC (Fig. 103) z. B. in dem Verhältnisse $4 : 3$ zu verkleinern, ziehe man eine Gerade PQ, trage von P aus 3, und ebenso von P aus 4 gleiche Theile auf; in den Endpunkten R und S errichte man die Senkrechten RT und SV, trage auf die entferntere Senkrechte SV die gegebenen Strecken von S bis A', B', C' auf, und ziehe durch den Punkt P und die Punkte A', B', C' gerade Linien, welche die nähere Senkrechte in den Punkten A'', B'', C'' treffen; die Geraden RA'', RB'', RC'' sind dann die gesuchten verhältnißmäßig verkleinerten Strecken.

Wären die gegebenen Strecken in dem Verhältnisse $3 : 4$ zu vergrößern, so würde man sie auf die nähere Senkrechte RT auftragen; auf der Senkrechten SV erhielte man dann die verhältnißmäßig vergrößerten Strecken.

5. Eine gegebene Strecke in mehrere Theile zu theilen, welche in gegebenen Verhältnissen zu einander stehen.

Fig. 104.

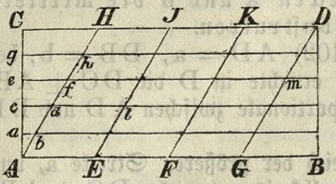


Es sei z. B. die Strecke AB (Fig. 104) in Theile zu theilen, welche sich zu einander verhalten wie $m : n : p$ $(2 : 3 : 6)$.

Man ziehe durch A eine willkürliche Gerade AX, trage darauf von A bis C m, von C bis D n, von D bis E p untereinander gleiche Theile auf, und ziehe EB. Zieht man nun $CF \parallel DG \parallel EB$, so ist $AF : FG : GB = m : n : p$.

6. Eine Strecke mittelst Transversalen in $n = p \cdot r$ ($20 = 4 \cdot 5$) gleiche Theile zu theilen.

Fig. 105.

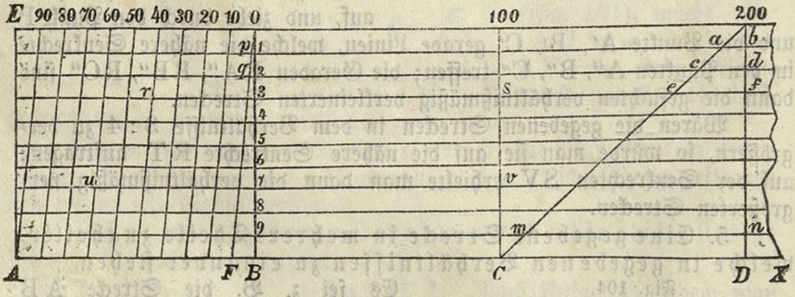


Man theile die Strecke AB (Fig. 105) in p (4) gleiche Theile; in A und B errichte man auf AB Senkrechte, trage darauf r (5) gleiche Theile auf, ziehe durch die letzten Theilungspunkte die Gerade CD, und theile auch diese in p (4) gleiche Theile. Verbindet man dann die gleichvielten Theilungspunkte der AC und BD durch Gerade und zieht durch A und H, E und J, F und K, G und D die Transversalen AH, EJ, FK, GD, so ist die Aufgabe gelöst.

Wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke Aab und ACH hat man nämlich $ab : CH = Aa : AC$, aber $Aa = \frac{1}{r} AC$, also auch $ab = \frac{1}{r} CH$; nun ist $CH = \frac{1}{p} AB$, somit $ab = \frac{1}{pr} AB$. Eben so folgt, daß $cd = \frac{2}{pr} AB$, $ef = \frac{3}{pr} AB, \ldots, cl = \frac{r+2}{pr} AB$, $em = \frac{3r+3}{pr} AB, \ldots$ ist.

7. Einen tausendtheiligen Transversal-Maßstab zu construiren.

Fig. 106.



Man trage auf einen Stral AX (Fig. 106) 10 gleiche Theile AB, BC, CD, ... auf, deren jeder 100 Längeneinheiten vorstellen soll, so daß auf die ganze Linie 1000 Einheiten kommen. In den Endpunkten errichte man zwei Senkrechte, trage darauf wieder 10 beliebig große, jedoch gleiche Theile auf, und ziehe durch die letzten Theilungspunkte eine Strecke, welche der zuerst gezogenen Geraden parallel und gleich sein muß, und welche ebenfalls in 10 gleiche Theile getheilt wird. Sodann ziehe man durch die gegenüberstehenden Theilungspunkte Strecken, welche alle entweder auf AX senkrecht stehen oder mit AX parallel sind.

Um nun einen Theil AB wieder in 10 gleiche Theile zu theilen, braucht man nur in irgend einer Abtheilung eine Diagonale C 200 zu ziehen. Es ist dann ab der 10. Theil von der Strecke zwischen 200 und 300, folglich auch von AB; eben so enthält cd 2 solche Theile, ef 3 Theile u. s. w. Diese Theile trägt man nun sowohl auf AB als Eo auf, zieht dann durch o und F, sowie durch je zwei folgende Theilungspunkte Transversalen und schreibt an die Theilungspunkte die Zahlen so hin, wie man sie an der Figur sieht.

Die ganze Strecke AX enthält 1000 Theile; AB ist der 10. Theil davon und enthält somit 100 Theile; BF ist der 10. Theil von AB, enthält demnach 10 solche Theile; p1 endlich ist der 10. Theil von BF, enthält also einen solchen Theil, wie deren auf die ganze Linie 1000 kommen, p1 ist also der 1000ste Theil derselben; q2 enthält zwei solche Theile u. s. w.

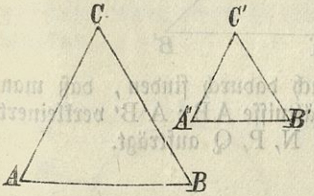
Stellt z. B. AB ein Decimeter vor, so ist BF ein Centimeter, p1 ein Millimeter des verjüngten Decimalmaßes.

Wie kann man mit Hilfe eines Transversal-Maßstabes

a) eine auf dem Papiere aufgetragene Strecke messen;
b) eine Gerade von gegebener Länge auf dem Papiere auftragen;
c) eine gegebene Strecke in mehrere gleiche Theile theilen;
d) das Verhältniß zweier Strecken finden?

8. Ueber einer gegebenen Strecke A′B′ (Fig. 107) ein Dreieck zu zeichnen, welches mit einem gegebenen Dreiecke ABC ähnlich ist.

Fig. 107.



a) Man trage in A′ einen Winkel B′A′C′ = BAC und in B′ einen Winkel A′B′C′ = ABC auf; ihre Schenkel schneiden sich in C′ und es ist A′B′C′ das verlangte Dreieck.

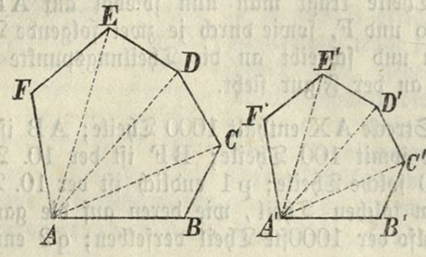
b) Man suche zu AC und BC die nach dem Verhältnisse AB : A′B′ geänderten Strecken (Aufg. 4), beschreibe mit der ersten aus A′ und mit der anderen aus B′ einen Kreisbogen; den Durchschnitt C′ der beiden Kreisbogen verbinde man mit A′ und B′ durch Strecken, so ist △ A′B′C′ ∼ △ ABC.

9. Ueber einer gegebenen Strecke A′B′ ein Vieleck zu beschreiben, welches einem gegebenen Vielecke ähnlich ist.

Diese Aufgabe läßt mehrere Auflösungsarten zu, worunter folgende die einfachsten sein dürften:

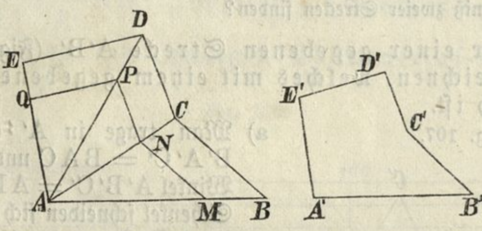
a) Man zerlegt das gegebene Vieleck ABCDEF (Fig. 108) mittelst Diagonalen in Dreiecke, beschreibt über A′B′ ein dem Dreiecke ABC ähnliches Dreieck A′B′C′, über A′B′ ein dem Dreiecke ACD ähnliches Dreieck A′C′D′, über A′D′ das Dreieck A′D′E′, welches mit ADE ähnlich ist, und über A'E' das Dreieck A'E'F' ähnlich mit AEF; A'B'C'D'E'F' ist dann das verlangte Vieleck.

Fig. 108.



b) Man ziehe von A (Fig. 109) aus zu allen Eckpunkten Diagonalen, mache AM = A'B' und ziehe MN || BC, NP || CD, PQ || DE, so ist das Vieleck ABCDE ∾ AMNPQ. Construirt man nun über A'B' ein Vieleck A'B'C'D'E', welches mit AMNPQ congruent ist, so ist dasselbe das verlangte Vieleck.

Fig. 109.



Die Punkte N, P, Q könnte man auch dadurch finden, daß man die Strecken AC, AD, AE in dem Verhältnisse AB : A'B' verkleinert und die so verjüngten Strecken von A bis N, P, Q aufträgt.

Sechster Abschnitt.

Der Kreis.

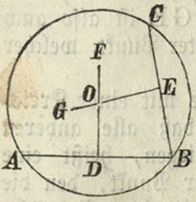
1. Der Kreis und der Punkt.

§. **100**. Die Kreislinie (§. 16) ist eine krumme Linie, deren alle Punkte von einem innerhalb liegenden Punkte, dem Mittelpunkte, denselben Abstand haben Dieser Abstand ist der Halbmesser des Kreises.

Ein Punkt, dessen Abstand vom Mittelpunkte des Kreises größer ist als der Halbmesser, liegt außerhalb des Kreises; ein Punkt, dessen Abstand vom Mittelpunkte kleiner ist als der Halbmesser, innerhalb des Kreises.

§. **101**. **Durch drei Punkte A, B, C (Fig. 110), welche nicht in einer geraden Linie liegen, ist ein Kreis vollkommen bestimmt.**

Fig. 110.



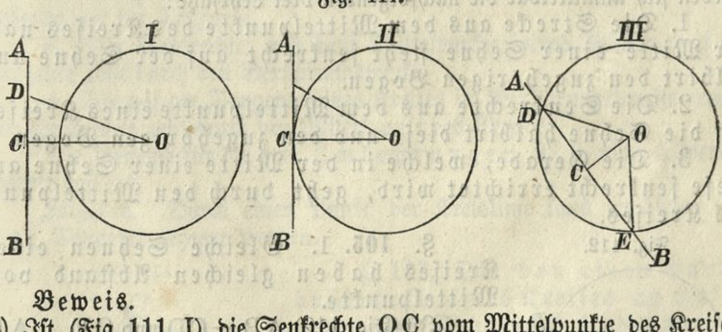
Zieht man die Strecken AB und AC, halbirt dieselben in D und E, und errichtet auf sie die Senkrechten DF und EG, so müssen sich diese in einem Punkte O schneiden. Zieht man dann OA, OB und OC, so ist (nach §. 38, 2) $OA = OB$, und ebenso $OB = OC$, also auch $OA = OB = OC$. Die Punkte A, B, C haben also gleichen Abstand von O und es muß daher ein aus O mit dem Halbmesser OA beschriebener Kreis durch die Punkte A, B, C gehen.

Da sich die Senkrechten DF und EG in einem einzigen Punkte schneiden können, so gibt es nur **einen** Kreis, welcher durch die Punkte A, B, C geht.

2. Der Kreis und die Gerade.

§. **102**. **Eine Gerade hat mit einem Kreise entweder a) keinen, oder b) einen, oder c) zwei Punkte gemeinschaftlich, je nachdem ihr Abstand vom Mittelpunkte des Kreises größer, oder eben so groß, oder kleiner ist als der Halbmesser.**

Fig. 111.



Beweis.

a) Ist (Fig. 111, I) die Senkrechte OC vom Mittelpunkte des Kreises auf die Gerade AB größer als der Halbmesser, so liegt schon der Fußpunkt C der Senkrechten außerhalb des Kreises, um so mehr also jeder andere Punkt D der Geraden AB, da $OD > OC$ ist.

b) Ist (Fig. 111, II) die Senkrechte OC von O auf AB gleich dem Halbmesser des Kreises, so liegt ihr Fußpunkt C auf der Peripherie des Kreises; jeder andere Punkt D der Geraden AB aber muß, da OD > OC ist, außerhalb des Kreises liegen.

c) Ist endlich (Fig. 111, III) die Senkrechte OC von O auf AB kleiner als der Halbmesser, so liegt ihr Fußpunkt C innerhalb des Kreises. Da nun der Kreis eine geschlossene Figur ist, so muß eine durch einen innerhalb desselben liegenden Punkt C gehende Gerade bei gehöriger Verlängerung die Peripherie schneiden; es geschehe dies im Punkte D. Dem Halbmesser OD entspricht dann auch auf der andern Seite der Senkrechten eine, aber auch nur eine gleiche schiefe Strecke OE (§. 38, Folges.). GE ist also auch ein Halbmesser des Kreises und somit E ein zweiter Punkt, welcher der Kreislinie und der AB gemeinschaftlich ist.

§. **103**. Eine Gerade AB (Fig. 111, II), welche mit einer Kreislinie nur einen Punkt C gemeinschaftlich hat, so daß alle anderen Punkte derselben außerhalb dieser krummen Linie liegen, heißt eine Berührungslinie oder Tangente derselben; der Punkt, den die Tangente mit der Kreislinie gemeinschaftlich hat, wird der Berührungspunkt genannt.

Eine Gerade AB (Fig. 111, III), welche mit einer Kreislinie zwei Punkte D und E gemeinschaftlich hat, heißt eine Secante derselben. Das zwischen diesen beiden Punkten liegende Stück DE der Secante ist eine Sehne (§. 16). Ein Theil der Kreisfläche, der von einer Sehne und dem dazu gehörigen Bogen begrenzt wird, heißt ein Kreisabschnitt oder Segment. Ein Theil der Kreisfläche, der von zwei Halbmessern und dem dazu gehörigen Bogen begrenzt wird, heißt ein Kreisausschnitt oder Sector.

Sätze von den Sehnen des Kreises.

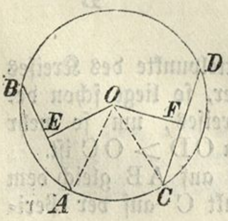
§. **104**. Aus den Sätzen 1., 2. und 4. in §. 59 und aus §. 17 ergeben sich unmittelbar die nachfolgenden drei Lehrsätze:

1. Die Strecke aus dem Mittelpunkte des Kreises nach der Mitte einer Sehne steht senkrecht auf der Sehne und halbirt den zugehörigen Bogen.

2. Die Senkrechte aus dem Mittelpunkte eines Kreises auf die Sehne halbirt diese und den zugehörigen Bogen.

3. Die Gerade, welche in der Mitte einer Sehne auf diese senkrecht errichtet wird, geht durch den Mittelpunkt des Kreises.

Fig. 112.



§. **105**. 1. Gleiche Sehnen eines Kreises haben gleichen Abstand vom Mittelpunkte.

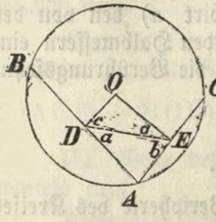
Ist (Fig. 112) AB = CD und OE ⊥ AB, OF ⊥ CD, so ist, wenn man OA und OC zieht, △ AEO ≅ CFO; mithin ist OE = OF.

2. Zwei Sehnen eines Kreises, welche gleichen Abstand vom Mittelpunkte haben, sind einander gleich.

Es sei (Fig. 112) $OE = OF$. Dann ist $\triangle AEO \cong CFO$, daher $AE = CF$, folglich auch $AB = CD$.

3. Von zwei ungleichen Sehnen eines Kreises hat die größere einen kleineren Abstand vom Mittelpunkte.

Fig. 113.



Nach 1. ist es erlaubt, die Sehnen so anzunehmen, daß sie einen Endpunkt gemeinschaftlich haben. Ist nun (Fig. 113) $AB > AC$, $OD \perp AB$ und $OE \perp AC$, so ist, wenn man DE zieht, in dem Dreiecke ADE der Winkel $b > a$ (§. 35, 2), daher $d < c$ und folglich $OD < OE$.

4. Von zwei Sehnen eines Kreises, welche ungleiche Abstände vom Mittelpunkte haben, ist diejenige die größere, welche vom Mittelpunkte den kleineren Abstand hat.

Es sei (Fig. 113) $OD < OE$. Wäre $AB \overline{<} AC$, so müßte bezüglich nach 1. oder 3. $OD \overline{>} OE$ sein, was gegen die Voraussetzung ist.

Folgesatz. Der Durchmesser ist die größte Sehne des Kreises. Er theilt die Peripherie des Kreises in zwei gleiche Theile.

Sätze von den Tangenten des Kreises.

§. **106**. 1. Die Gerade, welche im Endpunkte eines Halbmessers auf diesen senkrecht steht, ist eine Tangente des Kreises.

Folgt unmittelbar aus §. 102, b.

2. Der Halbmesser eines Kreises nach dem Berührungspunkte steht senkrecht auf der Tangente.

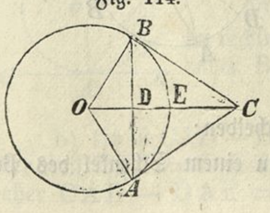
3. Die Senkrechte aus dem Mittelpunkte eines Kreises auf die Tangente geht durch den Berührungspunkt.

4. Die auf der Tangente eines Kreises im Berührungspunkte errichtete Senkrechte geht durch den Mittelpunkt des Kreises.

Die Beweise für die drei Umkehrungen 2., 3. und 4. werden indirect geführt.

Folgesatz. Durch einen Punkt der Kreislinie kann an diesen nur eine Tangente gezogen werden.

Fig. 114.



§. **107**. Die von einem Punkte außerhalb eines Kreises an diesen gezogenen Tangenten sind einander gleich.

Es seien (Fig. 114) AC und BC Tangenten des Kreises O, also $AC \perp OA$ und $BC \perp OB$. Verbindet man den Durchschnittspunkt C der beiden Tangenten mit dem Mittelpunkte des Kreises durch die Strecke CO, so ist $\triangle$ OAC $\cong$ OBC, mithin AC = BC.

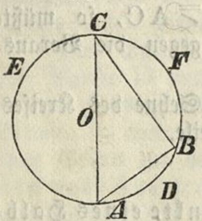
Die Sehne AB, welche die Berührungspunkte des Kreises und der Tangenten AC und BC verbindet, heißt **Berührungssehne** in Bezug auf den Punkt C.

Folgesatz. Die Gerade vom Durchschnittspunkte zweier Tangenten eines Kreises nach dem Mittelpunkte desselben halbirt a) den von den beiden Tangenten gebildeten, sowie den von den beiden Halbmessern eingeschlossenen Winkel, b) sie halbirt den Bogen und die Berührungssehne und steht c) auf dieser Sehne senkrecht.

3. Der Kreis und der Winkel.

§. 108. Ein Winkel, dessen Scheitel auf der Peripherie des Kreises liegt, und dessen Schenkel Sehnen dieses Kreises sind, heißt ein **Peripheriewinkel**, z. B. ACB (Fig. 115).

Fig. 115.



Man sagt: Der Peripheriewinkel ACB steht **auf dem Bogen** ADB, welcher zwischen den Endpunkten seiner Schenkel liegt; und: der Peripheriewinkel ACB **liegt in dem Abschnitte** AECFB, in welchem sein Scheitel und seine Schenkel liegen.

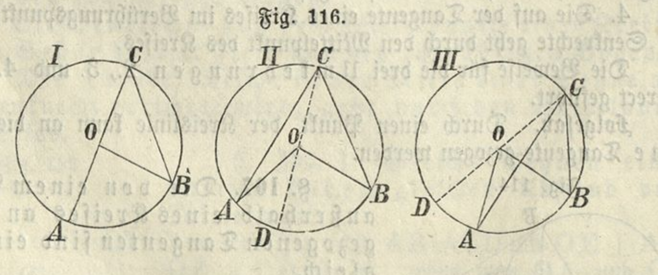
Ein Peripheriewinkel, dessen Schenkel durch die Endpunkte eines Durchmessers gehen, wird ein **Winkel im Halbkreise** genannt, wie ABC.

§. 109. Ein **Peripheriewinkel ist gleich dem halben Centriwinkel auf demselben Bogen.**

Vorauss. W. ACB und AOB (Fig. 116) stehen auf demselben Bogen AB.

Behaupt. W. $ACB = \frac{AOB}{2}$.

Fig. 116.



Im **Beweise** sind drei Fälle zu unterscheiden:

I. Wenn der Mittelpunkt des Kreises in einem Schenkel des Peripheriewinkels liegt.

AOB ist ein äußerer Winkel des Dreieckes BOC, daher AOB $= OCB + OBC$; aber der Winkel $OBC = OCB$, weil das $\triangle BOC$ gleichschenklig ist, somit ist der Mittelpunktswinkel $AOB = OCB + OCB = 2\,ACB$; daher $ACB = \frac{AOB}{2}$.

II. Wenn der Mittelpunkt innerhalb der Schenkel des Peripheriewinkels liegt.

Man ziehe den Durchmesser CD, so ist nach I. der Winkel $AOD = 2\,ACD$, und $BOD = 2\,BCD$, daher auch $AOD + BOD = 2\,(ACD + BCD)$, oder $AOB = 2\,ACB$; mithin $ACB = \frac{AOB}{2}$.

III. Wenn der Mittelpunkt außerhalb der Schenkel des Peripheriewinkels liegt.

Zieht man den Durchmesser CD, so ist nach I. der Winkel $BOD = 2\,BCD$, und $AOD = 2\,ACD$; somit $BOD - AOD = 2\,(BCD - ACD)$, oder $AOB = 2\,ACB$; mithin $ACB = \frac{AOB}{2}$.

Folgesätze:

a) Peripheriewinkel, welche auf demselben Bogen eines Kreises aufstehen, sind einander gleich. Denn sie sind sämmtlich gleich dem halben Centriwinkel auf demselben Bogen.

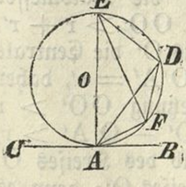
b) Zu gleichen Peripheriewinkeln gehören in demselben Kreise auch gleiche Bogen (Umkehrung von a).

c) Der Winkel im Halbkreise ist ein rechter.

Denn der auf demselben Bogen stehende Centriwinkel ist ein gestreckter. (Folgt auch aus §. 36.)

§. **110.** Der Winkel, den eine Tangente des Kreises mit einer durch den Berührungspunkt gehenden Sehne bildet, ist gleich dem Peripheriewinkel im entgegengesetzten Kreisabschnitte.

Fig. 117.



Vorauss. $BC \perp AOE$ (Fig. 117).

Behaupt. a) W. $BAD = AED$,
b) W. $CAD = AFD$.

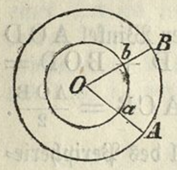
Beweis. a) Es ist $BAD + DAE = R$, und im rechtwinkligen $\triangle ADE$ auch $AED + DAE = R$, daher $BAD + DAE = AED + DAE$, mithin
$BAD = AED$.

b) Es ist $CAD - DAE = R$, ferner $AFD - DFE = AFE = R$, oder weil $DFE = DAE$ (§. 112, Folges. a) ist, $AFD - DAE = R$; daher $CAD - DAE = AFD - DAE$, mithin $CAD = AFD$.

4. Zwei Kreise.

§. 111. Zwei Kreise, welche denselben Mittelpunkt haben, heißen **concentrisch**, wie die Kreise in Fig. 118. Zwei concentrische Kreislinien haben keinen Punkt mit einander gemeinschaftlich.

Fig. 118.



Die Fläche, welche von den Peripherien zweier concentrischer Kreise begrenzt wird, heißt ein **Kreisring**, und ein Theil derselben, wie aABb, ein **Ringausschnitt**. Den Unterschied aA der beiden Halbmesser nennt man die **Breite** des Ringes oder des Ringausschnittes.

Zwei **Kreisbogen** oder **Kreisausschnitte**, welche zu gleichen Centriwinkeln gehören, heißen **homolog**; z. B. die Bogen ab und AB, oder die Kreisausschnitte aOb und AOB.

§. 112. Zwei Kreise, welche verschiedene Mittelpunkte haben, nennt man **excentrisch**, und die Gerade, welche diese Mittelpunkte verbindet, die **Centrale** derselben. Zwei excentrische Kreislinien haben entweder keinen, oder einen oder zwei Punkte mit einander gemeinschaftlich. Drei Punkte können zwei Kreise nicht miteinander gemeinschaftlich haben, weil sie sonst nach §. 101 ganz zusammenfielen.

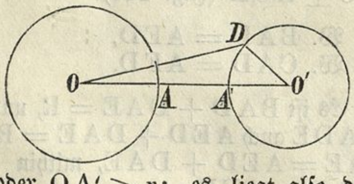
Haben zwei Kreise nur **einen** Punkt gemeinschaftlich, so sagt man: die Kreise **berühren sich**, und zwar **von außen**, wenn sie sonst außerhalb einander liegen, wie in Fig. 120; **von innen**, wenn sonst der eine Kreis innerhalb des andern liegt, wie in Fig. 122.

Haben zwei Kreise **zwei** Punkte gemeinschaftlich, so sagt man, daß sie sich in diesen Punkten **schneiden**, wie in Fig. 121.

§. 113. **Die Lage eines Kreises in Bezug auf einen andern Kreis** hängt von der Größe ihrer Centrale und ihrer Halbmesser ab.

Lehrsätze. 1. **Ist die Centrale zweier Kreise größer als die Summe ihrer Halbmesser, so liegt jeder der beiden Kreise ganz außerhalb des andern** (Fig. 119).

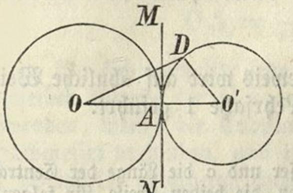
Fig. 119.



Es seien O und O' die Mittelpunkte, r und r' die Halbmesser zweier Kreise und $OO' > r + r'$. Schneidet der Kreis O' die Centrale OO' in A', so ist $O'A' = r'$, daher nach der Voraussetzung $OO' > r + O'A'$, und $OO' - O'A' > r$, oder $OA' > r$; es liegt also der Punkt A' außerhalb des Kreises O. Dasselbe gilt auch von jedem andern Punkte D des Kreises O'; denn es ist $OD > OO' - O'D$ (§. 37, 2), oder $OD > OO' - O'A'$, d. i. $OD > OA'$, und daher um so mehr $OD > r$; D liegt also außerhalb des Kreises O.

2. Ist die Centrale zweier Kreise gleich der Summe ihrer Halbmesser, so berühren sich die beiden Kreise von außen. (Fig. 120.)

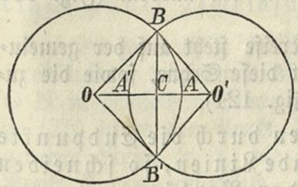
Fig. 120.



Es seien O und O' die Mittelpunkte, r und r' die Halbmesser zweier Kreise und $OO' = r + r'$. Schneidet der Kreis O' die Centrale OO' in A', ist also $O'A = r$, so ist nach der Vorauss. $OO' = r + O'A$, also $OO' - O'A = r$, oder $OA = r$; folglich liegt der Punkt A auf beiden Kreislinien. Dagegen liegt jeder andere Punkt D des Kreises O' außerhalb des Kreises O; denn es ist $OD > OO' - O'D$, oder $OD > OO' - O'A$, d. i. $OD > OA$. Die Kreise O und O' haben also nur den Punkt A gemeinschaftlich, während sie sonst ganz außerhalb einander liegen, d. i. sie berühren sich von außen.

3. Ist die Centrale zweier Kreise kleiner als die Summe, und größer als die Differenz ihrer Halbmesser, so schneiden sich die Kreise in zwei Punkten. (Fig. 121.)

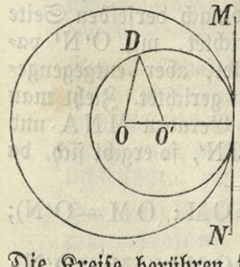
Fig. 121.



Es seien O und O' die Mittelpunkte zweier Kreise, r und r' ihr Halbmesser, und $OO' < r + r'$ und zugleich $OO' > r - r'$. Unter dieser Voraussetzung lassen sich über der Centrale OO' mit den Halbmessern r und r' die congruenten Dreiecke OO'B und OO'B' construiren, so daß $OB = OB'$ und $O'B = O'B'$ ist. Die Punkte B und B' sind dann beiden Kreisen gemeinschaftlich, d. i. die Kreise schneiden sich in diesen zwei Punkten.

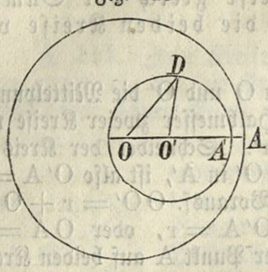
4. Ist die Centrale zweier Kreise gleich der Differenz ihrer Halbmesser, so berühren sich die beiden Kreise von innen. (Fig. 122.)

Fig. 122.



Es seien O und O' die Mittelpunkte, r und r' die Halbmesser zweier Kreise und $OO' = r - r'$. Trägt man von O aus auf die Verlängerung der Centrale OO' den Halbmesser $OA = r$ auf, so muß, da $OO' = OA - r'$, also $OA - OO' = O'A = r'$ ist, der Punkt A beiden Kreisen gemeinschaftlich sein. Jeder andere Punkt D des Kreises O' muß aber außerhalb des Kreises O' liegen, da $OD < OO' + O'D$, oder $OD < OO' + O'A$, also $OD < OA$ ist. Die Kreise berühren sich also im Punkte A von innen.

Fig. 123.



5. Ist die Centrale zweier Kreise kleiner als die Differenz ihrer Halbmesser, so liegt der eine Kreis ganz innerhalb des andern (Fig. 123).

Der Beweis wird auf ähnliche Weise wie zu dem Lehrsatze 1 geführt.

Es seien r und r' die Längen der Halbmesser und c die Länge der Centrale zweier Kreise; welche Lagen gegen einander haben die beiden Kreise für folgende Werthe dieser Größen?

a) $r = 5$, $r' = 3$, $c = 8$;	f) $r = 6$, $r' = 6$, $c = 8$;
b) $r = 7$, $r' = 4$, $c = 2$;	g) $r = 10$, $r' = 3$, $c = 7$;
c) $r = 6$, $r' = 2$, $c = 10$;	h) $r = 5$, $r' = 5$, $c = 10$;
d) $r = 8$, $r' = 3$, $c = 6$;	i) $r = 12$, $r' = 7$, $c = 9$;
e) $r = 9$, $r' = 5$, $c = 4$;	k) $r = 9$, $r' = 2$, $c = 5$.

§. 114. Folgesätze.

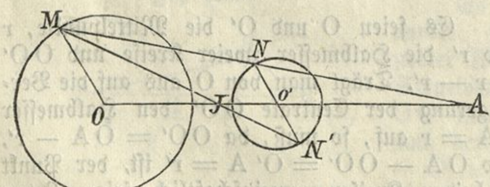
a) Die Centrale zweier sich berührender Kreise geht durch den Berührungspunkt. (Folgt aus den Beweisen zu §. 113, 2 und 4.)

b) Die durch den Berührungspunkt zweier Kreise an den einen gezogene Tangente ist zugleich eine Tangente des andern. (Fig. 120 und 122.)

c) Die Centrale zweier sich schneidender Kreise steht auf der gemeinschaftlichen Sehne senkrecht, und halbirt diese Sehne, sowie die zugehörigen Centriwinkel beider Kreise (Fig. 121).

§. **115.** Zieht man in zwei Kreisen durch die Endpunkte je zweier paralleler Halbmesser gerade Linien, so schneiden sich diese alle in einem Punkte auf der Verlängerung der Centrale, wenn die parallelen Halbmesser nach derselben Seite gerichtet sind, dagegen in einem Punkte der Centrale selbst, wenn die parallelen Halbmesser nach entgegengesetzten Seiten gerichtet sind.

Fig. 124.



Es sei (Fig. 124) OM mit O'N parallel und nach derselben Seite gerichtet, mit O'N' parallel, aber entgegengesetzt gerichtet. Zieht man die Geraden MNA und MJN', so ergibt sich, da

$\triangle$ AOM $\sim$ AO'N ist,

$OA : O'A = OM : O'N$ und $OA : (OA - O'A) = OM : (OM - O'N)$;

ferner, da $\triangle$ JOM $\sim$ JO'N' ist

$OJ : O'J = OM : O'N'$ und $OJ : (OJ + O'J) = OM : (OM + O'N)$.

Man erhält also, wenn man $OM = r$, $O'N = O'N' = r'$ und die Centrale $OO' = c$ setzt,

$$OA : c = r : (r - r') \text{ und } OJ : c = r : (r + r'),$$

und aus diesen Proportionen

$$OA = \frac{cr}{r - r^1} \text{ und } OJ = \frac{cr}{r + r^1}.$$

Da sich auch für jede andere Lage der parallelen Halbmesser stets dieselben Werthe für OA und OJ ergeben, so folgt, daß sich in A alle Geraden, welche die Endpunkte je zweier in demselben Sinne paralleler Halbmesser verbinden, und in J alle Geraden, welche durch die Endpunkte je zweier im entgegengesetzten Sinne paralleler Halbmesser gehen, durchschneiden.

Die Punkte A und J sind die Aehnlichkeitspunkte der beiden Kreise, und zwar A der äußere, J der innere Aehnlichkeitspunkt. Jede durch einen Aehnlichkeitspunkt gezogene Gerade heißt ein Aehnlichkeitsstral, und zwar ein äußerer oder ein innerer, je nachdem sie durch den äußeren oder inneren Aehnlichkeitspunkt geht.

§. **116.** Hat ein Aehnlichkeitsstral zweier Kreise mit der Peripherie des einen Kreises einen Punkt gemeinschaftlich, so hat er auch mit der Peripherie des anderen Kreises einen Punkt gemeinschaftlich.

Es habe (Fig. 124) der äußere Aehnlichkeitsstral AM mit der Kreislinie O den Punkt M gemeinschaftlich. Man ziehe OM und damit O'N in demselben Sinne parallel. Die Gerade MN geht dann (nach §. 115) durch den Punkt A; die Punkte M, N, A liegen also in einer geraden Linie, d. h. die AM hat auch mit der Kreislinie O' einen Punkt N gemeinschaftlich.

Ebenso wird der Beweis für einen inneren Aehnlichkeitsstral JM geführt.

Folgesätze.

a) Hat ein Aehnlichkeitsstral mit der einen Kreislinie zwei Punkte gemeinschaftlich, so hat er auch mit der andern zwei Punkte gemeinschaftlich, d. i. er ist eine gemeinschaftliche Secante der beiden Kreise.

b) Hat ein Aehnlichkeitsstral mit der einen Kreislinie nur einen Punkt gemeinschaftlich, so hat er auch mit der andern nur einen Punkt gemeinschaftlich, d. h. er ist eine gemeinschaftliche Tangente beider Kreise, und zwar eine äußere oder innere, je nachdem der Aehnlichkeitsstral ein äußerer oder innerer ist.

c) Hat ein Aehnlichkeitsstral mit der einen Kreislinie keinen Punkt gemeinschaftlich, so hat er auch mit der zweiten keinen Punkt gemeinschaftlich, d. h. er liegt ganz außerhalb der beiden Kreise.

5. Der Kreis und das Vieleck.

§. 117. Ein Vieleck, dessen Eckpunkte in dem Umfange eines Kreises liegen, dessen Seiten also Sehnen des Kreises sind, heißt dem Kreise eingeschrieben; der Kreis ist dann dem Vielecke umgeschrieben.

Ein Vieleck, dessen Seiten Tangenten des Kreises sind, heißt dem Kreise umgeschrieben; der Kreis ist dann dem Vielecke eingeschrieben.

Ein dem Kreise eingeschriebenes Vieleck nennt man auch ein Sehnenvieleck, ein dem Kreise umgeschriebenes Vieleck ein Tangentenvieleck.

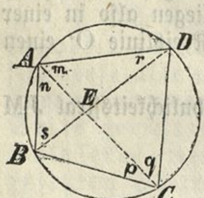
§. 118. Jedem Dreiecke läßt sich a) ein Kreis umschreiben, b) ein Kreis einschreiben.

Beweis. a) Die Mittellothe eines Dreieckes (Fig. 41) schneiden sich in einem Punkte O, welcher von den drei Eckpunkten denselben Abstand OA hat (§. 60, 1). Beschreibt man daher aus O mit dem Halbmesser OA einen Kreis, so geht er durch alle Eckpunkte des Dreieckes.

b) Die Winkelhalbirungslinien eines Dreieckes (Fig. 42) schneiden sich in einem Punkte O, welcher von den drei Seiten denselben Abstand OD hat (§. 60, 2). Beschreibt man daher aus O mit dem Halbmesser OD einen Kreis, so berührt er alle drei Seiten des Dreieckes.

§. 119. 1. In jedem Sehnenvierecke sind die Summen der gegenüberliegenden Winkel einander gleich, und zwar ist jede Summe gleich zwei Rechten.

Fig. 125.

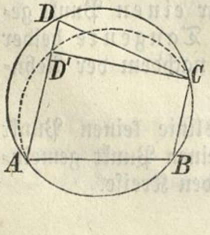


Man ziehe (Fig. 125) die Diagonalen AC und BD; dann ist der Winkel $p = r$, $q = s$ (§. 109, Folges. a). In dem Dreiecke ABD ist nun $m + n + r + s = 2\,R$, daher ist auch $m + n + p + q = 2\,R$, oder $A + C = 2\,R$.

Da die Summe aller Winkel eines Viereckes gleich ist 4 R, so muß auch $B + D = 2\,R$, also $A + C = B + D$ sein.

2. Umgekehrt. Ist in einem Vierecke die Summe je zweier gegenüberliegender Winkel gleich zwei Rechten, so ist dasselbe ein Sehnenviereck.

Fig. 126.



Es sei (Fig. 126) W. $A + BCD = 2\,R$, daher auch $B + ADC = 2\,R$.

Indirecter Beweis. Man lege durch die drei Punkte A, B, C einen Kreis, welcher nach §. 101 immer möglich ist. Würde nun dieser Kreis nicht auch durch den vierten Eckpunkt D gehen, so müßte er die Seite AD oder deren Verlängerung in einem Punkte D' schneiden und es wäre dann, wenn man

CD' zieht,

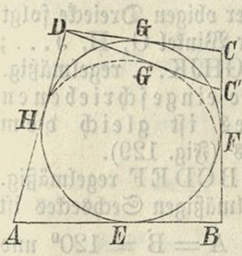
$$B + AD'C = 2\,R \text{ (nach 1.)},$$
$$\text{allein } \underline{B + AD\,C = 2\,R} \text{ (nach der Vorauss.)}$$
$$\text{daher W. } AD'C = ADC,$$

was gegen §. 33, Folges. ist.

Folgesatz. Um jedes Quadrat oder Rechteck läßt sich ein Kreis beschreiben.

§. **120**. In jedem Tangentenvierecke sind die Summen der gegenüberliegenden Seiten gleich (Fig. 127).

Fig. 127.



Nach §. 110 ist

$$AE = AH,$$
$$BE = BF,$$
$$CG = CF,$$
$$DG = DH;$$

daher durch Addition

$$AB + CD = BC + AD.$$

2. Umgekehrt. Sind in einem Vierecke die Summen der gegenüberliegenden Seiten gleich, so ist dasselbe ein Tangentenviereck.

Es sei (Fig. 127) AB + CD = BC + AD.

Beweis indirect. Würde ein die drei Seiten AB, BC und AD in den Punkten E, F und H berührender Kreis nicht auch die vierte Seite CD berühren, so sei von D eine den Kreis in G' berührende Gerade DC' gezogen; dann wäre AB + CD = BC' + AD (nach 1.), nach der Voraussetzung ist aber AB + CD = (BC' + CC') + AD; durch Subtraction erhielte man also CD — C'D = CC', was jedoch nach §. 37, 2 unmöglich ist.

Folgesatz. In jedes Quadrat und in jeden Rhombus läßt sich ein Kreis beschreiben.

§. **121**. 1. Jedem regelmäßigen Vielecke läßt sich ein Kreis a) umschreiben, b) einschreiben.

Dieser Satz folgt unmittelbar aus dem im §. 66 bewiesenen Lehrsatze.

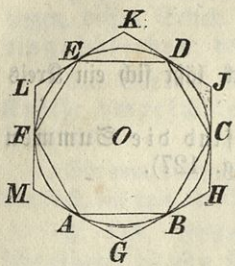
Zusatz. Der Mittelpunkt eines regelmäßigen Vieleckes ist zugleich der Mittelpunkt des um- und eingeschriebenen Kreises.

2. Ist die Peripherie eines Kreises in mehrere gleiche Theile getheilt, so bilden a) die Sehnen zwischen je zwei benachbarten Theilungspunkten ein eingeschriebenes, und b) die Tangenten durch je zwei benachbarte Theilungspunkte ein umgeschriebenes regelmäßiges Vieleck.

Es sei (Fig. 128) der Bogen AB = BC = CD =...

a) Zieht man die Sehnen AB, BC, CD,..., so sind in dem Vielecke ABCD... die Seiten AB, BC, CD,... gleich (§. 17, 2), ferner die Winkel A, B, C, D... gleich (§. 109, Folges. a); folglich ist das Vieleck ABCD... regelmäßig.

Fig. 128.



b) Zieht man durch A, B, C, D... Tangenten an den Kreis, welche sich in den Punkten G, H, I, K... schneiden, so sind wegen der Gleichheit der Seiten AB, BC, CD... und wegen der Gleichheit der ihnen anliegenden Winkel (§. 110) die Dreiecke AGB, BHC, CJD,... congruent und gleichschenklig; mithin sind die Summen je zweier Schenkel gleich, also GH = HJ = JK = ... Aus der Congruenz der obigen Dreiecke folgt auch die Gleichheit der Winkel G, H, J...; folglich ist das Vieleck GHJK... regelmäßig.

§. **122.** Die Seite des einem Kreise eingeschriebenen regelmäßigen Sechseckes ist gleich dem Halbmesser des Kreises (Fig. 129).

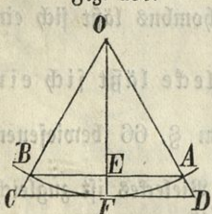
Fig. 129.

Es sei das Sechseck ABCDEF regelmäßig. Der Winkel eines regelmäßigen Sechseckes ist gleich $\frac{720^0}{6} = 120^0$, also ist $A = B = 120^0$ und $m = n = 60^0$, daher muß auch $p = 60^0$, und daher das Dreieck ABO gleichseitig sein; folglich ist

$$AB = OA.$$

§. **123.** Aus dem Halbmesser eines Kreises und der Seite eines ihm eingeschriebenen regelmäßigen Vieleckes kann die Seite eines demselben Kreise umgeschriebenen regelmäßigen Vieleckes von gleicher Seitenzahl bestimmt werden.

Fig. 130.



Es sei (Fig. 130) $OA = r$ der Halbmesser des Kreises und $AB = s_n$ die Seite des eingeschriebenen regelmäßigen n-Eckes, so ist, wenn $OF \perp AB$, und CD Tangente in F ist, $CD = S_n$ die Seite des umgeschriebenen regelmäßigen n-Eckes. Da dann $\triangle CDO \sim ABO$ ist, so folgt

$$CD : AB = OF : OE, \text{ oder}$$

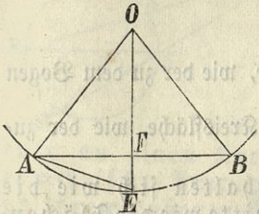
$$S_n : s_n = r : \sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}}, \text{ daher } S_n = \frac{r\, s_n}{\sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}}}.$$

Z. B. Für das eingeschriebene regelmäßige Sechseck ist, wenn der Halbmesser $r = 1$ gesetzt wird, auch $s_6 = 1$. Dann erhält man für das umgeschriebene regelmäßige Sechseck

$$S_6 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} = 1 \cdot 1547005.$$

§. **124.** Aus dem Halbmesser eines Kreises und der Seite eines ihm eingeschriebenen regelmäßigen Vieleckes kann die Seite eines demselben Kreise eingeschriebenen regelmäßigen Vieleckes von doppelter Seitenzahl bestimmt werden.

Fig. 131.



Es sei (Fig. 131) $OA = r$ und $AB = s_n$, so ist, wenn man $OE \perp AB$ zieht, die Sehne $AE = s_{2n}$ die Seite des eingeschriebenen regelmäßigen $2n$-Eckes. Man hat nun $AE^2 = AF^2 + EF^2$; aber

$$AF^2 = \frac{s_n^2}{4} \text{ und}$$

$$EF^2 = (OE - OF)^2 = \left\{r - \sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}}\right\}^2$$

$$= r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}} + r^2 - \frac{s_n^2}{4}$$

$$= 2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}} - \frac{s_n^2}{4}, \text{ daher}$$

$$AE^2 = \frac{s_n^2}{4} + 2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}} - \frac{s_n^2}{4}, \text{ also}$$

$$s_{2n}^2 = 2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}}, \text{ und}$$

$$s_{2n} = \sqrt{2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}}}.$$

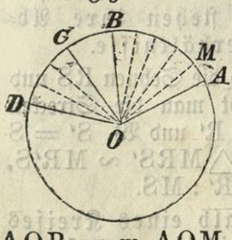
Z. B. Für $r = 1$ ist $s_6 = 1$; daher

$$s_{12} = \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \tfrac{1}{4}}} = \sqrt{2 - \sqrt{3}} = 0\cdot51763818.$$

6. Proportionen am Kreise.

§. **125.** 1. In demselben Kreise verhalten sich die Kreisbogen wie die zugehörigen Centriwinkel.

Fig. 132.



Es sei AM (Fig. 132) ein gemeinschaftliches Maß der Bogen AB und CD, und zwar Bogen $AB = m.AM$, Bogen $CD = n.AM$; somit Bogen AB : Bogen CD $= m : n$. Denkt man sich zu jedem Theilungspunkte der beiden Kreisbogen Halbmesser gezogen, so wird dadurch der Centriwinkel AOB in m und COD in n Theile getheilt, deren jeder dem Winkel AOM gleich ist (§. 17, 2); man hat daher Winkel $AOB = m.AOM$, Winkel $COD = n.AOM$, folglich Winkel $AOB : COD = m : n$.

Aus diesen beiden Proportionen folgt

Bog. AB : Bog. CD = W. AOB : W. COD.

2. In demselben Kreise verhalten sich die Kreisausschnitte wie die zugehörigen Centriwinkel.

Der Beweis ist dem vorigen ähnlich.

Folgesätze.

a) Ein Bogen verhält sich zur ganzen Peripherie, wie der zu dem Bogen gehörige Centriwinkel zu 360^0.
b) Ein Kreisausschnitt verhält sich zur ganzen Kreisfläche, wie der zugehörige Centriwinkel zu 360^0.

§. **126**. Homologe Kreisbogen verhalten sich wie die Peripherien, und homologe Kreisausschnitte wie die Flächeninhalte der zugehörigen ganzen Kreise. (Fig. 118.)

Heißen P und p die Peripherien, F und f die Flächeninhalte zweier Kreise, deren Halbmesser OA und Oa sind, und sind AB und ab zwei Bogen, welche in diesen Kreisen zu dem Centriwinkel α gehören, so hat man nach §. 125, Folges. a)

Bogen AB : P = $\alpha^0 : 360^0$, und
Bogen ab : p = $\alpha^0 : 360^0$, daher
Bogen AB : P = Bogen ab : p, oder
Bogen AB : Bogen ab = P : p.

Ebenso erhält man mit Beiziehung von §. 125, Folges. b) auch die Proportion

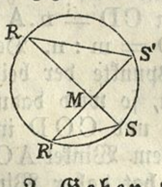
Ausschnitt AOB : Ausschnitt aOb = F : f.

§. **127**. Zieht man von einem Punkte eines Halbkreises Sehnen zu den Endpunkten des Durchmessers und eine Senkrechte auf diesen, so ist 1. jede Sehne die mittlere geometrische Proportionale zwischen dem ganzen Durchmesser und dem jener Sehne anliegenden Abschnitte des Durchmessers; 2. die Senkrechte ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen den beiden Abschnitten des Durchmessers.

Folgt aus §. 109, Folges. c in Verbindung mit §. 93.

§. **128**. 1. Schneiden sich zwei Sehnen eines Kreises innerhalb desselben, so stehen ihre Abschnitte in verkehrtem Verhältnisse.

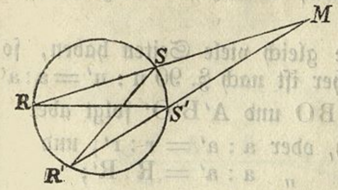
Fig. 133.



Schneiden sich (Fig. 133) die Sehnen RS und R'S' im Punkte M, und zieht man die Strecken RS' und R'S, so ist W. R = R' und W. S' = S (§. 109, Folges. a), daher $\triangle$ MRS' $\sim$ MR'S, und folglich MR : MS' = MR' : MS.

2. Gehen von einem Punkte außerhalb eines Kreises zu diesem zwei Secanten, so stehen sie mit ihren äußeren Abschnitten in verkehrtem Verhältnisse.

Fig. 134.

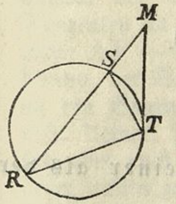


Es seien (Fig. 134) MR und MR' zwei Secanten, welche den Kreis bezüglich in den Punkten R, S und R', S' schneiden. Zieht man die Strecken RS' und R'S, so ist $\triangle$ MRS' $\sim$ MR'S, und daher

$$MR : MR' = MS' : MS.$$

3. **Gehen von einem Punkte aus eine Secante und eine Tangente an einen Kreis, so ist die Tangente die mittlere geometrische Proportionale zwischen der ganzen Secante und ihrem äußeren Abschnitte.**

Fig. 135.

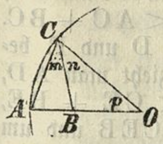


Es seien (Fig. 135) R und S die Durchschnittspunkte der Secante MR mit dem Kreise, und T der Berührungspunkt der Tangente MT mit demselben Kreise. Zieht man die Strecken RT und ST, so ist Winkel MRT = MTS (§. 110), daher $\triangle$ MRT $\sim$ MTS, und folglich MR : MT = MT : MS.

§. **129.** **Die Seite des einem Kreise eingeschriebenen regelmäßigen Zehneckes ist gleich dem größeren Abschnitte des nach stetiger Proportion getheilten Halbmessers.**

Es sei der Bogen AC (Fig. 136) der zehnte Theil der Peripherie, also die Sehne AC die Seite des eingeschriebenen regelmäßigen Zehneckes. Zieht man AO und CO, so ist AOC = 36°, und daher in dem gleichschenkligen Dreiecke ACO jeder von den beiden Winkeln ACO und CAO gleich 72°, also ist der Winkel ACO = 2 AOC. Halbirt man nun den Winkel ACO, so daß m = n = p wird, so ist das $\triangle$ ACO $\sim$ ABC, daher

Fig. 136.

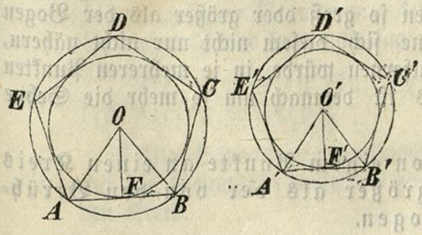


$$AO : AC = AC : AB,$$

oder weil AC = BC = BO ist, auch AO : BO = BO : AB; folglich ist die Zehnecksseite AC gleich dem größeren Abschnitte BO des nach stetiger Proportion getheilten Halbmessers AO (§. 80).

§. **130.** **In regelmäßigen Vielecken von gleicher Seitenanzahl verhalten sich a) die Umfänge wie die Halbmesser der diesen Vielecken eingeschriebenen oder umgeschriebenen Kreise, und b) die Flächeninhalte wie die zweiten Potenzen dieser Halbmesser.**

Fig. 137.



Es seien (Fig. 137) ABCDE und A'B'C'D'E' zwei regelmäßige Vielecke von gleicher Seitenanzahl, a und a' ihre Seiten, u und u' ihre Umfänge, f und f' ihre Flächeninhalte, r und r' die Halbmesser der ihnen eingeschriebenen, R und R' die Halbmesser der ihnen umgeschriebenen Kreise.

a) Da die beiden regelmäßigen Vielecke gleich viele Seiten haben, so sind sie ähnlich (§. 88, Folges.); daher ist nach §. 90 $u : u' = a : a'$

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke ABO und A'B'O' folgt aber

$AB : A'B' = OF : O'F'$ (§. 92), oder $a : a' = r : r'$; und
$AB : A'B' = OA : O'A'$, " $a : a' = R : R'$;

folglich ist auch

$$u : u' = r : r' = R : R'.$$

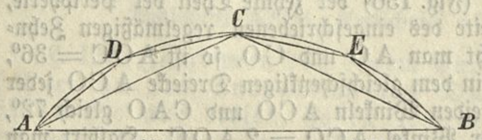
b) Nach §. 99 ist

$$f : f' = a^2 : a'^2;$$
$$\text{allein } a^2 : a'^2 = r^2 : r'^2 = R^2 : R'^2,$$
$$\text{folglich auch } f : f' = r^2 : r'^2 = R^2 : R'^2.$$

7. Kreismessung.

§. 131. Jede Sehne eines Kreises ist kleiner als der zugehörige Bogen.

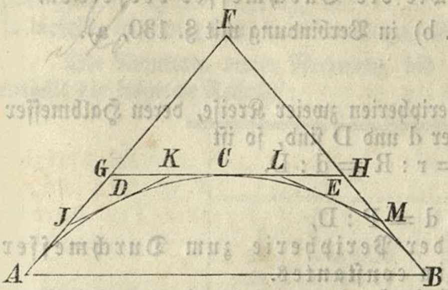
Fig. 138.



Es sei C (Fig. 138) die Mitte eines Kreisbogens ACB, dessen Sehne AB ist. Zieht man AC und BC, so ist $AB < AC + BC$. Sind ferner D und E bezüglich die Mitten der Bogen ADC und BEC, und zieht man AD, CD, CE, BE, so ist $AC < AD + CD$, $BC < CE + BE$, daher $AC + BC$ kleiner als die gebrochene Linie ADCEB und um so mehr $AB <$ ADCEB. Fährt man auf diese Weise mit dem Halbiren der Bogen fort und zieht immer durch je zwei auf einander folgende Punkte Sehnen, so wird die dadurch entstehende gebrochene Linie um so größer, je mehrere Punkte sie mit dem Kreisbogen gemeinschaftlich hat; in je mehreren Punkten aber beide Linien zusammenfallen, um so mehr müssen sie sich einander nähern. Hieraus folgt, daß jede solche gebrochene Linie kleiner als der Kreisbogen sein müsse, da dieselbe, wenn sie eben so groß oder größer als der Bogen wäre, bei fortwährender Zunahme sich diesem nicht nur nicht nähern, sondern von ihm um so mehr entfernen würde, in je mehreren Punkten beide Linien zusammenfallen. Es ist demnach um so mehr die Sehne $AB <$ Bogen ACB.

2. Die Summe der von einem Punkte an einen Kreis gezogenen Tangenten ist größer als der von den Berührungspunkten begrenzte Bogen.

Fig. 139.



Es seien AF und BF (Fig. 139) die von F an einen Kreis gezogenen Tangenten, ACB sei der von den Berührungspunkten begrenzte Kreisbogen und C dessen Mitte. Zieht man durch C eine Tangente GH an den Bogen, so ist, da GF + FH > GH, auch AF + BF größer als die gebrochene Linie AGHB. Sind ferner D und E die Mitten der Bogen AC und BC und zieht man durch D und E Tangenten an den Bogen, so wird AGHB > AJKLMB und um so mehr AF + BF > AJKLMB. Wenn man auf diese Art die Halbirung der Bogen fortsetzt und durch die Halbirungspunkte Tangenten an den Bogen zieht, so wird die von diesen gebildete gebrochene Linie desto kleiner, je mehrere Punkte sie mit dem Bogen gemeinschaftlich hat, sich aber auch dem Bogen um so mehr nähern, in je mehreren Punkten beide Linien zusammenfallen. Es muß daher jede solche gebrochene Linie größer als der Kreisbogen sein, da dieselbe, wenn sie eben so groß oder kleiner als der Bogen wäre, bei fortwährendem Abnehmen durch die Vermehrung der Berührungspunkte sich diesem nicht nähern, sondern von ihm entfernen würde. Es ist somit AF + BF > Bogen ACB.

Folgesätze.

a) Der Umfang eines jeden einem Kreise eingeschriebenen regelmäßigen Vieleckes ist kleiner, der Umfang eines jeden einem Kreise umgeschriebenen regelmäßigen Vieleckes ist größer als die Peripherie des Kreises.

b) Die Umfänge der eingeschriebenen und umgeschriebenen regelmäßigen Vielecke können durch fortgesetzte Verdopplung ihrer Seitenzahl der Peripherie des Kreises beliebig nahe gebracht werden, so daß die Unterschiede kleiner werden, als jede noch so kleine angebbare Größe; d. h. der Kreis kann als die Grenze angesehen werden, welcher sich ein demselben ein- oder umgeschriebenes regelmäßiges Vieleck bei fortgesetzter Vermehrung seiner Seitenzahl ohne Ende nähert. In diesem Sinne kann man sagen:

Der Kreis ist ein regelmäßiges Vieleck von unendlich vielen Seiten.

Alle Sätze über regelmäßige Vielecke, welche ohne Rücksicht auf die Seitenzahl derselben abgeleitet sind, gelten daher auch für den Kreis.

§. 132. Die Peripherien zweier Kreise verhalten sich wie die Halbmesser oder wie die Durchmesser derselben.

Folgt aus §. 131, Folges. b) in Verbindung mit §. 130, a).

Folgesätze.

a) Bezeichnen p und P die Peripherien zweier Kreise, deren Halbmesser r und R, deren Durchmesser d und D sind, so ist

$$p : P = r : R = d : D.$$

Daraus erhält man

$$p : d = P : D,$$

d. h. das Verhältniß der Peripherie zum Durchmesser ist in allen Kreisen ein constantes.

Dieses constante Verhältniß wird durch die Zahl π bezeichnet, so daß $\frac{p}{d} = \frac{p}{2r} = \pi$ ist.

b) Aus dem letzten Ausdrucke folgt:

$$p = d\pi \text{ oder } p = 2r\pi,$$

d. h. die Peripherie eines Kreises ist gleich dem Producte aus dem Durchmesser und der Zahl π.

c) Für $d = 1$ ist $p = \pi$. Die Zahl π kann daher auch als die Maßzahl für die Peripherie eines Kreises, dessen Durchmesser 1 ist, betrachtet werden.

d) Ist b die Länge eines Kreisbogens, der zu dem Centralwinkel α gehört, so hat man nach §. 125, Folges. a)

$$b : 2r\pi = \alpha : 360;$$

daher ist $b = \frac{r\alpha\pi}{180}$.

§. 133. Bestimmung der Zahl π.

Um die Zahl π, d. i. die Peripherie eines Kreises zu bestimmen, dessen Durchmesser $= 1$ ist, gehe man von dem diesem Kreise eingeschriebenen regelmäßigen Sechsecke aus, dessen Seite $s_6 = r = \frac{1}{2}$ ist, berechne aus ihr nach §. 124 die Seite s_{12} des eingeschriebenen regelmäßigen Zwölfeckes, aus dieser wieder auf gleiche Weise die Seite s_{24} des 24-Eckes u. s. w. Durch Multiplication der einzelnen Seiten mit der zugehörigen Anzahl derselben erhält man die Umfänge u_6, u_{12}, u_{24}.. der Vielecke, also eine Reihe von Zahlen, welche alle kleiner sind als die gesuchte Peripherie, von denen aber jede folgende derselben näher liegt als die vorhergehende. Man berechne ferner aus den Seiten s_6, s_{12}, s_{24}.. nach §. 123 die Seiten S_6, S_{12}, S_{24}.. der umgeschriebenen regelmäßigen Vielecke von bezüglich gleicher Seitenanzahl, und aus diesen Seiten dann ebenfalls die Umfänge U_6, U_{12}, U_{24}.. der letzteren Vielecke; diese Umfänge bilden eine zweite Reihe von Zahlen, von denen jede größer als die gesuchte Peripherie ist, jede folgende aber derselben näher liegt als die vorhergehende.

Auf diese Weise kann man die Zahl π nach und nach zwischen zwei Zahlen u_6 und U_6, u_{12} und U_{12}.. immer enger einschließen und so dieselbe näherungsweise mit beliebiger Genauigkeit berechnen.

Die Resultate dieser Rechnung bis zum regelmäßigen 3072-Ecke enthält die folgende Tabelle:

n	u_n	U_n
6	3	3·464102
12	3·105829	3·215390
24	3·132629	3·159660
48	3·139350	3·146086
96	3·141032	3·142715
192	3·141452	3·141873
384	3·141558	3·141663
768	3·141584	3·141610
1536	3·141590	3·141597
3072	3.141592	3·141594

Die Umfänge des ein- und des umgeschriebenen regelmäßigen 3072-Eckes unterscheiden sich demnach erst in der sechsten Decimalstelle; da nun die Peripherie π des Kreises zwischen den beiden Umfängen liegt, so muß der gemeinschaftliche Theil obiger Zahlen die Peripherie π selbst ausdrücken; somit ist

$$\pi = 3 \cdot 14159 ..$$

Nach dem eben angegebenen Verfahren kann die Zahl π, welche irrational ist, mit jeder beliebigen Genauigkeit entwickelt werden. Auf zehn Decimalen hat man

$$\pi = 3 \cdot 14159 \quad 26536.$$

Archimedes fand für π den Werth $3\frac{1}{7}$, Metius $\frac{355}{113}$. Ludolf van Ceulen berechnete π auf 35 Decimalen; nach ihm wird π auch die Ludolfische Zahl genannt.

§. 134. Der Flächeninhalt eines Kreises ist gleich dem Producte aus der Peripherie und dem halben Halbmesser.

Folgt aus §. 131, Folges. b) in Verbindung mit §. 74.

Folgesätze.

a) Bezeichnet man durch f und p bezüglich den Flächeninhalt und die Peripherie eines Kreises, dessen Halbmesser r ist, so ist

$$f = p \cdot \frac{r}{2}.$$

Da nun $p = 2r\pi$ ist, so erhält man

$$f = r^2\pi,$$

d. h. der Flächeninhalt eines Kreises ist gleich dem Producte aus dem Quadrate des Halbmessers und der Zahl π.

fa : r²π = α : 360

b) Drücken F und f die Flächeninhalte zweier Kreise aus, deren Halbmesser R und r sind, so hat man

$$F = R^2\pi \text{ und } f = r^2\pi, \text{ daher}$$
$$F : f = R^2 : r^2,$$

d. h. die Flächeninhalte zweier Kreise verhalten sich wie die Quadrate ihrer Halbmesser.

c) Beschreibt man über den Seiten eines rechtwinkligen Dreieckes als Durchmesser Kreise, so ist der Kreis über der Hypotenuse gleich der Summe der beiden Kreise über den Katheten (§. 94).

§. **135.** Der Flächeninhalt eines Kreisausschnittes ist gleich dem Producte aus dem im Längenmaße ausgedrückten Bogen und dem halben Halbmesser.

Bezeichnet f den Flächeninhalt eines Kreisausschnittes, der für den Halbmesser r dem Centriwinkel α entspricht, so hat man

$$f : r^2\pi = \alpha : 360 \text{ (§. 125, 2), daher } f = \frac{r^2\alpha\pi}{360} = \frac{r\alpha\pi}{180} \cdot \frac{r}{2},$$

oder, da $\frac{r\alpha\pi}{180} = b$ die Länge des zu dem Centriwinkel α gehörigen Bogens bezeichnet (§. 132, Folges. d)

$$f = b \cdot \frac{r}{2}.$$

Zusatz. Der Flächeninhalt eines Kreisabschnittes ist, je nachdem derselbe kleiner oder größer als der Halbkreis ist, gleich der Differenz oder der Summe aus der Fläche des zugehörigen Kreisausschnittes und der Dreiecksfläche, welche von der Sehne und den beiden Halbmessern begrenzt wird.

§. **136.** Der Flächeninhalt eines Kreisringes ist gleich dem Producte aus der halben Summe der beiden Kreisumfänge und der Breite des Ringes.

Bezeichnet man durch f den Flächeninhalt des Kreisringes, durch R und P den Halbmesser und die Peripherie des größeren, durch r und p den Halbmesser und die Peripherie des kleineren der zwei concentrischen Kreise, so ist

$$f = R^2\pi - r^2\pi = (R^2 - r^2)\,\pi = (R + r)\,(R - r)\,\pi$$
$$= \frac{2R\pi + 2r\pi}{2} \cdot (R - r) = \frac{P + p}{2} \cdot (R - r).$$

2. Der Flächeninhalt eines Ringausschnittes ist gleich dem Producte aus der halben Summe der beiden im Längenmaße ausgedrückten Bogen und der Breite des Ringausschnittes.

Der Beweis ist dem vorigen analog.

Rechnungsaufgaben.

1. In einem Kreise ist r der Halbmesser, b eine Sehne und d ihr Abstand vom Mittelpunkte; aus zweien dieser Größen die dritte zu bestimmen.

$$r = \sqrt{\frac{b^2}{4} + d^2};\quad b = 2\sqrt{r^2 - d^2};\quad d = \sqrt{r^2 - \frac{b^2}{4}}.$$

Beispiele.

a) $b = 3\cdot4^{m}$, $d = 2\cdot5^{m}$; b) $r = 1\cdot56^{m}$, $d = 0\cdot84^{m}$; c) $r = 7^{dm}\ 2^{cm}$, $b = 4^{dm}\ 8^{cm}$.

2. In einem Kreise ist r der Halbmesser, d der Durchmesser, p die Peripherie, f der Flächeninhalt; aus einer dieser Größen die anderen zu berechnen.

$$d = 2r,\quad r = \frac{d}{2},\quad r = \frac{p}{2\pi},\quad r = \sqrt{\frac{f}{\pi}},$$

$$p = 2r\pi,\quad p = d\pi,\quad d = \frac{p}{\pi},\quad d = 2\sqrt{\frac{f}{\pi}},$$

$$f = r^2\pi;\quad f = \frac{d^2\pi}{4};\quad f = \frac{p^2}{4\pi};\quad p = 2\sqrt{f\pi}.$$

Beispiele.

a) $r = 5\cdot2^{m}$; b) $d = 8\cdot5^{dm}$; c) $2^{m}\ 5^{dm}\ 8^{cm}$; d) $f = 349\,\square^{dm}$.

3. Die Halbmesser zweier Kreise sind $2^{dm}\ 4^{cm}$ und $3^{dm}\ 2^{cm}$; wie groß ist der Durchmesser eines Kreises, welcher der Summe jener beiden Kreise gleich ist?

4. Die Peripherie eines Kreises ist $27\cdot35^{cm}$, die eines andern Kreises $12\cdot78^{cm}$; wie groß ist die Peripherie eines Kreises, dessen Fläche der Differenz jener Kreise gleich ist?

5. Ein Kreis hat mit einem Quadrate, das 4^{cm} zur Seite hat, gleichen Umfang; wie verhalten sich ihre Flächeninhalte?

6. In einem Kreise, dessen Halbmesser r ist, gehört zu einem Centriwinkel α ein Bogen von der Länge b; aus zweien dieser Größen die dritte zu bestimmen.

$$b = \frac{r\alpha\pi}{180};\quad \alpha = \frac{180\,b}{r\pi};\quad r = \frac{180\,b}{\alpha\pi}.$$

Beispiele.

a) $r = 8^{dm}$, $\alpha = 135^0$; b) $r = 2^{dm}\ 7^{cm}$, $b = 2^{dm}\ 28^{mm}$; c) $\alpha = 48^0$, $b = 4^{dm}\ 26^{mm}$.

7. Wie lang ist für den Halbmesser = 1 ein Bogen a) von 1^0, b) von $1'$, c) von $1''$?

8. Die Länge eines Kreisbogens ist dem Durchmesser gleich; wie groß ist der zugehörige Winkel?

9. Die Stadt Graz hat eine geographische Breite von $47^0\ 4'$; wie viel Kilometer ist sie vom Aequator entfernt, wenn man den Meridian als einen Kreis von 6371·56 Kilom. Halbmesser annimmt?

10. Eine Eisenbahn soll im Bogen eines Kreises vom Halbmesser $= 1000^m$ aus einer Richtung in eine andere, die mit der ersteren einen Winkel von 45^0 macht, übergeführt werden; wie lang ist der Kreisbogen zwischen den Punkten, für welche jene Richtungen zwei Tangenten bilden?

11. In einem Kreise sei r der Halbmesser, α ein Centriwinkel, b die Länge des zugehörigen Bogens und f der Flächeninhalt des zugehörigen Kreisausschnittes;

a) gegeben ist $r = 2^{dm}$, $\alpha = 38^0$; zu suchen b, f;
b) „ „ $\alpha = 35^0$, $b = 2·61^m$; „ „ r, f;
c) „ „ $\alpha = 75^0$, $f = 10\square^{dm}$; „ „ r, b;
d) „ „ $b = 0·698^m$, $f = 0·349\square^m$; „ „ r, α;
e) „ „ $r = 4^{dm}$, $f = 20·096\square^m$; „ „ b, α.

12. Wie groß ist die Fläche eines Kreisabschnittes, dessen Halbmesser $3·2^m$, und dessen Sehne dem Halbmesser gleich ist?

13. Die Halbmesser zweier concentrischer Kreise sind R und r, ihre Peripherien P und p, die Breite des von ihnen gebildeten Ringes c, der Flächeninhalt desselben f; aus zweien dieser Größen die übrigen zu berechnen.

Beispiele:

a) Gegeben $R = 6^{dm}\,8^{cm}$, $r = 4^{dm}\,5^{cm}$; zu suchen P, p, c, f.
b) „ $R = 3·12^m$, $p = 11·56^m$; „ „ r, P, c, f.
c) „ $r = 0·75^m$, $f = 1·836\square^m$; „ „ R, P, p, c.
d) „ $P = 5^m\,2^{dm}$, $c = 0·24^m$; „ „ R, r, p, f.
e) „ $p = 7·134^{dm}$, $f = 5·793\square^{dm}$; „ „ R, r, P, c.
f) „ $c = 2·37^{dm}$, $f = 8·038\square^{dm}$; „ „ R, r, P, p.

14. Um einen kreisrunden Grasplatz, welcher $28^m\,4^{dm}$ im Umfange hat, geht ein Weg von $1^m\,4^{dm}$ Breite; welche Fläche nimmt dieser Weg ein.

15. Auf einer Zielscheibe sind eine weiße und vier schwarze Ringflächen; der äußere weiße Ring ist 32^{cm}, jeder schwarze 5^{cm} breit; die Mitte der Scheibe bildet einen Kreis von 1^{dm} Durchmesser. Wie groß ist a) die ganze Zielscheibe, b) die mittlere Kreisfläche, c) jeder Kreisring?

16. Wie groß ist der Flächeninhalt eines Ringausschnittes, dessen Bogen $0·5^m$ und $0·4^m$ zu Halbmessern haben und zu einem Centriwinkel von 48^0 gehören?

17. Aus dem Halbmesser eines Kreises die Seite des ein- und umgeschriebenen gleichseitigen Dreieckes zu berechnen.

Fig. 140.

Ist (Fig. 140) $AB = s_3$ die Seite eines dem Kreise, dessen Halbmesser $OC = r$ ist, eingeschriebenen Dreieckes, und der Durchmesser $CD \perp AB$, so ist AD die Seite des eingeschriebenen regelmäßigen Sechseckes und daher gleich r. In dem rechtwinkligen Dreiecke CAD ist dann

$$AC^2 = CD^2 - AD^2 \text{ oder}$$
$$s_3^{\,2} = 4r^2 - r^2, \text{ woraus}$$
$$s_3 = r\sqrt{3} \text{ folgt.}$$

Für das umgeschriebene gleichseitige Dreieck ergibt sich nach §. 123

$$S_3 = \frac{r\,s_3}{\sqrt{r^2 - \frac{s_3^2}{4}}} = \frac{r^2\sqrt{3}}{\sqrt{r^2 - \frac{3\,r^2}{4}}} = 2r\sqrt{3} = 2s_3.$$

18. Aus dem Halbmesser r eines Kreises die Seiten s_4 und S_4 des ein- und umgeschriebenen Quadrates zu bestimmen.

$$s_4 = r\sqrt{2};\quad S_4 = 2r.$$

19. Der Halbmesser eines Kreises ist 35^{cm}; um wie viel sind Umfang und Inhalt dieses Kreises bezüglich größer als Umfang und Inhalt a) des eingeschriebenen Quadrates, b) des eingeschriebenen regelmäßigen Sechseckes? — um wie viel sind sie kleiner als Umfang und Inhalt, c) des umgeschriebenen Quadrates, d) des umgeschriebenen regelmäßigen Sechseckes?

20. Der Halbmesser eines Kreises ist 1; bestimme die Seite und den Flächeninhalt des eingeschriebenen regelmäßigen a) Achteckes, b) Sechszehneckes. (§. 124.)

$$s_8 = \sqrt{2-\sqrt{2}}, \qquad s_{16} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$
$$f_8 = 2\sqrt{2}. \qquad f_{16} = 4\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

Constructions-Aufgaben.

1. **Den Mittelpunkt eines Kreises oder Kreisbogens zu finden.**

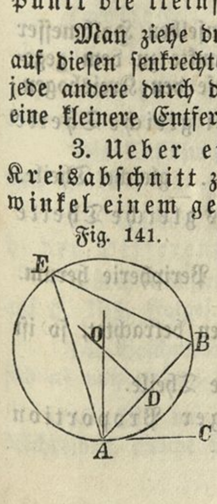
Man zieht zwei nicht parallele Sehnen und verfährt dann nach §. 101.

2. **Durch einen innerhalb eines Kreises gegebenen Punkt die kleinste Sehne zu ziehen.**

Man ziehe durch den gegebenen Punkt einen Halbmesser und eine auf diesen senkrechte Sehne; diese ist die verlangte kleinste Sehne, da jede andere durch den gegebenen Punkt gehende Sehne vom Mittelpunkte eine kleinere Entfernung hat. (§. 105, 4.)

3. **Ueber einer gegebenen Strecke als Sehne einen Kreisabschnitt zu beschreiben, in welchem alle Peripheriewinkel einem gegebenen Winkel gleich sind.**

Fig. 141.



Es sei AB (Fig. 141) die gegebene Strecke und BAC der gegebene Winkel. Man errichte auf AB in der Mitte D die Senkrechte DO, ziehe auch AO ⊥ AC und beschreibe aus dem Durchschnittspunkte O als Mittelpunkt mit dem Halbmesser OA = OB einen Kreis. Dann ist AEB der Kreisabschnitt, in welchem jeder Peripheriewinkel AEB dem gegebenen Winkel BAC gleich ist. (§. 110.)

4. **Durch einen gegebenen Punkt auf der Peripherie eines Kreises an diesen zwei Tangenten zu ziehen.**

Man ziehe zu dem gegebenen Punkte einen Halbmesser und auf diesen durch denselben Punkt eine Senkrechte. (§. 106, 1).

5. **Durch einen gegebenen Punkt außerhalb eines Kreises an diesen zwei Tangenten zu ziehen.**

Ist C (Fig. 114) der gegebene Punkt und O der Mittelpunkt des Kreises, so ziehe man CO, beschreibe über dieser Strecke als Durchmesser einen Kreis, welcher den gegebenen in den Punkten A und B schneidet; die Geraden CA und CB sind die gesuchten Tangenten (§. 107.)

6. **Den äußeren und den inneren Aehnlichkeitspunkt zweier Kreise zu finden.**

Man ziehe in den beiden Kreisen zwei parallele und nach derselben Seite gerichtete Halbmesser und durch ihre Endpunkte eine Gerade; ihr Durchschnittspunkt mit der verlängerten Centrale ist der äußere Aehnlichkeitspunkt der zwei Kreise (§. 115). Sodann verlängere man den Halbmesser in dem einen Kreise nach der entgegengesetzten Richtung bis zur Peripherie, ziehe durch den Endpunkt dieses neuen Halbmessers und durch den Endpunkt des Halbmessers in dem anderen Kreise eine Gerade; ihr Durchschnittspunkt mit der Centrale ist der innere Aehnlichkeitspunkt beider Kreise.

7. **An zwei gegebene Kreise eine gemeinschaftliche Tangente zu ziehen.**

Man bestimme den äußeren und den inneren Aehnlichkeitspunkt der Kreise, ziehe aus denselben Tangenten an den einen Kreis (Aufg. 5), so sind diese zugleich Tangenten des zweiten Kreises. (§. 116, Folges. b.)

Man erhält zwei äußere und zwei innere Tangenten.

8. **Einen Kreisbogen zu halbiren.**

Man beschreibe aus den Endpunkten mit demselben Halbmesser zwei Kreisbogen und ziehe von ihrem Durchschnittspunkte zu dem gegebenen Kreismittelpunkte eine Gerade, so halbirt diese den Kreisbogen.

9. **Die Peripherie eines Kreises in zwei gleiche Theile zu theilen.**

Durch fortgesetzte Halbirung erhält man 4, 8,... gleiche Theile.

10. **Die Peripherie eines Kreises in sechs gleiche Theile zu theilen.**

Man trage den Halbmesser als Sehne in der Peripherie herum. (§. 122.)

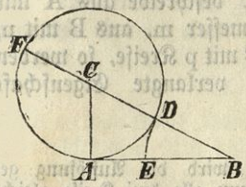
Wenn man zwei solche Bogen für einen einzigen betrachtet, so ist die Peripherie in 3 gleiche Theile getheilt.

Durch Halbirung erhält man 12, 24,.. gleiche Theile.

11. **Eine gegebene Strecke nach stetiger Proportion (im mittleren und äußeren Verhältnisse) zu theilen.**

Man ziehe (Fig. 142) $AC \perp AB$, mache $AC = \frac{1}{2}AB$, beschreibe aus C mit dem Halbmesser CA einen Kreis, und ziehe durch B und C eine Secante, welche den Kreis in zwei Punkten D und F schneidet; macht man nun $BE = BD$, so ist AB im Punkte E nach stetiger Proportion getheilt.

Fig. 142.



Denn $BF:AB = AB:BD$ (§. 128, 3), daher auch

$$AB : (BF - AB) = BD : (AB - BD).$$

Nun ist

$$BF - AB = BF - DF = BD = BE,$$
$$AB - BD = AB - BE = AE; \text{ mithin}$$
$$AB : BE = BE : AE.$$

12. Die Peripherie eines Kreises in zehn gleiche Theile zu theilen.

Man theile den Halbmesser nach stetiger Proportion (Aufg. 11) und trage den größeren Abschnitt als Sehne im Kreise herum. (§. 129.)

Nimmt man zwei solche Theile für einen einzigen, so ist die Peripherie in 5 gleiche Theile getheilt.

Durch Halbirung erhält man 20, 40,.. gleiche Theile.

Um ein gegebenes Dreieck einen Kreis zu beschreiben. (§. 118, a.)

In ein gegebenes Dreieck einen Kreis zu beschreiben. (§. 118, b.)

Einem gegebenen Kreise

a) ein gleichseitiges Dreieck, ein regelmäßiges Sechseck, Zwölfeck,..

b) ein Quadrat, ein regelmäßiges Achteck, Sechszehneck,..

c) ein regelmäßiges Fünfeck, Zehneck,..

ein- und umzuschreiben.

Die Auflösung geschieht mit Hilfe der Aufgaben 9, 10 und 12 nach §. 121, 2.

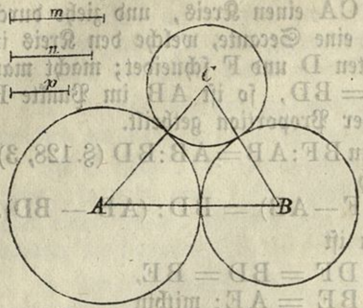
13. Einen Kreis zu beschreiben, welcher a) der Summe, b) der Differenz zweier gegebener Kreise gleich ist.

Durch Construction eines rechtwinkligen Dreieckes mit Rücksicht auf §. 134, Folges. c.

14. Beschreibe mit den Halbmessern 3^{cm} und 2^{cm} zwei Kreise, die sich a) von außen, b) von innen berühren. (§. 114, a.)

15. Mit den Halbmessern m, n, p (Fig. 143) drei Kreise zu beschreiben, welche sich gegenseitig von außen berühren.

Fig. 143.



Man verzeichne mit den Seiten $AB = m + n$, $AC = m + p$ und $BC = n + p$ ein Dreieck ABC, beschreibe aus A mit dem Halbmesser m, aus B mit n, und aus C mit p Kreise, so werden diese die verlangte Eigenschaft haben.

Wie wird die Auflösung geschehen, wenn alle drei Kreise gleiche Halbmesser haben?

16. Aus einem gegebenen Mittelpunkte einen Kreis zu beschreiben, welcher eine gegebene Gerade berührt.

Man ziehe von dem gegebenen Punkte auf die Gerade eine Senkrechte und beschreibe mit dieser als Halbmesser einen Kreis. (§. 106, 3.)

17. Aus einem gegebenen Mittelpunkte einen Kreis zu beschreiben, welcher einen gegebenen Kreis berührt. (§. 114, a.)

18. Mit einem gegebenen Halbmesser einen Kreis zu beschreiben, welcher durch einen gegebenen Punkt geht und einen gegebenen Kreis berührt.

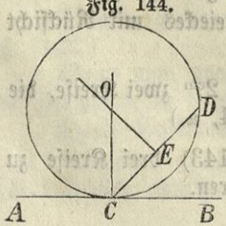
Damit der Kreis durch den gegebenen Punkt gehe, muß sein Mittelpunkt in der Kreislinie liegen, welche aus diesem Punkte mit dem gegebenen Halbmesser beschrieben wird; damit der Kreis den gegebenen Kreis berühre, muß sein Mittelpunkt in dem concentrischen Kreise liegen, dessen Halbmesser gleich ist der Summe (oder Differenz) der beiden gegebenen Halbmesser (§. 113, 2 oder 4). Der Mittelpunkt des verlangten Kreises liegt also in dem Durchschnitte jener beiden Kreislinien. Hiernach ist die Construction leicht auszuführen.

19. Mit einem gegebenen Halbmesser einen Kreis zu beschreiben, welcher

a) durch zwei gegebene Punkte geht;
b) durch einen gegebenen Punkt geht und eine gegebene Gerade berührt (§. 106, 2 und §. 61, Folges. a);
c) zwei gegebene Gerade berührt;
d) eine gegebene Gerade und einen gegebenen Kreis berührt;
e) zwei gegebene Kreise berührt.

20. Einen Kreis zu construiren, welcher durch einen gegebenen Punkt geht und eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte berührt.

Fig. 144.



Ist AB (Fig. 144) die gegebene Gerade, C der gegebene Punkt in derselben und D der gegebene Punkt außerhalb dieser Geraden, so liegt der Mittelpunkt O des gesuchten Kreises in der auf AB in C errichteten Senkrechten (§. 109, 4) und in der Senkrechten, welche auf CD in ihrer Mitte E errichtet wird. (§. 59, 4.)

21. Einen Kreis zu beschreiben, welcher durch einen gegebenen Punkt geht und einen gegebenen Kreis in einem gegebenen Punkte berührt. (§. 114, a und §. 59, 4.)

22. Einen Kreis zu beschreiben, welcher zwei gegebene Gerade, und zwar die eine in einem gegebenen Punkte berührt. (§. 106, 4.)

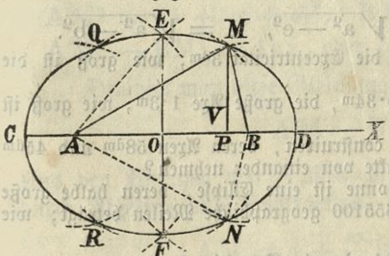
Siebenter Abschnitt.

Die Ellipse, Hyperbel und Parabel.

Die Ellipse.

§. **137.** Die Ellipse ist eine krumme Linie, in welcher die Summe der Entfernungen eines jeden Punktes von zwei gegebenen Punkten constant ist.

Fig. 145.



Sind (Fig. 145) A und B die zwei gegebenen Punkte, so ist für die Punkte M, N, P,... der Ellipse

$AM + BM = AN + BN = \ldots$

Die zwei gegebenen Punkte A und B heißen die Brennpunkte der Ellipse; die Entfernungen eines Punktes M von den beiden Brennpunkten, nämlich die Strecken AM und BM, werden Leitstralen jenes Punktes genannt.

Die Strecke CD, welche durch die beiden Brennpunkte geht, heißt die große Axe. Die Endpunkte C und D derselben heißen die Scheitel, und der Halbirungspunkt O der Mittelpunkt der Ellipse.

Die Strecke EF, welche im Mittelpunkte O auf die große Axe senkrecht steht, heißt die kleine Axe der Ellipse.

1. Da $AC + BC = AD + BD$ oder $2AC + AB = 2BD + AB$ sein muß, so ist auch $2AC = 2BD$ und $AC = BD$; d. h. die Scheitel der Ellipse sind von den Brennpunkten derselben gleichweit entfernt. Daraus folgt, daß auch der Mittelpunkt der Ellipse von den beiden Brennpunkten derselben gleichweit entfernt ist.

Die Entfernung eines Brennpunktes der Ellipse von dem Mittelpunkte derselben heißt die Excentricität der Ellipse. Je kleiner die Excentricität ist, desto mehr nähert sich die Ellipse einem Kreise.

2. Da AM + BM = AD + BD und AD = BC ist, so ist auch AM + BM = BC + BD, oder AM + BM = CD; d. h. die Summe der zwei Leitstralen eines jeden Punktes der Ellipse ist der großen Axe derselben gleich.

Ist die Summe der Abstände eines Punktes von den zwei Brennpunkten einer Ellipse größer oder kleiner als die große Axe, so liegt jener Punkt bezüglich außerhalb oder innerhalb der Ellipse.

3. Die Dreiecke AOE und BOE sind congruent, daher AE = BE; aber AE + BE = CD, oder 2AE = CD, daher AE = $\frac{1}{2}$CD; d. h. die Entfernung eines Endpunktes der kleinen Axe der Ellipse von einem Brennpunkte ist der halben großen Axe gleich.

Da ferner $\triangle$ AOE $\cong$ AOF, so ist OE = OF; d. h. der Mittelpunkt der Ellipse ist zugleich der Halbirungspunkt der kleinen Axe derselben.

Bezeichnet a die halbe große, b die halbe kleine Axe und e die Excentricität der Ellipse, so erhält man aus dem rechtwinkligen Dreiecke AOE, worin AE = a, OE = b, AO = e ist, nach dem Pythagoräischen Lehrsatze

$$a^2 = b^2 + e^2,$$

daher $a = \sqrt{b^2 + e^2}$, $b = \sqrt{a^2 - e^2}$, $e = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Die kleine Axe der Ellipse sei 1^m, die Excentricität 3^{dm}; wie groß ist die halbe große Axe?

Die Excentricität einer Ellipse ist $0 \cdot 34^m$, die große Axe $1 \cdot 3^m$; wie groß ist die kleine Axe?

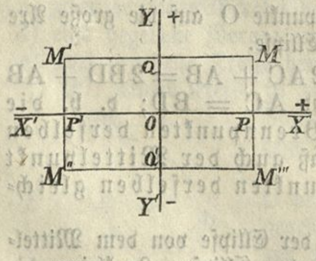
Ein Gärtner hat eine Ellipse zu construiren, deren Axen 58^{dm} und 45^{dm} betragen; wie weit muß er die Brennpunkte von einander nehmen?

Die Bahn unserer Erde um die Sonne ist eine Ellipse, deren halbe große Axe 20657700, und deren kleine Axe 20655100 geographische Meilen beträgt; wie groß ist die Excentricität der Erdbahn?

§. 138. Bestimmung der Punkte durch Coordinaten.

Um die Lage eines Punktes M (Fig. 146) in einer Ebene zu bestimmen, zieht man in derselben durch einen Punkt O zwei auf einander senkrechte Gerade XX′ und YY′. Diese Geraden nennt man die Coordinatenaxen und ihren Durchschnittspunkt O den Anfangspunkt der Coordinaten. Die Gerade XX′ heißt die Abscissenaxe und wird in der Richtung OX positiv, in der Richtung OX′ negativ angenommen. Die Gerade YY′ heißt die Ordinatenaxe und wird in der Richtung OY positiv, in der Richtung OY′ negativ gezählt.

Fig. 146.



Fällt man von dem Punkte M auf die XX′ die Senkrechte MP, so heißt die Maßzahl der Strecke OP die Abscisse, die Maßzahl der

Strecke MP die **Ordinate** des Punktes M; beide zusammen heißen die **Coordinaten** von M. Die Abscisse bezeichnet man durch x, die Ordinate durch y.

Die Coordinaten werden positiv oder negativ gezählt, je nachdem sie auf die positiven oder negativen Theile der Coordinatenaxen fallen. Ist $OP = OP' = a$ und $OQ = OQ' = b$, so hat man

für den Punkt M ...... $x = +a,\ y = +b$;
" " " M' ..... $x = -a,\ y = +b$;
" " " M'' ..... $x = -a,\ y = -b$;
" " " M''' .... $x = +a,\ y = -b$.

§. **139**. Bestimmung der Leitstralen einer Ellipse.

Es seien (Fig. 145) A und B die Brennpunkte, O der Mittelpunkt, $OD = a$ die halbe große, $OE = b$ die halbe kleine Axe und $OA = OB = e$ die Excentricität der Ellipse, ferner O der Anfangspunkt der Coordinaten und OBX die Abscissenaxe.

Ist nun M ein beliebiger Punkt der Ellipse, also $AM + BM = 2a$ und sind $x = OP$ und $y = MP$ die Coordinaten dieses Punktes, so erhält man aus den rechtwinkligen Dreiecken APM und BPM

$$AM^2 = y^2 + (x + e)^2, \quad BM^2 = y^2 + (x - e)^2, \text{ daher}$$
$$AM^2 - BM^2 = 4ex, \text{ oder } (AM + BM).(AM - BN) = 4ex.$$

Dividirt man diese Gleichung durch $AM + BM = 2a$, so ergibt sich

$$AM - BM = \frac{2ex}{a}.$$

Aus den Werthen von $AM + BM$ und $AM - BM$ erhält man dann durch Addition und Subtraction

$$AM = a + \frac{ex}{a} \text{ und } BM = a - \frac{ex}{a}.$$

AM ist der größere Leitstral, BM der kleinere.

§. **140**. Gleichung der Ellipse.

Aus dem rechtwinkligen Dreiecke APM (Fig. 145) folgt

$$MP^2 = AM^2 - AP^2, \text{ oder}$$

$$y^2 = \left(a + \frac{ex}{a}\right)^2 - (x + e)^2 = a^2 + \frac{e^2x^2}{a^2} - x^2 - e^2$$
$$= a^2 - e^2 - \frac{a^2 - e^2}{a^2}.x^2, \text{ daher}$$

$(a^2 - e^2)\,x^2 + a^2 y^2 = a^2 (a^2 - e^2)$, oder, da $a^2 - e^2 = b^2$ ist,

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Diese Gleichung findet zwischen den Coordinaten x und y jedes beliebigen Punktes der Ellipse statt und heißt darum die **Gleichung der Ellipse**.

Folgerungen:

1. Löst man die Gleichung der Ellipse nach y und dann nach x auf, so erhält man

$$y = \pm \frac{a}{b}\sqrt{a^2 - x^2} \text{ und } x = \pm \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}.$$

Aus der ersten Gleichung folgt, daß jedem Werthe von x, für welchen überhaupt y einen reellen Werth hat, zwei gleiche, aber entgegengesetzte Werthe von y entsprechen; die Ellipse wird also von der Abscissenaxe in zwei congruente Theile getheilt.

Aus der zweiten Gleichung folgt, daß auch zu jedem Werthe von y, für welchen überhaupt x reell ausfällt, zwei gleiche, aber entgegengesetzte Werthe von x gehören; die Ellipse erstreckt sich demnach auch zu beiden Seiten der Ordinatenaxe in zwei congruenten Aesten.

Die Ellipse wird also durch die beiden Coordinatenaxen in vier congruente Aeste getheilt.

2. Der größte Werth, den x annehmen kann, ist a, und der größte Werth von y ist b; für $x > a$ wird y, für $y > b$ wird x imaginär. Zieht man daher mit der Ordinatenaxe in den Abständen $+$ a und $-$ a, mit der Abscissenaxe aber in den Abständen $+$ b und $-$ b parallele Gerade, welche ein Rechteck bilden, so wird die ganze Ellipse innerhalb dieses Rechteckes enthalten sein. Daraus folgt, daß die Ellipse eine geschlossene krumme Linie ist.

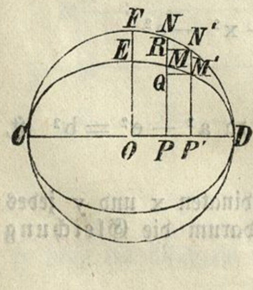
3. Je kleiner die Excentricität ist, desto weniger ist a von b unterschieden, desto mehr nähert sich die Ellipse dem Kreise; für $a = b$ geht die Ellipse in den Kreis über. Ihre Gleichung nimmt in diesem Falle folgende Form an:

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Diese Gleichung, welche zwischen den Coordinaten x und y eines jeden Punktes der Kreislinie stattfindet, heißt die **Gleichung des Kreises**.

§. **141**. **Beschreibt man über der großen Axe einer Ellipse als Durchmesser einen Kreis, so verhalten sich die derselben Abscisse entsprechenden Ordinaten des Kreises und der Ellipse wie die halbe große zur halben kleinen Axe.**

Fig. 147.



Setzt man (Fig. 147) $OP = x$, $MP = y$ und $NP = Y$, so ist

für den Punkt N des Kreises

$$x^2 + Y^2 = a^2,$$

für den Punkt M der Ellipse

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2,$$

daher $Y = \sqrt{a^2 - x^2}$,

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

und folglich

$$Y : y = a : b.$$

§. **142.** Der Flächeninhalt einer Ellipse ist gleich dem Producte aus den beiden Halbaxen und der Zahl π.

Sind (Fig. 147) MP und M'P' die Ordinaten der Ellipse, NP und N'P' die Ordinaten des über CD beschriebenen Kreises, welche zu den Abscissen OP und OP' gehören, und zieht man M'Q und N'R parallel mit der Axe CD, so ist $M'P'PQ : N'P'PR = M'P' : N'P' = b : a$ (§. 96, 3). Denkt man sich nun die Ordinaten NP und N'P' unendlich nahe an einander, so können die Dreiecke MM'Q und NN'R als unendlich klein vernachlässigt und folglich die Rechtecke M'P'PQ und N'P'PR als Elemente der Ellipse und des Kreises betrachtet werden. Stellt man sich die Ellipse und den Kreis aus lauter solchen Elementen bestehend vor, so verhält sich jedes Element der Ellipse zu dem entsprechenden Elemente des Kreises und somit auch die Summe aller Elemente der Ellipse zur Summe aller Kreiselemente, wie $b : a$. Letztere Summe ist die Kreisfläche, folglich $= a^2\pi$, erstere Summe die Fläche der Ellipse; heißt diese f, so hat man $f : a^2\pi = b : a$, woraus $f = ab\pi$ folgt.

In einer Ellipse ist

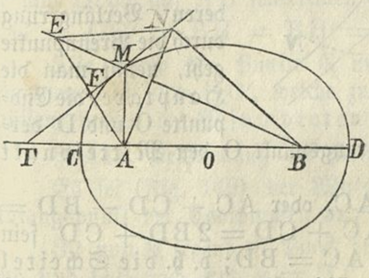
1) $a = 12^m$,	2) $a = 5^m\ 7^{dm}$,	3) $b = 5{\cdot}6^m$,
$b = 9^m$;	$e = 1^m\ 7^{dm}$;	$e = 1{\cdot}6^m$;

wie groß ist der Flächeninhalt f?

Wie groß ist die große Axe einer Ellipse, deren kleine Axe 7^m und deren Flächeninhalt $49{\cdot}455\square^m$ beträgt?

§. **143.** Eine Gerade, welche den Nebenwinkel des von den Leitstralen eines Punktes gebildeten Winkel halbirt, ist eine Tangente der Ellipse.

Fig. 148.



Es seien (Fig. 148) AM und BM die Leitstralen des Punktes M; verlängert man BM und halbirt den Winkel AME durch die Gerade MF, so ist diese eine Tangente der Ellipse. Denn macht man $ME = AM$ und zieht AE, so ist $\triangle AMF \cong EMF$, daher $AF = EF$ und $MF \perp AE$. Nimmt man nun in der MF irgend einen außer M liegenden Punkt N an und zieht AN, BN und EN, so ist $\triangle AFN \cong EFN$, daher $AN = EN$. Es ist daher auch $AN + BN = EN + BN$; aber $EN + BN > BE$, somit auch $AN + BN > BE$, oder, da $BE = BM + ME = BM + AM = CD$ ist, $AN + BN > CD$; der Punkt N liegt also außerhalb der Ellipse. Da dieses von jedem Punkte der Geraden MF, den einzigen Punkt M ausgenommen, bewiesen werden kann, so folgt, daß FM die Ellipse im Punkte M berührt.

Folgesatz. Jede Tangente der Ellipse bildet mit den Leitstralen des Berührungspunktes gleiche Winkel.

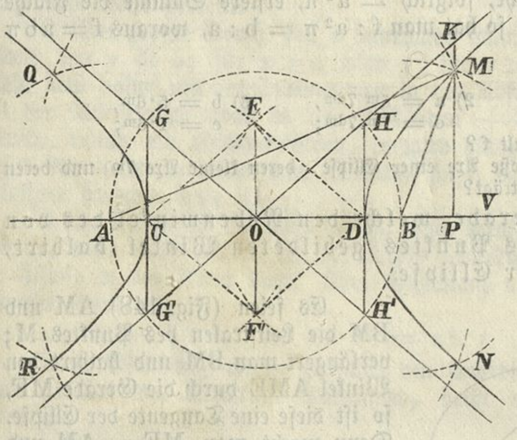
Denn Winkel $AMF = EMF$, aber $EMF = BMN$, also auch $AMF = BMN$.

Dieser Satz erklärt folgende Erscheinungen, welche auf dem Reflexionsgesetze beruhen. Von einer elliptischen Spiegelfläche werden die von einem Brennpunkte auffallenden Licht-, Wärme- oder Schallstralen so reflectirt, daß sie sich im anderen Brennpunkte vereinigen. Erregt man in einem elliptisch geformten Gefäße, worin sich eine Flüssigkeit befindet, in dem einen Brennpunkte eine Wellenbewegung, so treffen die reflectirten Wellen im anderen Brennpunkte zusammen.

2. Die Hyperbel.

§. **144.** Die **Hyperbel** ist eine krumme Linie, in welcher die Differenz der Entfernungen eines jeden Punktes von zwei gegebenen Punkten constant ist.

Fig. 149.



Sind (Fig. 149) A und B die gegebenen zwei Punkte, so ist für die Punkte M, N, ... der Hyperbel BM — AM = AN — BN = ..

Die Punkte A und B heißen die **Brennpunkte** der Ellipse, die Strecken AM und BM **Leitstralen** des Punktes M.

Die Strecke CD, deren Verlängerung durch die Brennpunkte geht, nennt man die **Hauptaxe**, die Endpunkte C und D derselben die **Scheitel**, und den Halbirungspunkt O den **Mittelpunkt** der Hyperbel.

1. Da AD — BD = BC — AC, oder AC + CD — BD = BD + CD — AC und daher 2AC + CD = 2BD + CD sein muß, so ist auch 2AC = 2BD, und AC = BD; d. h. **die Scheitel der Hyperbel sind von den Brennpunkten derselben gleichweit entfernt.** Daraus folgt, daß auch **der Mittelpunkt der Hyperbel von den beiden Brennpunkten derselben gleichweit entfernt ist.**

Die Entfernung eines Brennpunktes der Hyperbel vom Mittelpunkte heißt die **Excentricität** der Hyperbel.

2. Da AM — BM = AD — BD und BD = AC ist, so ist auch AM — BM = AD — AC, oder AM — BM = CD; d. h. **die Differenz der zwei Leitstralen eines jeden Punktes der Hyperbel ist der Hauptaxe derselben gleich.**

Ist die Differenz der Abstände eines Punktes von den zwei Brennpunkten einer Hyperbel kleiner oder größer als die Hauptaxe, so liegt jener Punkt bezüglich außerhalb oder innerhalb der Hyperbel.

3. Beschreibt man aus den Scheiteln C und D der Hyperbel mit der Excentricität AO Kreisbogen, die sich in E und F durchschneiden, und zieht die Gerade EF, so muß diese, weil die Dreiecke CDE und CDF gleichschenklig sind, durch den Mittelpunkt O gehen und auf der Hauptaxe CD senkrecht stehen. Die Strecke EF heißt die Nebenaxe der Hyperbel.

Da $\triangle$ COE $\cong$ COF, so ist OE $=$ OF; d. h. der Mittelpunkt der Hyperbel ist zugleich der Halbirungspunkt der Nebenaxe derselben.

Bezeichnet a die halbe Hauptaxe, b die halbe Nebenaxe und e die Excentricität der Hyperbel, so ist in dem rechtwinkligen Dreiecke COE CE $=$ e, CO $=$ a, OE $=$ b, daher

$$e^2 = a^2 + b^2,$$

und

$$e = \sqrt{a^2 + b^2},\ a = \sqrt{e^2 - b^2},\ b = \sqrt{e^2 - a^2}.$$

Die Hauptaxe einer Hyperbel ist $0 \cdot 4^m$, die Nebenaxe $0 \cdot 5^m$; wie groß ist die Excentricität?

Die Excentricität einer Hyperbel ist $5 \cdot 12^{dm}$, die Hauptaxe $3 \cdot 85^{dm}$; wie groß ist die Nebenaxe?

Die Excentricität einer Hyperbel ist $3^{dm}\ 9^{cm}$, die Nebenaxe $2^{dm}\ 2^{cm}$; wie groß ist die Hauptaxe?

Beschreibt man aus dem Mittelpunkte O mit der Excentricität OA als Halbmesser einen Kreis und zieht in demselben durch die Scheitel C und D die auf AB senkrechten Sehnen GG′ und HH′, so ist

$$CG = CG' = BH = BH' = \sqrt{e^2 - a^2} = b.$$

Die durch die Punkte G und H′, dann H und G′ gezogenen Geraden GH′ und HG′, welche zugleich durch den Mittelpunkt O gehen müssen, heißen die Assymptoten der Hyperbel.

§. 145. Bestimmung der Leitstralen einer Hyperbel.

Es sei (Fig. 149) der Mittelpunkt O der Hyperbel zugleich der Anfangspunkt der Coordinaten und die Hauptaxe die Abscissenaxe.

Ist nun M irgend ein Punkt der Hyperbel, also AM — BM $=$ 2a und sind OP $=$ x und y $=$ MP die Coordinaten dieses Punktes, so erhält man auf gleiche Weise, wie für die Ellipse in §. 139,

$$AM = \frac{ex}{a} + a,\ BM = \frac{ex}{a} - a.$$

§. 146. Gleichung der Hyperbel.

Man erhält, wie für die Ellipse (§. 140),

$$(a^2 - e^2)\, x^2 + a^2 y^2 = a^2 (a^2 - e^2).$$

Da jedoch hier $a^2 - e^2 = - b^2$ ist, so ergibt sich

$$- b x^2 + a^2 y^2 = - a^2 b^2,\ \text{oder}\ b x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$$

als die Gleichung der Hyperbel.

Folgerungen.

1. Wird die Gleichung der Hyperbel nach y aufgelöst, so erhält man $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$. So lange $x < a$ ist, fällt y imaginär aus; für solche Abscissen gibt es also keinen Punkt der Hyperbel. Wird $x > a$ angenommen, so erhält man für y zwei gleiche aber entgegengesetzte Werthe; die Abscissenaxe halbirt daher alle auf ihr senkrechten Sehnen der Hyperbel.

2. Löst man die Gleichung der Hyberbel nach x auf, so ergibt sich $x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{y^2 + b^2}$; woraus folgt, daß zu jedem Werthe von y zwei gleiche und entgegengesetzte Abscissen gehören; die Hyperbel erstreckt sich also in congruenten Aesten zu beiden Seiten der Ordinatenaxe.

3. Da x und y jeden noch so großen Werth annehmen können, so folgt, daß die Hyperbel nicht so, wie der Kreis oder die Ellipse, in sich selbst zurückkehrt, sondern daß sich ihre Aeste in's Unendliche ausdehnen.

4. Fällt man von einem Punkte K (Fig. 149) einer Assymptote G′H auf die Hauptaxe eine Senkrechte KP, welche die Hyperbel in M schneidet, so ist $KP : OP = HD : OD$ oder $KP : x = b : a$, daher

$$KP = \frac{b}{a}.x \text{ und } KP^2 = \frac{b^2}{a^2}.x^2.$$

Da nun $MP^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$ ist, so folgt

$$KP^2 - MP^2 = b^2 \text{ oder } (KP + MP)(KP - MP) = b^2,$$

daher $KP - MP = KM = \frac{b^2}{KP + MP}$.

Wenn x größer wird, nehmen auch KP und MP zu; mit dem Wachsen von $KP + MP$ nimmt aber, da b^2 unveränderlich ist, der Abstand KM ab; dieser wird daher unendlich klein, wenn x unendlich wächst, d. h. die Hyperbel nähert sich immer mehr und mehr der Assymptote G′H, ohne sie je zu erreichen. Dasselbe gilt von der Assymptote GH′.

5. Für $a = b$ geht die Gleichung der Hyperbel über in

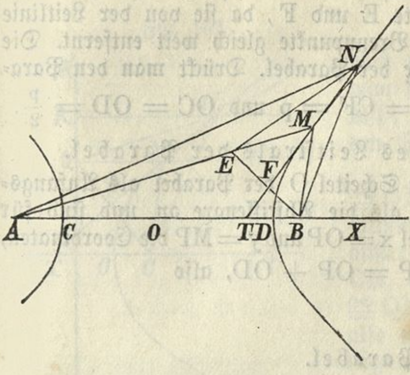
$$x^2 - y^2 = a^2.$$

In diesem Falle wird die Hyperbel eine gleichseitige genannt.

§. **147.** Eine Gerade, welche den von den Leitstralen eines Punktes gebildeten Winkel halbirt, ist eine Tangente der Hyperbel.

Wird (Fig. 150) der Winkel AMB durch die Gerade MF halbirt, macht man $EM = BM$ und zieht die Gerade BE, so ist $\triangle BMF \cong EMF$, daher $BF = EF$ und $MF \perp BF$. Ist nun N irgend ein von M verschiedener Punkt der MF und zieht man AN, BN und FN, so ist

Fig. 150.



$\triangle$ BNF $\cong$ ENF, daher BN $=$ EN. Es ist daher auch AN $-$ BN $=$ AN $-$ EN; aber AN $-$ EN $<$ AE, somit auch AN $-$ BN $<$ AE, oder, da AE $=$ AM $-$ EM $=$ AM $-$ BM $=$ CD ist, AN $-$ BN $<$ CD, d. i. der Punkt N liegt außerhalb der Hyperbel. Da dasselbe auch von jedem anderen Punkte der FM, den einzigen Punkt M ausgenommen, bewiesen werden kann, so ist FM eine Tangente der Hyperbel.

Folgesatz. Jede Tangente der Hyperbel bildet mit den Leitstralen des Berührungspunktes gleiche Winkel.

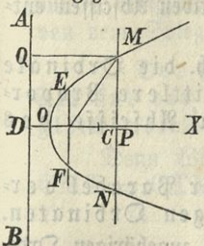
Auf diesen Satz gründet sich die optische Erscheinung, daß von einem hyperbolisch geschliffenen Hohlspiegel Lichtstralen, die von einem Brennpunkte ausgehen, so reflectirt werden, als ob sie vom anderen Brennpunkte herkämen.

27.9.82.

3. Die Parabel.

§. **148.** Die Parabel ist eine krumme Linie, in welcher jeder Punkt von einem gegebenen Punkte ebenso weit entfernt ist als von einer gegebenen Geraden.

Fig. 151.



Wenn (Fig. 151) AB die gegebene Gerade, und C der gegebene Punkt ist, so ist die Linie MEOFN eine Parabel, wenn für jeden Punkt M MC $=$ MQ ist, wo MQ $\perp$ AB angenommen wird.

Die gegebene Gerade AB heißt die Leitlinie, der gegebene Punkt C der Brennpunkt der Parabel. Die Strecke MC, welche man von einem Punkte M der Parabel zum Brennpunkte zieht, wird der Leitstral jenes Punktes genannt. Die Gerade OX, welche durch den Brennpunkt senkrecht auf die Leitlinie gezogen wird, heißt die Achse, und der Punkt O, in welchem die Achse von der Parabel geschnitten wird, der Scheitel der Parabel.

Ist die Entfernung eines Punktes von dem Brennpunkte größer oder kleiner als dessen Entfernung von der Leitlinie, so liegt er bezüglich außerhalb oder innerhalb der Parabel.

Da OC $=$ OD ist, so folgt: Die Parabel schneidet ihre Axe in der Mitte zwischen dem Brennpunkte und der Leitlinie.

Zieht man durch den Brennpunkt eine auf die Axe senkrechte Sehne EF, so sind ihre Endpunkte E und F, da sie von der Leitlinie gleichen Abstand haben, auch vom Brennpunkte gleich weit entfernt. Die Sehne EF heißt der **Parameter** der Parabel. Drückt man den Parameter durch 2p aus, so ist $CE = CF = p$ und $OC = OD = \frac{p}{2}$.

§. **149**. Bestimmung eines Leitstrals der Parabel.

Nimmt man (Fig. 151) den Scheitel O der Parabel als Anfangspunkt der Coordinaten und OCX als die Abscissenaxe an und sind für einen beliebigen Punkt M der Parabel $x = OP$ und $y = MP$ die Coordinaten, so hat man $CM = MQ = DP = OP + OD$, also

$$CM = x + \frac{p}{2}.$$

§. **150**. Gleichung der Parabel.

Aus dem rechtwinkligen Dreiecke MPC (Fig. 151) erhält man

$$MP^2 = CM^2 - CP^2, \text{ oder}$$

$$y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{p}{2}\right)^2, \text{ woraus sich}$$

$$y^2 = 2px$$

als die Gleichung der Parabel ergibt.

Folgerungen.

1. Aus $y^2 = 2px$ folgt $y = \pm\sqrt{2px}$. Zu jedem positiven Werthe von x gehören demnach zwei gleiche, aber entgegengesetzte Ordinaten; die Parabel dehnt sich also zu beiden Seiten der Abscissenaxe in zwei congruenten Aesten aus, und zwar in's Unendliche, da x und y jede beliebige Größe erreichen können.

2. Für ein negatives x wird y imaginär; negativen Abscissen entsprechen daher keine Punkte der Parabel.

3. Aus $y^2 = 2px$ folgt $2p : y = y : x$, d. h. die Ordinate eines jeden Punktes der Parabel ist die mittlere Proportionale zwischen dem Parameter und der Abscisse des Punktes.

§. **151**. Die Abscissen der Punkte einer Parabel verhalten sich wie die Quadrate der zugehörigen Ordinaten.

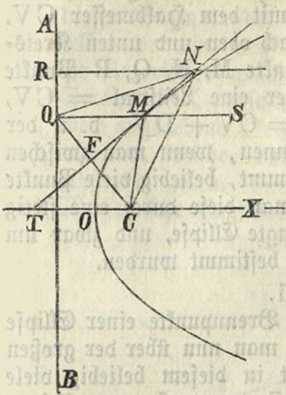
Sind x' und x'' die Abscissen, y' und y'' die zugehörigen Ordinaten zweier Punkte einer Parabel, deren Parameter 2p ist, so hat man

$$2px' = y'^2 \text{ und } 2px'' = x''^2, \text{ daher}$$

$$x' : x'' = y'^2 : y''^2.$$

§. **152**. Eine Gerade, welche den Nebenwinkel des von dem Leitstrale eines Punktes und der durch diesen Punkt zur Axe Parallelen gebildeten Winkels halbirt, ist eine Tangente der Parabel.

Fig. 152.



Es sei (Fig. 152) MS ∥ OX und MQ die Verlängerung der MS. Halbirt man den Winkel CMQ durch die Gerade MT, so hat diese mit der Parabel nur den Punkt M gemeinschaftlich.

Denn zieht man CQ, so ist △ CMF ≌ QMF, daher CF = QF und MF ⊥ CQ. Nimmt man nun in der MT irgend einen außer M liegenden Punkt N an und zieht CN, QN und NR ⊥ AB, so ist △ CNF ≌ QNF, daher CN = QN; aber QN > NR, also auch CN > NR, d. h. der Punkt N liegt außerhalb der Parabel. Dasselbe kann von jedem Punkte der MT, den einzigen Punkt M ausgenommen, bewiesen werden; also ist MT eine Tangente der Parabel.

Folgesätze.

1. *Jede Tangente einer Parabel halbirt den Winkel, den der Leitstral des Berührungspunktes mit der durch diesen Punkt zur Axe parallelen Geraden bildet.*

Denn Winkel CMT = QMT; aber QMT = SMN, also auch CMT = SMN.

Auf diesem Satze beruht die Anwendung parabolischer Hohlspiegel. Fallen nämlich Licht-, Wärme- oder Schallstralen parallel mit der Axe auf den Spiegel auf, so vereinigen sie sich nach der Reflexion im Brennpunkte. Umgekehrt: Die vom Brennpunkte ausgehenden Stralen werden von dem Spiegel parallel mit der Axe reflectirt.

2. *Der Fußpunkt einer Tangente der Parabel in der Axe und der Berührungspunkt sind von dem Brennpunkte gleich weit entfernt.*

Denn Winkel CMT = SMN; aber SMN = CTM, also auch CMT = CTM, daher in dem Dreiecke CMT die Seite CT = CM.

Constructions-Aufgaben.

1. *Wenn die große Axe und die beiden Brennpunkte einer Ellipse gegeben sind, beliebig viele Punkte derselben zu bestimmen.*

a) Es seien (Fig. 145) A und B die Brennpunkte und O die Mitte ihres Abstandes. Macht man OC = OD gleich der halben großen Axe, so sind C und D die Scheitel der Ellipse. Beschreibt man mit der halben großen Axe OC als Halbmesser aus A und B Kreisbogen, so geben ihre Durchschnitte E und F die Endpunkte der kleinen Axe.

Nimmt man ferner zwischen A und O einen beliebigen Punkt V an, beschreibt aus jedem Brennpunkte mit dem Halbmesser CV, dann ebenso mit dem Halbmesser DV nach oben und unten Kreisbogen, so sind die vier Durchschnittspunkte M, N, Q, R Punkte der Ellipse, weil für jeden derselben der eine Leitstral = CV, der andere = DV, also ihre Summe = CV + DV, d. i. der großen Axe gleich ist. Auf diese Art können, wenn man zwischen A und O verschiedene andere Punkte annimmt, beliebig viele Punkte der Ellipse bestimmt werden. Verbindet man diese durch eine stetig gekrümmte Linie, so erhält man die verlangte Ellipse, und zwar um so genauer, je mehrere Punkte derselben bestimmt wurden.

b) Eine zweite Auflösung beruht auf §. 141.

Durch die große Axe und die beiden Brennpunkte einer Ellipse ist auch die kleine Axe gegeben. Beschreibt man nun über der großen Axe als Durchmesser einen Kreis, zieht in diesem beliebig viele Ordinaten, verkürzt sie in dem Verhältnisse der großen zur kleinen Axe und trägt sodann diese verkürzten Ordinaten auf die Kreisordinaten auf, so sind ihre Endpunkte eben so viele Punkte der Ellipse.

c) Mechanische Construction der Ellipse.

Man befestige in dem Brennpunkte zwei Stifte, lege um dieselben einen an den Enden zusammengebundenen Faden, dessen Länge gleich ist der großen Axe vermehrt um den Abstand der Brennpunkte. Spannt man sodann den Faden mittelst eines Zeichenstiftes und führt diesen um die Brennpunkte so herum, daß der Faden immer straff gespannt bleibt, so beschreibt der Zeichenstift während dieser Bewegung eine Ellipse.

2. Durch einen Punkt M (Fig. 148) der Ellipse an diese eine Tangente zu ziehen.

Verlängert man den Leitstral BM über M hinaus, so darf man, um die Lage der Tangente MN zu erhalten, (nach §. 143, Folges.) nur den Winkel AME halbiren. Man macht daher ME = MA und beschreibt aus E und A mit demselben Halbmesser Kreisbogen, welche sich in N schneiden; die durch N und M gezogene Gerade NMT ist die verlangte Tangente.

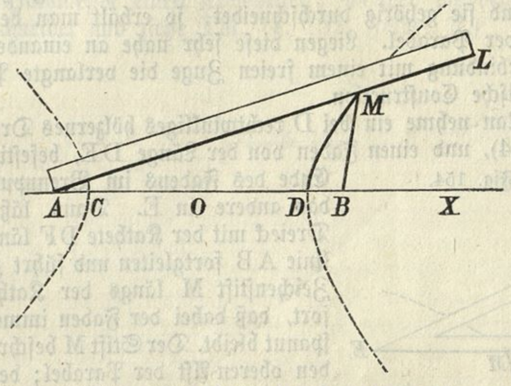
3. Wenn die Hauptaxe und die beiden Brennpunkte der Hyperbel gegeben sind, beliebig viele Punkte derselben zu bestimmen.

a) Es seien (Fig. 149) A und B die beiden Brennpunkte. Man verbinde dieselben durch die Strecke AB, halbire diese in O, und trage von O aus bis C und D die halbe Länge der gegebenen Hauptaxe auf; CD ist nun die Hauptaxe der Hyperbel, C und D sind ihre Scheitel. Nun nehme man in der Geraden BX irgend einen Punkt V an, und beschreibe mit dem Halbmesser CV aus den beiden Brennpunkten nach oben und unten Bogen, hierauf eben so mit dem

Halbmesser DV, so werden die Durchschnittspunkte M, N, Q, R dieser Bogen in der Hyperbel liegen; denn es ist für jeden derselben der eine Leitstral gleich CV, der andere gleich DV, also ihr Unterschied gleich CV — DV = CD. Nimmt man in der Geraden BX verschiedene andere Punkte an und verfährt auf die eben angegebene Weise, so kann man dadurch beliebig viele Punkte erhalten, welche, durch eine stetige Linie verbunden, die verlangte Hyperbel geben.

b) Mechanische Construction.

Fig. 153.



Man befestige (Fig. 153) in dem einen Brennpunkte A die eine Kantenecke eines Lineals AL, und an dessen anderer Ecke L das Ende eines Fadens, dessen Länge f um die Hauptaxe CD kleiner ist als die Länge des Lineals, so daß man hat: AL — f = CD. Das andere Ende des Fadens wird im zweiten Brennpunkte B befestigt. Dreht man nun das Lineal um die Kantenecke A und spannt dabei den Faden mittelst eines Zeichenstiftes M an das Lineal straff an, so beschreibt der Stift einen Theil der Hyperbel; denn es ist für jede Lage von M

$$AM - BM = (AM + ML) - (BM + ML) = AL - f = CD.$$

Auf gleiche Weise können durch die Drehung des Lineals und die Bewegung des Stiftes auch die übrigen Theile der Hyperbel beschrieben werden.

4. Durch einen Punkt M (Fig. 150) der Hyperbel an diese eine Tangente zu ziehen.

Man ziehe die Leitstralen AM und BM und halbire den Winkel AMB; die Halbirungslinie MF ist die verlangte Tangente. (§. 147.)

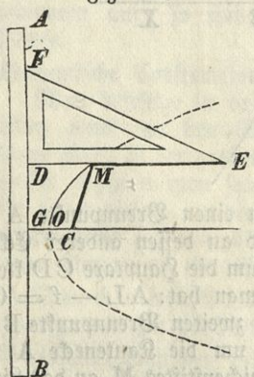
5. Wenn der Brennpunkt und die Leitlinie einer Parabel gegeben sind, beliebig viele Punkte derselben zu bestimmen.

a) Es sei (Fig. 151) AB die Leitlinie, und C der Brennpunkt. Man ziehe vom Brennpunkte auf die Leitlinie eine Senkrechte CD, und verlängere diese über den Brennpunkt hinaus. Halbirt man nun den Abstand CD im Punkte O, so ist O der Scheitel, und OX die Axe der Parabel. Nimmt man in der großen Axe irgend einen Punkt P an, errichtet in diesem auf die Axe eine Senkrechte, mißt den Abstand dieser Senkrechten von der Leitlinie, d. i. die Strecke PD und beschreibt damit aus dem Brennpunkte nach oben und unten Bogen, welche jene Senkrechte in den Punkten M und N durchschneiden; so sind M und N Punkte der Parabel, weil sie von der Leitlinie eben so weit abstehen, als vom Brennpunkte. Wenn man auf diese Weise sehr viele Senkrechte auf der großen Axe errichtet und sie gehörig durchschneidet, so erhält man beliebig viele Punkte der Parabel. Liegen diese sehr nahe an einander, so gibt ihre Verbindung mit einem freien Zuge die verlangte Parabel.

b) Mechanische Construction.

Man nehme ein bei D rechtwinkliges hölzernes Dreieck EDF (Fig. 154), und einen Faden von der Länge DE, befestige das eine Ende des Fadens im Brennpunkte C und das andere in E. Dann läßt man das Dreieck mit der Kathete DF längs der Leitlinie AB fortgleiten und führt zugleich den Zeichenstift M längs der Kathete DE so fort, daß dabei der Faden immer straff gespannt bleibt. Der Stift M beschreibt dadurch den oberen Ast der Parabel; denn es wird bei jeder Lage des Dreieckes die Fadenlänge CM dem abgewickelten Stücke DM der Kante DE gleich sein, d. h. es wird in jeder Lage der Punkt M vom Brennpunkte eben so weit abstehen als von der Leitlinie. Um den unteren Ast der Parabel zu erhalten, dreht man das Dreieck so um, daß die Kante DF in die Richtung GB fällt, und verfährt dann wie vorhin.

Fig. 154.

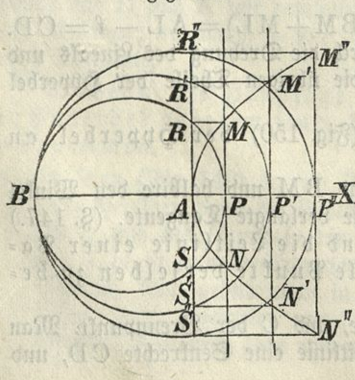


6. Wenn der Scheitel und der Parameter einer Parabel gegeben sind, beliebig viele Punkte derselben zu bestimmen.

Die Auflösung beruht auf §. 150, 3 und §. 127, 2.

Es sei AB (Fig. 155) der Parameter, A der Scheitel und AX die Axe der Parabel. Man nehme beliebige Abscissen AP, AP′,... an und beschreibe über BP′ BP′,... als Durchmesser Kreise, welche die in A auf AB errichtete Senkrechte in den Punkten R, und S, R′ und S′,....

Fig. 155.



schneiden. Zieht man nun durch diese Punkte Parallele zur Axe, so werden diese die in P, P',... auf die Axe errichteten Senkrechten in den Punkten M und N, M' und N'... schneiden; diese sind dann Punkte der Parabel.

7. Durch einen Punkt M (Fig. 152) der Parabel an diese eine Tangente zu ziehen.

a) Man halbire den Winkel CMQ, indem man aus C und Q mit demselben Halbmesser Kreisbogen beschreibt, welche sich in S schneiden und ziehe die Gerade SM; diese ist die verlangte Tangente. (§. 152.)

b) Man beschreibe aus dem Brennpunkte C mit dem Leitstrale CM als Halbmesser einen Kreisbogen, welcher die verlängerte Axe in T schneidet und ziehe TM. (§. 152, Folges. 2.)

Zweiter Theil.

Die Stereometrie.

Erster Abschnitt.

Gerade Linien und Ebenen im Raume.

§. **153.** Durch zwei Punkte wird eine Gerade vollkommen bestimmt, d. h. es läßt sich durch zwei Punkte eine einzige gerade Linie ziehen. Legt man nun durch diese Gerade eine Ebene, so kann man dieselbe rings um die Gerade herumdrehen, wodurch sie unzählig viele verschiedene Lagen einnimmt. Durch zwei Punkte oder durch eine gerade Linie ist demnach eine Ebene nicht bestimmt. Nimmt man aber außer der Geraden noch einen dritten Punkt an, so wird es unter jenen unzählig vielen Lagen, welche die Ebene während ihrer Umdrehung annehmen kann, eine einzige geben, in welcher die Ebene durch die gerade Linie und den außer ihr liegenden Punkt geht. Durch eine Gerade und einen außer ihr liegenden Punkt, oder durch drei nicht in einer geraden Linie liegende Punkte kann demnach eine einzige Ebene gelegt werden.

Eine Ebene ist ferner vollkommen bestimmt:

1. durch zwei sich schneidende gerade Linien,
2. durch zwei parallele Linien.

§. **154.** Zwei Gerade im Raume können eine dreifache Lage gegen einander haben; entweder sind sie parallel, oder sie schneiden sich in einem Punkte, oder es ist keines von beiden der Fall, die Linien gehen nämlich an einander vorbei. In den zwei ersten Fällen liegen die beiden Geraden in einerlei Ebene, im dritten Falle lassen sie sich nicht in einer und derselben Ebene vorstellen.

1. Lage der Geraden gegen eine Ebene.

§. **155.** Eine Gerade, welche nicht in einer Ebene liegt, kann diese Ebene nur in einem Punkte treffen.

Denn träfe die Gerade die Ebene noch in einem zweiten Punkte, so müßte sie ganz in die Ebene fallen. (§. 3.)

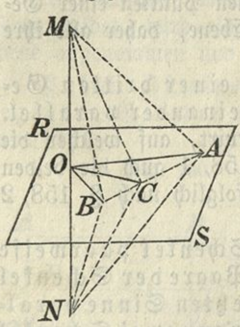
Der Punkt, in welchem eine Gerade eine Ebene schneidet, heißt der **Fußpunkt** dieser Geraden in der Ebene.

§. 156. Eine **Gerade des Raumes** kann gegen eine Ebene in einer dreifachen Lage gedacht werden: entweder fällt die Gerade ganz in die Ebene; oder es schneidet die hinreichend verlängerte Gerade die Ebene in einem Punkte, sie ist gegen die Ebene **geneigt**; oder es trifft die unbegrenzt verlängerte Gerade mit der beliebig erweiterten Ebene nie zusammen, die Gerade ist mit der Ebene **parallel**.

Eine gegen eine Ebene geneigte Gerade kann auf derselben **senkrecht** oder **schief** aufstehen. Eine Gerade heißt auf einer Ebene **senkrecht**, wenn sie auf jeder Geraden, welche durch ihren Fußpunkt in dieser Ebene gezogen wird, senkrecht steht; sonst heißt sie auf der Ebene **schief**.

§. 157. **Steht eine Gerade auf zwei Geraden, welche durch ihren Fußpunkt in einer Ebene gezogen werden, senkrecht, so steht sie auch auf jeder anderen durch ihren Fußpunkt in dieser Ebene gezogenen Geraden, folglich auf der Ebene selbst senkrecht.**

Fig. 156.



Beweis. Es seien (Fig. 156) OA und OB zwei Gerade in der Ebene RS, und MO $\perp$ OA, MO $\perp$ OB; ferner sei OC eine dritte in dieser Ebene durch O willkürlich gezogene Gerade. Man verlängere die Gerade MO bis N, so daß die auf der entgegengesetzten Seite der Ebene RS liegende Verlängerung ON = OM ist, und ziehe AB, welche die OC in C schneidet, ferner MA und NA; dann ist $\triangle$ MOA $\cong$ NOA, folglich MA = NA. Zieht man MB und NB, so ist ebenso $\triangle$ MOB $\cong$ NOB, daher MB = NB. Dann aber sind die Dreiecke MAB und NAB congruent, daher W. MAB = NAB. Zieht man endlich noch MC und NC, so ist auch $\triangle$ MAC $\cong$ NAC, daher MC = NC. Das $\triangle$ CMN ist also gleichschenklig, daher CO $\perp$ MN (§. 59, 1), oder MO $\perp$ CO; folglich auch MO $\perp$ Ebene RS.

Folgesätze.

a) Von einem Punkte außerhalb einer Ebene kann auf diese nur **eine** Senkrechte gezogen werden.

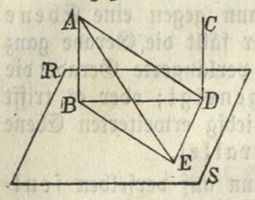
b) In einem Punkte einer Ebene kann auf diese nur **eine** Senkrechte errichtet werden.

c) Die Senkrechte ist die **kürzeste** unter allen Strecken, die von einem Punkte außerhalb einer Ebene zu dieser gezogen werden können; sie gibt daher die **Entfernung** dieses Punktes von der Ebene an.

18.10.82,

§. **158.** 1. *Steht von zwei parallelen Geraden die eine auf einer Ebene senkrecht, so steht auch die andere auf derselben senkrecht.*

Fig. 157.



Es sei (Fig. 157) $AB \parallel CD$ und $AB \perp$ Ebene RS. Da AB und CD in einer Ebene liegen, welche die Ebene RS in der Geraden BD schneidet, so ist wegen $AB \perp BD$ auch $CD \perp BD$ (§. 27, 2). Zieht man AD, ferner in der Ebene RS die $DE \perp BD$ und macht $DE = AB$, so ist $\triangle ABD \cong EDB$, daher $AD = BE$; dann ist $\triangle ADE \cong EBA$, daher Winkel $ADE = EBA = R$, d. i. $DE \perp AD$, folglich DE senkrecht auf der Ebene ADB und somit auch auf der in dieser Ebene liegenden CD. Die CD ist daher senkrecht auf BD und DE, folglich auch auf der Ebene RS.

2. *Stehen zwei Gerade auf einer Ebene senkrecht, so sind sie parallel.*

Wäre nicht die eine Senkrechte mit der andern parallel, so müßte sich durch ihren Fußpunkt eine andere mit der zweiten parallele Gerade ziehen lassen; diese aber wäre nach 1. auf der Ebene senkrecht, was nicht möglich ist, weil in einem Punkte auf eine Ebene nur *eine* Senkrechte errichtet werden kann.

Folgesatz. Alle Senkrechten von verschiedenen Punkten einer Geraden auf eine Ebene liegen in einer einzigen Ebene, daher alle ihre Fußpunkte in einer einzigen Geraden.

§. **159.** 1. *Zwei Gerade, deren jede einer dritten Geraden im Raume parallel ist, sind unter einander parallel.*

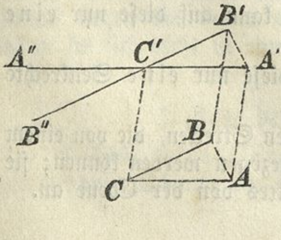
Denkt man sich nämlich eine Ebene construirt, auf welcher die dritte Gerade senkrecht steht, so müssen nach §. 158, 1 auch die beiden ersten Geraden auf dieser Ebene senkrecht stehen, folglich nach §. 158, 2 unter einander parallel sein.

25.10

2. *Zwei Winkel im Raume, deren Schenkel paarweise parallel sind, sind* a) *gleich, wenn beide Paare der Schenkel in demselben, oder beide im entgegengesetzten Sinne parallel sind; dagegen* b) *Supplementwinkel, wenn zwei Schenkel in demselben, die beiden anderen aber im entgegengesetzten Sinne parallel sind.*

Beweis. a) Es sei (Fig. 158) $AC \parallel A'A''$ und $BC \parallel B'B''$.

Fig. 158.



Macht man $AC = A'C'$, und $BC = B'C'$, und zieht die Geraden AA', BB', CC', AB und A'B', so ist dann AA' gleich und parallel mit CC', ferner BB' gleich und parallel mit CC' (§. 62, 2), mithin auch AA' gleich und parallel mit BB' (§. 159, 1); folglich ist auch $AB = A'B'$ (§. 62, 2). Dann aber ist $\triangle ACB \cong A'C'B'$, daher Winkel $ACB = A'C'B'$.

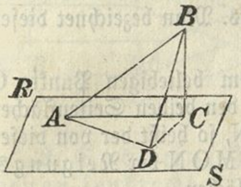
Wegen W. $A'C'B' = A''C'B''$ ist auch W. $ACB = A''C'B''$.

b) Nach a) ist $ACB = A'C'B'$, aber $A'C'B' + A''C'B' = 2R$, folglich auch $ACB + A''C'B' = 2R$.

§. **160**. Wenn man von dem Endpunkte einer Strecke, welche auf einer Ebene schief steht, auf diese eine Senkrechte zieht, so heißt die Strecke zwischen den Fußpunkten der Senkrechten und der gegebenen Strecke die Projection dieser Strecke auf die Ebene. Ist (Fig. 159) $BC \perp$ Ebene RS, so ist AC die Projection der AB auf die Ebene RS.

Der Winkel einer Geraden mit ihrer Projection auf eine Ebene ist der kleinste von allen Winkeln, welche diese Gerade mit den durch ihren Fußpunkt in der Ebene gezogenen Geraden bildet.

Fig. 159.

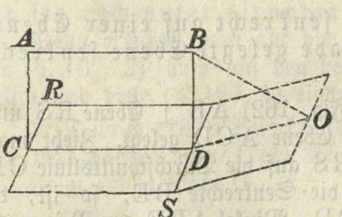


Es sei $BC \perp$ Ebene RS, also AC die Projection der Geraden AB auf die Ebene RS. Zieht man durch A in der Ebene RS irgend eine andere Gerade AD, macht $AD = AC$ und zieht noch CD und BD, so ist $BC < BD$ (§. 38, 1). In den Dreiecken BAC und BAD ist dann auch der Winkel $BAC < BAD$. (§. 57.)

Der Winkel, welchen eine Gerade mit ihrer Projection auf eine Ebene bildet, wird als das Maß der Neigung der Geraden gegen die Ebene angenommen und heißt der Neigungswinkel derselben.

§. **161**. Ist eine gerade Linie mit einer in einer Ebene liegenden Geraden parallel, so ist sie mit der Ebene selbst parallel.

Fig. 160.



Ist (Fig. 160) $AB \parallel CD$, so läßt sich durch die beiden Geraden eine Ebene ABCD legen. Sollte nun die Gerade AB die Ebene RS in einem Punkte O schneiden, so müßte derselbe sowohl in der Ebene RS als auch in der Ebene ABCD, somit in ihrer Durchschnittslinie CD liegen. Dieses ist aber unmöglich, da $AB \parallel CD$; es muß also $AB \parallel$ Ebene RS sein.

2. Lage der Ebenen gegen einander.

§. **162**. Wenn sich zwei Ebenen schneiden, so ist ihr Durchschnitt eine gerade Linie.

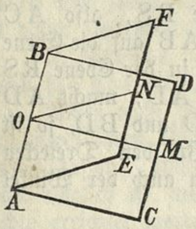
Wäre die Durchschnittslinie nicht gerade, so müßte es in derselben drei Punkte geben, die nicht in gerader Linie liegen. Dann müßten die drei Punkte in beiden Ebenen liegen, und daher diese gegen die Voraussetzung eine einzige Ebene bilden.

bljana

§. **163.** Zwei Ebenen können gegen einander in einer dreifachen Lage gedacht werden: entweder fallen die zwei Ebenen ganz zusammen, oder schneiden sich die hinreichend erweiterten Ebenen in einer geraden Linie, sie sind gegen einander geneigt; oder es treffen die beiden Ebenen, so weit man sie auch erweitern mag, nie zusammen, sie sind parallel.

§. **164.** Wenn sich zwei Ebenen schneiden, so heißt die Größe der Drehung, welche die eine Ebene um die gemeinschaftliche Durchschnittslinie machen muß, um in die Lage der anderen Ebene zu gelangen, der Flächenwinkel oder Keil der beiden Ebenen; die gemeinschaftliche Durchschnittslinie der Ebenen nennt man die Kante und die beiden Ebenen selbst die Seitenflächen des Flächenwinkels.

Fig. 161.



In Fig. 161 sind AB die Kante, AD und AF die Seitenflächen des von den Ebenen AD und AF gebildeten Flächenwinkels. Man bezeichnet diesen Winkel durch D(AB)F.

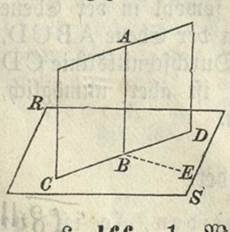
Errichtet man in einem beliebigen Punkte O der Kante AB auf diese in den beiden Seitenflächen die Senkrechten OM und ON, so heißt der von diesen Senkrechten gebildete Winkel MON der Neigungswinkel der beiden Seitenflächen.

Je nachdem der Neigungswinkel zweier Ebenen ein rechter oder ein schiefer ist, heißen dieselben senkrecht oder schief auf einander stehend.

Da zu gleichen Flächenwinkeln auch gleiche Neigungswinkel und umgekehrt gehören, so nimmt man die Größe des Neigungswinkels der Seitenflächen eines Flächenwinkels als Maß für die Größe des Flächenwinkels an.

§. **165.** Steht eine Gerade senkrecht auf einer Ebene, so steht auch jede durch die Gerade gelegte Ebene senkrecht auf jener Ebene.

Fig. 162.



Es sei (Fig. 162) AB $\perp$ Ebene RS und durch AB die Ebene ACD gelegt. Zieht man in der Ebene RS auf die Durchschnittslinie CD beider Ebenen die Senkrechte BE, so ist, da auch AB $\perp$ CD, Winkel ABE der Neigungswinkel der beiden Ebenen; allein ABE $=$ R, weil AB $\perp$ RS; folglich

Ebene ACD $\perp$ Ebene RS.

§. **166.** 1. Werden zwei parallele Ebenen von einer dritten geschnitten, so sind die Durchschnittslinien parallel.

Denn würden die Durchschnittslinien verlängert sich in einem Punkte schneiden, so müßte dieser in jeder der beiden Ebenen liegen, was nach der Voraussetzung unmöglich ist.

2. Parallele Strecken zwischen parallelen Ebenen sind einander gleich.

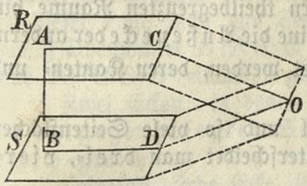
Der Beweis folgt aus 1. und §. 61.

Folgesatz. Alle Senkrechten zwischen zwei parallelen Ebenen sind gleich.

Die constante Länge einer solchen Senkrechten gibt den Abstand der beiden Ebenen an.

§. **167.** 1. Steht eine Gerade auf zwei Ebenen senkrecht, so sind diese parallel.

Fig. 163.



Es sei (Fig. 163) AB ⊥ AR und AB ⊥ RS, so muß AR ∥ BS sein. Würden sich die beiden Ebenen schneiden, so müßten die Senkrechte AB und die Verbindungsstrecken ihrer Fußpunkte mit irgend einem Punkte O des Durchschnittes beider Ebenen ein Dreieck ABO bilden, worin zwei rechte Winkel vorkämen, was nicht möglich ist.

2. Steht eine Gerade auf einer von zwei parallelen Ebenen senkrecht, so steht sie auch auf der anderen Ebene senkrecht. (Fig. 163.)

Es sei AR ∥ BS und AB ⊥ AR. Würde AB auf BS schief aufliegen, also z. B. der Winkel ABD ein schiefer sein, so müßten in der Ebene ABD die Geraden AC und BD verlängert sich treffen, somit die Ebenen AR und BS erweitert sich schneiden, was gegen die Voraussetzung ist.

§. **168.** 1. Sind zwei Ebenen einer dritten parallel, so sind sie auch unter einander parallel.

Denn errichtet man auf die dritte Ebene eine Senkrechte, so muß diese (§. 167, 2) auch auf den beiden ersteren Ebenen senkrecht stehen, folglich sind diese (§. 167, 1) einander parallel.

2. Durch einen Punkt außerhalb einer Ebene kann nur eine mit dieser parallele Ebene gelegt werden.

Folgt indirect aus 1.

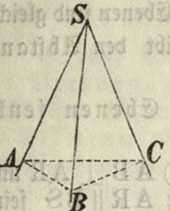
3. Körperliche Ecken.

§. **169.** Drei oder mehrere Ebenen, deren Durchschnittslinien durch einen und denselben Punkt gehen, schließen einen nach einer Seite hin unbegrenzten Raum ein, welcher eine körperliche Ecke, auch blos Ecke genannt wird.

Der Punkt, in welchem die Durchschnittslinien der Ebenen zusammentreffen, heißt der Scheitel; die Durchschnittslinien selbst nennt man die Kanten; die Winkel je zweier auf einander folgender Kanten die Kantenwinkel und ihre Ebenen die Seitenflächen; endlich die

Neigungswinkel je zweier benachbarter Seitenflächen die Flächenwinkel der Ecke.

Fig. 164.



Ist (Fig. 164) S der Scheitel der Ecke und sind SA, SB, SC deren Kanten, so bezeichnet man die Ecke durch SABC.

Jede Ecke wird einerseits durch den Scheitel und die Seitenflächen begrenzt, andererseits aber ist sie völlig unbegrenzt. Eine Ecke theilt also den Raum in zwei theilbegrenzte Räume und es gehört daher zu jeder Ecke immer noch eine zweite, deren Flächenwinkel nach dem andern theilbegrenzten Raume hin liegen. Man nennt die eine die Außenecke der andern.

Hier sollen nur solche Ecken betrachtet werden, deren Kanten- und Flächenwinkel hohl sind.

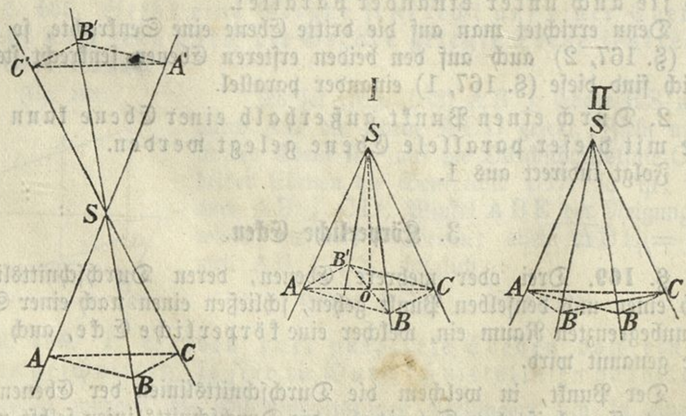
Eine Ecke hat so viele Kantenwinkel und so viele Seitenflächen als Kanten. Nach der Anzahl derselben unterscheidet man drei-, vier-, fünf-, . . . nseitige Ecken.

Wenn man alle Kanten einer Ecke über den Scheitel hinaus verlängert, so heißt die Ecke, welche die Verlängerungen zu Kanten hat, die Scheitelecke der ersteren.

§. **170.** Zwei Ecken heißen congruent, wenn sie sich so in einander legen lassen, daß sich alle ihre Kanten und Seitenflächen decken.

Sollen zwei Ecken zur Deckung gebracht werden können, so müssen in denselben nicht nur alle Kantenwinkel und Flächenwinkel paarweise gleich sein, sondern diese auch in demselben Sinne (von rechts nach links, von vorne nach hinten, von unten nach oben) auf einander folgen.

Fig. 165.



Die Ecke SABC (Fig. 165) und ihre Scheitelecke S'A'B'C' haben paarweise gleiche Kantenwinkel und gleiche Flächenwinkel; sie können jedoch, da die Bestandstücke im entgegengesetzten Sinne auf einander folgen, im Allgemeinen nicht zur Deckung gebracht werden.

Denn legt man (Fig. 165, I) den Kantenwinkel A′SC′ so auf den ihm gleichen Kantenwinkel ASC, daß SA′ auf SA, SC′ auf SC fällt, so kommen die Kanten SB′ und SB auf entgegengesetzten Seiten der Ebene SAC zu liegen; es kann also auf diese Art eine Deckung nicht stattfinden.

Legt man aber (Fig. 165, II) die gleichen Kantenwinkel A′SC′ und ASC so aufeinander, daß SA′ auf SC und SC′ auf SA fällt, so kommen die Kanten SB′ und SB zwar auf derselben Seite der Ebene SAC, jedoch neben einander zu liegen; es können daher die Ecken auch in dieser Lage nicht zur Deckung gebracht werden, wenn nicht zufällig die Flächenwinkel B(AS)C und A(CS)B, folglich auch B′(A′S)C′ und A′(C′S)B′ einander gleich sind.

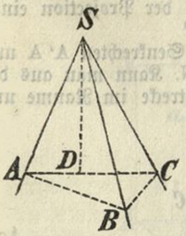
Zwei Ecken, in denen alle Seiten und Winkel gleich sind, jedoch im entgegengesetzten Sinne auf einander folgen, heißen symmetrisch-gleich.

Folgesatz. Jede Ecke ist ihrer Scheitelecke symmetrisch-gleich.

§. **171.** In jeder dreiseitigen Ecke ist die Summe zweier Kantenwinkel größer als der dritte.

Beweis. Sind alle drei Kantenwinkel gleich, so ist die Richtigkeit des Satzes von selbst einleuchtend; sind sie ungleich, so braucht man nur zu beweisen, daß die Summe der beiden kleineren größer ist als der größte. Ist ASC (Fig. 166) der größte Kantenwinkel, so ziehe man in der Ebene ASC die Gerade SD so, daß ASD = ASB wird, mache SD = SB und lege durch B und D eine beliebige die Kanten SA und SC in A und C schneidende Ebene. Dann ist $\triangle$ ASD $\cong$ ASB, also AD = AB. Da nun BC > AC — AB oder BC > AC — AD, d. i. BC > CD ist, so folgt aus der Vergleichung der Dreiecke SBC und SCD nach §. 57, daß der Winkel BSC > CSD ist; mithin ist auch ASB + BSC > ASD + CSD, d. i. ASB + BSC > ASC.

Fig. 166.



§. **172.** In jeder Ecke ist die Summe aller Kantenwinkel kleiner als vier Rechte.

Beweis. Schneidet man die Kanten einer $n$seitigen Ecke durch eine Ebene, so erhält man n Seitendreiecke, deren Winkel zusammen $2nR$, und als Durchschnittsfigur ein n-Eck, dessen Winkel $2nR - 4R$ betragen. Jeder Eckpunkt des n-Eckes ist der Scheitel einer dreiseitigen Ecke. Bezeichnet man nun die Summe aller Kantenwinkel am Scheitel der gegebenen Ecke durch S und die Summe der Winkel an den Grundlinien der Dreiecke durch S′, so ist

$$S + S' = 2nR, \quad S' > 2nR - 4R \text{ (§. 171)},$$

daher, wenn man die zweite Ungleichung von der ersten Gleichung subtrahirt,

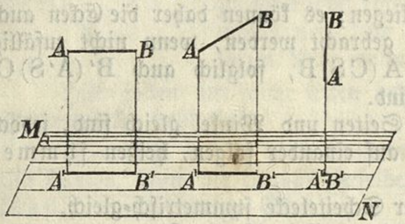
$$S < 4R.$$

Geometrische Darstellung der Punkte, Linien und ebenen Gebilde des Raumes.

1. Zieht man von einem Punkte A (Fig. 167) im Raume eine Senkrechte AA′ auf die Ebene MN, so heißt der Fußpunkt A′ dieser Senkrechten die Projection des Punktes A auf die Ebene, und die Ebene selbst die Projectionsebene.

Liegt der gegebene Punkt in der Projectionsebene, so fällt er mit seiner Projection zusammen.

Fig. 167.



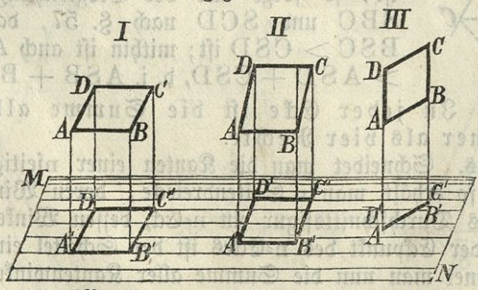
Unter der Projection einer Strecke (§. 160) auf eine Ebene versteht man die Strecke zwischen den Projectionen ihrer Endpunkte auf diese Ebene. Ist A′ die Projection des Punktes A, und B′ die Projection des Punktes B auf die Ebene MN, so ist die Strecke A′B′ die Projection der Strecke AB auf diese Ebene.

Ist eine Strecke zur Projectionsebene parallel (wie in I), so ist ihre Projection mit der Strecke gleich lang. Ist eine Strecke gegen die Projectionsebene schief (II), so ist ihre Projection kleiner als die Strecke. Ist eine Strecke auf der Projectionsebene senkrecht (III), so ist ihre Projection ein Punkt.

Nimm in der Senkrechten A′A beliebige Punkte an. Welches ist ihre gemeinschaftliche Projection auf die Ebene MN? Kann man aus der Projection eines Punktes auf eine Ebene auf dessen Lage im Raume schließen?

Ziehe verschiedene Strecken, deren Endpunkte in den Senkrechten A′A und B′B liegen, und bestimme ihre Projection auf die Ebene MN. Kann man aus der Projection einer Strecke auf die Ebene auf die Lage der Strecke im Raume und auf ihre Länge schließen?

Fig. 168.



2. Unter der Projection eines geradlinigen Gebildes auf eine Ebene versteht man das Gebilde, welches erhalten wird, wenn man die Projectionen der Eckpunkte des gegebenen Gebildes auf diese Ebene durch Strecken verbindet. In Fig. 168 stellt A′B′C′D′ die Projection des Quadrates ABCD auf die Ebene MN dar.

Die Projection eines Quadrates ist ein gleich großes Quadrat (I), oder ein flächenkleineres Parallelogramm (II), oder eine Strecke (III), je nachdem die Ebene des Quadrates mit der Projectionsebene parallel, oder gegen die Projectionsebene schief, oder auf der Projectionsebene senkrecht ist.

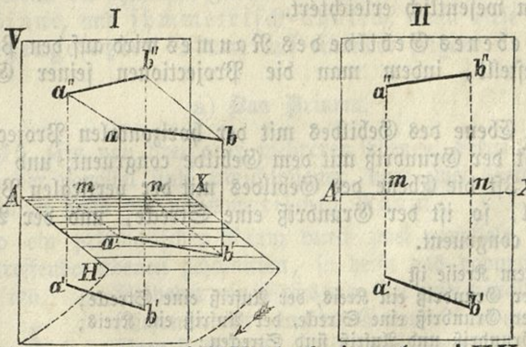
Ist ein ebenes Gebilde krummlinig, so ist auch seine Projection auf eine Ebene im Allgemeinen krummlinig, und nur dann eine Strecke, wenn das Gebilde auf der Projectionsebene senkrecht steht.

Was für ein Gebilde ist die Projection eines Kreises, wenn die Ebene des Kreises a) mit der Projectionsebene parallel, b) gegen die Projectionsebene schief, c) auf der Projectionsebene senkrecht ist?

3. Sind mehrere Gerade auf einer Ebene senkrecht, so haben alle Gebilde, deren entsprechende Punkte in denselben Senkrechten liegen, dieselbe Projection auf diese Ebene. Daraus folgt, daß man aus der Projection eines Gebildes auf eine Ebene weder auf die Lage noch auf die Größe desselben schließen kann.

Um nun Gebilde geometrisch so darzustellen, daß man aus der Darstellung selbst ihre Lage im Raume und ihre Ausdehnungen entweder unmittelbar entnehmen oder durch einfache Constructionen finden kann, projicirt man dieselben auf zwei sich senkrecht schneidende Ebenen, von denen die eine horizontal, die andere vertical ist. Die Projection auf die horizontale Ebene heißt die Horizontal-Projection oder der Grundriß, die Projection auf die verticale Ebene die Vertical-Projection oder der Aufriß. Die Durchschnittslinie der horizontalen und der verticalen Projectionsebene heißt ihre Axe.

Fig. 169.



Es seien (Fig. 169) AXH die horizontale, AXV die verticale Projectionsebene, AX ihre Achse und a ein darzustellender Punkt des Raumes. Fällt man von a die Senkrechte aa' auf die Horizontalebene, so ist ihr Fußpunkt a' der Grundriß des Punktes a; fällt man von a die Senkrechte aa'' auf die Verticalebene, so ist ihr Fußpunkt a'' der Aufriß des Punktes a.

Legt man durch die beiden Senkrechten aa' und aa'' eine Ebene, welche die Axe AX in dem Punkte m senkrecht schneidet, so erscheinen die Projectionen a' und a'' als die gegenüberliegenden Eckpunkte des Rechteckes a a' m a''.

Ist b' der Grundriß und b'' der Aufriß eines zweiten Punktes b im Raume, so ist die Strecke a' b' der Grundriß und die Strecke a'' b'' der Aufriß der Strecke ab des Raumes.

Durch den Grundriß und den Aufriß wird eine Strecke der Lage und der Größe nach vollkommen bestimmt. Durch die Construction des Rechteckes a' m a'' a erhält man die Lage des Punktes a, durch die Construction des Rechteckes b' n b'' b die Lage des Punktes b und durch Verbindung beider die Lage und Länge der Strecke ab.

Was für Projectionen gibt eine Strecke im Raume, wenn dieselbe a) mit der verticalen, b) mit der horizontalen, c) mit beiden Projections-Ebenen parallel ist; d) auf der verticalen, e) auf der horizontalen Projections-Ebene senkrecht steht; f) in der verticalen, g) in der horizontalen Projections-Ebene liegt?

Zeichne Grund- und Aufriß einer 45^{mm} langen Strecke, welche zur horizontalen und verticalen Projectionsebene parallel, und von der ersteren 25^{mm}, von der letzteren 33^{mm} entfernt ist.

Da bei Zeichnungen die beiden Projectionen auf ein und dasselbe Papierblatt, also auf eine einzige Ebene zu stehen kommen, so denkt man sich (Fig. 169, I) die horizontale Projections-Ebene um die Axe AX um 90° gedreht, so daß sie in die Erweiterung der verticalen Projections-Ebene fällt. Bei dieser Darstellungsweise erscheint dann der Grundriß unterhalb, der Aufriß oberhalb der Axe (Fig. 169, II). Auch sieht man, daß dabei die beiden Projectionen eines jeden Punktes immer in einer auf der Axe senkrechten geraden Linie liegen, welcher Umstand die Constructionen wesentlich erleichtert.

4. Ein ebenes Gebilde des Raumes wird auf den Projectionsebenen dargestellt, indem man die Projectionen seiner Grenzlinien bestimmt.

Ist die Ebene des Gebildes mit der horizontalen Projectionsebene parallel, so ist der Grundriß mit dem Gebilde congruent, und der Aufriß eine Strecke. Ist die Ebene des Gebildes mit der verticalen Projectionsebene parallel, so ist der Grundriß eine Strecke, und der Aufriß mit dem Gebilde congruent.

Von einem Kreise ist
- a) der Grundriß ein Kreis, der Aufriß eine Strecke;
- b) der Grundriß eine Strecke, der Aufriß ein Kreis;
- c) Grundriß und Aufriß sind Strecken;
- d) der Grundriß ist eine Strecke, der Aufriß eine Ellipse;
- e) der Grundriß eine Ellipse, der Aufriß eine Strecke;
- f) Grundriß und Aufriß sind Ellipsen.

Welche Lage gegen die Projectionsebenen hat der Kreis in jedem dieser Fälle?

Zeichne Grund- und Aufriß eines Quadrates mit der Seite 53^{mm}, das im Abstande 38^{mm} mit der Horizontalebene parallel, und dessen eine Seite im Abstande 50^{mm} mit der Verticalebene parallel ist.

Zweiter Abschnitt.

Von den Körpern im Allgemeinen.

1. Ebenflächige Körper oder Polyeder.

§. **173.** Ein Körper, welcher von lauter Ebenen begrenzt wird, heißt ein *ebenflächiger Körper* oder ein *Polyeder.* Zur Begrenzung eines Polyeders sind *wenigstens vier* Ebenen erforderlich. Die einzelnen Grenzebenen heißen die *Flächen* des Polyeders und bilden dessen *Oberfläche*; die Durchschnittslinien der Flächen heißen die *Kanten* und die an den Endpunkten der Kanten liegenden, von den zugehörigen Flächen gebildeten Ecken die *Ecken* des Polyeders.

§. **174.** Zwei Körper heißen *congruent*, wenn sie sich so in einander legen lassen, daß sich alle ihre Grenzflächen decken.

Sollen zwei Körper zur Deckung gebracht werden können, so müssen sämmtliche Bestandtheile (Kanten, Flächen, Flächenwinkel und Ecken) in beiden paarweise gleich sein und *in demselben Sinne* auf einander folgen.

Folgen die paarweise gleichen Bestandtheile in zwei Körpern *im entgegengesetzten Sinne* auf einander, so können diese im allgemeinen nicht zur Deckung gebracht werden; die Körper heißen dann *symmetrisch-gleich.*

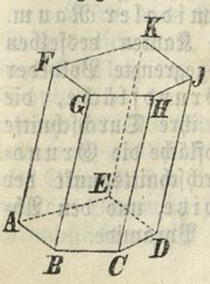
Zwei Körper, deren Grenzflächen nach der Ordnung ähnlich und deren entsprechend liegende Flächenwinkel paarweise gleich sind, heißen *ähnlich*, wenn die ähnlichen Flächen und gleichen Flächenwinkel *in demselben Sinne*, und *symmetrisch-ähnlich*, wenn diese Bestandtheile *im entgegengesetzten Sinne* auf einander folgen.

a) Das Prisma.

§. **175.** Ein von drei oder mehreren Ebenen, deren Durchschnittslinien einander parallel sind, umschlossener, nach zwei Seiten hin unbegrenzter Raum heißt ein *prismatischer Raum.*

Wird ein prismatischer Raum durch zwei parallele, alle Kanten desselben treffende Ebenen geschnitten, so heißt das dadurch abgegrenzte Polyeder ein *Prisma.* Die zwei parallelen Schnittflächen nennt man die *Grundflächen*, die übrigen Grenzflächen die *Seitenflächen*, die Durchschnitte der letzteren mit einander die *Seitenkanten*, und die mit den Grundflächen die *Grundkanten* des Prisma. Der Abstand der beiden Grundflächen heißt die *Höhe* des Prisma.

Fig. 170.



Der Körper ABCDEFGHJK (Fig. 170) ist ein Prisma, wenn die Ebene ABCDE || FGHJK, und wenn

AF || BG || CH || DJ || EK ist.

Folgesätze.

1. Die beiden Grundflächen eines Prisma sind congruente Vielecke.

Denn die gleichliegenden Seiten der Grundflächen sind als Parallele zwischen Parallelen gleich, und die gleichliegenden Winkel haben parallele Schenkel, sind also auch gleich.

2. Alle Seitenflächen des Prisma sind Parallelogramme.

3. Alle Seitenkanten des Prisma sind einander gleich.

Eine Ebene, welche durch zwei nicht unmittelbar auf einander folgende Seitenkanten gelegt wird, heißt ein *Diagonalschnitt* des Prisma.

§. **176**. Mit Rücksicht auf die *Anzahl* der Seitenkanten unterscheidet man *drei-*, *vier-* oder *mehrseitige* Prismen. Mit Rücksicht auf die *Lage* der Seitenkanten gegen die Grundflächen heißt ein Prisma *senkrecht* oder *schief*, je nachdem die Seitenkanten auf den Grundflächen senkrecht oder schief stehen.

Ein Prisma, dessen Grundflächen Parallelogramme sind, heißt *Parallelepiped*. Ein senkrechtes Parallelepiped, dessen Grundflächen Rechtecke sind, heißt ein *rechtwinkliges* Parallelepiped. Ein rechtwinkliges Parallelepiped, dessen alle Kanten gleich sind, wird ein *Cubus* oder *Würfel* genannt; jede Kante heißt auch eine *Seite* des Würfels. Jedes Parallelepiped wird von sechs Parallelogrammen, ein rechtwinkliges Parallelepiped von sechs Rechtecken, ein Würfel von sechs Quadraten begrenzt.

§. **177**. 1. *Wird ein Prisma durch eine mit der Grundfläche parallele Ebene geschnitten, so ist die Schnittfläche mit der Grundfläche congruent.*

2. *Jeder Diagonalschnitt eines vielseitigen Prisma ist ein Parallelogramm.*

Die *Beweise* dieser zwei Sätze beruhen auf §. 166, 1.

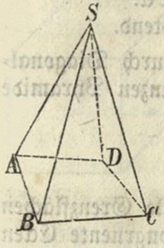
Folgesatz. Jedes vielseitige Prisma läßt sich durch Diagonalschnitte in dreiseitige Prismen von der Höhe des ganzen Prisma zerlegen.

b) Die Pyramide.

§. **178**. Ein von den Seitenflächen einer Ecke umschlossener, nach einer Seite hin unbegrenzter Raum heißt ein *pyramidaler Raum*.

Wird ein pyramidaler Raum durch eine alle Kanten desselben treffende Ebene geschnitten, so heißt das dadurch abgegrenzte Polyeder eine *Pyramide*. Die Schnittfläche heißt die *Grundfläche*, die anderen Grenzflächen heißen die *Seitenflächen*, ihre Durchschnitte mit einander die *Seitenkanten*, und mit der Grundfläche die *Grundkanten* der Pyramide. Den gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt der Seitenkanten nennt man den *Scheitel* oder die *Spitze*, und den Abstand der Spitze von der Grundfläche die *Höhe* der Pyramide.

Fig. 171.



Der Körper $SABCD$ (Fig. 171) ist eine Pyramide.

Die Seitenflächen einer Pyramide sind Dreiecke. Eine Ebene, welche durch zwei nicht unmittelbar auf einander folgende Seitenkanten gelegt wird, heißt ein *Diagonalschnitt* der Pyramide.

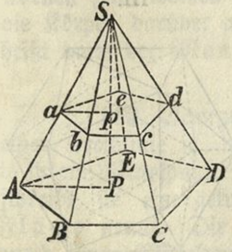
§. **179.** Mit Rücksicht auf die Anzahl der Seiten der Grundfläche theilt man die Pyramiden in *drei-*, *vier-* und *mehrseitige* ein. Das einfachste Polyeder ist die dreiseitige Pyramide; sie wird von vier Dreiecken begrenzt und heißt daher auch das *Tetraeder*.

Ist die Grundfläche einer Pyramide ein regelmäßiges Vieleck und fällt der Fußpunkt der Höhe in den Mittelpunkt der Grundfläche, so heißt die Pyramide eine *senkrechte*. Die Seitenflächen einer senkrechten Pyramide sind gleichschenklige congruente Dreiecke. Der Abstand der Spitze von der Grundkante eines solchen Dreieckes heißt die *Seitenhöhe* der senkrechten Pyramide.

§. **180.** 1. *Wird eine Pyramide durch eine mit der Grundfläche parallele Ebene geschnitten, so ist* a) *die Schnittfläche der Grundfläche ähnlich, und* b) *die Flächeninhalte beider verhalten sich wie die zweiten Potenzen ihrer Abstände von der Spitze der Pyramide.*

Beweis. Es sei (Fig. 172) $abcde \parallel ABCDE$.

Fig. 172.



a) Da (nach §. 166, 1) $ab \parallel AB$, $bc \parallel BC$, $cd \parallel CD$, .. ist, so ist W. $a = A$, $b = B$, $c = C$, ... Ferner ist wegen $ab \parallel AB$ (nach §. 86) $ab : AB = Sb : SB$, und wegen $bc \parallel BC$ auch $bc : BC = Sb : SB$, daher $ab : AB = bc : BC$. Ebenso wird bewiesen, daß $bc : BC = cd : CD$, u. s. w. ist. Folglich ist $abcde \sim ABCDE$.

b) Ist $SP \perp ABCDE$, also auch $Sp \perp abcde$ und legt man durch ASP eine Ebene, welche die beiden Vielecke in den Geraden ap und AP schneidet, so ist $ap \parallel AP$, daher $ab : AB = Sa : SA = Sp : SP$. Nun ist $abcde : ABCDE = ab^2 : AB^2$ (§. 99), folglich auch $abcde : ABCDE = Sp^2 : SP^2$.

Wird eine Pyramide durch eine mit der Grundfläche parallele Ebene geschnitten, so heißt der zwischen den beiden parallelen Flächen liegende Theil der Pyramide ein *Pyramidenstumpf*, der zwischen der Schnittfläche und der Spitze liegende Theil aber die *Ergänzungspyramide* des Stumpfes. Der Pyramidenstumpf wird von zwei parallelen und ähnlichen Vielecken als Grundflächen und so vielen Trapezen als Seitenflächen begrenzt, als jedes der Vielecke Seiten hat; er ist, wie die Pyramide selbst, senkrecht oder schief. Der Abstand der beiden Grundflächen heißt die *Höhe des Pyramidenstumpfes*.

2. Jeder durch die Spitze und die Grundfläche einer Pyramide geführte ebene Schnitt ist ein Dreieck.

Die Richtigkeit dieses Satzes ist von selbst einleuchtend.

Folgesatz. Jede vielseitige Pyramide läßt sich durch Diagonalschnitte in dreiseitige Pyramiden von der Höhe der ganzen Pyramide zerlegen.

c) Regelmäßige Körper.

§. 181. Ein Körper heißt regelmäßig, wenn alle Grenzflächen desselben congruente regelmäßige Vielecke sind und congruente Ecken bilden.

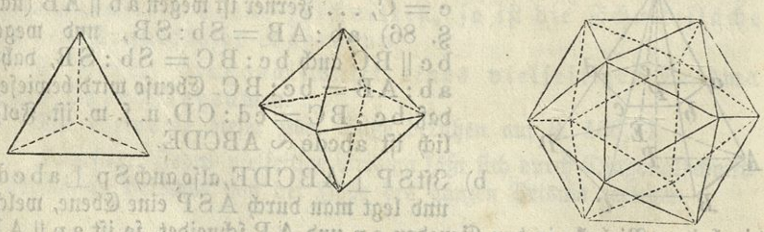
Es gibt nur fünf regelmäßige Körper.

Beweis. Jede Ecke eines regelmäßigen Körpers wird von wenigstens drei Winkeln einer regelmäßigen Figur gebildet; die Summe dieser Winkel muß kleiner als 360° sein (§. 172).

Der Winkel eines regelmäßigen (gleichseitigen) Dreieckes beträgt 60°; von solchen Winkeln können drei, vier oder auch fünf eine Ecke bilden; aus sechs oder mehr als sechs solchen Winkeln aber kann keine Ecke entstehen, da ihre Summe 360° oder mehr als 360° beträgt. Von gleichseitigen Dreiecken können daher nur drei regelmäßige Körper begrenzt werden, nämlich das Tetraeder, das Oktaeder und das Ikosaeder.

Fig. 173.

I. II. III.



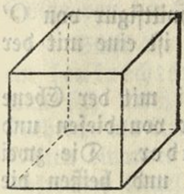
Das regelmäßige Tetraeder (Fig. 173, I) wird von 4 gleichseitigen Dreiecken begrenzt, von denen je drei in einer Ecke zusammentreffen; es hat 4 Ecken und 6 Kanten.

Das regelmäßige Oktaeder (Fig. 173, II) wird von 8 gleichseitigen Dreiecken eingeschlossen, von denen je vier eine Ecke bilden; es hat 6 solche Ecken und 12 Kanten.

Das regelmäßige Ikosaeder (Fig. 173, III) wird von 20 gleichseitigen Dreiecken begrenzt, von denen je fünf in einer Ecke zusammenstoßen; es hat 12 Ecken und 30 Kanten.

Der Winkel eines regelmäßigen Viereckes (Quadrates) ist ein rechter; von solchen Winkeln können nur drei in einer Ecke zusammen-

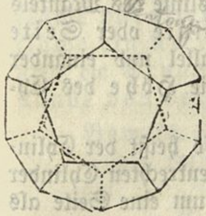
Fig. 174.



treffen; aus vier oder mehr als vier rechten Winkeln kann keine Ecke gebildet werden. Es gibt daher einen einzigen von Quadraten begrenzten regelmäßigen Körper; er heißt Hexaeder (Cubus, Würfel). Das Hexaeder (Fig. 174) hat 6 Quadrate zu Seitenflächen, 8 dreiseitige Ecken und 12 Kanten.

Der Winkel eines regelmäßigen Fünfeckes beträgt 108°; von solchen Winkeln können nur drei eine Ecke bilden. Es gibt daher einen einzigen von regelmäßigen Fünfecken begrenzten regelmäßigen Körper; dieser heißt das Dodekaeder (Fig. 175) und hat 12 Seitenflächen, 20 dreiseitige Ecken und 30 Kanten.

Fig. 175.



Im regelmäßigen Sechsecke ist jeder Winkel 120°. Von solchen Winkeln kann keine Ecke gebildet werden, da schon drei solche Winkel zusammen 360° betragen. Ebenso wenig kann aus den Winkeln eines regelmäßigen Vieleckes von mehr als sechs Seiten eine Ecke entstehen.

Es kann also nur fünf regelmäßige Körper geben.

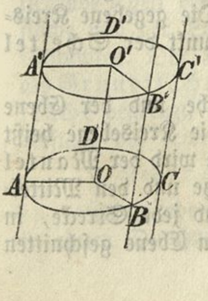
2. Krummflächige Körper.

§. **182.** Körper, welche ganz oder theilweise von gekrümmten Flächen begrenzt werden, heißen krummflächige Körper. Bei denjenigen krummflächigen Körpern, deren eine oder mehrere Grenzflächen Ebenen sind, werden diese als Grundflächen betrachtet, da man sich die Körper darüber aufgerichtet vorstellen kann; die gekrümmte Fläche heißt dann der Mantel.

a) Der Cylinder.

§. **183.** Bewegt sich eine Gerade nach und nach durch alle Punkte einer Kreislinie so, daß sie dabei stets einer die Ebene dieser Kreislinie in ihrem Mittelpunkte schneidenden festen Geraden parallel bleibt, so beschreibt sie eine gekrümmte Fläche, welche man eine cylindrische Fläche nennt. Die gegebene Kreislinie heißt die Leitlinie und die durch ihren Mittelpunkt gehende feste Gerade die Axe der cylindrischen Fläche.

Fig. 176.



Jeder mit der Ebene der Leitlinie parallelgelegte Schnitt einer cylindrischen Fläche ist eine Kreislinie, welche mit der Leitlinie gleichen Halbmesser hat.

Es sei der Kreis ABC (Fig. 176) die Leitlinie der cylindrischen Fläche, und eine mit diesem Kreise parallele Ebene A'B'C' schneide die Axe OO' in O'. Ist B' ein willkürlicher Punkt der Durchschnittsfigur, so ist, wenn man durch B' und OO' eine Ebene legt, welche die cylindrische Fläche in der Geraden BB' schneidet, $OO' \parallel BB'$ und $O'B' \parallel OB$;

daher ist $OO'B'B$ ein Parallelogramm, und folglich $O'B' = OB$. Es ist also die Entfernung eines jeden Punktes der Schnittfigur von O' dem Halbmesser der Leitlinie gleich, d. h. der Schnitt ist eine mit der Leitlinie congruente Kreislinie.

§. **184.** Wird eine cylindrische Fläche durch zwei mit der Ebene der Leitlinie parallele Ebenen geschnitten, so heißt der von diesen und der cylindrischen Fläche begrenzte Körper ein Cylinder. Die zwei ebenen Schnittflächen sind congruente Kreise (§. 183) und heißen die Grundflächen; die sie begrenzende cylindrische Fläche nennt man den Mantel des Cylinders. Die Strecke, welche die Mittelpunkte beider Kreise verbindet, heißt die Axe, und jede Durchschnittslinie des Mantels mit einer durch die Axe gelegten Ebene eine Seitenlinie oder Seite des Cylinders. Alle Seiten des Cylinders sind parallel und einander gleich. Der Abstand der beiden Grundflächen wird die Höhe des Cylinders genannt.

Steht die Axe auf den Grundflächen senkrecht, so heißt der Cylinder ein senkrechter, sonst ein schiefer. Einen senkrechten Cylinder kann man sich auch durch Drehung eines Rechteckes um eine Seite als Axe entstanden denken. In einem senkrechten Cylinder stellt die Axe zugleich die Höhe vor. Ein senkrechter Cylinder, dessen Seite dem Durchmesser der Grundfläche gleich ist, wird gleichseitig genannt.

§. **185.** 1. Wird ein Cylinder durch eine mit der Grundfläche parallele Ebene geschnitten, so ist die Schnittfläche ein mit der Grundfläche congruenter Kreis.

Folgt aus dem Lehrsatze in §. 183.

2. Jeder Axenschnitt eines Cylinders ist ein Parallelogramm.

Denn in dem erhaltenen Vierecke sind die Durchschnittslinien der Ebene mit der Mantelfläche als Seiten des Cylinders parallel und gleich.

Wird ein senkrechter Cylinder durch eine Ebene geschnitten, welche weder zur Grundfläche noch zur Axe parallel ist, so ist der Schnitt eine Ellipse.

5.1.83.

b) Der Kegel.

§. **186.** Bewegt sich eine Gerade nach und nach durch alle Punkte einer Kreislinie so, daß sie dabei stets durch einen festen Punkt außerhalb der Ebene dieser Kreislinie geht, so beschreibt sie eine gekrümmte Fläche, die man eine konische Fläche nennt. Die gegebene Kreislinie heißt die Leitlinie und der gegebene feste Punkt der Scheitel oder die Spitze der konischen Fläche.

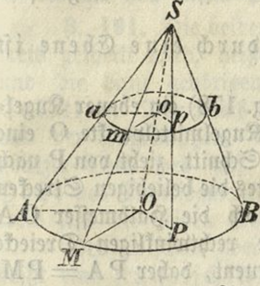
Ein Körper, welcher von einer konischen Fläche und der Ebene ihrer Leitlinie begrenzt wird, heißt ein Kegel. Die Kreisebene heißt die Grundfläche, die sie begrenzende konische Fläche wird der Mantel des Kegels genannt. Die Strecke, welche die Spitze und den Mittelpunkt der Grundfläche verbindet, heißt die Axe, und jede Strecke, in welcher der Mantel von einer durch die Axe gelegten Ebene geschnitten wird, eine Seitenlinie oder Seite des Kegels. Den Abstand der Spitze von der Grundfläche des Kegels nennt man die Höhe desselben.

Steht die Axe auf der Grundfläche senkrecht, so heißt der Kegel ein senkrechter, sonst ein schiefer. Einen senkrechten Kegel kann man sich durch Drehung eines rechtwinkligen Dreieckes um eine seiner Katheten als Axe entstanden denken. In einem senkrechten Kegel sind alle Seiten einander gleich, und die Axe stellt zugleich die Höhe vor. Ein senkrechter Kegel, dessen Seite dem Durchmesser der Grundfläche gleich ist, heißt gleichseitig.

§. **187.** 1. Wird ein Kegel durch eine mit der Grundfläche parallele Ebene geschnitten, so ist a) die Schnittfläche ein Kreis, und es verhalten sich b) die Schnittfläche und die Grundfläche wie die zweiten Potenzen ihrer Abstände von der Spitze des Kegels.

Beweis. Es sei (Fig. 177) die Ebene amb || AMB.

Fig. 177.



a) Zieht man die Axe SO, welche die Schnittfläche amb in o schneidet, und legt durch SO und einen willkürlichen Punkt m der Schnittfigur eine Ebene, welche die konische Fläche in der Geraden SmM schneidet, so ist om || OM; daher hat man $om : OM = So : SO$. Ebenso ist $oa : OA = So : SO$, und folglich $om : OM = oa : OA$, woraus, wegen $OM = OA$, auch $om = oa$ folgt. Es sind also alle Punkte im Umfange des Schnittes von o gleich weit entfernt, mithin ist die Schnittfläche ein Kreis.

b) Ist $SP \perp AMB$, also auch $Sp \perp amb$, und legt man durch SOP eine Ebene, welche die beiden Kreise in OP und op schneidet, so ist op || OP, daher $ao : AO = So : SO = Sp : SP$. Nun ist $amb : AMB = ao^2 : AO^2$ (§. 134, Folgesatz b), folglich auch $amb : AMB = Sp^2 : SP^2$.

Wird ein Kegel durch eine mit der Grundfläche parallele Ebene geschnitten, so heißt der zwischen der Grundfläche und der Schnittfläche liegende Theil des Kegels ein Kegelstumpf, der zwischen der Schnittfläche und der Spitze liegende Theil aber der Ergänzungskegel des Stumpfes. Der Kegelstumpf wird von zwei parallelen ungleichen Kreisen als Grundflächen und der zwischen ihnen enthaltenen konischen Mantelfläche begrenzt, und ist, wie der Kegel selbst, senkrecht oder schief. Der Abstand der beiden Grundflächen heißt die Höhe des Kegelstumpfes.

2. Jeder Axenschnitt des Kegels ist ein Dreieck.

Denn jede durch die Axe gelegte Ebene schneidet die Grundfläche in einem Durchmesser und die Mantelfläche in zwei geraden Linien.

19.2.83.

Wird ein senkrechter Cylinder von einer Ebene geschnitten, welche weder mit der Grundfläche parallel ist noch durch die Axe geht, so ist die Schnittfigur: a) eine Ellipse, wenn die Schnittebene alle Seiten des Kegels oder deren Verlängerungen trifft; b) eine Parabel, wenn die Schnittebene mit einer Seite des Kegels parallel ist; c) eine Hyperbel, wenn die Schnittebene nicht alle Seiten oder Verlängerungen derselben trifft und auch zu keiner Seite parallel ist.

Die Ellipse, Parabel und Hyperbel heißen deshalb auch Kegelschnittslinien.

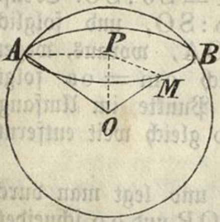
c) Die Kugel.

§. 188. Dreht sich ein Halbkreis um seinen Durchmesser so weit herum, bis er wieder in seine ursprüngliche Lage kommt, so beschreibt derselbe eine gekrümmte Fläche, welche Kugelfläche genannt wird. Der von der Kugelfläche begrenzte Körper heißt die Kugel.

Jeder Punkt der Kugelfläche ist von dem Mittelpunkte des erzeugenden Kreises gleich weit entfernt; dieser Punkt heißt darum der Mittelpunkt der Kugel. Eine Strecke, welche vom Mittelpunkte bis zur Kugelfläche gezogen wird, heißt ein Halbmesser; eine Strecke, welche durch den Mittelpunkt geht und zwei Punkte der Kugeloberfläche verbindet, ein Durchmesser der Kugel. Alle Halbmesser einer Kugel sind einander gleich; eben so alle Durchmesser.

§. 189. Jeder Schnitt einer Kugel durch eine Ebene ist ein Kreis.

Fig. 178.



Es sei AMB (Fig. 178) ein ebener Kugelschnitt. Fällt man vom Kugelmittelpunkte O eine Senkrechte OP auf den Schnitt, zieht von P nach dem Umfange des Schnittes die beliebigen Strecken PA und PM, ferner noch die Halbmesser OA und OM, so sind die rechtwinkligen Dreiecke OPA und OPM congruent, daher $PA = PM$. Daraus folgt, daß alle Umfangspunkte des Schnittes von P gleichen Abstand haben, daß also der Schnitt ein Kreis ist.

Der Kreis AMB wird ein Kugelkreis genannt.

Zwischen dem Halbmesser $OA = R$ der Kugel, dem Halbmesser $PA = r$ des Kugelkreises und dem Abstand $OP = d$ des letzteren vom Mittelpunkte der Kugel besteht die Gleichung $r^2 = R^2 - d^2$.

Daraus folgt:

a) Zwei Kugelkreise, welche gleichen Abstand vom Mittelpunkte haben, sind einander gleich.

b) Von zwei Kugelkreisen, welche ungleiche Abstände vom Mittelpunkte haben, ist derjenige der größere, welcher vom Mittelpunkte den kleineren Abstand hat.

c) Unter allen Kugelkreisen ist ein durch den Mittelpunkt der Kugel gehender am größten. Ein solcher Kreis heißt darum auch geradezu ein größter Kugelkreis; sein Halbmesser ist dem Halbmesser der Kugel gleich.

§. **190.** Denkt man sich eine Kugelfläche durch Drehung eines Halbkreises um seinen Durchmesser entstehend, so nimmt der Halbkreis nach und nach die Lagen aller durch die Endpunkte jenes Durchmessers gehenden größten Halbkreise der Kugel an; ebenso beschreibt jeder Punkt des sich drehenden Halbkreises einen größeren oder kleineren Kugelkreis, und zwar der Halbirungspunkt des Halbkreises einen größten Kugelkreis. Jener Durchmesser heißt in Beziehung auf dieses System von Kreisen die Axe, ihre Endpunkte heißen die Pole, die durch die Pole gehenden Halbkreise die Meridiane, die von den einzelnen Punkten des bewegten Halbkreises beschriebenen Kugelkreise, deren Ebenen sämmtlich auf der Axe senkrecht stehen und daher mit einander parallel sind, Parallelkreise; der durch die Mitten der Meridiane gehende größte Parallelkreis heißt insbesondere der Aequator.

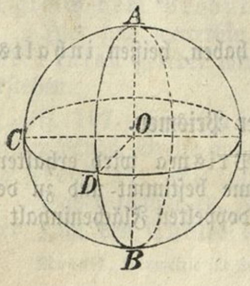
Die Ebenen der Meridiane stehen senkrecht auf der Ebene des Aequators und auf den Ebenen der Parallelkreise desselben Systems von Kreisen. Die Bogen aller Meridiane von demselben Pol bis zu demselben Parallelkreise sind gleich; insbesondere beträgt jeder Bogen eines Meridians von einem Pol bis zum Aequator 90^{0}.

§. **191.** Die beiden Theile, in welche die Kugel durch einen Kugelkreis getheilt wird, heißen Kugelabschnitte oder Kugelsegmente, und die dazu gehörigen Theile der Kugelflächen Kugelmützen oder Calotten. Der Kreis ist die Grundfläche der beiden Kugelsegmente und der Kugelmützen. Der von der Mütze und ihrer Grundfläche begrenzte Theil des auf sie senkrechten Durchmessers der Kugel ist die Höhe des Kugelsegments und der Kugelmütze. Für einen größten Kugelkreis sind die beiden Segmente congruent.

Der zwischen zwei parallelen Kugelkreisen liegende Theil der Kugel heißt eine Kugelschicht, und der dazu gehörige Theil der Kugelfläche eine Kugelzone. Der Abstand der beiden Kreise ist die Höhe der Kugelschicht und der Zone.

Dreht sich der Ausschnitt eines größten Kugelkreises um einen seiner Halbmesser, so heißt der dadurch beschriebene Körper ein Kugelausschnitt oder Kugelsector. Derselbe besteht aus einem Kugelsegment und einem Kegel, dessen Spitze der Kugelmittelpunkt und dessen Grundfläche die Grundfläche des Kugelsegments ist.

Fig. 179.



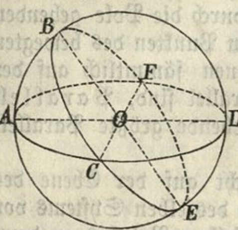
§. **192.** Der Neigungswinkel der Ebenen zweier größter Kugelkreise heißt der sphärische Winkel der beiden Kreise. Die Schenkel eines sphärischen Winkels sind die Bogen der zwei größten Kreise, und der Scheitel ihr Durchschnittspunkt.

Das Maß eines sphärischen Winkels ist der Bogen eines größten Kugelkreises, welcher jene zwei Punkte der Schenkel verbindet, die vom Scheitel um 90^{0} abstehen. Ist nämlich (Fig. 179) $AC = 90^{0}$ und $AD = 90^{0}$, so ist $CO \perp AO$ und $DO \perp AO$, und somit

COD der Neigungswinkel der beiden größten Kreise ACB und ADB, oder ihr sphärischer Winkel. Legt man nun durch die beiden Punkte C und D einen größten Kreis, so ist der Bogen CD das Maß für den Winkel COD, und folglich auch für den sphärischen Winkel CAD.

So wird z. B. der Stundenwinkel oder der Längenunterschied durch den Bogen des Aequators zwischen zwei Meridianen gemessen.

Fig. 180.



§. **193**. Ein Theil der Kugelfläche, welcher von drei Bogen größter Kugelkreise begrenzt wird, heißt ein sphärisches Dreieck, wie ABC (Fig. 180). Die Kreisbogen AB, AC und BC werden die Seiten, und die sphärischen Winkel ACB, ABC und BAC die Winkel des sphärischen Dreiecks genannt. Die Größe der Seiten wird stets im Bogenmaße angegeben.

Dritter Abschnitt.

Größenbestimmung der Körper.

§. **194**. Bei der Ausmessung der Körper kommt die Bestimmung der Oberfläche und des Cubikinhaltes derselben in Betracht.

Die Oberfläche eines Körpers erhält man, indem man alle Grenzflächen berechnet und die erhaltenen Flächeninhalte derselben addirt.

Um den Cubikinhalt oder das Volumen eines Körpers, d. i. die Größe des von seinen Grenzflächen eingeschlossenen Raumes zu bestimmen, nimmt man irgend einen bekannten Körper als Einheit an und untersucht, wie oft derselbe in dem gegebenen Körper enthalten ist.

Als Einheit des Körpermaßes wird ein Cubus angenommen, dessen Kante der Längeneinheit gleich ist und der für das Metermaß bezüglich ein Cubikmeter, ein Cubikdecimeter, .. heißt. 1 Cub.^{m} = 1000 Cub.^{dm} à 1000 Cub.^{cm} à 1000 Cub.^{mm}.

Als Hohlmaß heißt das Cubikdecimeter Liter; 100 Liter = 1 Hektoliter.

Zwei Körper, welche gleichen Cubikinhalt haben, heißen inhaltsgleich.

1. Oberfläche und Cubikinhalt der Prismen.

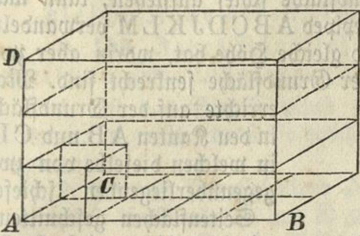
§. **195**. 1. Die Oberfläche o eines Prisma wird erhalten, wenn man die Seitenflächen als Parallelogramme bestimmt und zu der dadurch erhaltenen Seitenoberfläche s den doppelten Flächeninhalt b der Grundfläche addirt; also $o = s + 2b$.

2. Die Seitenoberfläche eines senkrechten Prisma ist gleich dem Producte aus dem Umfange der Grundfläche und der Höhe.

Denn die Seitenflächen sind Rechtecke, deren gemeinschaftliche Höhe die Höhe des Prisma ist.

§. **196**. Die Zahl der in einem rechtwinkligen Parallelepiped enthaltenen Cubikeinheiten ist gleich dem Producte aus den Maßzahlen dreier in einer Ecke zusammenstoßender Kanten.

Fig. 181.



Es sei in dem rechtwinkligen Parallelepiped ABCDEFGH (Fig. 181) die Längeneinheit m in der Kante AB a mal, in der Kante AD b mal und in der Kante AE h mal enthalten. Dann enthält die Grundfläche ABCD ab mal das Quadrat über m d. i. ab Flächeneinheiten; es läßt sich also auf derselben der Cubus mit der Kante m, d. i. die Cubikeinheit, ab mal nebeneinander legen und eine solche Parallelschichte von ab Cubikeinheiten kann nach der Höhe AC h mal aufgetragen werden. Bezeichnet man daher die Zahl der in dem rechtwinkligen Parallelepiped enthaltenen Cubikeinheiten durch v, so ist

$$v = a.b.h.$$

Z. B. Für $a = 4^m$, $b = 2^m$, $h = 3^m$ ist $v = 4.2.3 = 24$ Cub.^{m}.

Bestimme auf gleiche Weise durch entsprechende Construction den Cubikinhalt eines rechtwinkligen Parallelepipeds von $4\frac{1}{2}^m$ Länge, $3\frac{1}{4}^m$ Breite und $3\frac{3}{5}^m$ Höhe.

Der obige Lehrsatz wird kürzer so ausgedrückt:

Der Cubikinhalt eines rechtwinkligen Parallelepipeds ist gleich dem Producte aus drei zusammenstoßenden Kanten (Länge, Breite und Höhe).

Heißt g der Flächeninhalt der Grundfläche des rechtwinkligen Parallelepipeds ABCDEH, so ist (nach §. 69) $g = a.b$, daher

$$v = g.h,$$

d. h. der Cubikinhalt eines rechtwinkligen Parallelepipeds ist gleich dem Producte aus der Grundfläche und der Höhe.

Hier und weiterhin sind, wenn von Producten aus Flächen und Linien geredet wird, immer nur die Maßzahlen derselben zu verstehen.

§. **197**. Ein Cubus ist ein rechtwinkliges Parallelepiped von gleicher Länge, Breite und Höhe; der Cubikinhalt eines Cubus ist also gleich der dritten Potenz einer Seite.

Daher kommt es, daß man auch in der Arithmetik die dritte Potenz einer Zahl den Cubus derselben nennt.

Sind V und v die Cubikinhalte zweier Würfel, deren Seiten S und s heißen, so hat man $V = S^3$ und $v = s^3$, daher

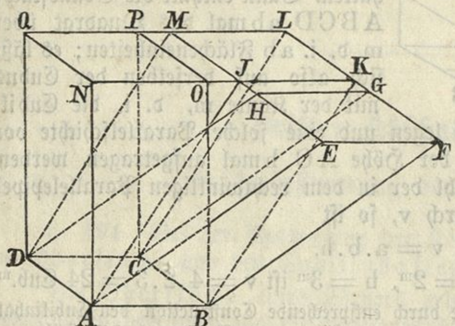
$$V : v = S^3 : s^3;$$

d. h. die Cubikinhalte zweier Würfel verhalten sich wie die dritten Potenzen ihrer Seiten.

§. **198**. Jedes Parallelepiped ist einem rechtwinkligen Parallelepiped inhaltsgleich, das mit ihm gleiche Grundfläche und gleiche Höhe hat.

Beweis. 1. Jedes Parallelepiped ABCDEFGH (Fig. 182), dessen alle Seitenflächen auf der Grundfläche schief aufstehen, kann man zunächst in ein inhaltsgleiches Parallelepiped ABCDJKLM verwandeln, das mit ihm dieselbe Grundfläche und gleiche Höhe hat, worin aber zwei gegenüberliegende Seitenflächen auf der Grundfläche senkrecht sind. Man errichte auf der Grundfläche in den Kanten AB und CD, in welchen dieselbe von zwei gegenüberliegenden schiefen Seitenflächen geschnitten wird, zu ihr zwei senkrechte Ebenen, und erweitere die übrigen Flächen des gegebenen Parallelepipeds so weit, daß sie mit den zwei senkrecht errichteten ein Parallelepiped einschließen; dann sind die beiden Parallelepipede inhaltsgleich. Denn die dreiseitigen Prismen BFKAEJ und CGLDHM sind congruent, da sie nach der Ordnung in allen Kanten und in allen Kanten- und Flächenwinkeln paarweise übereinstimmen; nimmt man nun jedes dieser Prismen von dem Körper ABCDEFLM weg, so müssen auch die Reste, d. i. die beiden Parallelepipede, gleich sein.

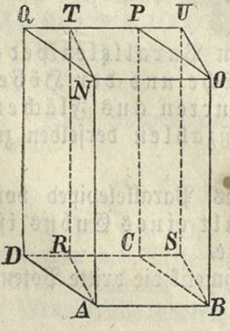
Fig. 182.



2. Auf gleiche Weise kann jedes Parallelepiped ABCDJKLM, in welchem zwei gegenüberliegende Seitenflächen auf der Grundfläche senkrecht, die beiden anderen auf ihr schief stehen, in ein inhaltsgleiches senkrechtes Parallelepiped ABCDNOPQ über derselben Grundfläche und von gleicher Höhe verwandelt werden.

3. Endlich läßt sich jedes senkrechte Parallelepiped ABCDNOPQ (Fig. 183), dessen Grundfläche nicht rechtwinklig ist, in ein inhaltsgleiches rechtwinkliges Parallelepiped ABRSNOTU von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe verwandeln. Man lege durch die Kanten AN und

Fig. 183.



BO Ebenen, welche auf der Ebene DCQP senkrecht stehen; dann erhält man ein rechtwinkliges Parallelepiped, welches mit dem gegebenen senkrechten gleiche Grundfläche und dieselbe Höhe hat. Beide Parallelepipede sind inhaltsgleich; denn die zwei dreiseitigen Prismen ADRNQT und BCSOPU, welche dieselben nicht gemeinschaftlich haben, sind congruent.

Folgesätze.

a) Der Cubikinhalt eines jeden Parallelepipeds ist gleich dem Producte aus der Grundfläche und der Höhe.

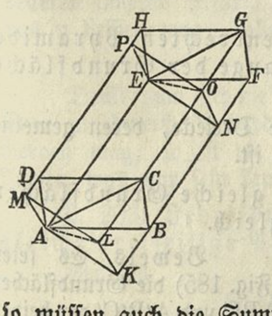
b) Zwei Parallelepipede, welche gleiche Grundfläche und gleiche Höhe haben, sind inhaltsgleich.

§. **199**. Jedes Parallelepiped wird durch den Diagonalschnitt in zwei inhaltsgleiche dreiseitige Prismen getheilt.

1. Ist das Parallelepiped ein senkrechtes, so sind die beiden Prismen, in welche dasselbe durch den Diagonaldurchschnitt getheilt wird, congruent.

2. Ist das Parallelepiped AG (Fig. 184) ein schiefes, so lege man durch die Punkte A und E zwei Ebenen, welche auf den Kanten des Parallelepipedes AG senkrecht stehen; dann ist der Körper AKLMENOP ein senkrechtes Parallelepiped, das durch den Diagonalschnitt AEOL in zwei inhaltsgleiche Prismen ALMEOP und AKLENO getheilt wird.

Fig. 184.



Da DH = MP = AE ist, so muß auch DH — DP = MP — DP oder PH = MD sein; ebenso folgt OG = LC. Denkt man sich nun den Körper EOPHG so auf den Körper ALMDC gelegt, daß die congruenten Dreiecke EOP und ALM zusammenfallen, so muß auch PH in die Richtung MD, und wegen PH = MD der Punkt H auf D fallen; eben so folgt, daß der Punkt G auf C zu liegen kommen müsse; es ist daher der Körper EOPHG ≅ ALMDC. Setzt man zu beiden den Körper ACDEOP dazu, so müssen auch die Summen gleich sein, also Prisma ACDEGH = ALMEOP. Ebenso kann man beweisen, daß das Prisma ABCEFG = AKLENO ist. Da nun die Prismen ALMEOP und AKLENO gleich sind, so sind auch die Prismen ACDEGH und ABCEFG gleich.

Folgesatz. Jedes dreiseitige Prisma ist die Hälfte eines Parallelepipeds von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe.

§. **200**. Der Cubikinhalt eines jeden Prisma ist gleich dem Producte aus der Grundfläche und der Höhe.

1. Für ein dreiseitiges Prisma folgt die Richtigkeit des Satzes aus §. 199, Folges. und §. 196.

2. Ist das Prisma ein mehrseitiges, so kann es durch Diagonalschnitte in dreiseitige Prismen zerlegt werden, welche mit dem gegebenen Prisma die Höhe gemeinschaftlich haben und deren Grundflächen die Grundfläche des mehrseitigen Prisma zur Summe geben. Folglich ist auch der Cubikinhalt eines mehrseitigen Prisma gleich dem Producte aus der Grundfläche und der Höhe.

Folgesätze.

a) Zwei Prismen, welche gleiche Grundfläche und gleiche Höhe haben, sind inhaltsgleich.

b) Die Cubikinhalte zweier Prismen von gleicher Grundfläche verhalten sich wie ihre Höhen.

c) Die Cubikinhalte zweier Prismen von gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundflächen.

d) Die Cubikinhalte je zweier Prismen verhalten sich wie die Producte aus ihren Grundflächen und Höhen.

2. Oberfläche und Cubikinhalt einer Pyramide und eines Pyramidenstumpfes.

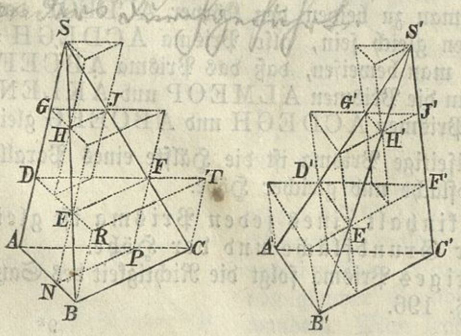
§. **201.** 1. Um die Oberfläche o einer Pyramide zu erhalten, berechnet man zuerst die Seitenflächen als Dreiecke, ihre Summe gibt die Seitenoberfläche s; dazu addirt man noch den Flächeninhalt b der Grundfläche; also $o = s + b$.

2. Die Seitenoberfläche einer senkrechten Pyramide ist gleich dem Producte aus dem Umfange der Grundfläche und der halben Seitenhöhe.

Denn die Seitenflächen sind gleichseitige Dreiecke, deren gemeinschaftliche Höhe die Seitenhöhe der Pyramide ist.

§. **202.** Zwei Pyramiden, welche gleiche Grundflächen und gleiche Höhe haben, sind inhaltsgleich.

Fig. 185.



Beweis. Es seien (Fig. 185) die Grundflächen ABC und A'B'C' der beiden Pyramiden SACB und S'A'C'B', gleich und in derselben Ebene, und die Scheitel S und S' in einer mit dieser parallelen Ebene gelegen. Theilt man in beiden Pyramiden die Höhen in gleich viele unter einander gleiche Theile und legt durch die Theilungspunkte mit den

Grundflächen parallele Ebenen, so sind je zwei in gleicher Höhe geführte Schnittflächen, z. B. DEF und D'E'F', flächengleich.

Denn ist h die gemeinschaftliche Höhe der Pyramiden und d der Abstand der Schnittflächen DEF und D'E'F' vom Scheitel, so ist nach §. 183, 1

$DEF : ABC = d^2 : h^2$ und $D'E'F' : A'B'C' = d^2 : h^2$, daher
$DEF : ABC = D'E'F' : A'B'C'$;
aber $ABC = A'B'C'$, daher auch $DEF = D'E'F'$.

Construirt man nun zu jedem zwischen zwei solchen Schnitten liegenden Stücke der Pyramiden ein äußeres und ein inneres Prisma, deren erstes die untere, deren zweites die obere Grundfläche des Pyramidenstückes zur Grundfläche hat, wie zu ABCDEF die Prismen ABCDRT und ANPDEF, so sind (§. 200, Folges. a) je zwei gleichliegende äußere Prismen, und eben so je zwei gleichliegende innere Prismen gleich. Es wird daher auch die Summe aller äußeren und eben so die Summe aller inneren Prismen in beiden Pyramiden gleich sein. Heißt nun A die erstere und J die letztere Summe, P der Inhalt der Pyramide SABC und P' der Inhalt der Pyramide S'A'B'C', so ist immer

$$A > P > J \text{ und } A > P' > J.$$

Subtrahirt man die Ausdrücke $P < A$ und $P' > J$, so erhält man

$$P - P' < A - J.$$

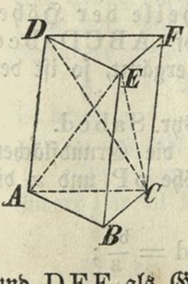
Die Differenz $A - J$ ist nun, da jedes äußere Prisma dem nächst unteren inneren Prisma gleich ist, gleich dem untersten äußeren Prisma, das p heißen mag; daher hat man

$$P - P' < p.$$

Denkt man sich die Anzahl der gleichen Theile der Pyramide ohne Ende zunehmend, so wird p unendlich abnehmen. So klein aber auch p werden mag, so ist die unveränderliche Differenz $P - P'$ stets noch kleiner, was nur sein kann, wenn $P - P' = o$, d. i. wenn $P = P'$ ist.

§. 203. Jedes dreiseitige Prisma kann in drei inhaltsgleiche dreiseitige Pyramiden zerlegt werden.

Fig. 186.



Beweis. Legt man (Fig. 186) durch die Punkte A, E und C des dreiseitigen Prisma ABCDEF eine Ebene, so zerfällt dadurch das Prisma in zwei Pyramiden, eine dreiseitige EABC und eine vierseitige EACFD. Wird ferner in dieser vierseitigen Pyramide durch die Punkte C, E und D eine Ebene gelegt, so theilt sie jene Pyramide in die zwei dreiseitigen Pyramiden EACD und ECDF.

Die beiden Pyramiden EACD und ECDF sind nach §. 200 einander gleich. Betrachtet man in der Pyramide ECDF den Punkt C als Scheitel und DEF als Grundfläche, so folgt aus §. 202, daß diese Pyramide auch der Pyramide EABC gleich ist.

Die drei Pyramiden EABC, EACD und ECDF, in welche das dreiseitige Prisma zerlegt wird, sind also inhaltsgleich.

Folgesatz. Jede dreiseitige Pyramide ist der dritte Theil eines dreiseitigen Prisma von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe.

§. **204.** Der Cubikinhalt einer Pyramide ist gleich dem Producte aus der Grundfläche und dem dritten Theile der Höhe.

1. Für eine dreiseitige Pyramide ergibt sich die Richtigkeit dieses Satzes aus §. 203, Folges. und §. 200.

2. Ist die Pyramide eine mehrseitige, so läßt sie sich durch Diagonalschnitte in dreiseitige Pyramiden zerlegen, welche alle mit der mehrseitigen gleiche Höhe haben, und deren Grundflächen zusammen der Grundfläche der mehrseitigen Pyramide gleich sind. Somit ist auch der Cubikinhalt einer mehrseitigen Pyramide gleich dem Producte aus der Grundfläche und dem dritten Theile der Höhe.

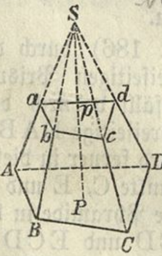
30.4.83. §. **205.** 1. Die Oberfläche o eines Pyramidenstumpfes wird erhalten, wenn man die Summe s aller Seitenflächen, welche Trapeze sind, bestimmt und die beiden Grundflächen B und b dazu addirt; also

$$o = s + B + b.$$

2. Die Seitenoberfläche eines senkrechten Pyramidenstumpfes ist gleich dem Producte aus dem Umfange des mittleren Durchschnittes und der Seitenhöhe.

Halbirt man eine Seitenkante und legt durch den Halbirungspunkt eine mit der Grundfläche parallele Ebene, so halbirt dieselbe auch die übrigen Seitenkanten und man erhält als den mittleren Durchschnitt ein regelmäßiges Vieleck, dessen Seiten die Mittellinien der congruenten Seitentrapeze bilden. Der weitere Beweis beruht auf §. 73, Folges.

Fig. 187.



§. **206.** Der Cubikinhalt eines Pyramidenstumpfes ist gleich dem Producte der Summe der beiden Grundflächen und ihrer mittleren geometrischen Proportionale mit dem dritten Theile der Höhe.

Wird der Pyramidenstumpf ABCDabcd (Fig. 187) zur ganzen Pyramide ergänzt, so ist der Cubikinhalt desselben

$$V = \text{Pyr. } SABCD - \text{Pyr. } Sabcd.$$

Bezeichnen nun B und b die Grundflächen ABCD und abcd, h die Höhe pP und x die noch unbekannte Höhe Sp, so hat man

$$\text{Pyr. } SABCD = \frac{B(h+x)}{3}, \quad \text{Pyr. } Sabcd = \frac{bx}{3};$$

$$\text{daher } V = \frac{B(h+x)}{3} - \frac{bx}{3} = \frac{Bh}{3} + \frac{x}{3}(B - b).$$

Zur Bestimmung von x hat man die Proportion:
$B : b = (h + x)^2 : x^2$ (§. 180, 1) oder $\sqrt{B} : \sqrt{b} = (h + x) : x$.

Daraus folgt $(\sqrt{B} - \sqrt{b}) : \sqrt{b} = h : x$, und $x = \frac{h\sqrt{b}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}}$.

Durch Substitution dieses Werthes erhält man

$$V = \frac{Bh}{3} + \frac{h\sqrt{b}}{3(\sqrt{B} - \sqrt{b})}(B - b) = \frac{Bh}{3} + \frac{h\sqrt{b}}{3}(\sqrt{B} + \sqrt{b})$$

$$= (B + \sqrt{Bb} + b) \cdot \frac{h}{3}.$$

3. Oberfläche und Cubikinhalt eines Cylinders.

§. **207**. Da man den Kreis, welcher die Grundfläche eines Cylinders bildet, als ein regelmäßiges Vieleck von unendlich vielen Seiten ansehen kann (§. 131, Folges. b), so kann auch ein *Cylinder als ein Prisma, dessen Grundflächen regelmäßige Vielecke von unendlich vielen Seiten sind*, betrachtet werden. Die Lehrsätze, deren Richtigkeit für Prismen von beliebiger Seitenanzahl bewiesen wurden, gelten daher auch für die Cylinder.

Die Mantelfläche eines senkrechten Cylinders ist gleich dem Producte aus dem Umfange der Grundfläche und der Höhe.

Folgt aus dem analogen Satze für Prismen in §. 195, 2.

Die ganze Oberfläche eines senkrechten Cylinders wird erhalten, wenn man zu der Mantelfläche den doppelten Flächeninhalt der Grundfläche addirt.

Bezeichnet r den Halbmesser der Grundfläche und h die Höhe eines senkrechten Cylinders, so ist die Mantelfläche $= 2rh\pi$, die Grundfläche $= r^2\pi$, daher die Gesammtoberfläche

$$o = 2rh\pi + 2r^2\pi = 2r\pi(h + r).$$

Im gleichseitigen Cylinder ist $h = 2r$, daher $o = 6r^2\pi$.

Zusatz. Die Mantelfläche eines senkrechten Cylinders läßt sich auf eine Ebene als ein Rechteck abwickeln, welches mit dem Cylinder gleiche Höhe hat, und dessen Grundlinie dem Umfange des Grundkreises des Cylinders gleich ist.

§. **208**. *Der Cubikinhalt eines Cylinders ist gleich dem Producte aus der Grundfläche und der Höhe.*

Folgt aus dem Satze für Prismen in §. 200.

Ist r der Halbmesser der Grundfläche und h die Höhe des Cylinders, so ist dessen Cubikinhalt

$$v = r^2h\pi.$$

Für den gleichseitigen Cylinder hat man $h = 2r$, daher

$$v = 2r^3\pi.$$

7.5.83.

4. Oberfläche und Cubikinhalt eines Kegels und eines Kegelstumpfes.

§. 209. Ein Kegel kann als ein Cylinder, dessen Grundfläche ein regelmäßiges Vieleck von unendlich vielen Seiten ist, betrachtet werden. Aus §. 201, 2 folgt daher:

Die Mantelfläche eines senkrechten Kegels ist gleich dem Producte aus dem Umfange der Grundfläche und der Höhe.

Die Gesammtoberfläche eines senkrechten Kegels wird erhalten, indem man zu der Mantelfläche den Flächeninhalt der Grundfläche addirt.

Ist r der Halbmesser der Grundfläche und s die Seite eines senkrechten Kegels, so ist die Mantelfläche $= 2r\pi . \frac{s}{2} = rs\pi$, die Grundfläche $= r^2\pi$, daher die ganze Oberfläche

$$o = rs\pi + r^2\pi = r\pi\ (s + r).$$

Für den gleichseitigen Kegel hat man $s = 2r$, daher

$$o = 3r^2\pi.$$

§. 210. Der Cubikinhalt eines Kegels ist gleich dem Producte aus der Grundfläche und dem dritten Theile der Höhe.

Folgt aus dem analogen Satze für die Pyramide in §. 204.

Ist r der Halbmesser der Grundfläche und h die Höhe des Kegels, so hat man

$$k = \frac{r^2 h \pi}{3}.$$

Ist der Kegel ein senkrechter und s eine Seite desselben, so ist $h = \sqrt{s^2 - r^2}$, daher $k = \frac{r^2\pi}{3}\sqrt{s^2 - r^2}$.

Für den gleichseitigen Kegel hat man $s = 2r$, folglich $k = \frac{r^3\pi}{3}\sqrt{3}$.

§. 211. Die Mantelfläche eines senkrechten Kegelstumpfes ist gleich dem Producte aus dem Umfange des mittleren Durchschnittes und der Seite.

Dieser Satz folgt, wenn man die Grundflächen des Kegelstumpfes als regelmäßige Vielecke von unendlich vielen Seiten ansieht, unmittelbar aus §. 205, 2.

Sind R und r die Halbmesser der Grundflächen des Kegelstumpfes, so ist $\frac{R + r}{2}$ der Halbmesser und daher $(R + r)\,\pi$ der Umfang des mittleren Durchschnittes; folglich ist, wenn man die Seite durch s bezeichnet, die Mantelfläche

$$m = (R + r)\, s\pi.$$

Die Gesammtoberfläche eines senkrechten Kegelstumpfes wird erhalten, wenn man zu der Mantelfläche die Flächeninhalte der beiden Grundflächen addirt; es ist also die Gesammtoberfläche

$$o = (R + r)\, s\pi + R^2\pi + r^2\pi.$$

§. **212.** Der Cubikinhalt des Kegelstumpfes ist gleich dem Producte der Summe der beiden Grundflächen und ihrer mittleren geometrischen Proportionale mit dem dritten Theile der Höhe.

Folgt aus §. 206.

Bezeichnen R und r die Halbmesser der beiden Grundflächen und h die Höhe des Kegelstumpfes, so ist der Cubikinhalt

$$v = (R^2\pi + Rr\pi + r^2\pi) \cdot \frac{h}{3}.$$

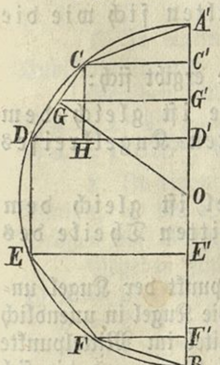
28.5.83.

5. Oberfläche und Cubikinhalt einer Kugel.

§. **213.** Wird in einem Halbkreise ACB (Fig. 188) eine Sehne CD gezogen und dieselbe sammt dem Halbkreise um den Durchmesser AB gedreht, so beschreibt der Halbkreis eine Kugelfläche und die Sehne die Mantelfläche eines Kegelstumpfes, welcher der Kugel eingeschrieben heißt.

Die Mantelfläche eines der Kugel eingeschriebenen Kegelstumpfes ist gleich dem Producte aus dem Umfange eines Kreises, dessen Halbmesser der Abstand seiner Seite vom Mittelpunkte der Kugel ist, und seiner Höhe.

Fig. 188.



Beweis. Zieht man (Fig. 188) $OG \perp CD$, ferner CC', GG' und DD' senkrecht auf AB, so ist nach §. 214 die Mantelfläche des von der Sehne CD beschriebenen Kegelstumpfes

$$m = 2\pi GG'.C'D'.$$

Zieht man noch $CH \perp DD'$, so ist $\triangle GOG' \sim CDH$, daher $GG' : CH = OG : CD$, und $GG'.CD = OG.CH = OG.C'D'$; folglich

$$m = 2\pi OG.C'D',$$

und wenn $OG = a$, $C'D' = h$ gesetzt wird,

$$m = 2a\pi.h.$$

§. **214.** Die Oberfläche einer Kugel ist gleich dem Producte aus dem Umfange eines größten Kugelkreises und dem Durchmesser.

Beweis. Wird einem Kreise ein regelmäßiges Vieleck von gerader Seitenanzahl eingeschrieben und die Hälfte dieses Gebildes (Fig. 188) um eine das Vieleck halbirende Diagonale als Durchmesser des Kreises gedreht, so beschreibt der Halbkreis die Oberfläche einer Kugel, und die

Seiten des Vieleckes beschreiben Mantelflächen von Kegeln oder Kegelstumpfen, oder auch einen Cylindermantel. Man kann jedoch annehmen, daß nur Mantelflächen von Kegelstumpfen beschrieben würden, da der Cylinder als ein Kegelstumpf mit gleichen Grundflächen und der Kegel als ein Kegelstumpf, dessen eine Grundfläche den Halbmesser Null hat, betrachtet werden kann. Jede solche Mantelfläche ist nach §. 213, wenn $OG = a$ gesetzt wird, gleich dem Producte aus $2a\pi$ und der Höhe des bezüglichen Kegelstumpfes, folglich die Summe s aller dieser Mantelflächen gleich dem Producte aus $2a\pi$ und der Summe aller Höhen, d. i. dem Durchmesser $AB = 2r$ der Kugel; man hat also

$$s = 2a\pi . 2r.$$

Da nun bei fortgesetzter Verdopplung der Seitenanzahl des Vieleckes dasselbe sich immer mehr dem Umfange des Kreises nähert und endlich in diesen übergeht, wenn $a = r$ wird, so geht auch die Summe s der Mantelflächen der Kegelstumpfe in die Oberfläche o der Kugel über, wenn $a = r$ gesetzt wird; folglich ist

$$o = 2r\pi . 2r.$$

Zusätze. 1. Aus $o = 2r\pi . 2r$ folgt auch

$$o = 4r^2\pi,$$

d. h. die Oberfläche einer Kugel ist gleich dem vierfachen Flächeninhalte eines größten Kugelkreises.

2. Heißen O und o die Oberflächen zweier Kugeln, deren Halbmesser R und r sind, so hat man $O = 4R^2\pi$ und $o = 4r^2\pi$, daher

$$O : o = R^2 : r^2;$$

d. h. die Oberflächen zweier Kugeln verhalten sich wie die Quadrate ihrer Halbmesser.

3. Aus dem Beweise zu dem obigen Lehrsatze ergibt sich:

Eine Kugelmütze oder eine Kugelzone ist gleich dem Producte aus dem Umfange eines größten Kugelkreises und ihrer Höhe.

§. **215.** Der Cubikinhalt einer Kugel ist gleich dem Producte aus der Oberfläche und dem dritten Theile des Halbmessers.

Beweis. Denkt man sich durch den Mittelpunkt der Kugel unzählig viele Ebenen gelegt, so wird durch dieselben die Kugel in unendlich viele pyramidenförmige Körper zerlegt, deren Scheitel im Mittelpunkte und deren Grundfläche in der Oberfläche der Kugel liegen, und die sich um so mehr Pyramiden nähern, je kleiner ihre Grundflächen sind. Für eine solche, zu einer unendlich kleinen Grundfläche gehörige Pyramide kann man den Halbmesser der Kugel als Höhe annehmen. Den Cubikinhalt aller dieser Pyramiden, d. i. den Cubikinhalt der Kugel, findet man daher, indem man die Summe aller Grundflächen, d. i. die Kugeloberfläche, mit dem dritten Theile der gemeinschaftlichen Höhe, d. i. des Halbmessers der Kugel, multiplicirt.

Bezeichnet r den Halbmesser, o die Oberfläche und v den Cubikinhalt einer Kugel, so ist $v = o \cdot \frac{r}{3}$, aber

$$o = 4r^2\pi, \text{ daher } v = 4r^2\pi \cdot \frac{r}{3} = \frac{4r^3\pi}{3}.$$

Zusätze. 1. Heißen V und v die Inhalte zweier Kugeln, deren Halbmesser R und r sind, so hat man $V = \frac{4R^3\pi}{3}$ und $v = \frac{4r^3\pi}{3}$, daher

$$V : v = R^3 : r^3,$$

d. h. die Cubikinhalte zweier Kugeln verhalten sich wie die dritten Potenzen ihrer Halbmesser.

2. Der Cubikinhalt eines Kugelsectors ist gleich dem Producte aus seiner Kugelmütze und dem dritten Theile des Halbmessers der Kugel.

3. Der Cubikinhalt eines Kugelsegmentes ist, je nachdem dieses kleiner oder größer als die Halbkugel ist, gleich der Differenz oder der Summe der Inhalte des entsprechenden Kugelsectors und eines Kegels, dessen Grundfläche die Grundfläche des Segmentes, und dessen Höhe der Abstand dieser Grundfläche von dem Kugelmittelpunkte ist.

4. Der Cubikinhalt einer Kugelschicht wird als die Differenz der Inhalte zweier Kugelsegmente berechnet.

Rechnungsaufgaben.

1. In einem Würfel ist a die Seite, o die Oberfläche, v der Cubikinhalt; aus einer dieser Größen die beiden anderen zu berechnen.

Gegeben sind:

1) $a = 1^m\ 4^{dm}$; 3) $o = 10\,\square^m$; 5) $v = 29791$ Cub.^{cm};
2) $a = 1 \cdot 375^m$; 4) $o = 50\,\square^{dm}\ 80 \cdot 86\,\square^{cm}$; 6) $v = 12 \cdot 326391$ Cub.^{m}.

2. In einem rechtwinkligen Parallelepiped sind a, b, c die Kanten, o die Oberfläche und v der Cubikinhalt; aus dreien dieser Größen die übrigen zu bestimmen.

Gegeben sind:

1) $a = 2 \cdot 4^m$,	2) $a = 7 \cdot 5^{dm}$,	3) $b = 3 \cdot 5^{dm}$;
$b = 2 \cdot 75^m$,	$b = 3 \cdot 6^{dm}$,	$c = 3 \cdot 8^{dm}$;
$c = 1 \cdot 85^m$;	$o = 4272\,\square^{dm}$;	$v = 41$ Cub.^{dm}.

3. Eine 3560^m lange und 6^m breite Straße soll mit Kies $1 \cdot 2^{dm}$ hoch beschüttet werden; wie viel Cub.^{m} Kies braucht man dazu und wie viel Fuhren sind nöthig, wenn der Wagenkasten $1 \cdot 6^m$ lang, 7^{dm} breit und 5^{dm} tief ist?

4. In einem Prisma beträgt

a) die Grundfläche $2\,\square^{dm}\ 25\,\square^{cm}$, die Höhe $1^{dm}\ 2^{cm}$;
b) " " $3 \cdot 795\,\square^{dm}$, " " $7 \cdot 2^{dm}$;

wie groß ist der Cubikinhalt?

5. Die Grundfläche eines Prisma beträgt $31\cdot78^{dm}$, der Cubikinhalt $1\cdot57311$ Cub.^{dm}; wie groß ist die Höhe?

6. Beim Bau einer Eisenbahn wird die aus einem Einschnitt, welcher 165^{m} lang, oben 22^{m} und unten 8^{m} breit, und $6\cdot4^{m}$ tief ist, gewonnene Erdmasse auf ein 25 Ar enthaltendes Grundstück gleichmäßig vertheilt; um wie viel wird letzteres dadurch erhöht?

7. Die Höhe eines senkrechten Prisma ist h, die Grundfläche desselben ein regelmäßiges Sechseck, dessen Seite a ist; bestimme a) die Oberfläche, b) den Cubikinhalt des Prisma.

---

8. In einer senkrechten Pyramide ist die Grundfläche ein Quadrat von $1^{m}\,3^{dm}$ Seitenlänge; wie groß ist die Oberfläche der Pyramide, wenn deren Seitenhöhe $1^{m}\,8^{dm}$ beträgt?

9. Ein Thurmdach hat die Form einer senkrechten vierseitigen Pyramide von $9\cdot6^{m}$ Umfang der Grundfläche und $10\cdot2^{m}$ Seitenhöhe; wie viel $\square^{m}$ Blech sind zur Eindeckung erforderlich, wenn für Verschnitt und Falze 6 % hinzugerechnet werden?

10. In einer dreiseitigen Pyramide beträgt die Höhe $5^{m}\,48\cdot3^{cm}$, und jede Seite der Grundfläche $2^{m}\,80\cdot4^{cm}$; wie groß ist der Cubikinhalt?

11. Wie viel wiegt eine dreiseitige, 8^{dm} hohe Pyramide aus Gußeisen, wenn jede Seite der Grundfläche $2\cdot8^{dm}$ beträgt, und wenn 1 Cub.^{dm} Gußeisen $7\cdot2$ Kilogramm wiegt?

12. Die Seite der Grundfläche einer senkrechten sechsseitigen Pyramide ist $4\cdot4^{dm}$, die Höhe der Pyramide ist $6\cdot3^{dm}$; wie groß ist die Seite eines Würfels, welcher der Pyramide an Inhalt gleich kommt?

13. In einem senkrechten Pyramidenstumpf ist die Höhe 5^{dm}, die Grundflächen sind gleichseitige Dreiecke, deren Seiten bezüglich $1\cdot6^{dm}$ und $1\cdot2^{dm}$ betragen; wie groß ist a) die Oberfläche, b) der Cubikinhalt?

14. Wie viel wiegt ein Pyramidenstumpf aus Marmor, dessen Grundflächen Quadrate von $1\cdot2^{m}$ und 1^{m} Seitenlänge sind und $1\cdot5^{m}$ von einander abstehen? (1 Cub.^{dm} Marmor wiegt $2\cdot72$ Kilogr.)

15. Bestimme a) die Oberfläche, b) den Cubikinhalt eines regelmäßigen Tetraeders, dessen Seite a ist.

16. Die Seite eines regelmäßigen Oktaeders beträgt $1\cdot2^{dm}$; wie groß ist a) die Oberfläche, b) der Cubikinhalt desselben?

17. Ein Würfel und ein regelmäßiges Ikosaeder haben die gleiche Seite a; wie verhalten sich ihre Oberflächen?

---

18. In einem senkrechten Cylinder ist r der Halbmesser der Grundfläche, h die Höhe, m die Mantelfläche, v der Cubikinhalt; berechne aus je zweien dieser Größen die beiden anderen.

Gegeben sind:

1) $r = 1 \cdot 57^m$, $h = 1 \cdot 29^m$; 2) $h = 1 \cdot 5^m$, $m = 1 \cdot 1386 \square^m$;
3) $r = 1 \cdot 85^m$, $v = 37 \cdot 268$ Cub.^{m}; 4) $m = 20 \square^{dm}$, $v = 20$ Cub.^{dm}.

19. Wie gestalten sich die allgemeinen Auflösungen in 18. für $h = 2r$, d. i. für den gleichseitigen Cylinder?

20. Wie verhält sich in einem gleichseitigen Cylinder die Mantelfläche zur ganzen Oberfläche?

21. Ein cylindrisches Gefäß faßt 36 Liter; wie viel faßt ein Gefäß, dessen Ausdehnungen doppelt so groß sind?

22. Ein cylindrisches Gefäß hält 50 Liter Getreide und ist $399 \cdot 3^{mm}$ hoch; wie groß ist der Durchmesser seiner Grundfläche?

23. In einen cylindrischen Wasserbehälter von 6^{dm} Durchmesser wird ein Gefäß von 2 Liter Inhalt 25mal geleert; wie hoch wird das Wasser in jenem Behälter stehen?

24. Das Ciment für 1 Liter = 1 Cub.^{dm} des Flüssigkeitsmaßes hat die Form eines Cylinders, dessen Höhe das Doppelte des Durchmessers beträgt; wie groß sind die Dimensionen dieses Cimentes in Millimeter?

25. Die Länge eines Fasses beträgt 1^m 3^{dm}, der Durchmesser am Boden 8^{dm}, der Durchmesser an der Spundfläche 1^m; wie viel Liter hält das Faß?

Ein Faß wird gewöhnlich als ein Cylinder berechnet, dessen Höhe gleich ist der Länge des Fasses, und dessen Grundfläche den dritten Theil aus dem doppelten Spund- und dem einfachen Bodendurchmesser zum Durchmesser hat.

26. Den Cubikinhalt einer Cylinderröhre aus den beiden Halbmessern R und r und der Höhe h zu berechnen.

27. Aus dem Cubikinhalte v einer Cylinderröhre, der Höhe h und dem größeren Halbmesser R die Dicke d zu finden.

28. Zu einer Wasserleitung braucht man in einer Länge von 840^m Röhren von Blei, welche 16^{cm} dick sind, und deren Weite im Lichten 8^{cm} beträgt, wie viel kostet das Blei, wenn 1 Cub.^{dm} desselben 11·35 Kilogr. wiegt und das Kilogr. Blei mit 40 kr. bezahlt wird?

---

29. In einem senkrechten Kegel ist r der Halbmesser der Grundfläche, h die Höhe, s die Seite, m die Mantelfläche, v der Cubikinhalt; aus je zweien dieser Größen die übrigen zu bestimmen.

Gegeben sind:

1. $r = 3 \cdot 5^{dm}$, $h = 8 \cdot 4^{dm}$;
2. $r = 0 \cdot 8^m$, $s = 1 \cdot 25^m$;
3. $r = 1 \cdot 76^m$, $m = 13 \cdot 56 \square^m$;
4. $r = 4 \cdot 21^{dm}$, $v = 1137 \cdot 85$ Cub.^{dm};
5. $h = 3 \cdot 5^{dm}$, $v = 55 \cdot 894$ Cub.^{dm};
6. $m = 17 \cdot 593 \square^{dm}$, $v = 7 \cdot 697$ Cub.^{dm}.

30. Wie gestalten sich die Auflösungen in 29. für $s = 2r$, d. i. für den gleichseitigen Kegel?

31. Wie groß ist a) die Oberfläche, b) der Cubikinhalt eines gleichseitigen Kegels, dessen Seite $2^{dm}\ 2^{cm}$ ist?

32. Ein Kegel von Messing, welcher $1 \cdot 62^{dm}$ hoch ist, wiegt $3 \cdot 56076$ Kilogr.; wie groß ist der Durchmesser der Grundfläche, wenn 1 Cub.^{dm} Messing $8 \cdot 4$ Kilogr. wiegt?

33. Die Durchmesser der Grundflächen eines senkrechten Kegelstumpfes sind $2 \cdot 4^{dm}$ und $1 \cdot 8^{dm}$, die Seite beträgt $3 \cdot 02^{dm}$; wie groß ist a) die Mantelfläche, b) der Cubikinhalt des Kegelstumpfes?

34. In einem senkrechten Kegelstumpfe sind die Umfänge der Grundflächen $1 \cdot 36^{m}$ und $0 \cdot 94^{m}$, die Höhe 1^{m}; wie groß ist a) die Oberfläche, b) der Cubikinhalt desselben?

35. Wie viel Cubikmeter enthält ein runder abgestumpfter Baumstamm von 7^{m} Länge, wenn die größere Querschnittsfläche $0 \cdot 76^{m}$ und die kleinere $0 \cdot 5^{m}$ im Durchmesser hat?

36. Das Ciment für 1 Deciliter des Hohlmaßes für trockene Gegenstände hat die Form eines Kegelstumpfes, dessen oberer Durchmesser gleich ist dem Durchmesser eines inhaltsgleichen gleichseitigen Cylinders, und dessen unterer Durchmesser $^5/_4$ des oberen beträgt; welche Dimensionen in Millimeter ergeben sich hieraus?

---

37. In einer Kugel ist r der Halbmesser, o die Oberfläche, v der Inhalt; suche aus jeder dieser Größen die beiden anderen.

Gegeben sind:

1) $r = 1 \cdot 5^{m}$; 3) $o = 572 \cdot 555 \,\square^{cm}$; 5) $v = 100$ Cub.^{dm};
2) $r = 1^{m} 2^{dm} 4^{cm}$; 4) $o = 22 \cdot 1671 \,\square^{dm}$; 6) $v = 5 \cdot 712$ Cub^{m}.

38. Wie groß ist a) die Oberfläche, b) der Cubikinhalt unserer Erde, wenn man diese als eine Kugel betrachtet, deren Halbmesser $859 \cdot 0909$ geogr. Meilen beträgt? ($\pi = 3 \cdot 141592$).

39. Der Durchmesser eines Erdglobus ist 4^{dm}; wie verhält sich dessen Oberfläche zur Oberfläche der Erde? (1 geogr. $\square$ Meile $= 0 \cdot 550629 \,\square^{Mm}$).

40. Wie groß müßte der Durchmesser eines Erdglobus angenommen werden, auf welchem $1 \,\square^{Mm}$ als $1 \,\square^{mm}$ erscheinen soll?

41. Der äußere Durchmesser einer Hohlkugel ist 3^{dm} und der innere $2 \cdot 9^{dm}$; wie groß ist ihr Cubikinhalt?

42. Ein gerader Kegel hat $0 \cdot 8^{m}$ Höhe und eine Basis von $0 \cdot 3^{m}$ Halbmesser; wie groß muß der Durchmesser einer Kugel sein, deren Oberfläche gleich ist der Mantelfläche jenes Kegels?

43. Ein cylindrischer Dampfkessel mit zwei halbkugelförmigen Endstücken ist 1^{m} weit und 4^{m} lang, so daß die Länge des Cylinders 3^{m} beträgt; wie groß ist a) die Oberfläche, b) der Inhalt des Kessels?

44. In einen gleichseitigen Cylinder von 1^{dm} Halbmesser werden eine Kugel und ein senkrechter Kegel eingeschrieben; wie verhalten sich die Cubikinhalte des Kegels, der Kugel und des Cylinders zu einander?

45. Um eine Kugel von 1^{dm} Halbmesser werden ein gleichseitiger Cylinder und ein gleichseitiger Kegel beschrieben; wie verhalten sich a) die Oberflächen, b) die Inhalte dieser drei Körper.?

Geometrische Darstellung der Körper.

Unter der Projection eines Körpers auf eine Ebene versteht man das Gebilde, welches erhalten wird, wenn man die Linien und Flächen des Körpers auf diese Ebene projicirt.

Zeichnet man die Projectionen eines Körpers auf eine horizontale und auf eine verticale Ebene, d. i. seinen Grundriß und Aufriß, so sind durch diese die Flächen und Linien bestimmt, von denen der Cubikinhalt des Körpers abhängt. Der Grundriß und der Aufriß eines Körpers enthalten demnach die geometrische Darstellung seines Cubikinhaltes.

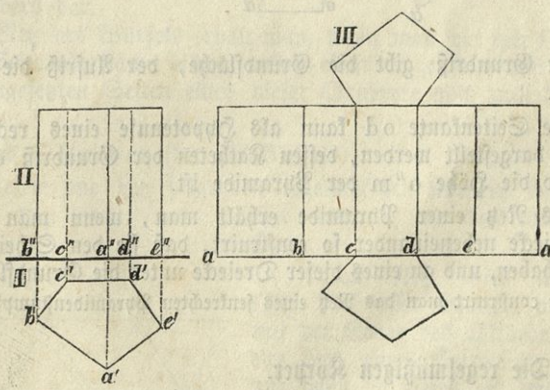
Um die Oberfläche eines Körpers geometrisch darzustellen, construirt man alle Grenzflächen desselben zusammenhängend in einer einzigen Ebene. Eine solche Zeichnung heißt das Netz des Körpers.

Die Körpernetze dienen nicht blos zur Bestimmung der Oberfläche, sondern auch, indem man sie gehörig ausschneidet und zusammenfügt, zur Anfertigung von Modellen der Körper.

1. Das Prisma.

Fig. 189 stellt in I den Grundriß, in II den Aufriß, in III das Netz eines senkrechten fünfseitigen Prisma dar, dessen Grundfläche auf der Horizontalebene ruht, und von welchem eine Seitenfläche mit der Verticalebene parallel ist.

Fig. 189.



Der Grundriß ist mit der Grundfläche des Prisma congruent und stellt daher die Größe der Grundfläche dar, der Aufriß gibt die Höhe des Körpers.

Gib aus dem Grund- und Aufrisse a) die sichtbaren, b) die gedeckten Eckpunkte des Prisma an.

Gib aus den zwei Projectionen die Kanten des Prisma an, welche a) als sichtbare Strecken, b) als Punkte, c) als gedeckte Strecken erscheinen.

Gib die Flächen des Prisma an, welche a) als sichtbare Flächen, b) als Strecken, c) als gedeckte Flächen erscheinen.

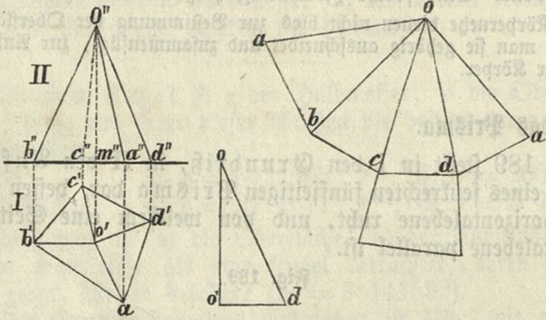
Dasselbe wird in Beziehung auf die Projectionen der später folgenden Körper anzugeben sein.

Um das Netz des Prisma zu erhalten, ziehe man die Parallelogramme (Rechtecke), welche die Seitenoberfläche bilden, so neben einander, daß je zwei eine gemeinschaftliche Seite haben, und construire dann über und unter einem dieser Parallelogramme die Grundflächen.

2. Die Pyramide.

Fig. 190 stellt in I den Grundriß, in II den Aufriß, in III das Netz einer auf der Horizontalebene aufgestellten vierseitigen senkrechten Pyramide dar.

Fig. 190.



Der Grundriß gibt die Grundfläche, der Aufriß die Höhe der Pyramide.

Jede Seitenkante od kann als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes dargestellt werden, dessen Katheten der Grundriß o'd' dieser Kante und die Höhe o''m der Pyramide ist.

Das Netz einer Pyramide erhält man, wenn man zuerst die Seitendreiecke nebeneinander so construirt, daß sie den Scheitel gemeinschaftlich haben, und an eines dieser Dreiecke unten die Grundfläche anlegt.

Wie construirt man das Netz eines senkrechten Pyramidenstumpfes?

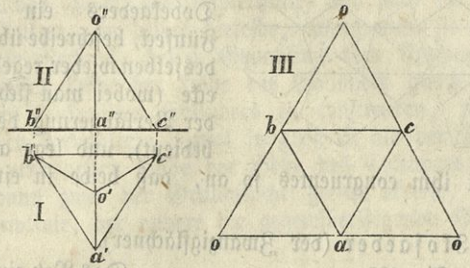
3. Die regelmäßigen Körper.

a) Das Tetraeder (der Vierflächner).

Fig. 191 I ist der Grundriß, II der Aufriß, III das Netz eines Tetraeders.

Um das Netz eines Tetraeders zu erhalten, construire man mit der Kante des Tetraeders ein gleichseitiges Dreieck, und sodann über jeder Seite wieder ein gleichseitiges Dreieck.

Fig. 191.



b) Das Hexaeder (der Sechsflächner, Würfel, Cubus).

Fig. 192.

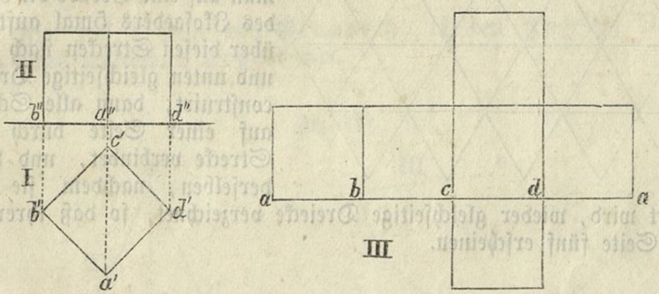


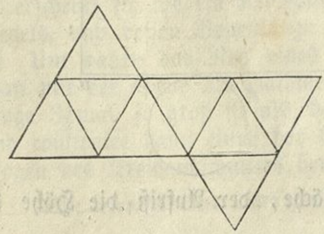
Fig. 192 I stellt den Grundriß, II den Aufriß, III das Netz eines Hexaeders dar.

Das Netz des Würfels erhält man, wenn man die vier Quadrate, welche die Seitenoberfläche bilden, neben einander zeichnet und dann an den entgegengesetzten Seiten eines dieser Quadrate noch zwei Quadrate construirt.

c) Das Oktaeder (der Achtflächner).

Bei diesem und den folgenden regelmäßigen Körpern beschränken wir uns auf die Construction der Netze.

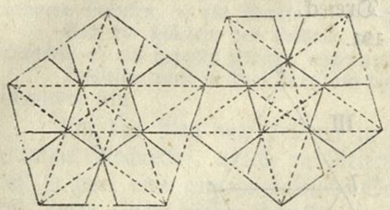
Fig. 193.



Das Netz eines Oktaeders (Fig. 193) wird erhalten, wenn man mit der Kante des Oktaeders zuerst das Netz eines Tetraeders zeichnet und dann an dieses ein zweites mit ihm congruentes Netz so anlegt, daß beide Netze eine Seite gemeinschaftlich haben.

d) Das Dodekaeder (der Zwölfflächner).

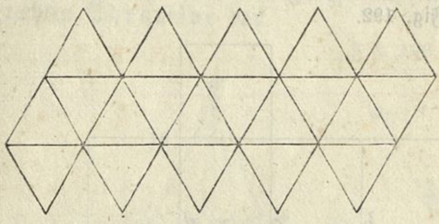
Fig. 194.



Um das Netz des Dodekaeders (Fig. 194) zu construiren, zeichne man mit der Kante des Dodekaeders ein regelmäßiges Fünfeck, beschreibe über den Seiten desselben wieder regelmäßige Fünfecke (wobei man sich mit Vortheil der Verlängerung der Diagonalen bedient), und lege an dieses Netz ein zweites mit ihm congruentes so an, daß beide in einer Seite zusammenstoßen.

e) Das Ikosaeder (der Zwanzigflächner).

Fig. 195.

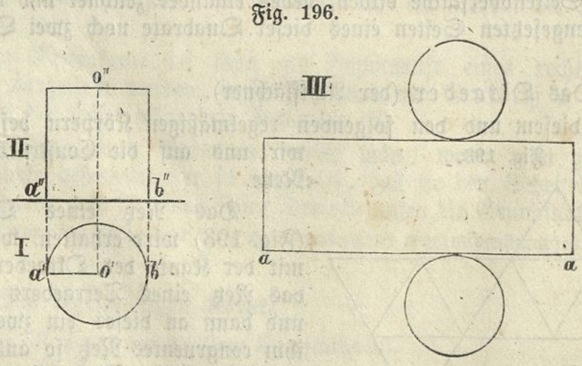


Das Netz eines Ikosaeders (Fig. 195) erhält man, wenn man auf eine Gerade die Kante des Ikosaeders 5mal aufträgt, über diesen Strecken nach oben und unten gleichseitige Dreiecke construirt, dann alle Scheitel auf einer Seite durch eine Strecke verbindet, und längs derselben, nachdem sie verlängert wird, wieder gleichseitige Dreiecke verzeichnet, so daß ihrer auf jeder Seite fünf erscheinen.

4. Der Cylinder.

Fig. 196 stellt in I den Grundriß, in II den Aufriß, in III das Netz eines senkrechten Cylinders dar.

Fig. 196.



Der Grundriß gibt die Grundfläche, der Aufriß die Höhe des Cylinders an.

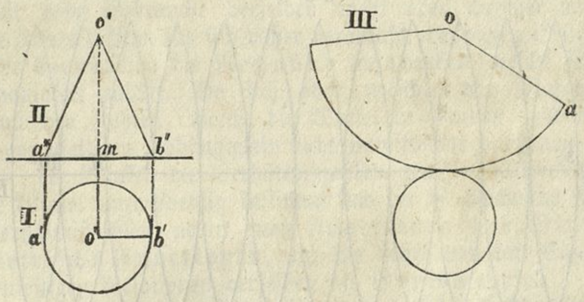
Was für Gebilde sind der Grundriß und der Aufriß eines Cylinders, der mit seiner Mantelfläche auf der Horizontalebene ruht, und dessen Achse mit der Verticalebene parallel ist?

Denkt man sich die Mantelfläche eines senkrechten Cylinders vom Cylinder trennbar (z. B. als Papierhülle) und nach der Richtung einer Seite durchschnitten, so bildet dieselbe, wenn man sie auf eine Ebene ausbreitet, ein Rechteck, dessen Grundlinie dem Umfange der Grundfläche, und dessen Höhe der Höhe des Cylinders gleich ist. Um daher das Netz eines senkrechten Cylinders zu construiren, zeichne man ein Rechteck, dessen Grundlinie $3\frac{1}{7}$mal so groß ist als der Durchmesser der Grundfläche, und dessen Höhe der Höhe des Cylinders gleich ist, und beschreibe sodann zwei der Grundfläche gleiche Kreise, von denen der eine die Grundlinie, der andere die gegenüberliegende Seite des Rechteckes berührt.

5. Der Kegel.

Fig. 197 I stellt den Grundriß, II den Aufriß, III das Netz eines senkrechten Kegels dar.

Fig. 197.



Der Grundriß gibt den Halbmesser der Grundfläche, der Aufriß die Höhe und die Seite des Kegels.

Wird die Mantelfläche des Kegels auf eine Ebene ausgebreitet, so erscheint sie als ein Kreisausschnitt, dessen Halbmesser die Seite des Kegels, und dessen Bogenlänge der Umfang der Grundfläche des Kegels ist. Um daher das Netz eines senkrechten Kegels zu erhalten, zeichne man mit der Seite als Halbmesser einen Kreisausschnitt, dessen Bogenlänge $3\frac{1}{7}$mal so groß ist als der Umfang der Grundfläche des Kegels, und construire dann einen der Grundfläche gleichen Kreis, welcher den Bogen des Kreisausschnittes berührt.

Wie wird das Netz eines senkrechten Kegelstumpfes construirt?

6. Die Kugel.

Fig. 198.

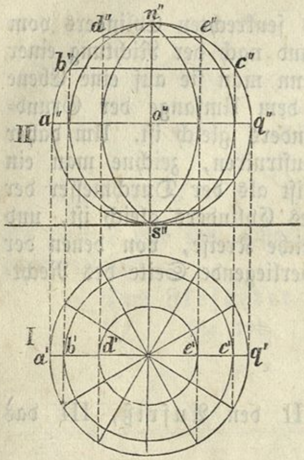
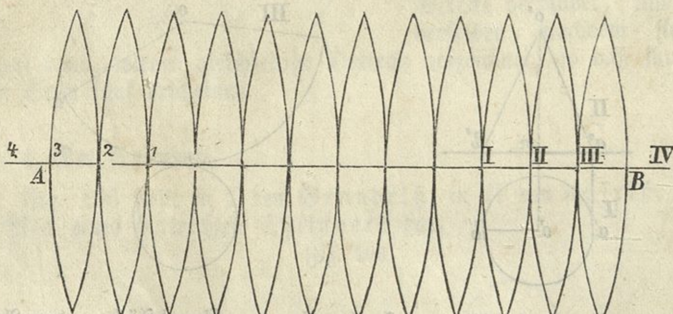


Fig. 198 I stellt den Grundriß, II den Aufriß einer Kugel dar.

Der Grund- und der Aufriß einer Kugel sind Kreise, deren Durchmesser dem Durchmesser der Kugel gleich ist. Steht die Axe der Kugel auf der Horizontalebene senkrecht, so erscheinen im Grundriß alle Meridiane als Durchmesser, im Aufriß einer als Kreis, einer als Durchmesser und alle übrigen als Ellipsen, die Parallelkreise erscheinen im Grundriß als concentrische Kreise, im Aufriß als parallele Sehnen.

Die Oberfläche der Kugel läßt sich, da sie doppelt gekrümmt ist, nicht in eine Ebene ausbreiten; daher kann von der Kugelfläche auch kein vollkommen genaues Netz construirt werden. Ein angenähertes Netz der Kugel (Fig. 199) erhält man durch folgendes Verfahren:

Fig. 199.



Man theile eine Strecke AB, welche $3\frac{1}{7}$mal so groß ist als der Durchmesser der Kugel, in 12 gleiche Theile und trage auf deren Verlängerungen über A und B hinaus noch je 9 solche Theile auf. Beschreibt man dann mit einem Halbmesser von 10 solchen Theilen aus den Punkten 1, 2, 3,..., und ebenso aus den Punkten I, II, III,... Kreisbogen, welche die Gerade AB schneiden, so erhält man 12 gleiche Zweiecke, welche gehörig zusammengebogen, ziemlich genau die Kugelfläche geben.

Dritter Theil.

Grundzüge der ebenen Trigonometrie.

---

§. **216.** Die Planimetrie lehrt, daß durch drei von einander unabhängige Stücke eines Dreieckes dieses im Allgemeinen bestimmt ist; sie zeigt auch, wie aus den gegebenen drei Stücken durch Construction die übrigen gefunden und die so gefundenen durch Messung in Zahlen ausgedrückt werden können. Die Bestimmungen geometrischer Größen durch Construction haben jedoch den Uebelstand, daß sie wegen der Unvollkommenheit der dabei benöthigten Instrumente und wegen der Ungenauigkeit beim Gebrauche derselben mehr oder weniger mangelhafte Resultate liefern. Man sah sich daher veranlaßt, bei diesen Bestimmungen anstatt der Construction die Rechnung anzuwenden, welche jeden Grad von Genauigkeit zuläßt. Da sich aber zwischen den Maßzahlen der Seiten und den Zahlen, welche die Winkel in Graden ausdrücken, die Art der gegenseitigen Abhängigkeit nicht unmittelbar darstellen läßt, hat man statt der Winkel die Verhältnißzahlen gewisser Strecken, welche durch die Winkel unzweideutig bestimmt sind, in die Rechnung eingeführt. Diese Verhältnißzahlen nennt man Functionen der Winkel oder goniometrische Functionen, und die Lehre von den Eigenschaften und gegenseitigen Relationen derselben die Goniometrie.

Die Anwendung der Winkelfunctionen auf die Berechnung der Dreiecke bildet den Gegenstand der Trigonometrie, und zwar der ebenen oder sphärischen Trigonometrie, je nachdem sie sich auf die ebenen oder sphärischen Dreiecke bezieht.

Hier soll nur von der ebenen Trigonometrie die Rede sein.

Erster Abschnitt.

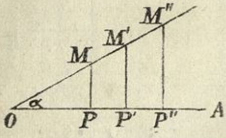
Die Goniometrie.

1. Darstellung der Winkelfunctionen am rechtwinkligen Dreiecke.

§. **217.** Zieht man (Fig. 200) von beliebigen Punkten M, M′, M″,.. des einen Schenkels eines Winkels AOB $= \alpha$ die Senkrechten MP, M′P′,

$M''P''$,.. auf den andern Schenkel, so entstehen rechtwinklige Dreiecke, welche den Winkel α gemeinschaftlich haben, und unter einander ähnlich sind. Es ist daher

Fig. 200.



$$\frac{MP}{OM} = \frac{M'P'}{OM'} = \frac{M''P''}{OM''} = \ldots$$

Ebenso ist

$$\frac{OP}{OM} = \frac{OP'}{OM'} = \frac{OP''}{OM''} = \ldots, \text{ und}$$

$$\frac{MP}{OP} = \frac{M'P'}{OP'} = \frac{M''P''}{OP''} = \ldots$$

Diese Verhältnisse, welche beziehungsweise für denselben Winkel stets gleich sind, dagegen bei einer Aenderung des Winkels sich gleichfalls ändern, folglich einzig von der Größe des Winkels abhängen, bieten ein einfaches Mittel dar, die Größe des entsprechenden Winkels darzustellen.

§. **218.** In einem rechtwinkligen Dreiecke MPO (Fig. 200) heißt:

1. das Verhältniß der dem Winkel α gegenüberstehenden Kathete zu der Hypotenuse der Sinus des Winkels α, $\frac{MP}{OM} = \sin\alpha$;

2. Das Verhältniß der dem Winkel α anliegenden Kathete zu der Hypotenuse der Cosinus dieses Winkels, $\frac{OP}{OM} = \cos\alpha$;

3. das Verhältniß der dem Winkel α gegenüberliegenden Kathete zu der andern Kathete die Tangente des Winkels α, $\frac{MP}{OP} = \operatorname{tang}\alpha$;

4. das Verhältniß der dem Winkel α anliegenden Kathete zu der andern Kathete die Cotangente dieses Winkels, $\frac{OP}{MP} = \cot\alpha$;

5. das Verhältniß der Hypotenuse zu der dem Winkel α anliegenden Kathete die Secante des Winkels α, $\frac{OM}{OP} = \sec\alpha$;

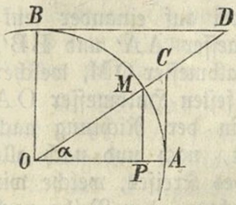
6. das Verhältniß der Hypotenuse zu der dem Winkel α gegenüberliegenden Kathete die Cosecante dieses Winkels, $\frac{OM}{MP} = \operatorname{cosec}\alpha$.

Sinus, Cosinus, Tangente, Cotangente, Secante und Cosecante sind daher, da sie von der Größe des Winkels α abhängen und durch denselben bestimmt sind, Winkelfunctionen. Sie sind, wie aus ihrer Erklärung hervorgeht, sämmtlich unbenannte Zahlen.

2. Darstellung der Winkelfunctionen durch Linien am Kreise und Begriffserweiterung derselben.

§. 219. Beschreibt man aus O (Fig. 201) einen Kreis, betrachtet den Halbmesser OA als unbeweglich und läßt von demselben einen zweiten Halbmesser OM sich allmälig wegdrehen, so wird dieser nach und nach mit OA verschiedene Winkel bilden, von denen einer AOM $= \alpha$ ist.

Fig. 201.



a) Zieht man nun von dem Endpunkte M des beweglichen Halbmessers OM auf den festen OA die Senkrechte MP, so ist nach §. 218

$$\frac{MP}{OM} = \sin\alpha \text{ und } \frac{OP}{OM} = \cos\alpha.$$

b) Errichtet man ferner in dem Endpunkte A des festen Halbmessers OA auf diesen eine Senkrechte, welche also den Kreis berührt und welche die Verlängerung des andern Halbmessers OM in C trifft, so hat man, da $\triangle OAC \sim OPM$ ist,

$$\frac{AC}{OA} = \frac{MP}{OP} = \operatorname{tang}\alpha \text{ und } \frac{OC}{OA} = \frac{OM}{OP} = \sec\alpha.$$

c) Wird endlich $OB \perp OA$, und dann in B auf OB eine Senkrechte errichtet, welche die Verlängerung des Halbmessers OM in D trifft, so ist wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke OBD und OPM

$$\frac{BD}{OB} = \frac{OP}{MP} = \cot\alpha \text{ und } \frac{OD}{OB} = \frac{OM}{MP} = \operatorname{cosec}\alpha.$$

Die Strecken MP, OP, AC, OC, BD und OD, deren Verhältnisse zum Halbmesser des Kreises die Winkelfunctionen ausdrücken, heißen **goniometrische Linien**, und zwar MP die **Sinuslinie**, OP die **Cosinuslinie**, AC die **Tangentenlinie**, OC die **Secantenlinie**, BD die **Cotangentenlinie** und OD die **Cosecantenlinie**.

Da diese Verhältnisse nur von der Größe des Winkels α abhängen und für jeden beliebigen Halbmesser ungeändert bleiben, so kann man, ohne die Größe der Winkelfunctionen zu ändern, die Längeneinheit selbst als Halbmesser des Kreises annehmen und somit $OA = OM = OB = 1$ setzen. Dann gehen die obigen Verhältnisse in die folgenden Ausdrücke über:

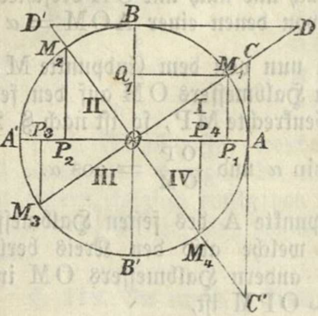
$$MP = \sin\alpha, \qquad AC = \operatorname{tang}\alpha, \qquad BD = \cot\alpha,$$
$$OP = \cos\alpha; \qquad OC = \sec\alpha; \qquad OD = \operatorname{cosec}\alpha,$$

wo jedoch unter MP, OP, AC, OC, BD und OD nicht die goniometrischen Linien, sondern ihre **Maßzahlen** zu verstehen sind.

Die Winkelfunctionen können daher als Maßzahlen der entsprechenden goniometrischen Linien am Kreise für den Halbmesser als Längeneinheit aufgefaßt werden.

§. **220**. Die in §. 218 aufgestellten Erklärungen der Winkelfunctionen gelten blos für spitze Winkel, da an der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes nur spitze Winkel liegen können. Die Darstellung der Winkelfunctionen am Kreise macht es nun möglich, die Begriffe derselben auf Winkel von jeder Größe auszudehnen.

Fig. 202.



Zieht man in einem Kreise (Fig. 202) zwei auf einander senkrechte Durchmesser AA' und BB', so wird ein Halbmesser OM, welcher sich von dem festen Halbmesser OA aus um O in der Richtung nach links wegdreht, nach und nach alle Quadranten des Kreises, welche wir nach jener Richtung der Reihe nach den ersten, zweiten, dritten, vierten nennen wollen, durchlaufen und während dieser Bewegung mit dem festen Halbmesser OA alle Winkel α von 0^0 bis 360^0 bilden.

Ein Winkel AOM, dessen ein Schenkel OA ist und dessen zweiter Schenkel OM_1, OM_2, .. im ersten, zweiten, .. Quadranten liegt, wird gewöhnlich in abgekürzter Ausdrucksweise ein Winkel im ersten, zweiten, .. Quadranten genannt.

Construirt man nun auf gleiche Weise, wie in §. 219 unter a), b) und c) für einen Winkel im ersten Quadranten angegeben wurde, analoge Strecken auch für Winkel im zweiten, dritten, vierten Quadranten, so sind dieselben die entsprechenden goniometrischen Linien für diese Winkel. So ist z. B. für den Winkel AOM_2

M_2P_2 die Sinuslinie, OP_2 die Cosinuslinie;
AC^1 die Tangentenlinie, OC^1 die Secantenlinie;
BD^1 die Cotangentenlinie, CD^1 die Cosecantenlinie.

Die Maßzahlen der goniometrischen Linien für den Halbmesser als Längeneinheit sind dann die bezüglichen Winkelfunctionen.

§. **221**. Vorzeichen der Winkelfunctionen.

Für die Winkel AOM_1, AOM_2, AOM_3 und AOM_4 (Fig. 202) liegen die gezogenen Senkrechten bald über, bald unter dem Schenkel OA, ferner bald rechts, bald links vom Scheitel O. Zur genauen Bestimmung derselben muß daher dieser Gegensatz ihrer Lage durch die Vorzeichen des Positiven und Negativen ausgedrückt werden, wodurch dann auch die Winkelfunctionen der Größe der Winkel entsprechende Vorzeichen erhalten.

Man nimmt allgemein die goniometrischen Linien in ihrer Lage für den spitzen Winkel als positiv an; die Linien in einer Lage, welche jener entgegengesetzt ist, müssen dann als negativ angesehen werden.

1. Die Sinuslinie ist positiv, wenn sie von dem unbeweglichen Schenkel OA nach der Seite der Winkelfläche (hier über OA), und negativ, wenn sie nach der entgegengesetzten Seite (hier unter OA) liegt; der Sinus ist daher im 1. und 2. Quadranten positiv, im 3. und 4. Quadranten negativ.

2. Die Cosinuslinie ist in der Richtung OA (hier rechts vom Scheitel O) positiv, in der entgegengesetzten Richtung OA′ (hier links von O) negativ; der Cosinus ist daher im 1. und 4. Quadranten positiv, im 2. und 3. negativ.

3. Die Tangentenlinie ist nach der Seite der Winkelfläche (hier über OA) positiv, nach der entgegengesetzten Seite (hier unter OA) negativ; folglich die Tangente im 1. und 3. Quadranten positiv, im 2. und 4. negativ.

4. Die Secantenlinie ist positiv, wenn sie durch Vorwärtsverlängerung, und negativ, wenn sie durch Rückwärtsverlängerung des beweglichen Schenkels erhalten wird; somit die Secante im 1. und 4. Quadranten positiv, im 2. und 3. negativ.

5. Die Cotangentenlinie ist nach der Richtung des unbeweglichen Schenkels (hier rechts von B) positiv, in der entgegengesetzten Richtung (hier links von B) negativ; daher ist die Cotangente im 1. und 3. Quadranten positiv, im 2. und 4. negativ.

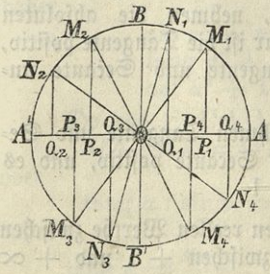
6. Die Cosecantenlinie ist positiv, wenn sie durch Vorwärtsverlängerung, und negativ, wenn sie durch Rückwärtsverlängerung des beweglichen Schenkels erhalten wird, folglich die Cosecante im 1. und 2. Quadranten positiv, im 3. und 4. negativ.

§. **221**. Zu- und Abnahme der Functionen bei dem Wachsen des Winkels.

Aendert sich der Winkel α, so ändern sich auch die zugehörigen goniometrischen Linien, daher auch ihre Maßzahlen, d. i. die Winkelfunctionen.

a) Absoluter Werth und Vorzeichen des Sinus und des Cosinus. (Fig. 203.)

Fig. 203.



1. Je kleiner der Winkel α, desto kleiner ist auch der Sinus, während sich der Cosinus ohne Ende der Einheit nähert; fallen beide Schenkel zusammen, so wird $\sin 0^0 = 0$, $\cos 0^0 = +1$. Für sehr kleine Winkel ist der Unterschied zwischen dem Bogen und dem Sinus des Winkels um so kleiner, je mehr sich der Winkel der Null nähert, wobei jedoch der Sinus stets kleiner bleibt als der Bogen.

2. Wächst α von 0^0 bis 90^0, so nimmt $\sin \alpha$ zu, anfangs rascher, dann langsamer; $\cos \alpha$ dagegen nimmt ab, anfangs langsamer,

dann rascher; beide sind positiv. Für $\alpha = 90^0$ fällt die Sinuslinie mit dem beweglichen Schenkel zusammen, und es ist daher $\sin 90^0 = +1$, $\cos 90^0 = 0$.

3. Wächst α von 90^0 bis 180^0, so ist der Sinus positiv und abnehmend, der Cosinus dagegen negativ und dem absoluten Werthe nach wachsend. Wird $\alpha = 180^0$, so hat man $\sin 180^0 = 0$, $\cos 180^0 = -1$.

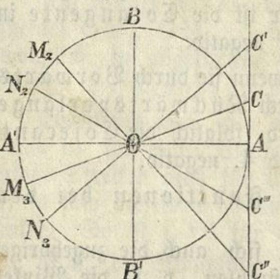
4. Während α von 180^0 bis 270^0 zunimmt, ist $\sin \alpha$ negativ und absolut zunehmend, $\cos \alpha$ auch negativ, aber absolut abnehmend; und es wird endlich $\sin 270^0 = -1$, $\cos 270^0 = 0$.

5. Wird $\alpha > 270^0$ aber $< 360^0$, so ist der Sinus negativ und sein absoluter Werth abnehmend, der Cosinus positiv und wachsend. Für $\alpha = 360^0$ werden Sinus und Cosinus wieder so groß wie für $\alpha = 0^0$, nämlich $\sin 360^0 = 0$, $\cos 360^0 = +1$.

Sinus und Cosinus liegen demnach immer zwischen den Grenzen $+1$ und -1.

b) Absoluter Werth und Vorzeichen der Tangente und der Secante. (Fig. 204.)

Fig. 204.



1. Je kleiner der Winkel, desto kleiner wird auch die Tangente, während sich die Secante der Einheit nähert; fallen die beiden Schenkel zusammen, so hat man $\tan 0^0 = 0$ und $\sec 0^0 = +1$. Ferner: je kleiner der Winkel, desto kleiner wird auch der Unterschied zwischen dem Bogen und der Tangente des Winkels, wobei jedoch die Tangente stets größer bleibt als der Bogen.

2. Wächst α von 0^0 bis 90^0, so sind $\tan \alpha$ und $\sec \alpha$ positiv und zunehmend. Wird endlich $\alpha = 90^0$, so werden Tangente und Secante unendlich groß.

3. Nimmt α über 90^0 hinaus bis 180^0 zu, so werden Tangente und Secante negativ und dem absoluten Werthe nach abnehmend. Erreicht α die Größe 180^0, so wird $\tan 180^0 = 0$, $\sec 180^0 = -1$.

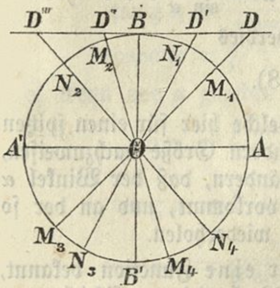
4. Wenn α von 180^0 bis 270^0 wächst, nehmen die absoluten Werthe der Tangente und Secante zu, und zwar ist die Tangente positiv, die Secante negativ. Für $\alpha = 270^0$ sind Tangente und Secante unendlich groß.

5. Wächst α über 270^0 bis 360^0, so nehmen Tangente und Secante absolut ab, die Tangente ist negativ, die Secante positiv, und es wird endlich $\tan 360^0 = 0$, $\sec 360^0 = +1$.

Die Tangente kann demnach alle möglichen reellen Werthe zwischen $-\infty$ und $+\infty$, die Secante alle Werthe zwischen $+1$ und $+\infty$ und zwischen -1 und $-\infty$ erhalten.

c) Absoluter Werth und Vorzeichen der Cotangente und der Cosecante. (Fig. 205.)

Fig. 205.



1. Für sehr kleine Winkel nehmen Cotangente und Cosecante ohne Ende zu und werden beide für $\alpha = 0^0$ unendlich groß.

2. Im 1. Quadranten nehmen Cotangente und Cosecante mit dem wachsenden Winkel ab, beide sind positiv; $\cot 90^0 = 0$, $\operatorname{cosec} 90^0 = +1$.

3. Im 2. Quadranten wachsen die absoluten Werthe der Cotangente und Cosecante mit dem wachsenden Winkel, bis sie bei 180^0 unendlich groß werden; die Cotangente ist negativ, die Cosecante positiv.

4. Im 3. Quadranten nehmen Cotangente und Cosecante mit dem wachsenden Winkel absolut ab, die Cotangente ist positiv, die Cosecante negativ; $\cot 270^0 = 0$, $\operatorname{cosec} 270^0 = -1$.

5. Im 4. Quadranten sind Cotangente und Cosecante negativ und dem absoluten Werthe nach wachsend; für $\alpha = 360^0$ werden beide unendlich groß.

Die Cotangente liegt also zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$, die Cosecante zwischen $+1$ und $+\infty$ und zwischen -1 und $-\infty$.

3. Relationen zwischen den Winkelfunctionen desselben Winkels.

§. **222.** Es sei (Fig. 201) der Winkel $AOM = \alpha$, $OA = OM = OB = 1$, ferner $MP \perp OA$, $AC \perp OA$, $OB \perp OA$ und $BD \perp OB$; dann ist

$$MP = \sin \alpha, \qquad AC = \operatorname{tang} \alpha, \qquad BD = \cot \alpha,$$
$$OP = \cos \alpha; \qquad OC = \sec \alpha; \qquad OD = \operatorname{cosec} \alpha.$$

In den rechtwinkligen Dreiecken MPO, CAO, DBO ist nun

$$MP^2 + OP^2 = OM^2,$$
$$AC^2 + OA^2 = OC^2,$$
$$BD^2 + OB^2 = OD^2;$$

daher

$$\sin \alpha^2 + \cos \alpha^2 = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$
$$\operatorname{tang} \alpha^2 + 1 \quad = \sec \alpha^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$
$$\cot \alpha^2 + 1 \quad = \operatorname{cosec} \alpha^2 \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

Da das $\triangle CAO \sim MPO$ ist, so hat man

$$CA : MP = OA : OP \text{ und } OC : OM = OA : OP,$$

oder

$$\operatorname{tang} \alpha : \sin \alpha = 1 : \cos \alpha \text{ und } \sec \alpha : 1 = 1 : \cos \alpha,$$

daher

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \; . \; . \; . \; 4), \qquad \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} \; . \; . \; . \; 5).$$

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke OBD und MPO ergibt sich ebenso

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \;\ldots\; 6), \qquad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} \;\ldots\; 7).$$

Aus den Ausdrücken 4) und 6) folgt überdies

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{1}{\cot\alpha} \;\ldots\; 8).$$

Um die Richtigkeit dieser Gleichungen, welche hier für einen spitzen Winkel abgeleitet wurden, für Winkel jeder andern Größe nachzuweisen, hat man nur nöthig, die Fig. 201 dahin abzuändern, daß der Winkel α im zweiten, dritten oder vierten Quadranten vorkommt, und an der so geänderten Figur die obigen Entwicklungen zu wiederholen.

§. **223**. Ist von einem Winkel auch nur eine Function bekannt, so lassen sich aus derselben mittelst der in §. 222 abgeleiteten Gleichungen auch die übrigen Functionen leicht bestimmen.

a) Es sei $\sin\alpha$ gegeben.

Aus der Gleichung 1) folgt $\cos\alpha^2 = 1 - \sin\alpha^2$, daher

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin\alpha^2}.$$

Aus 4) und 6) erhält man dann

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin\alpha^2}}, \text{ und}$$

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{1-\sin\alpha^2}}{\sin\alpha}.$$

Die Gleichungen 5) und 7) geben endlich

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin\alpha^2}}, \text{ und}$$

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}.$$

Man findet auf gleiche Weise,

b) wenn $\cos\alpha$ gegeben ist:

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos\alpha^2}, \qquad \operatorname{tang}\alpha = \frac{\sqrt{1-\cos\alpha^2}}{\cos\alpha},$$

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos\alpha^2}}, \qquad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha},$$

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\cos\alpha^2}};$$

c) wenn $\operatorname{tang}\alpha$ gegeben ist:

$$\sin\alpha = \frac{\operatorname{tang}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tang}\alpha^2}}, \qquad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tang}\alpha^2}},$$

$$\cot\alpha = \frac{1}{\operatorname{tang}\alpha}, \qquad \sec\alpha = \sqrt{1+\operatorname{tang}\alpha^2},$$

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{\sqrt{1+\operatorname{tang}\alpha^2}}{\operatorname{tang}\alpha};$$

d) wenn $\cot\alpha$ gegeben ist:

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\cot\alpha^2}},\qquad \cos\alpha = \frac{\cot\alpha}{\sqrt{1+\cot\alpha^2}},$$

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{1}{\cot\alpha},\qquad \sec\alpha = \frac{\sqrt{1+\cot\alpha^2}}{\cot\alpha},$$

$$\operatorname{cosec}\alpha = \sqrt{1+\cot\alpha^2};$$

e) wenn $\sec\alpha$ gegeben ist:

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{\sec\alpha^2-1}}{\sec\alpha},\qquad \cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha},$$

$$\operatorname{tang}\alpha = \sqrt{\sec\alpha^2-1},\ \cot\alpha = \frac{1}{\sqrt{\sec\alpha^2-1}},$$

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{\sec\alpha}{\sqrt{\sec\alpha^2-1}};$$

f) wenn $\operatorname{cosec}\alpha$ gegeben ist:

$$\sin\alpha = \frac{1}{\operatorname{cosec}\alpha},\qquad \cos\alpha = \frac{\sqrt{\operatorname{cosec}\alpha^2-1}}{\operatorname{cosec}\alpha},$$

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{cosec}\alpha^2-1}},\ \cot\alpha = \sqrt{\operatorname{cosec}\alpha^2-1},$$

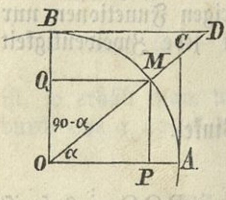
$$\sec\alpha = \frac{\operatorname{cosec}\alpha}{\sqrt{\operatorname{cosec}\alpha^2-1}}.$$

Welches Zeichen in den hier vorkommenden Quadratwurzeln bei vorgeschriebener Größe des Winkels zu nehmen sei, ergibt sich aus §. 220.

4. Relationen zwischen den Functionen verschiedener Winkel.

§. 224. Complementwinkel.

Fig. 206.



Zwei Complementwinkel (§. 14, 1) können allgemein durch α und $90^0 - \alpha$ ausgedrückt werden.

Es sei (Fig. 206) $OA = OM = OB = 1$, $MP \perp OA$, $AC \perp OA$, $OB \perp OA$, $BD \perp OB$ und $MQ \perp OB$, ferner $AOM = \alpha$, daher $BOM = 90^0 - \alpha$. Da

$$\begin{array}{lll}
\sin(90^0-\alpha) = MQ = OP & \text{und} & \cos\alpha = OP, \\
\cos(90^0-\alpha) = OQ = MP & \text{„} & \sin\alpha = MP, \\
\operatorname{tang}(90^0-\alpha) = BD & \text{„} & \cot\alpha = BD, \\
\cot(90^0-\alpha) = AC & \text{„} & \operatorname{tang}\alpha = AC, \\
\sec(90^0-\alpha) = OD & \text{„} & \operatorname{cosec}\alpha = OD, \\
\operatorname{cosec}(90^0-\alpha) = OC & \text{„} & \sec\alpha = OC.
\end{array}$$

ist, so folgt

$$\left.\begin{array}{ll}\sin(90^0-\alpha)=\cos\alpha, & \cos(90^0-\alpha)=\sin\alpha;\\ \tan(90^0-\alpha)=\cot\alpha, & \cot(90^0-\alpha)=\tan\alpha;\\ \sec(90^0-\alpha)=\operatorname{cosec}\alpha, & \operatorname{cosec}(90^0-\alpha)=\sec\alpha.\end{array}\right\}\ldots 9)$$

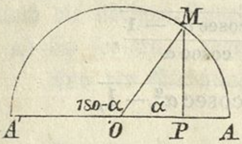
Man pflegt diese Gleichungen durch folgenden allgemeinen Satz auszudrücken: Jede Function eines spitzen Winkels ist gleich der Cofunction seines Complementwinkels.

Da die Secante und Cosecante in den logarithmisch-trigonometrischen Berechnungen nicht angewendet werden, so wollen wir uns in den nachfolgenden Entwicklungen auch nur auf den Sinus, Cosinus, die Tangente und Cotangente beschränken.

§. 225. Supplementwinkel.

Zwei Supplementwinkel (§. 14, 2) werden allgemein durch α und $180^0-\alpha$ bezeichnet.

Fig. 207.



Da (Fig. 207) für $OM = 1$, $MP \perp OA$ und $AOM = \alpha$

$\sin(180^0-\alpha) = MP$ und $\sin\alpha = MP$
$\cos(180^0-\alpha) = -OP$ und $\cos\alpha = OP$,

da ferner

$$\tan(180^0-\alpha)=\frac{\sin(180^0-\alpha)}{\cos(180^0-\alpha)},$$
$$\cot(180^0-\alpha)=\frac{\cos(180^0-\alpha)}{\sin(180^0-\alpha)}$$

ist, so ergibt sich

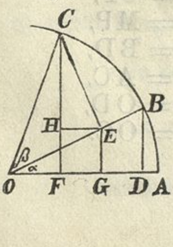
$$\left.\begin{array}{ll}\sin(180^0-\alpha)=\sin\alpha, & \cos(180^0-\alpha)=-\cos\alpha;\\ \tan(180^0-\alpha)=-\tan\alpha, & \cot(180^0-\alpha)=-\cot\alpha.\end{array}\right\}\ldots 10)$$

Zusatz. Kommen in einer Rechnung nur hohle Winkel in Betrachtung, so ist durch den Sinus ein Winkel nicht unzweideutig bestimmt, da zu demselben Sinus stets zwei Supplementwinkel, ein spitzer und ein stumpfer, gehören; dagegen gehört zu jeder der übrigen Functionen nur ein einziger, bestimmter Winkel, da das Vorzeichen jede Zweideutigkeit ausschließt.

5. Functionen zusammengesetzter Winkel.

§. 226. Summe zweier Winkel.

Fig. 208.



Ist (Fig. 208) W. $AOB = \alpha$, $BOC = \beta$, so ist $AOC = \alpha + \beta$. Nimmt man nun $OB = OC = 1$ an, und zieht $BD \perp OA$, $CE \perp OB$, $CF \perp OA$, so ist $BD = \sin\alpha$, $CE = \sin\beta$, $CF = \sin(\alpha+\beta)$, $OD = \cos\alpha$, $OE = \cos\beta$, $OF = \cos(\alpha+\beta)$.

Es soll nun $\sin(\alpha+\beta)$ und $\cos(\alpha+\beta)$ durch den Sinus und den Cosinus von α und β ausgedrückt werden. Zieht man $EG \perp OA$ und $EH \perp CF$, so ist

$$\sin(\alpha+\beta) = CF = HF + CH = EG + CH,$$
$$\cos(\alpha+\beta) = OF = OG - GF = OG - EH.$$

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke EGO und BDO folgt

$EG : BD = OE : OB$, $\quad OG : OD = OE : OB$, oder
$EG : \sin\alpha = \cos\beta : 1$, $\quad OG : \cos\alpha = \cos\beta : 1$,

daher

$$EG = \sin\alpha \cos\beta, \qquad OG = \cos\alpha \cos\beta.$$

Da der Winkel $ECH = BOD$ ist (§. 29), und somit die Dreiecke EHC und BDO ähnlich sind, so hat man auch

$CH : OD = CE : OB$, $\quad EH : BD = CE : OB$, oder
$CH : \cos\alpha = \sin\beta : 1$, $\quad EH : \sin\alpha = \sin\beta : 1$;

daher

$$CH = \cos\alpha \sin\beta, \qquad EH = \sin\alpha \sin\beta.$$

Substituirt man nun die für EG, OG, CH, EH gefundenen Werthe in den obigen Ausdrücken für $\sin(\alpha+\beta)$ und $\cos(\alpha+\beta)$, so erhält man

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \ \ldots \ 11)$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \ \ldots \ 12)$$

Hier wurden α und β, und selbst die Summe $\alpha + \beta$ als spitze Winkel vorausgesetzt. Die Giltigkeit der Ausdrücke 11) und 12) kann übrigens auch für jeden andern Fall, der hinsichtlich der Größe von α, β und $\alpha + \beta$ möglich ist, nachgewiesen werden; die Beweisführung ist für jeden Fall mit der obigen wortgetreu übereinstimmend, mit alleiniger Ausnahme der Vorzeichen, in welchen während der Entwicklung eine Verschiedenheit eintritt, die sich aber in den Endresultaten wieder behebt.

Da

$$\operatorname{tang}(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}$$

ist, so erhält man, wenn man Zähler und Nenner des letzteren Bruches durch $\cos\alpha \cos\beta$ dividirt,

$$\operatorname{tang}(\alpha+\beta) = \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1 - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \frac{\sin\beta}{\cos\beta}}, \text{ oder}$$

$$\operatorname{tang}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tang}\alpha + \operatorname{tang}\beta}{1 - \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\beta} \ \ldots \ 13)$$

Auf analoge Art findet man

$$\cot(\alpha+\beta) = \frac{\cot\alpha\cot\beta - 1}{\cot\alpha + \cot\beta} \ \ldots \ 14)$$

§. **227**. Doppelte und halbe Winkel.

1. Setzt man in den Formeln 11) bis 14) $\beta = \alpha$, so erhält man

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \ldots 15)$$
$$\cos 2\alpha = \cos \alpha^2 - \sin \alpha^2 \ldots 16)$$
$$\operatorname{tang} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tang} \alpha}{1 - \operatorname{tang} \alpha^2} \ldots 17)$$
$$\cot 2\alpha = \frac{\cot \alpha^2 - 1}{2 \cot \alpha} \ldots 18)$$

aus welchen Gleichungen sich die Functionen des doppelten Winkels finden lassen, wenn jene des einfachen Winkels bekannt sind.

2. Setzt man in den Formeln 15) und 16) überall α statt 2α, daher $\frac{\alpha}{2}$ statt α, so verwandeln sich dieselben in folgende:

$$\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \ldots 19)$$
$$\cos \alpha = \cos \frac{\alpha^2}{2} - \sin \frac{\alpha^2}{2} \ldots 20)$$

Da

$$1 = \cos \frac{\alpha^2}{2} + \sin \frac{\alpha^2}{2} \text{ nach } 1)$$
$$\cos \alpha = \cos \frac{\alpha^2}{2} - \sin \frac{\alpha^2}{2} \text{ nach } 20)$$

ist, so findet man, wenn diese beiden Gleichungen addirt und subtrahirt werden,

$$1 + \cos \alpha = 2 \cos \frac{\alpha^2}{2} \ldots 21)$$
$$1 - \cos \alpha = 2 \sin \frac{\alpha^2}{2} \ldots 22)$$

daher

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \ldots 23)$$
$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \ldots 24)$$

Aus diesen beiden Ausdrücken folgt ferner durch Division

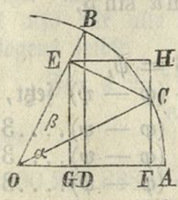
$$\operatorname{tang} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} \ldots 25)$$
$$\cot \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} \ldots 26)$$

Mittelst den Formeln 23—26 kann man die Functionen des halben Winkels bestimmen, wenn der Cosinus des ganzen Winkels bekannt ist. Welches Zeichen die Quadratwurzel bei vorgeschriebener Größe des Winkels erhalten müsse, ergibt sich aus §. 220.

§. 228. Differenz zweier Winkel.

Ist (Fig. 209) W. AOB $= \alpha$, BOC $= \beta$, so ist AOC $= \alpha - \beta$. Nimmt man nun OB $=$ OC $= 1$ an, und zieht BD $\perp$ OA, CE $\perp$ OB, CF $\perp$ OA, so ist

Fig. 209.



$$\text{BD} = \sin\alpha, \quad \text{CE} = \sin\beta, \quad \text{CF} = \sin(\alpha - \beta),$$
$$\text{OD} = \cos\alpha, \quad \text{OE} = \cos\beta, \quad \text{OF} = \cos(\alpha - \beta).$$

Es soll nun $\sin(\alpha - \beta)$ und $\cos(\alpha - \beta)$ durch den Sinus und den Cosinus von α und β ausgedrückt werden. Zieht man EG $\perp$ OA und EH $\perp$ CF, so ist

$$\sin(\alpha - \beta) = \text{CF} = \text{HF} - \text{CH} = \text{EG} - \text{CH},$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \text{OF} = \text{OG} + \text{GF} = \text{OG} + \text{EH}.$$

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke EGO und BDO folgt

$$\text{EG} : \text{BD} = \text{OE} : \text{OB}, \qquad \text{OG} : \text{OD} = \text{OE} : \text{OB}, \text{ oder}$$
$$\text{EG} : \sin\alpha = \cos\beta : 1, \qquad \text{OG} : \cos\alpha = \cos\beta : 1,$$
daher $\quad \text{EG} = \sin\alpha \cos\beta, \qquad \text{OG} = \cos\alpha \cos\beta.$

Da der Winkel ECH $=$ BOD ist (§. 29), und somit die Dreiecke EHC und BDO ähnlich sind, so hat man auch

$$\text{CH} : \text{OD} = \text{CE} : \text{OB}, \qquad \text{EH} : \text{BD} = \text{CE} : \text{OB}, \text{ oder}$$
$$\text{CH} : \cos\alpha = \sin\beta : 1, \qquad \text{EH} : \sin\alpha = \sin\beta : 1,$$
daher $\quad \text{CH} = \cos\alpha \sin\beta, \qquad \text{EH} = \sin\alpha \sin\beta.$

Substituirt man die für EG, OG, CH, EH gefundenen Werthe in den obigen Ausdrücken für $\sin(\alpha - \beta)$ und $\cos(\alpha - \beta)$, so erhält man

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta \ldots 27),$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta \ldots 28).$$

Diese beiden Formeln, deren Richtigkeit hier unter der Voraussetzung, daß α und β spitze Winkel sind, bewiesen wurde, sind, wie man auf gleiche Art nachweisen kann, auch für jeden andern beliebigen Werth von α und β giltig.

Aus den Formeln 27) und 28) erhält man durch Division und entsprechende Umformung

$$\operatorname{tang}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tang}\alpha - \operatorname{tang}\beta}{1 + \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\beta} \ldots 29),$$

$$\cot(\alpha - \beta) = \frac{\cot\alpha \cot\beta + 1}{\cot\beta - \cot\alpha} \ldots 30).$$

§. 229. Verwandlung von Summen und Differenzen der Winkelfunctionen in Producte und Quotienten.

Da die trigonometrischen Rechnungen sämmtlich logarithmisch durchgeführt werden, so sind in denselben die Summen und Differenzen von Functionen möglichst zu vermeiden. Es soll daher gezeigt werden, wie die Summen und Differenzen der Winkelfunctionen in Producte und Quotienten umgewandelt werden können.

Aus den Formeln 11), 12), 27) und 28) erhält man durch Addition und Subtraction

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta) &= 2\sin\alpha\cos\beta,\\ \sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta) &= 2\cos\alpha\sin\beta,\\ \cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta) &= 2\cos\alpha\cos\beta,\\ \cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta) &= -2\sin\alpha\sin\beta,\end{aligned}$$

oder wenn man

$$\alpha+\beta=\varphi, \qquad \alpha-\beta=\psi,$$

daher $\alpha=\frac{1}{2}(\varphi+\psi)$, $\beta=\frac{1}{2}(\varphi-\psi)$ setzt,

$$\sin\varphi+\sin\psi = 2\sin\tfrac{1}{2}(\varphi+\psi)\cos\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)\ldots 31)$$
$$\sin\varphi-\sin\psi = 2\cos\tfrac{1}{2}(\varphi+\psi)\sin\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)\ldots 32)$$
$$\cos\varphi+\cos\psi = 2\cos\tfrac{1}{2}(\varphi+\psi)\cos\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)\ldots 33)$$
$$\cos\varphi-\cos\psi = -2\sin\tfrac{1}{2}(\varphi+\psi)\sin\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)\ldots 34)$$

Aus 31) und 32) folgt durch die Division

$$\frac{\sin\varphi+\sin\psi}{\sin\varphi-\sin\psi} = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\varphi+\psi)\cot\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi), \text{ oder}$$

$$\frac{\sin\varphi+\sin\psi}{\sin\varphi-\sin\psi} = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\varphi+\psi)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\varphi-\psi)}\ldots 35)$$

6. Trigonometrische Tafeln.

§. **230.** Die bisher entwickelten Formeln können zunächst dazu verwendet werden, um die goniometrischen Functionen der verschiedenen Winkel zu berechnen. Da die Functionen aller Winkel auf jene der spitzen zurückgeführt werden können, so handelt es sich blos um die Bestimmung der Functionen für die spitzen Winkel; ja es reicht sogar hin, wenn nur die Functionen der Winkel bis 45^0 berechnet werden, da $45^0+\varphi$ und $45^0-\varphi$ Complementwinkel sind, und daher

$$\begin{aligned}\sin(45^0+\varphi) &= \cos(45^0-\varphi),\\ \cos(45^0+\varphi) &= \sin(45^0-\varphi),\\ \operatorname{tang}(45^0+\varphi) &= \cot(45^0-\varphi),\\ \cot(45^0+\varphi) &= \operatorname{tang}(45^0-\varphi)\end{aligned}$$

ist. Wir wollen nun in dem Folgenden die Rechnung andeuten, durch welche die Functionen der Winkel von 0^0 bis 45^0 gefunden werden können.

Da für jeden solchen Winkel die Länge des Bogens, der für den Halbmesser $=1$ diesem Winkel entspricht, stets zwischen dem Sinus und der Tangente desselben liegen muß, so ist

$$\operatorname{arc}\alpha < \operatorname{tang}\alpha \quad \text{und} \quad \operatorname{arc}\alpha > \sin\alpha.$$

Aus der ersten Relation folgt $\operatorname{arc}\alpha\cos\alpha < \sin\alpha$, oder $\operatorname{arc}\alpha\sqrt{1-\sin\alpha^2} < \sin\alpha$, und, wenn man mit Rücksicht auf $\operatorname{arc}\alpha > \sin\alpha$ statt $\sin\alpha^2$ die größere Zahl $\operatorname{arc}\alpha^2$ setzt, um so mehr $\operatorname{arc}\alpha\sqrt{1-\operatorname{arc}\alpha^2} < \sin\alpha$.

Da ferner für $\alpha < 45^0$ der Ausdruck $1 - \text{arc}\,\alpha^2$ kleiner als 1 ist, so ist $1 - \text{arc}\,\alpha^2 < \sqrt{1 - \text{arc}\,\alpha^2}$; um so mehr ist also $\text{arc}\,\alpha\,(1 - \text{arc}\,\alpha^2) < \sin\alpha$, woraus

$$\text{arc}\,\alpha - \sin\alpha < \text{arc}\,\alpha^3$$

folgt. Die Differenz zwischen dem Bogen und dem Sinus des Winkels ist also für alle Winkel unter 45^0 kleiner als die dritte Potenz des Bogens selbst.

Für $\alpha = 1'$ ist $\text{arc}\,1' = 0{\cdot}000\,290\,8882$, daher

$$\text{arc}\,1' - \sin 1' < 0{\cdot}000\,290\,8882^3;$$

aber

$0{\cdot}000\,290\,8882^3 < \frac{1}{10^{10}}$, daher um so mehr $\text{arc}\,1' - \sin 1' < \frac{1}{10^{10}}$; also ist auf 10 Decimalen genau

$$\sin 1' = 0{\cdot}000\,290\,8882.$$

Wird daraus $\cos 1' = \sqrt{1 - (\sin 1')^2}$ bestimmt, so geben dann die Formeln 15), 16), 11) und 12) den Sinus und Cosinus für $2', 4', 8', \ldots$, den Sinus und Cosinus für $1' + 2' = 3'$, für $2' + 3' = 5'$ für $2' + 5' = 7', \ldots$, und aus diesen wieder für $6', 10', 14', 9', 15', 21'$, u. s. w. bis $60'$ oder 1^0. Aus $\sin 1^0$ und $\cos 1^0$ findet man auf gleiche Weise die Sinus und Cosinus aller Winkel bis 45^0.

Zur Bestimmung der Sinus und Cosinus solcher Bogen, welche blos Secunden enthalten, kann man um so mehr für den Sinus den Bogen selbst setzen; da $\text{arc}\,1'' = \frac{\text{arc}\,1'}{60}$ ist, so ergibt sich

$$\sin 1'' = 0{\cdot}000\,004\,8481\ldots$$

Ferner ist

$\sin 2'' = 2 \sin 1''$, $\sin 3'' = 3 \sin 1''$, $\sin 4'' = 4 \sin 1''$ u. s. w.

Daraus lassen sich sofort auch die Cosinus für die einzelnen Secunden bestimmen.

Hat man nun die Sinus und Cosinus der Winkel von 0^0 bis 45^0 gefunden, so können daraus mittelst der Formeln 4) und 5) auch die Tangenten und Cotangenten derselben berechnet werden.

§. **231.** Da die Winkelfunctionen im Allgemeinen irrationale Werthe haben, so werden dieselben um so genauer bestimmt sein, durch je mehrere Decimalstellen man sie ausdrückt; aber in demselben Grade wird dann auch das Multipliciren und Dividiren durch diese Functionen erschwert. Um diesem Uebelstande zu begegnen, bedient man sich in allen trigonometrischen Rechnungen der Logarithmen, zu welchem Ende die Brigg'schen Logarithmen der Functionen für die einzelnen Winkel bestimmt und in den Logarithmentafeln gehörig zusammengestellt wurden.

Kleinere Logarithmentafeln enthalten gewöhnlich die Logarithmen der Winkelfunctionen von 0^0 bis 90^0 von Minute zu Minute mit fünf Decimalstellen.

Von 0^0 bis 45^0 stehen die Grade in natürlicher Folge vorwärts schreitend oben, und die Minuten links im Eingange; für diese gilt der obere Tabellenkopf. Von 45^0 bis 90^0 stehen die Grade in natürlicher Folge rückwärts schreitend unten, und die Minuten rechts im Eingange; für diese gilt der untere Tabellenkopf.

Alle Logarithmen der Winkelfunctionen sind auf die Charakteristik -10 reducirt, welche jedoch, damit Raum erspart werde, in den Tafeln weggelassen ist; jedem aus den Tafeln gefundenen Logarithmus ist daher noch die Charakteristik -10 beizufügen.

Zur Bestimmung der Logarithmen der Functionen von Winkeln, welche außer den Graden und Minuten auch Secunden enthalten, sind in besser eingerichteten Tafeln für jeden Grad rechts von der Haupttafel besondere Hilfstäfelchen angebracht, welche die entsprechenden Proportionaltheile für die Secunden, für die Winkel zwischen 0^0 und 3^0 aber statt der Proportionaltheile die bekannten goniometrischen Hilfszahlen $s(x) = \log \frac{\sin x}{x''}$ und $t(x) = \log \frac{\operatorname{tang} x}{x''}$. enthalten, wo x'' den in Secunden ausgedrückten Winkel x bezeichnet.

§. **232.** Beim Gebrauche der logarithmisch-trigonometrischen Tafeln*) kommen zwei Aufgaben vor:

I. Zu einem gegebenen Winkel den zugehörigen Logarithmus einer Function dieses Winkels zu finden.

a) Man suche die Grade des gegebenen Winkels und die Benennung der betreffenden Function in dem oberen oder unteren Tabellenkopfe auf, je nachdem der Winkel zwischen 0^0 und 45^0, oder zwischen 45^0 und 90^0 liegt, die Minuten aber im ersten Falle links, im zweiten rechts im Eingange.

Enthält der gegebene Winkel nur Grade und Minuten, so steht der gesuchte Logarithmus dort, wo die Spalte, welche die Benennung der Function als Aufschrift hat, mit der Zeile, in welcher die Minuten gefunden wurden, zusammentrifft.

Man findet z. B.

$$\begin{aligned}
\log \sin\ 1^0\,34' &= 8{\cdot}43\,680 - 10,\\
\log \operatorname{tang}\ 61^0\ \ 9' &= 10{\cdot}25\,893 - 10,\\
\log \cot\ 21^0\,52' &= 10{\cdot}39\,651 - 10,\\
\log \cos\ 80^0\,59' &= 9{\cdot}99\,460 - 10.
\end{aligned}$$

b) Enthält der gegebene Winkel außer den Graden und Minuten auch Secunden, so bestimme man nach a) beim Sinus und bei der Tangente den Logarithmus für den nächst kleineren, beim Cosinus und bei der Cotangente den Logarithmus für den

*) Eine ausführlichere Belehrung über die Einrichtung und den Gebrauch solcher Tafeln findet man in der Einleitung zu den von mir herausgegebenen fünfstelligen Logarithmentafeln zum Schulgebrauche, Wien bei Gerold, 1877.

nächst größeren Winkel, welcher in der Tafel steht. Sodann suche man sowohl die Differenz der beiden Tafellogarithmen, zwischen denen der gesuchte Logarithmus liegt, als auch den Unterschied zwischen dem gegebenen und dem aus der Tafel entnommenen bezüglich nächst kleineren oder nächst größeren Winkel, bestimme aus den Hilfstäfelchen zu den Secunden, welche dieser Unterschied angibt, für die erhaltene Tafeldifferenz die entsprechenden Proportionaltheile und addire sie zu dem bereits gefundenen Logarithmus.

Z. B.

1. log sin $13^0\ 44'\ 39'' =$

	$13^0\ 44'$	. . .	$9 \cdot 37\ 549 - 10$
Diff. 51	$30''$	. . .	$25\ 5$
	$9''$	. . .	$7\ 7$
			$= 9 \cdot 37\ 582 - 10$

2. log cot $71^0\ 39'\ 15'' =$

	$71^0\ 40'$	. . .	$9 \cdot 52\ 031 - 10$
Diff. 42	$10''$	. . .	$7\ 2$
	$5''$	. . .	$3\ 6$
			$= 9 \cdot 52\ 042 - 10$

Eine Ausnahme von dem eben angegebenen Verfahren tritt bei Winkeln ein, welche zwischen 0^0 und 3^0 oder zwischen 90^0 und 87^0 liegen.

Ist der Logarithmus des Sinus oder der Tangente eines Winkels x, welcher zwischen 0^0 und 3^0 liegt und außer den Minuten auch Secunden enthält, zu bestimmen, so verwandle man im Hinblick auf die Gleichungen

$$\log \sin x = s\,(x) + \log x'', \text{ und}$$
$$\log \operatorname{tang} x = t\,(x) + \log x''$$

den Winkel x in Secunden, deren Zahl x″ sei, suche aus der Hilfstafel die Hilfszahl s (x) oder t (x), welche zu dem gegebenen Winkel gehört, und addire zu derselben den aus der Tafel der Zahlenlogarithmen entnommenen Logarithmus von x″.

Z. B.

log tang $1^0\ 37'\ 44'' =$

t (5864)	. . .	$4 \cdot 68\ 569 - 10$
log 5864	. . .	$3 \cdot 76\ 819$
		$= 8 \cdot 45\ 378 - 10$

Den Logarithmus der Cotangente eines Winkels x zwischen 0^0 und 3^0 erhält man aus der Gleichung log cot x = — log tang x.

Für einen Winkel x zwischen 90^0 und 87^0 hat man

$$\log \cos x = \log \sin (90^0 - x), \quad \log \cot x = \log \operatorname{tang} (90^0 - x),$$
$$\log \operatorname{tang} x = \log \cot (90^0 - x),$$

wo $90^0 - x$ zwischen 0^0 und 3^0 liegt.

Suche aus den Tafeln folgende Logarithmen:

1) $\log \sin\ 38^0\ 17'$	2) $\log \sin\ 17^0\ 8'\ 20''$
3) $\log \sin\ 51^0\ 58'\ 33''$	4) $\log \sin\ 0^0\ 48'\ 37''$
5) $\log \tan g\ 1^0\ 25'\ 40''$	6) $\log \tan g\ 69^0\ 27'\ 39''$
7) $\log \tan g\ 23^0\ 23'\ 23''$	8) $\log \tan g\ 89^0\ 19'\ 31''$
9) $\log \cos\ 57^0\ 48'$	10) $\log \cos\ 39^0\ 9'\ 47''$
11) $\log \cos\ 50^0\ 9'\ 9''$	12) $\log \cos\ 1^0\ 2'\ 12''$
13) $\log \cot\ 77^0\ 31'$	14) $\log \cot\ 8^0\ 8'\ 54''$
15) $\log \cot\ 0^0\ 40'\ 29''$	16) $\log \cot\ 53^0\ 29'\ 8''$

II. Zu dem gegebenen Logarithmus einer Winkelfunction den zugehörigen Winkel zu finden.

a) Man suche den gegebenen Logarithmus in einer der Spalten auf, welche oben oder unten mit der Benennung der bezüglichen Winkelfunction verzeichnet sind.

Kommt der gegebene Logarithmus in der Tafel genau vor, so stehen die Grade des Winkels in der Spalte dieses Logarithmus in dem oberen oder unteren Tabellenkopfe, und die Minuten in der Zeile desselben links oder rechts, je nachdem sich die Benennung der Winkelfunction oben oder unten befindet.

So findet man z. B.

für $\log \sin x = 9{\cdot}22\ 878 - 10, \quad x = 9^0\ 45'$;

„ $\log \tan g\, x = 12{\cdot}00\ 478 - 10, \quad x = 89^0\ 26'$;

„ $\log \cot x = 10{\cdot}12\ 315 - 10, \quad x = 36^0\ 59'$;

„ $\log \cos x = 9{\cdot}61\ 578 - 10, \quad x = 65^0\ 37'$.

b) Kommt der gegebene Logarithmus in der Tafel nicht genau vor, so nehme man beim Sinus und bei der Tangente den nächst kleineren, beim Cosinus und bei der Cotangente den nächst größeren Logarithmus, welcher in der Tafel steht, und bestimme nach a) den ihm zugehörigen Winkel. Sodann suche man sowohl die Differenz der beiden Tafellogarithmen, zwischen denen der gegebene Logarithmus liegt, als auch den Unterschied zwischen dem gegebenen und dem aus der Tafel entnommenen bezüglich nächst kleineren oder nächst größeren Logarithmus, bestimme aus den Hilfstäfelchen zu den Proportionaltheilen, welche der letztere Unterschied angibt, für die erhaltene Tafeldifferenz die entsprechenden Secunden und addire diese zu dem bereits gefundenen Winkel.

Z. B.

1) $\log \tan g\, x = 9{\cdot}73\ 704 - 10$

	687 . . .	$28^0\ 37'$
Diff. 30	17	
	15	$30''$
	2	$4''$
		$x = 28^0\ 37'\ 34''$

$$\begin{array}{lrl} 2)\ \log\cos x = 9\cdot44\ 305 - 10 & & \\ \underline{341}\ .\ .\ .\ & 73^0\ 53' & \\ 36 & & \\ \text{Diff. } 44 \quad \underline{29\ 3}\ .\ .\ .\ .\ . & 40'' & \\ 6\ 7\ .\ .\ .\ .\ & \underline{9''} & \\ & x = 73^0\ 53'\ 49'' & \end{array}$$

Ein besonderer Vorgang tritt in diesem Falle ein, wenn der Winkel zwischen 0^0 und 3^0 oder zwischen 90^0 und 87^0 liegt.

Ist log sin x oder log tang x gegeben und ergibt sich, daß x zwischen 0^0 und 3^0 liegt, so nehme man mit Rücksicht auf die Gleichungen

$$\log x'' = \log\sin x - s\,(x), \text{ und}$$
$$\log x'' = \log\operatorname{tang} x - t\,(x)$$

aus der Hilfstafel bezüglich die Hilfszahl s (x) oder t (x), welche zu dem gegebenen Logarithmus gehört, und subtrahire sie von diesem. Zu dem Reste, welcher der Logarithmus des in Secunden ausgedrückten Winkels ist, suche man aus der Tafel der Zahlenlogarithmen die zugehörige Zahl, welche Secunden bedeutet, und verwandle diese in Grade und Minuten.

Z. B.

$$\begin{aligned} \log\sin x &= 8\cdot63\ 475 - 10 \\ s\,(x) &= \underline{4\cdot68\ 544 - 10} \\ \log x'' &= 3\cdot94\ 931 \\ x'' &= 8898\cdot4'' \\ x'' &= 2^0\ 28'\ 18\cdot4'' \end{aligned}$$

Ist log cot x, wo x zwischen 0^0 und 3^0 liegt, oder log cos x, log cot x oder log tang x, wo x zwischen 90^0 und 87^0 liegt, so setze man im ersten Falle log tang x = — log cot x und bestimme daraus x; im zweiten Falle setze man bezüglich

$$\log\sin(90^0 - x) = \log\cos x,\quad \log\operatorname{tang}(90^0 - x) = \log\cot x,$$
$$\log\cot(90^0 - x) = \log\operatorname{tang} x,$$

suche dann den Winkel $90^0 - x$, welcher zwischen 0^0 und 3^0 liegt, und zu diesem den Complementwinkel x.

Suche zu folgenden Logarithmen die entsprechenden Winkel.

1) $\log\sin x = 9\cdot49654 - 10$	2) $\log\sin y = 9\cdot79358 - 10$
3) $\log\sin z = 8\cdot74109 - 10$	4) $\log\sin A = 9\cdot99836 - 10$
5) $\log\operatorname{tang} \alpha = 10\cdot13264 - 10$	6) $\log\operatorname{tang} \beta = 10\cdot64570 - 10$
7) $\log\operatorname{tang} \gamma = 8\cdot95629 - 10$	8) $\log\operatorname{tang} B = 8\cdot47380 - 10$
9) $\log\cos C = 8\cdot49033 - 10$	10) $\log\cos x = 9\cdot17973 - 10$
11) $\log\cos y = 9\cdot97706 - 10$	12) $\log\cos z = 8\cdot12544 - 10$
13) $\log\cot \alpha = 11\cdot44266 - 10$	14) $\log\cot \beta = 10\cdot21671 - 10$
15) $\log\cot \gamma = 8\cdot90828 - 10$	16) $\log\cot A = 12\cdot44033 - 10$

Zweiter Abschnitt.

Die ebene Trigonometrie.

14. 1. 84.

I. Auflösung der ebenen Dreiecke.

§. **233.** Ein Dreieck auflösen heißt, aus denjenigen Bestandstücken, welche ein Dreieck vollkommen bestimmen, die übrigen durch Rechnung finden.

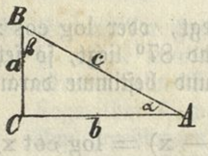
Dabei kommt es vor Allem darauf an, aus den Eigenschaften des Dreieckes Gleichungen abzuleiten, welche die Relationen zwischen den Seiten und den Functionen der Winkel enthalten; durch Auflösung dieser Gleichungen, welche sowohl die bestimmenden als die zu suchenden Bestandstücke des Dreieckes enthalten, findet man dann die gesuchten Größen.

1. Rechtwinklige Dreiecke.

Trigonometrische Lehrsätze über das rechtwinklige Dreieck.

§. **234.** Zur Auflösung eines rechtwinkligen Dreieckes müssen zwei Bestimmungsstücke gegeben sein.

Fig. 210.



Es sei das Dreieck ACB (Fig. 210) bei C rechtwinklig. Wir wollen hier und im Folgenden die Katheten BC und AC durch a und b, die ihnen gegenüberliegenden Winkel durch α und β, und die Hypotenuse AB durch c bezeichnen.

1. Nach der Erklärung des Sinus in §. 218 ist

$$\frac{a}{c} = \sin\alpha, \qquad \frac{b}{c} = \sin\beta; \text{ daher}$$

$$a = c\sin\alpha, \qquad b = c\sin\beta;$$

d. h. Jede Kathete ist gleich dem Producte aus der Hypotenuse und dem Sinus des dieser Kathete gegenüberliegenden Winkels.

2. Nach der Erklärung des Cosinus (§. 218) ist

$$\frac{a}{c} = \cos\beta, \qquad \frac{b}{c} = \cos\alpha; \text{ folglich}$$

$$a = c\cos\beta, \qquad b = c\cos\alpha;$$

d. h. Jede Kathete ist gleich dem Producte aus der Hypotenuse und dem Cosinus des dieser Kathete anliegenden Winkels.

3. Nach der Erklärung der Tangente (§. 218) ist

$$\frac{a}{b} = \text{tang}\,\alpha, \qquad \frac{b}{a} = \text{tang}\,\beta;\ \text{daher}$$

$$a = b\,\text{tang}\,\alpha, \qquad b = a\,\text{tang}\,\beta;$$

d. h. Jede Kathete ist gleich dem Producte aus der andern Kathete und der Tangente des der ersteren Kathete gegenüberliegenden Winkels.

4. Nach der Erklärung der Cotangente (§. 218) ist

$$\frac{a}{b} = \cot\beta, \qquad \frac{b}{a} = \cot\alpha;\ \text{somit}$$

$$a = b\cot\beta, \qquad b = a\cot\alpha;$$

d. h. Jede Kathete ist gleich dem Producte aus der andern Kathete und der Cotangente des der ersteren Kathete anliegenden Winkels.

Zu diesen trigonometrischen Lehrsätzen tritt bei der Auflösung rechtwinkliger Dreiecke noch der Pythagoräische Lehrsatz $c^2 = a^2 + b^2$, welcher den Zusammenhang zwischen allen drei Seiten ausdrückt.

Zusatz. Zur Bestimmung des Flächeninhaltes hat man

$$f = \frac{a\,b}{2} = \frac{b}{2}\sqrt{(c+b)\,(c-b)} = \frac{a^2}{2\,\text{tang}\,\alpha} = \frac{b^2}{2\,\text{tang}\,\beta}$$

$$= \frac{c^2}{2}\sin\alpha\cos\alpha = \frac{c^2}{4}\sin 2\,\alpha.$$

§. **235.** Auflösungsfälle.

I. Gegeben die beiden Katheten a und b.

Aus $a = b\,\text{tang}\,\alpha = b\cot\beta$ folgt

$$\text{tang}\,\alpha = \cot\beta = \frac{a}{b},$$

woraus sich die beiden Winkel α und β berechnen lassen.

Zur Bestimmung der Hypotenuse hat man dann

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ oder } c = \frac{a}{\sin\alpha}.$$

Es sei z. B. $a = 325$, $b = 418$.

Aus $\text{tang}\,\alpha = \frac{a}{b}$ folgt $\log\text{tang}\,\alpha = \log a - \log b$. Man hat also

$$\begin{aligned}\log a &= 2{\cdot}511\ 88\\ \log b &= 2{\cdot}621\ 18\\ \log\text{tang}\,\alpha &= 9{\cdot}890\ 70 - 10 = \log\text{tang}\,37^0\,51'\,54''\\ \alpha &= 37^0\,51'\,54''\\ \text{daher}\ \beta &= 52^0\ \ 8'\ \ 6''.\end{aligned}$$

Aus $c = \frac{a}{\sin\alpha}$ erhält man dann

$$\log a = 2 \cdot 511\ 88$$
$$\log \sin\alpha = 9 \cdot 788\ 03 - 10$$
$$\log c = 2 \cdot 723\ 85 = \log 529 \cdot 48$$
$$c = 529 \cdot 48,$$

welcher Werth sich auch aus der Formel $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ ergibt.

II. Gegeben die Hypotenuse c und eine Kathete a.

Zur Bestimmung der gesuchten Stücke hat man

$\sin\alpha = \cos\beta = \frac{a}{c}$, und $b = \sqrt{(c + a)\ (c - a)}$ oder $b = \frac{a}{\operatorname{tang}\alpha}$.

III. Gegeben eine Kathete a und ein Winkel, z. B. α.

Zur Auflösung dienen die Formeln

$$\beta = 90^0 - \alpha,\ c = \frac{a}{\sin\alpha},\ b = \frac{a}{\operatorname{tang}\alpha}.$$

An ein Hausdach, welches 11^m hoch ist, soll eine Leiter angelehnt werden. Wenn nun diese höchstens einen Winkel von 80^0 gegen den Boden bilden darf, wie weit muß sie dann unten vom Hause abstehen, und wie lang muß sie mindestens sein?

IV. Gegeben die Hypotenuse c und ein Winkel, z. B. α.

Auflösungsgleichungen:

$$\beta = 90^0 - \alpha,\ a = c \sin\alpha,\ b = c \cos\alpha.$$

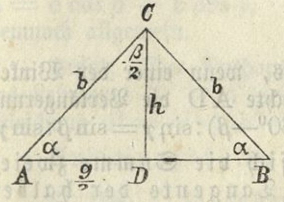
Nachstehende Tabelle bietet eine reiche Auswahl von Zahlenbeispielen über die Auflösung rechtwinkliger Dreiecke.

a	b	c	α			β			f
92	525	533	9°	56′	22″	80°	3′	38″	24150
96	180	204	28	4	21	61	55	39	8640
160	231	281	34	42	29	55	17	31	18480
180	189	261	43	36	10	46	23	50	17010
200	609	641	18	10	50	71	49	10	60900
208	105	233	63	12	54	26	47	6	10920
228	325	397	35	3	4	54	56	56	37050
272	225	353	50	24	8	39	35	52	30600
336	377	505	41	42	32	48	17	28	63336
340	189	389	60	55	52	29	4	8	32130
396	403	565	44	29	53	45	30	7	79794
420	341	541	50	55	36	39	4	24	71610
540	99	549	79	36	40	10	23	20	26730
900	301	949	71	30	28	18	29	32	135450
924	43	925	87	20	8	2	39	52	19866

§. **236.** Die Auflösung gleichschenkliger Dreiecke kann unmittelbar auf die rechtwinkligen Dreiecke zurückgeführt werden. Jedes gleichschenklige Dreieck zerfällt durch die auf die Grundlinie senkrechte

Höhe in zwei congruente rechtwinklige, deren jedes durch die Bestimmungsstücke des gleichschenkligen Dreieckes unzweideutig bestimmt ist.

Fig. 211.



Ist in dem gleichschenkligen Dreiecke ABC (Fig. 211) $AB = g$, $AC = BC = b$, $CD = h$, Winkel $A = B = \alpha$, $ACB = \beta$ und bezeichnet f den Flächeninhalt, so ergeben sich folgende Auflösungsgleichungen:

$$\cos\alpha = \frac{g}{2b}, \qquad \sin\frac{\beta}{2} = \frac{g}{2b};$$

$$g = 2b\cos\alpha = 2b\sin\frac{\beta}{2};$$

$$b = \frac{g}{2\cos\alpha} = \frac{g}{2\sin\frac{\beta}{2}};$$

$$h = b\sin\alpha = \frac{g}{2}\cos\frac{\beta}{2};$$

$$f = \frac{gh}{2} = \frac{b^2\sin 2\alpha}{2} = \frac{b^2\sin\beta}{2}.$$

Daten zu Zahlenbeispielen über die Auflösung gleichschenkliger Dreiecke:

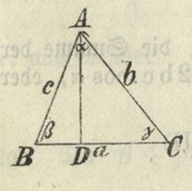
g	b	h	α	β	f
32	65	63	75° 45′ 0″	28° 30′ 0″	1008
88	125	117	69 23 25	41 13 10	5148
144	97	65	42 4 30	95 51 0	4680
240	241	221	60 8 14	59 43 32	25080
312	205	133	40 26 59	99 6 2	20748
320	281	231	55 17 31	69 24 58	36960
352	185	57	17 56 43	144 6 34	10032
672	505	377	48 17 28	83 25 4	126672

2. Schiefwinklige Dreiecke.

Trigonometrische Lehrsätze über das schiefwinklige Dreieck.

§. **237.** 1. In jedem Dreiecke verhalten sich die Seiten so zu einander, wie die Sinus der diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel.

Fig. 212.



Zieht man $AD \perp BC$ (Fig. 212), so ist in den rechtwinkligen Dreiecken ADC und ADB

$$AD = AC \,.\, \sin C \text{ und } AD = AB \,.\, \sin B;$$

daher

$$AC \,.\, \sin C = AB \,.\, \sin B,$$

oder wenn man hier und in dem Folgenden $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ setzt und die diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel durch α, β, γ ausdrückt,

$$\left.\begin{array}{l} b \sin\gamma = c \sin\beta, \text{ folglich} \\ b : c = \sin\beta : \sin\gamma. \\ \text{Ebenso erhält man} \\ a : b = \sin\alpha : \sin\beta, \\ a : c = \sin\alpha : \sin\gamma. \end{array}\right\} \ldots \text{ I)}$$

In diesen Ausdrücken ändert sich nichts, wenn einer der Winkel, z. B. β ein stumpfer ist, so daß die Senkrechte AD die Verlängerung von CB trifft; man erhält dann $b:c = \sin(180^0 - \beta) : \sin\gamma = \sin\beta : \sin\gamma$.

2. In jedem Dreiecke verhält sich die Summe zweier Seiten zu ihrer Differenz, wie die Tangente der halben Summe der diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel zu der Tangente der halben Differenz derselben Winkel.

Nach 1. ist $b:c = \sin\beta : \sin\gamma$,
daher auch

$$(b + c):(b - c) = (\sin\beta + \sin\gamma):(\sin\beta - \sin\gamma).$$

Nun ist nach §. 229, Formel 35

$$(\sin\beta + \sin\gamma):(\sin\beta - \sin\gamma) = \operatorname{tang}\frac{\beta+\gamma}{2} : \operatorname{tang}\frac{\beta-\gamma}{2},$$

folglich

$$(b + c):(b - c) = \operatorname{tang}\frac{\beta+\gamma}{2} : \operatorname{tang}\frac{\beta-\gamma}{2}.$$

3. In jedem Dreiecke ist das Quadrat der einen Seite gleich der Summe der Quadrate der beiden andern Seiten vermindert um das doppelte Product aus diesen beiden Seiten und dem Cosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels.

Zieht man (Fig. 212) $AD \perp BC$, so ist

$$BD = c.\cos\beta \text{ und } CD = b.\cos\gamma, \text{ daher}$$
$$BD + CD = c.\cos\beta + b.\cos\gamma, \text{ oder}$$
$$a = b.\cos\gamma + c.\cos\beta.$$

Ebenso erhält man

$$b = a.\cos\gamma + c.\cos\alpha,$$
$$c = a.\cos\beta + b.\cos\alpha.$$

Multiplicirt man die erste dieser drei Gleichungen mit a, die zweite mit b und die dritte mit c, so findet man

$$a^2 = ab.\cos\gamma + ac.\cos\beta,$$
$$b^2 = ab.\cos\gamma + bc.\cos\alpha,$$
$$c^2 = ac.\cos\beta + bc.\cos\alpha.$$

Subtrahirt man nun von der ersten Gleichung die Summe der beiden letzteren, so erhält man $a^2 - b^2 - c^2 = -2bc.\cos\alpha$, oder

$$\left.\begin{array}{l} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos\alpha. \\ \text{Ebenso folgt} \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos\beta, \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos\gamma. \end{array}\right\} \ldots \text{ II)}$$

Fällt die Senkrechte AD außerhalb des Dreieckes, so ist dann entweder $a = BD - CD$, oder $a = CD - BD$. In beiden Fällen erhält man mit Berücksichtigung der Vorzeichen des Cosinus, wie oben, $a = c \cos \beta + b \cos \gamma$. Die daraus abgeleiteten Gleichungen gelten demnach allgemein.

Zusatz. Der Pythagoräische Lehrsatz ist nur ein besonderer Fall des Lehrsatzes 3; denn dieser gibt für $\gamma = 90^0$, also $\cos \gamma = 0$, die Gleichung $c^2 = a^2 + b^2$.

Auflösungsfälle.

§. **238.** I. Gegeben eine Seite a und die beiden anliegenden Winkel β und γ.

Man hat erstlich $\alpha = 180^0 - (\beta + \gamma)$.

Ferner ergeben sich aus $b : a = \sin \beta : \sin \alpha$ und $c : a = \sin \gamma : \sin \alpha$ die Gleichungen

$$b = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha} \text{ und } c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}.$$

Es sei z. B. $a = 453$, $\beta = 73^0 48' 12''$, $\gamma = 28^0 51' 44''$.
Man erhält $\alpha = 77^0 20' \ 4''$

$$b = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha} \qquad\qquad c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}$$

$$\begin{array}{rl} \log a = & 2 \cdot 65\,610 \\ \log \sin \beta = & 9 \cdot 98\,241 - 10 \\ \hline & 12 \cdot 63\,851 - 10 \\ \log \sin \alpha = & 9 \cdot 98\,930 - 10 \\ \hline \log b = & 2 \cdot 64\,921 \\ b = & 445 \cdot 9 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rl} \log a = & 2 \cdot 65\,610 \\ \log \sin \gamma = & 9 \cdot 68\,368 - 10 \\ \hline & 12 \cdot 97\,242 - 10 \\ \log \sin \alpha = & 9 \cdot 98\,930 - 10 \\ \hline \log c = & 2 \cdot 98\,312 \\ c = & 961 \cdot 9. \end{array}$$

Wäre außer der Seite a ein anliegender Winkel β und der gegenüberliegende α gegeben, so würde man zuerst γ berechnen und dann wie vorhin verfahren.

§. **239.** II. Gegeben zwei Seiten b und c, und der von ihnen eingeschlossene Winkel α.

In diesem Falle wendet man zur Bestimmung der Winkel β und γ die Proportion

$$(b + c) : (b - c) = \operatorname{tang} \frac{\beta + \gamma}{2} : \operatorname{tang} \frac{\beta - \gamma}{2}$$

an, aus welcher

$$\operatorname{tang} \frac{\beta - \gamma}{2} = \frac{b - c}{b + c} \operatorname{tang} \frac{\beta + \gamma}{2}$$

folgt. Da $\beta + \gamma = 180^0 - \alpha$ und $\frac{\beta + \gamma}{2} = 90^0 - \frac{\alpha}{2}$ ist, so ist

$\operatorname{tang} \frac{\beta + \gamma}{2} = \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}$ bekannt und es läßt sich mittelst der letzten Gleichung $\frac{\beta - \gamma}{2}$ bestimmen. Kennt man aber

$$\frac{\beta + \gamma}{2} \text{ und } \frac{\beta - \gamma}{2},$$

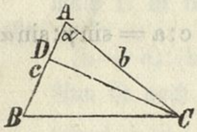
so erhält man durch Addition und Subtraction derselben β und γ.

Die dritte Seite a findet man dann aus der Gleichung

$$a = \frac{b \sin \alpha}{\sin \beta}.$$

Aus b, c und α kann man unmittelbar auch den Flächeninhalt f des Dreieckes bestimmen.

Fig. 213.



Ist nämlich $CD \perp AB$ (Fig. 213), so hat man

$$f = \frac{c.CD}{2};$$

aber $CD = b \sin \alpha$, daher

$$f = \frac{b\,c}{2} \sin \alpha;$$

d. h. **der Flächeninhalt eines Dreieckes ist gleich dem halben Producte aus zwei Seiten und dem Sinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels.**

Es sei z. B. $b = 508$, $c = 401$ und $\alpha = 84^0\ 16'\ 30''$.

Man hat folgende Rechnung:

$$\begin{aligned}
b + c &= 909 \\
b - c &= 107 \\
\beta + \gamma &= 95^0\ 43'\ 30'' \\
\frac{\beta + \gamma}{2} &= 47^0\ 51'\ 45'' \\
\frac{\beta - \gamma}{2} &= 7^0\ 24'\ 46'' \\
\beta &= 55^0\ 16'\ 31'' \\
\gamma &= 40^0\ 26'\ 59''
\end{aligned}$$

$$\operatorname{tang} \frac{\beta - \gamma}{2} = \frac{b - c}{b + c} \cdot \operatorname{tang} \frac{\beta + \gamma}{2}$$

$$\begin{aligned}
\log (b - c) &= 2{\cdot}02\ 938 \\
\log \operatorname{tang} \frac{\beta + \gamma}{2} &= 10{\cdot}04\ 347 - 10 \\
&\ 12{\cdot}07\ 285 - 10 \\
\log (b + c) &= 2{\cdot}95\ 856 \\
\log \operatorname{tang} \frac{\beta - \gamma}{2} &= 9{\cdot}11\ 429 - 10 \\
\frac{\beta - \gamma}{2} &= 7^0\ 24'\ 46''
\end{aligned}$$

$$a = \frac{b \sin \alpha}{\sin \beta},$$

$$\begin{aligned}
\log b &= 2{\cdot}70\ 586 \\
\log \sin \alpha &= 9{\cdot}99\ 783 - 10 \\
&\ 12{\cdot}70\ 369 - 10 \\
\log \sin \beta &= 9{\cdot}91\ 482 - 10 \\
\log a &= 2{\cdot}78\ 887 \\
a &= 614{\cdot}9
\end{aligned}$$

$$f = \frac{b\,c}{2}$$

$$\begin{aligned}
\log b &= 2{\cdot}70\ 586 \\
\log c &= 2{\cdot}60\ 314 \\
\log \sin \alpha &= 9{\cdot}99\ 783 - 10 \\
&\ 5{\cdot}30\ 683 \\
\log 2 &= 0{\cdot}30\ 103 \\
&\ 5{\cdot}00\ 580 \\
f &= 101344.
\end{aligned}$$

§. **240**. III. Gegeben zwei Seiten b und c, wo $b > c$, und der der größeren Seite gegenüberliegende Winkel β.

Aus $b : c = \sin\beta : \sin\gamma$ erhält man

$$\sin\gamma = \frac{c \sin\beta}{b}.$$

Diese Formel gibt den Sinus von γ. Zu jedem Sinus gehören zwar zwei Winkel, ein spitzer und ein stumpfer; diese Unbestimmtheit fällt jedoch hier weg, da man weiß, daß $b > c$, also auch $\beta > \gamma$ ist, und somit γ spitz sein muß, welchen Werth auch β haben mag.

Aus β und γ erhält man dann $\alpha = 180^0 - (\beta + \gamma)$.

Die Seite a findet man aus der Gleichung

$$a = \frac{b \sin\alpha}{\sin\beta}.$$

Ist z. B. $b = 678{\cdot}9$, $c = 345{\cdot}6$ und $\beta = 58^0\,47'\,30''$, so erhält man durch Anwendung der obigen Formeln

$$\gamma = 25^0\,48'\,37'',\ \text{daher}\ \alpha = 95^0\,23'\,53'',\ \text{ferner}\ a = 790{\cdot}2.$$

Wäre aber hier nebst $b = 678{\cdot}9$ und $c = 345{\cdot}6$ der der kleineren Seite gegenüberliegende Winkel $\gamma = 25^0\,48'\,37''$ gegeben, so erhielte man aus der Gleichung $\sin\beta = \frac{b \sin\gamma}{c}$, da β spitz oder stumpf sein kann,

entweder $\beta = 58^0\,47'\,30''$ oder $\beta = 121^0\,12'\,30''$,
folglich $\alpha = 95^0\,23'\,53''$ „ $\alpha = 32^0\,58'\,53''$.

Aus $a = \frac{b \sin\alpha}{\sin\beta}$ würde sich dann entweder $a = 790{\cdot}2$ oder $a = 432{\cdot}1$ ergeben. Die Aufgabe ist in diesem Falle zweideutig.

§. **241**. IV. Gegeben alle drei Seiten a, b und c.

Zur Bestimmung der Winkel könnte unmittelbar der Lehrsatz 3 in §. 237 angewendet werden; aus der Gleichung

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$$

folgt nämlich

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

woraus sich der Winkel α finden läßt. Diese Gleichung soll jedoch auf eine andere, für die logarithmische Berechnung geeignete Form gebracht werden.

Subtrahirt und addirt man die Gleichungen

$$1 = 1,$$

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

so erhält man

$$1 - \cos\alpha = \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc} = \frac{(a^2 - (b-c)^2}{2bc} = \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc},$$

$$1 + \cos\alpha = \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc};$$

somit, da nach §. 227, Formel 24) und 23)

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \text{ und } \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \text{ ist,}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}},$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc}}.$$

Drückt man nun die halbe Summe der drei Seiten a, b, c durch s aus, setzt also

$$\begin{aligned} a + b + c &= 2s, \text{ folglich} \\ b + c - a &= 2(s-a), \\ a - b + c &= 2(s-b), \\ a + b - c &= 2(s-c), \end{aligned}$$

so folgt

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}},$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}},$$

und daher

$$\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}.$$

Durch bloße Vertauschung der Buchstaben findet man ebenso

$$\sin\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}}, \qquad \sin\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}},$$

$$\cos\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}}, \qquad \cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}},$$

$$\operatorname{tang}\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}}; \qquad \operatorname{tang}\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}.$$

In Bezug auf die Bedeutung der Winkel $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\beta}{2}$, $\frac{\gamma}{2}$ kann keine Unbestimmtheit eintreten, da sie als halbe Dreieckswinkel nothwendig spitz sein müssen.

Am vortheilhaftesten ist es, in allen Fällen die Formel für die Tangente anzuwenden.

Aus den gegebenen Seiten des Dreieckes läßt sich unmittelbar auch der Flächeninhalt berechnen. Es ist

$$f = \frac{ab}{2} . \sin\gamma = \frac{ab}{2} . 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}, \text{ woraus}$$

$$f = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

folgt, welchen Ausdruck wir schon in der Planimetrie (Fünfter Abschnitt, Rechnungsaufgabe 14) auf einem anderen Wege abgeleitet haben.

Es sei z. B. a = 1244, b = 939, c = 317. Man hat

$$\begin{aligned} a &= 1244 \\ b &= 939 \\ c &= 317 \\ \hline 2s &= 2500 \\ s &= 1250 \\ s-a &= 6 \\ s-b &= 311 \\ s-c &= 933 \end{aligned}$$

$$\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

$$\begin{aligned} \log(s-b) &= 2{\cdot}49\ 276 \\ \log(s-c) &= 2{\cdot}96\ 988 \\ \hline & \ 5{\cdot}46\ 264 \\ \log s &= 3{\cdot}09\ 691 \\ \log(s-a) &= 0{\cdot}77\ 815 \\ \hline & \ 21{\cdot}58\ 758-20 \\ \log \operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} &= 10{\cdot}79\ 379-10 \\ \frac{\alpha}{2} &= 80^0\ 52'\ 0'' \\ \alpha &= 161^0\ 44'\ 0'' \end{aligned}$$

$$\operatorname{tang}\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}}$$

$$\begin{aligned} \log(s-a) &= 0{\cdot}77\ 815 \\ \log(s-c) &= 2{\cdot}96\ 988 \\ \hline & \ 3{\cdot}74\ 803 \\ \log s &= 3{\cdot}09\ 691 \\ \log(s-b) &= 2{\cdot}49\ 276 \\ \hline & \ 18{\cdot}15\ 836-20 \\ \log \operatorname{tang}\frac{\beta}{2} &= 9{\cdot}07\ 918-10 \\ \frac{\beta}{2} &= 6^0\ 50'\ 34'' \\ \beta &= 13^0\ 41'\ 8'' \end{aligned}$$

$$\operatorname{tang}\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$$

$$\begin{aligned} \log(s-a) &= 0{\cdot}77\ 815 \\ \log(s-b) &= 2{\cdot}49\ 276 \\ \hline & \ 3{\cdot}27\ 091 \\ \log s &= 3{\cdot}09\ 691 \\ \log(s-c) &= 2{\cdot}96\ 988 \\ \hline & \ 17{\cdot}20\ 412-20 \\ \log \operatorname{tang}\frac{\gamma}{2} &= 8{\cdot}60\ 206-10 \\ \frac{\gamma}{2} &= 2^0\ 17'\ 26'' \\ \gamma &= 4^0\ 34'\ 52'' \end{aligned}$$

Um sich von der Richtigkeit der Rechnung zu überzeugen, darf man nur die für α, β, γ gefundenen Werthe addiren; ihre Summe beträgt 180^0.

Zur Bestimmung des Flächeninhaltes hat man

$$f = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$\begin{aligned} \log s &= 3{\cdot}09\ 691 \\ \log(s-a) &= 0{\cdot}77\ 815 \\ \log(s-b) &= 2{\cdot}49\ 276 \\ \log(s-c) &= 2{\cdot}96\ 988 \\ \hline & \ 9{\cdot}33\ 770 \\ \log f &= 4{\cdot}66\ 885 \\ f &= 46650. \end{aligned}$$

Zahlenbeispiele zur Berechnung schiefwinkliger Dreiecke.

a	b	c	α			β			γ			f
17	113	120	7°	37′	41″	61°	55′	39″	110°	26′	40″	899
93	34	65	137	40	39	14	15	0	28	4	21	744
318	532	510	35	27	30	76	2	58	68	29	22	62512
328	169	241	104	53	51	29	51	46	45	14	23	19680
388	389	195	75	10	52	75	45	0	29	4	8	36666
436	365	507	57	15	28	44	45	37	77	58	55	77826
510	533	317	68	23	7	76	18	52	35	18	1	78540
565	445	606	62	51	33	44	29	53	72	22	34	119988
569	281	680	55	17	31	23	57	8	100	45	21	78540
606	565	445	72	38	34	62	51	33	44	29	53	151872
704	302	670·1	83	40	0	25	14	13	71	5	47	100287
716	185	543	156	1	45	6	1	32	17	56	43	20406
748	375	671·3	86	23	7	30	1	23	63	35	30	125615
788	825·5	951 3	52	4	7	55	43	18	72	12	35	309707
956	533	1011	68	39	18	31	17	4	80	3	38	250950
1196	353	951	126	43	0	13	41	8	39	35	52	134550
1772	593	1479	110	2	0	18	19	29	51	38	31	411990
200·2	453	554·9	19	47	22	50	0	0	110	12	38	85098
330·1	412·2	371·3	49	29	50	71	42	42	58	47	28	58188
432·5	589·7	634·2	41	11	13	63	52	46	74	56	1	246282

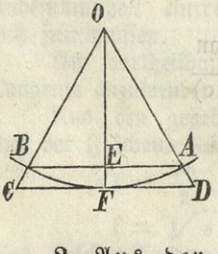
II. Anwendungen der ebenen Trigonometrie.

§. 242. Aufgaben aus der Planimetrie.

1. In einem Kreise (Fig. 214) ist der Halbmesser OA $= R$, die Sehne AB $= s$ und ihr Abstand vom Mittelpunkte OE $= r$; aus einer dieser drei Größen und dem Centriwinkel AOB $= \alpha$ die beiden anderen zu berechnen.

Aus dem rechtwinkligen Dreiecke AOC erhält man, da AE $= \frac{a}{2}$ und Winkel AOE $= \frac{\alpha}{2}$ ist,

Fig. 214.



a) $s = 2R \sin\frac{\alpha}{2}, \quad r = R\cos\frac{\alpha}{2};$

b) $R = \frac{s}{2\sin\frac{\alpha}{2}}, \quad r = \frac{s}{2}\cot\frac{\alpha}{2};$

c) $R = \frac{r}{\cos\frac{\alpha}{2}}, \quad s = 2r\,\text{tang}\,\frac{\alpha}{2}.$

2. Aus der Seite eines regelmäßigen Vieleckes den Halbmesser des ein- und des umgeschriebenen Kreises zu finden.

Es sei (Fig. 214) $AB = s$ die Seite eines regelmäßigen $n$seitigen Vieleckes, $OE = r$ der Halbmesser des diesem Vielecke eingeschriebenen, und $OA = R$ der Halbmesser des ihm umgeschriebenen Kreises.

Da der Centriwinkel $AOB = \frac{360^0}{n}$ ist, so folgt aus der Aufg. 1, b)

$$r = \frac{s}{2} \cot \frac{180^0}{n} \quad \text{und} \quad R = \frac{s}{2 \sin \frac{180^0}{n}}.$$

Wie groß ist der Flächeninhalt eines regelmäßigen a) Fünfeckes, b) Neuneckes, c) Zwölfeckes, wenn eine Seite desselben $1 \cdot 5^{dm}$ beträgt?

3. Aus dem Halbmesser eines Kreises die Seite des diesem Kreise ein- oder umgeschriebenen regelmäßigen Vieleckes zu finden.

Es sei (Fig. 214) $OA = OF = R$ der Halbmesser des gegebenen Kreises, $AB = s$ die Seite des diesem Kreise eingeschriebenen, und $CD = S$ die Seite des ihm umgeschriebenen regelmäßigen $n$seitigen Vieleckes.

Aus den Dreiecken AEO und CFO erhält man

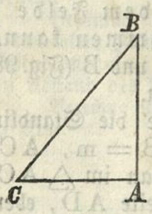
$$s = 2R \sin \frac{180^0}{n} \quad \text{und} \quad S = 2R \operatorname{tang} \frac{180^0}{n}.$$

Der Halbmesser eines Kreises ist $1 \cdot 2^{dm}$; wie groß ist 1. der Umfang, 2. der Flächeninhalt eines diesem Kreise eingeschriebenen und eines ihm umgeschriebenen regelmäßigen a) Dreieckes, b) Siebeneckes, c) Fünfzehneckes?

§. 243. Verschiedene trigonometrische Aufgaben.

1. Aus der Schattenlänge eines verticalen Stabes die Höhe der Sonne zu bestimmen.

Fig. 215.



Es sei $AB = h$ (Fig. 215) ein vertical aufgestellter Stab und $AC = a$ die Länge seines Schattens. Zur Bestimmung der Sonnenhöhe, d. i. des Winkels C, hat man

$$\operatorname{tang} C = \frac{h}{a}.$$

Beispiel: $h = 2^m$, $a = 1 \cdot 82^m$.

2. Die Höhe h eines Gegenstandes AB (Fig. 215), zu dessen Fußpunkte A man messen kann, zu bestimmen.

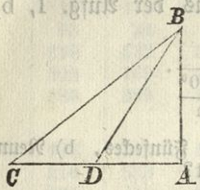
Man messe von einem Punkte C aus die horizontale Strecke $CA = a$, und in C den Höhenwinkel $ACB = \alpha$; dann ist

$$h = a \operatorname{tang} \alpha.$$

3. Die Höhe h eines Gegenstandes AB (Fig. 216), zu dessen Fußpunkte A man nicht messen kann, zu bestimmen.

Man messe in einer durch B gehenden Verticalebene die Strecke CD = a als Standlinie, und in ihren Endpunkten die Höhenwinkel ACB = α und ADB = β; dann ist

Fig. 216.



$$h = BC \,.\, \sin\alpha, \text{ und}$$

$$BC : CD = \sin BDC : \sin CBD, \text{ oder}$$

$$BC : a \quad = \sin\beta : \sin(\beta - \alpha), \text{ daher}$$

$$BC = \frac{a \sin\beta}{\sin(\beta - \alpha)}, \text{ und folglich}$$

$$h = \frac{a \sin\alpha \sin\beta}{\sin(\beta - \alpha)}.$$

4. Die Entfernung zweier Punkte auf dem Felde zu bestimmen, wenn sich dieselbe wegen eines dazwischen befindlichen Hindernisses nicht unmittelbar messen läßt.

Es seien A und B (Fig. 96) die beiden Punkte, zwischen welchen z. B. ein Wald, Teich, ... liegt, so daß eine unmittelbare Messung ihres Abstandes nicht stattfinden kann. Man messe von einem dritten Punkte C aus die Strecken CB = a und CA = b, so wie den Winkel ACB = α. Im Dreiecke ABC sind dann zwei Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel bekannt, und kann aus denselben auch die dritte Seite AB berechnet werden.

Es sei CB = 54^m, CA = 58^m und ACB = $65^0\,29'$; wie groß ist AB?

5. Die Entfernung zweier Punkte auf dem Felde zu bestimmen, wenn man nur zu einem derselben kommen kann.

Man wähle einen dritten Standpunkt C (Fig. 97), von dem man zu einem der beiden Punkte A und B hin messen kann, und messe die Strecke AC = a, so wie die Winkel C und A. Dann ergibt sich aus dem Dreieck ABC

$$AB = \frac{a \sin A}{\sin(A + C)}.$$

AC = 52^m, C = $63^0\,15'$, A = $57^0\,18'$; wie groß ist AB?

6. Die Entfernung zweier Punkte auf dem Felde zu bestimmen, wenn man zu keinem derselben kommen kann.

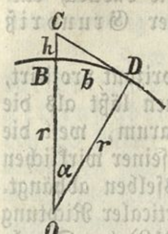
Es sei z. B. die Entfernung der beiden Bäume A und B (Fig. 98), welche sich jenseits eines Flusses befinden, zu bestimmen.

Man wähle zwei Standpunkte C und D, messe die Standlinie CD = a und an ihren Endpunkten die Winkel ACB = m, ACD = n, CDA = p und CDB = q. Dann kann man im $\triangle$ ACD aus der Seite CD und den Winkeln n und p die Seite AD, ebenso im $\triangle$ BCD aus der Seite CD und den Winkeln n — m und q die Seite BD berechnen. Endlich wird im $\triangle$ ABD aus den Seiten AD und BD und dem Winkel q — p die gesuchte Strecke AB bestimmt.

Es sei CD = 75^m, ACB = $59^0\,17'$, ACD = $101^0\,46'$, CDA = $42^0\,10'$ und CDB = $108^0\,39'$; wie groß ist AB?

7. Die Bogenlänge eines größten Kugelkreises der Erde, die man von einer bestimmten Höhe übersehen kann, zu finden.

Fig. 217.



Ist (Fig. 217) $OB = r$ der Halbmesser der Erde, $BC = h$ die Höhe des Auges über der Erdoberfläche und CD die vom Auge an einen größten Kugelkreis der Erde gezogene Tangente (die Gesichtsweite), so hat man, wenn α das Bogenmaß und b das Längenmaß des Bogens BD bezeichnet,

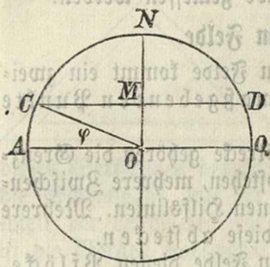
$$\cos\alpha = \frac{r}{h + r}.$$

Aus α kann dann b bestimmt werden.

Wie weit erstreckt sich die Fernsicht eines 2^m über dem Meeresspiegel erhabenen Auges, die Erde als vollkommene Kugel vom Halbmesser $r = 858 \cdot 474$ geogr. Meilen angenommen?

8. Aus der geographischen Breite (Polhöhe) eines Ortes der Erde den Halbmesser des durch diesen Ort gehenden Parallelkreises und dessen Abstand vom Mittelpunkte der Erde zu bestimmen.

Fig. 218.



Es sei (Fig. 218) $AO = r$ der Halbmesser der als Kugel gedachten Erde, AQ der Aequator, N der Nordpol, C ein Ort auf der Erdoberfläche, dessen geographische Breite AC oder W. $AOC = \varphi$, $CM = r'$ der Halbmesser des durch C gehenden Parallelkreises und $OM = d$ dessen Abstand vom Kugelmittelpunkte. Aus dem rechtwinkligen Dreiecke CMO, in welchem der W. $COM = 90^0 - \varphi$ ist, ergibt sich

$$r' = r\cos\varphi \text{ und } d = r\sin\varphi.$$

Wie viel geogr. Meilen hat der Parallelkreis von Wien in der geogr. Breite von $48^0\,12'\,35''$? (Halbmesser der Erde $= 858 \cdot 474$ geogr. Meilen).

Bei welcher geogr. Breite beträgt ein Grad des Parallelkreises $8 \cdot 623$ geogr. Meilen?

Bestimme die Höhe a) der halben heißen Zone, b) der gemäßigten Zone, c) der kalten Zone der Erde, wenn man den Erdhalbmesser $r = 858 \cdot 474$ geogr. Meilen und $\varphi = 23^0\,28'$ als den Abstand des Polarkreises vom Pole, wie auch als den Abstand des Wendekreises vom Aequator annimmt.

Berechne unter denselben Voraussetzungen die Fläche jeder der fünf Zonen der Erde.

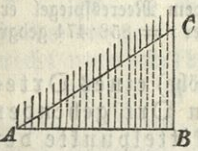
Anhang.

Einiges über die Aufnahme von Grundstücken.

Ein Grundstück **aufnehmen** heißt, die Größe und Gestalt seiner Horizontal-Projection bestimmen. Man denkt sich dabei durch irgend einen Punkt eine Horizontalebene gelegt und auf dieselbe von jedem Grenzpunkte der aufzunehmenden Fläche eine Senkrechte gefällt; verbindet man die Fußpunkte dieser Senkrechten durch Linien, so ist die dadurch entstehende Figur die Horizontal-Projection oder der Grundriß der Fläche.

Die aufzunehmenden Grundstücke werden auf den Horizont projicirt, nicht nur, weil sich die horizontale Lage leichter bestimmen läßt als die Lage einer schiefen Fläche, sondern hauptsächlich auch darum, weil die Ertragsfähigkeit eines Grundstückes nicht von der Größe seiner wirklichen Oberfläche, sondern von der horizontalen Ausdehnung desselben abhängt.

Fig. 219.



Da nämlich die Pflanzen stets in verticaler Richtung wachsen, so haben, wenn AC (Fig. 219) den Durchschnitt einer schiefen Fläche und AB den Durchschnitt ihrer Horizontal-Projection vorstellt, auf der schiefen Fläche von A nach C nicht mehr Pflanzen Raum, als auf der horizontalen Projection AB.

Da eine Figur durch die Länge ihrer Seiten und durch die gegenseitige Lage derselben zu einander, also durch Strecken und Winkel bestimmt ist, so soll hier zuerst gezeigt werden, wie Strecken und Winkel auf dem Felde gemessen werden.

I. Messen der Strecken auf dem Felde.

Bei der Messung von Strecken auf dem Felde kommt ein zweifaches Geschäft vor: Das Bezeichnen ihrer maßgebenden Punkte und das wirkliche Messen.

A. Zu den maßgebenden Punkten einer Strecke gehören die Grenzpunkte und, wenn diese sehr weit von einander abstehen, mehrere Zwischenpunkte, ferner die Schnittpunkte von angenommenen Hilfslinien. Mehrere Zwischenpunkte einer Strecke bestimmen, heißt diese abstecken.

Zum Bezeichnen der Punkte auf dem Felde dienen Pflöcke, Absteckstäbe und Meßfahnen.

Aufgaben. 1. Eine Strecke auf dem Felde abzustecken.

Um zwischen zwei Stäben A und B einen dritten C in gerade Linie zu bringen, trete man ein paar Schritte hinter den einen Stab B zurück, lasse durch einen Gehilfen den einzurichtenden Stab zwischen zwei Fingern frei halten, und gebe ihm durch Zeichen mit der Hand zu verstehen, daß er seinen Stab so lange rechts oder links bewege, bis man ihn in der Richtung der beiden Stäbe B und A erblickt, indem man dabei immer an derselben Seite der Stäbe vorbeivisirt; ist dieses der Fall, so gibt man dem Gehilfen ein Zeichen, worauf er den Stab frei fallen läßt, und in dieser Stellung in die Erde steckt. — Beim Abstecken einer langen Linie werden immer die entfernteren Stäbe früher eingerichtet als die näheren.

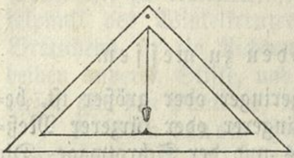
2. Eine auf dem Felde abgesteckte Strecke zu verlängern.

Um eine Strecke AB auf dem Felde bis zum Punkte C zu verlängern, stelle man sich nach dem Augenmaße in der Gegend dieses Punktes auf, visire an der Seite des Stabes, den man zwischen zwei Fingern frei hält, nach den beiden Stäben B und A, wodurch die zu verlängernde Strecke bezeichnet ist, und bewege sich mit seinem Stabe so lang rechts oder links, bis sich alle drei Stäbe decken; dann wird der Stab gehörig in die Erde gesteckt.

B. Zum wirklichen Messen braucht man entweder Meßlatten von $2^1/_2$ oder 5 Meter Länge, oder eine Meßkette mit zwei Kettenstäben und zehn Kettennägeln. Die Meßkette hat eine Länge von 20 Meter und besteht aus eisernen Gliedern, welche durch Ringe verbunden sind; an beiden Enden befinden sich zwei weitere Ringe, durch welche die Kettenstäbe durchgeschoben werden. Außerdem muß der Feldmesser einen mit den Untertheilungen versehenen Meterstab oder ein Meterband haben.

Zur Bestimmung der verticalen Richtung dient das Senkloth, oder noch zweckentsprechender der Senkelstock, d. i. ein runder, ungefähr $1^1/_2$ Meter hoher Stab von leichtem Holze, dessen unteres Ende mit einer schweren eisernen Spitze versehen ist, welche dem Stab die verticale Richtung gibt und erhält, wenn er oben lose zwischen zwei Fingern gehalten wird.

Fig. 220.



Zur Bestimmung der horizontalen Richtung dient die Schrotwage. (Fig. 220.) Diese ist ein hölzernes gleichschenkliges Dreieck, in dessen Spitze ein unten mit einem Gewichte beschwerter Faden befestigt wird, und an dessen Grundlinie die Mitte durch einen Theilstrich bemerkt ist. Der Gebrauch dieses Werkzeuges beruht auf dem Satze 1. in §. 59. Stellt man nämlich die Schrotwage mit der Grundlinie auf die zu prüfende Gerade, und spielt der beschwerte Faden genau in die Mitte der Grundlinie ein, so ist die Gerade horizontal, sonst steht sie gegen den Horizont geneigt. Denn der beschwerte Faden ist allezeit vertical; soll die Grundlinie, und die darunter befindliche Gerade horizontal sein, so muß sie auf den verticalen Faden senkrecht stehen; dies ist aber der Fall, wenn der Faden genau in die Mitte fällt.

Aufgaben. 1. Eine Strecke auf horizontalem Boden zu messen.

a) Mit Meßlatten. Man nehme zwei gleich lange Meßlatten (von 5^m), lege die eine davon mit der einen Endfläche an den Anfangspunkt der zu messenden Strecke so, daß sie genau in die Richtung der Strecke zu liegen kommt, und die zweite Meßlatte in derselben Richtung so an die erste, daß sich ihre Endflächen berühren; sodann hebe man die erste Latte auf, lege sie an das Ende der zweiten und verfahre so fort bis an das Ende der Strecke. Jede Meßlatte wird, wenn man sie aufhebt, laut gezählt.

b) Mit der Meßkette. Die Kette, deren Endringe man an die Kettenstäbe schiebt, wird von zwei Gehilfen, den Kettenziehern, getragen. Der hintere Kettenzieher setzt seinen Stab in den Anfangspunkt A der zu messenden Strecke AB; der vordere Kettenzieher, welchem zugleich sämmtliche Kettennägel übergeben werden, zieht die Kette weiter, läßt sich von dem hinteren Kettenzieher genau mit seinem Kettenstabe in die Strecke einrichten und spannt dann die

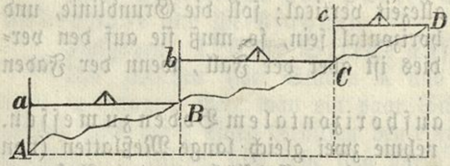
Kette an, indem er den Ring in die Mitte des Stabes schiebt, den Stab horizontal hält, die Kette in die Höhe schnellt und sogleich wieder anzieht. Die so gespannte Kette wird über den Punkt, wo früher der Kettenstab eingesetzt war, hinüber gezogen und in dem Ende C ein Kettennagel eingesteckt. Dann verlassen beide Kettenzieher ihre Punkte und ziehen die Kette in der Strecke fort, bis der hintere Kettenzieher zu dem Punkte C kommt; hier zieht er den Kettennagel heraus, setzt an dessen Stelle seinen Kettenstab und richtet von da den vorderen Kettenzieher ein, worauf sich das frühere Verfahren so lange wiederholt, bis man an den Endpunkt der zu messenden Strecke gelangt. Vom letzten Nagel aus bis zum Endpunkte B wird die Länge an der darüber hinaus gespannten Kette abgezählt. Zuletzt zählt der hintere Kettenzieher die gesammelten Nägel, multiplicirt ihre Anzahl mit 20 und addirt zu dem Producte noch die Länge vom letzten Nagel bis zum Endpunkte der Strecke.

Will man zuverlässige Resultate erhalten, so muß die Messung 2- oder mehrmal wiederholt werden; von den gefundenen Maßen nimmt man die Durchschnittszahl.

2. Eine Strecke auf schiefem Boden zu messen.

Je nachdem die Neigung des Bodens geringer oder größer ist, bedient man sich zur Lösung dieser Aufgabe längerer oder kürzerer Meßlatten und in beiden Fällen des Senkelstockes und der Schrotwage. Die Arbeit wird von unten nach oben nach der sogenannten Staffelmessung ausgeführt, welche in Folgendem besteht.

Fig. 221.



Man legt (Fig. 221) die eine Meßlatte in die Richtung der abgesteckten Linie und gibt ihr mittelst der Schrotwage eine horizontale Lage, so daß sie mit dem einen Endpunkte B auf dem Boden aufruht und mit dem anderen Endpunkte a an den Senkelstock ansteht, welcher, vertical über den Anfangspunkt A der Strecke gehalten wird. Dann legt man diese eine Meßlatte ganz auf den Boden, wobei jedoch zu achten ist, daß sich ihr Endpunkt B nicht weiter rückwärts bewegt, begibt sich mit der zweiten Meßlatte in der Richtung der Strecke nach B und verwendet dieselbe wie früher die erste Meßlatte. Dieses Verfahren wird bis zu dem Endpunkte D der Strecke fortgesetzt. Ist der letzte Abstand kürzer als die Meßlatte, wie in der obigen Figur der Abstand zwischen C und D, so läßt man die Meßlatte am Senkelstocke bei c vorstehen und zählt an derselben die Länge cD.

3. Wie die Länge einer Strecke, welche nicht nach ihrer ganzen Ausdehnung zugänglich ist und daher nicht unmittelbar gemessen werden kann, mittelbar bestimmt wird, ist in der Planimetrie bei den praktischen Anwendungen der Aehnlichkeitssätze gezeigt worden.

II. Messen der Winkel auf dem Felde.

So wie beim Feldmessen die Strecken stets nach ihrer horizontalen Länge bestimmt werden, so wird auch bei den Winkeln die Größe der Horizontal-Projection, d. i. die Größe des Winkels gemessen, den die Horizontal-Projectionen seiner Schenkel mit einander bilden.

Dabei kommen zwei Hauptaufgaben vor: die Bestimmung von rechten Winkeln, d. i. das Errichten und Fällen von Senkrechten, und die Aufnahme von Winkeln überhaupt.

A. Zur Bestimmung der Senkrechten auf dem Felde dient das Winkelkreuz. Dieses besteht aus zwei unter rechten Winkeln zusammengefügten Brettchen, die an den Enden mit senkrechten Stiften versehen sind; es wird auf einem Stative horizontal befestigt. Statt des Statives kann füglich auch der Senkelstock an seinem oberen Ende zur Aufnahme des Winkelkreuzes eingerichtet werden.

Aufgaben. 1. In einem Punkte einer abgesteckten Geraden eine Senkrechte zu errichten.

Um auf dem Felde in einem Punkte einer Geraden auf diese eine Senkrechte zu errichten, stelle man über den gegebenen Punkt den Mittelpunkt des Winkelkreuzes, und bringe die beiden Stifte des einen Brettchens in die Richtung der Geraden; dann visire man über die beiden anderen Stifte, und lasse in ihrer Richtung einen Stab einsetzen; dieser gibt den Punkt an, durch welchen die gesuchte Senkrechte gehen soll.

2. Von einem Punkte C außerhalb einer abgesteckten Geraden AB auf diese eine Senkrechte zu fällen.

Diese wohl am häufigsten vorkommende Aufgabe wird ebenfalls mittelst des Winkelkreuzes gelöst. Um mit Hilfe desselben denjenigen Punkt O der Geraden AB zu bestimmen, in welchem die von C darauf gezogene Senkrechte eintrifft, lasse man in C einen Stab einstecken, und stelle sich mit dem Winkelkreuze in der Geraden AB dort auf, wo beiläufig die Senkrechte hinfallen dürfte; bringe die beiden Stifte des einen Brettchens in die Richtung dieser Geraden und visire über die beiden anderen Stifte. Trifft die Visirlinie gerade auf den gegebenen Punkt C, so ist der Punkt unter der Mitte des Werkzeuges der Ort, wo die Senkrechte eintrifft; erscheint aber der gegebene Punkt C rechts oder links von der Visirlinie, so rücke man das Winkelkreuz nach der Seite desselben so lange, bis man ihn in der Richtung der Stifte erblickt, wobei übrigens die zwei anderen Stifte beständig in der Richtung der Geraden AB bleiben müssen.

B. Die Werkzeuge, durch welche die Größe beliebiger Winkel auf dem Felde nach Graden und Gradtheilen bestimmt wird, heißen vorzugsweise Winkelmesser und haben sehr verschiedene Einrichtung. Der einfachste Winkelmesser ist das Astrolabium. Es besteht aus einem vor- und rückwärts in Grade und Gradtheile eingetheilten Halbkreise von Messing; an dem Durchmesser ist ein Lineal befestigt, an dessen Ende sich zwei senkrechte Diopteru befinden, von denen die eine in der unteren Hälfte einen verticalen Einschnitt, in der oberen eine rechteckige Oeffnung mit einem verticalen Faden, die andere unten die

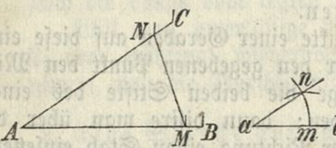
Oeffnung mit dem Faden und oben den Einschnitt hat. Um den Mittelpunkt des Halbkreises ist ein zweites Lineal, das ebenfalls mit zwei solchen Dioptern versehen ist, sanft beweglich. Das ganze Instrument ruht auf einem dreifüßigen Stativ.

Aufgabe. Einen Winkel auf dem Felde aufzunehmen.

a) Mit dem Winkelmesser. Man stellt das Astrolabium mit seinem Mittelpunkte über den Scheitel A des zu messenden Winkels BAC so auf, daß der Halbkreis horizontal liegt, richtet die festen Diopter auf den einen Richtpunkt B und dreht dann die beweglichen Diopter, bis man durch sie den zweiten Richtpunkt C erblickt. Hierauf liest man an der Eintheilung die Grade und Gradtheile ab, welche der gemessene Winkel enthält.

b) Ohne Winkelmesser. Man trage auf dem Felde, von dem Scheitel A (Fig. 222) aus, auf beiden Schenkeln dieselbe Länge z. B. 20^m bis M und N auf, und messe dann die Strecke MN. Nun ziehe man auf dem Papiere eine Gerade ab, trage darauf nach einem verjüngten Maßstabe am = AM auf, beschreibe aus a mit dem Halbmesser am einen Kreisbogen und durchschneide denselben aus m mit der Cirkelöffnung mn, welche nach demselben Maßstabe gleich MN ist; zieht man an, so ist der Winkel man = MAN. Der auf diese Art auf dem Papiere gezeichnete Winkel kann sodann mit dem Transporteur gemessen werden.

Fig. 222.



III. Aufnahme von Grundstücken.

Bevor man zur Aufnahme einer Fläche schreitet, geht man um dieselbe an ihrem Umfange herum, schlägt in allen Eck- und Krümmungspunkten Pflöcke ein, welche mit fortlaufenden Nummern oder Buchstaben bezeichnet sind, und entwirft sich zugleich von dem Umfange der Figur sammt der Bezeichnung der eingeschlagenen Pflöcke nach dem Augenmaße eine Handzeichnung oder Handskizze mit Bleistift, in welcher dann an jede wirklich gemessene Linie und in jeden gemessenen Winkel das gefundene Maß eingetragen wird. Nach dieser Handzeichnung fertigt man später zu Hause den Plan an und nimmt die Flächenberechnung vor.

1. Aufnahme einer Fläche auf dem Felde mit Kette oder Meßlatten.

a) Durch Zerlegung in Dreiecke.

Man umgehe die Figur und entwerfe eine Handskizze derselben, denke sich durch je drei Punkte ein Dreieck gelegt, und messe dessen drei Seiten. Hierauf verzeichne man die Dreiecke in der gehörigen Ordnung auf dem Papiere, indem man die gemessenen Seiten nach einem verjüngten Maßstabe aufträgt. Die dadurch erhaltenen Punkte haben dieselbe Lage gegen einander, wie die entsprechenden Punkte auf dem Felde; man braucht sie nur noch gehörig durch Linien zu verbinden. In

Fig. 223.

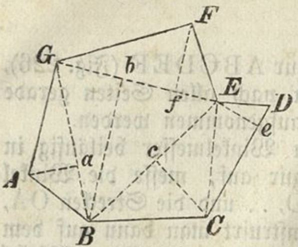


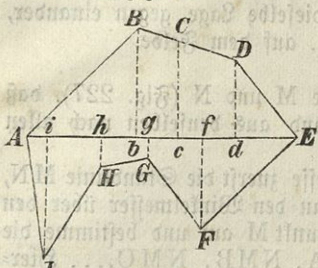
Fig. 223 würde man mit dem Dreiecke ABG beginnen, und dann folgeweise die Dreiecke BGE, GEF, BEC, CED construiren.

Zur Controle sowie wegen der Berechnung des Flächeninhaltes, welche nach §. 75, a) geschieht, wird man in jedem Dreiecke auf dem Felde auch die Höhe ausstecken und messen.

b) Mittelst Abscissen und Ordinaten.

Man pflöcke zuerst die Figur aus, und stecke durch die entferntesten Eckpunkte A und E (Fig. 224) eine Gerade als Abscissenlinie ab. Auf diese fälle man von allen bezeichneten Umfangspunkten Senkrechte, und messe die einzelnen Stücke der Abscissenlinie und alle Ordinaten. Auf dem Papiere trägt man nun auf einer Geraden nach einem verjüngten Maßstabe zuerst die Abscissen von A bis i, h, b, ... auf; in diesen Punkten errichtet man Senkrechte, und trägt darauf die Ordinaten gehörig auf. Endlich braucht man nur zwischen den dadurch erhaltenen Punkten die entsprechenden Linien zu ziehen.

Fig. 224.

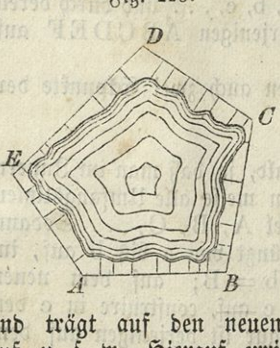


Die Flächenberechnung wird nach §. 75, b) vorgenommen.

c) Durch das Einschließen der Figur.

Wenn sich im Innern der aufzunehmenden Figur Hindernisse der Messung befinden, so sind die zwei eben angegebenen Methoden nicht anwendbar. In diesem Falle führt folgendes Verfahren zum Ziele. Es sei z. B. ein Teich (Fig. 225) aufzunehmen. Man umgebe die Figur mit mehreren gegen einander geneigten Abscissenlinien, die zusammen ein Vieleck ABCDE bilden, und fälle auf dieselben von allen Biegungspunkten Senkrechte; man messe die Abscissentheile und die Ordinaten, und nehme zugleich die Winkel, welche die einzelnen Abscissenlinien mit einander bilden, nach dem oben unter II. B, b angegebenen Verfahren auf. Dann zieht man auf dem Papiere eine Gerade, und trägt darauf die Theile der Abscissenlinie AB verjüngt auf; im Endpunkte B construirt man einen Winkel, welcher so groß ist als der Winkel B auf dem Felde, und trägt auf den neuen Schenkel die Stücke der Abscissenlinie BC auf, u. s. w. Hierauf errichtet man in den einzelnen Punkten der Abscissenlinien Senkrechte, und trägt darauf die entsprechenden Ordinaten auf. Werden nun die dadurch erhaltenen Punkte mit freier Hand gehörig verbunden, so hat man die verlangte Zeichnung des Teiches.

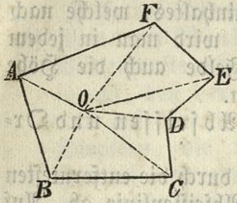
Fig. 225.



2. Aufnahme einer Fläche auf dem Felde mit dem Winkelmesser.

a) Aus der Mitte.

Fig. 226.



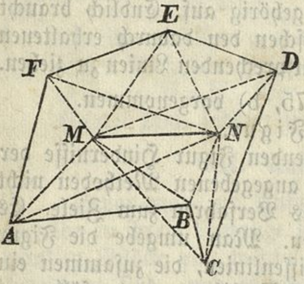
Es soll die Figur ABCDEF (Fig. 226), in deren Innern man nach allen Seiten gerade Linien messen kann, aufgenommen werden.

Man stelle den Winkelmesser beiläufig in der Mitte O der Figur auf, messe die Winkel AOB, BOC, COD, .. und die Strecken OA, OB, OC, ... Construirt man dann auf dem Papiere um einen Punkt o die gemessenen Winkel und trägt auf ihren Schenkeln die gemessenen Strecken nach einem verjüngten Maßstabe von o bis a, b, c, ... auf, so haben diese Punkte auf dem Papiere dieselbe Lage gegen einander, wie die gleichnamigen Punkte A, B, C, ... auf dem Felde.

b) Aus zwei Standpunkten.

Man wähle zwei solche Standpunkte M und N (Fig. 227), daß man zwischen ihnen unmittelbar messen und aus denselben nach allen Eckpunkten der Figur sehen kann.

Fig. 227.



Man messe zuerst die Standlinie MN, dann stelle man den Winkelmesser über den einen Standpunkt M auf und bestimme die Winkel NMA, NMB, NMC,... Hierauf übertrage man den Winkelmesser auf den andern Standpunkt N und messe daselbst die Winkel MNA, MNB, MNC, .. Construirt man nun auf dem Papiere die Standlinie nach einem verjüngten Maßstabe und trägt in ihren Endpunkten m und n die gemessenen Winkel in der Ordnung auf, so erhält man durch den Durchschnitt der entsprechenden Schenkel die Punkte a, b, c, . . . und durch deren Verbindung die Figur abcdef, welche derjenigen ABCDEF auf dem Felde ähnlich ist.

Als Standpunkte können nach Umständen auch zwei Eckpunkte der Figur gewählt werden.

c) Aus dem Umfange.

Es sei ABCDEF (Fig. 226) ein Wald, so daß man im Innern desselben nicht unmittelbar messen kann. Man messe alle Umfangslinien AB, BC, CD, . . . und alle Umfangswinkel A, B, C, . . . Sodann trage man auf dem Papiere zuerst AB verjüngt von a bis b auf, im Endpunkte b construire man den Winkel b = B; auf dem neuen Schenkel trage man BC verjüngt von b bis c auf, construire in c den Winkel c = C, u. s. f. Die so erhaltene Figur ist derjenigen auf dem Felde ähnlich.

NARODNA IN UNIVERZITETNA
KNJIŽNICA
COBISS ⊚
00000498173