Univerza v Ljubljani
Fakulteta za matematiko in fiziko
Oddelek za matematiko

Barbara Drinovec Drnovšek

Pravi holomorfni diski v Steinovih mnogoterostih

Disertacija

Mentor: prof. dr. M. Černe
Somentor: prof. dr. J. Globevnik

Ljubljana, 2003

Kazalo

Povzetek

V doktorski disertaciji obravnavamo prave holomorfne preslikave z diska v Steinovo mnogoterost. Delo je razdeljeno na štiri poglavja.

V uvodnem poglavju ponovimo definicije in izreke, ki jih potrebujemo v nadaljevanju. Za motivacijo rezultatov te disertacije navedemo nekaj sorodnih rezultatov in odprtih problemov.

V drugem poglavju se ukvarjamo s problemom obstoja pravega holomorfnega diska v Steinovi mnogoterosti, ki ima v sliki poljubno diskretno množico. Dokažemo, da za dano diskretno podmnožico S v povezani Steinovi mnogoterosti X obstaja prava holomorfna imerzija z diska v X, ki ima množico S v sliki; če je $\dim X \geq 3$, lahko dosežemo, da je f vložitev. V točkah iz S lahko predpišemo še dotike višjega reda z danimi enorazsežnimi podmnogoterostmi v X.

V tretjem poglavju se ukvarjamo z obstojem pravih analitičnih diskov v komplementih zaprtih konveksnih množic. Naj bo C zaprta konveksna podmnožica v $\mathbb{C}^2$. V disertaciji dokažemo, da velja naslednje: za vsako točko $p \in \mathbb{C}^2 \setminus C$ obstaja prava holomorfna preslikava z diska v $\mathbb{C}^2$ s sliko v $\mathbb{C}^2 \setminus C$, ki zadene točko p, natanko tedaj, kadar je C bodisi kompleksna premica bodisi C ne vsebuje nobene kompleksne premice.

V četrtem poglavju konstruiramo pravo holomorfno preslikavo z diska v Steinovo mnogoterost, katere slika ne seka dane kompletne pluripolarne množice.

Ključne besede. Prava holomorfna preslikava, Steinova mnogoterost, diskretna množica, konveksna množica, kompletna pluripolarna množica, plurisubharmonična funkcija, holomorfna vložitev.

Abstract

In doctoral disertation we study proper holomorphic maps of the unit disc into Stein manifolds.

In the first chapter we repeat definitions and theorems which are necessary to understand the results in the thesis. We mention some results and some unsolved problems which are related to the ones in the thesis.

Denote by $\triangle$ the open unit disc in $\mathbb{C}$. In the second chapter we prove that given a discrete subset S of a connected Stein manifold X there is a proper holomorphic immersion $f : \triangle \to X$ such that $S \subset f(\triangle)$; if $\dim X \geq 3$ the map f can be chosen to be an embedding. In addition we prove that we can prescribe higher order contacts of $f(\triangle)$ with given one dimensional submanifolds in X.

Let C be a closed convex subset of $\mathbb{C}^2$. In the third chapter we prove that for each $p \in \mathbb{C}^2 \setminus C$ there is a proper holomorphic map $\varphi : \triangle \to \mathbb{C}^2$ such that $\varphi(0) = p$ and $\varphi(\triangle) \cap C = \emptyset$ if and only if either C is a complex line or C does not contain any complex line.

In the fourth chapter the following is proved: Let X be a Stein manifold of dimension at least 2. Given a complete pluripolar set $Y \subset X$, a point $p \in Y \setminus X$ and a vector V tangent to X at p, there exists a proper holomorphic map $f \colon \triangle \to X$ such that $f(0) = p$, $f'(0) = \lambda V$ for some $\lambda > 0$ and $f(\triangle) \cap Y = \emptyset$.

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 32H35; Secondary 32E10, 32H02, 32U99, 32C25

Key words and phrases. Proper holomorphic map, Stein manifold, discrete set, convex set, complete pluripolar set, plurisubharmonic function, holomorphic embedding

Zahvala

Najprej se zahvaljujem prof. dr. J. Globevniku, ki me je navdušil za kompleksno analizo. Predlagal mi je zanimivo temo, mi pomagal pri reševanju problemov in me vodil pri nastajanju tega dela. Najlepša hvala tudi za skrben pregled znanstvenih člankov.

Zahvalo dolgujem še prof. dr. F. Forstneriču, ki mi je prijazno pomagal z nasveti in predlagal nekatere izboljšave.

Najlepša hvala prof. dr. M. Černetu za natančen pregled dela.

Članom seminarja za kompleksno analizo se zahvaljujem za pozornost in čas, ki so mi ju namenili.

Na koncu naj se zahvalim še domačim za vzpodbudo.

PRVO POGLAVJE

Uvod

Povsod bomo s $\triangle$ označili odprt enotski disk v $\mathbb{C}$ in z $\mathbf{B}$ odprto enotsko kroglo v $\mathbb{C}^N$. Sedaj se spomnimo definicij in pojmov, ki jih obravnavamo v disertaciji.

Kompleksna mnogoterost je *Steinova mnogoterost*, če je biholomorfna zaprti kompleksni podmnogoterosti v kompleksnem evklidskem prostoru $\mathbb{C}^M$ za neko naravno število M. Primer Steinove mnogoterosti je območje holomorfnosti v $\mathbb{C}^N$, posebej vsaka odprta konveksna množica v $\mathbb{C}^N$ [Hör].

Preslikava z diska v $\mathbb{C}^N$ je *holomorfna*, če je holomorfna po komponentah. Preslikava z diska v kompleksno mnogoterost je *holomorfna*, če je holomorfna v lokalnih koordinatah. Pravimo, da je preslikava *prava*, če je praslika vsake kompaktne množice kompaktna. Gladka preslikava je *imerzija*, če je njen odvod v vsaki točki injektivna preslikava. Injektivni pravi holomorfni imerziji pravimo *holomorfna vložitev*. Sliko holomorfne preslikave z diska imenujemo krajše kar *holomorfen (analitičen) disk*.

Podmnožica Y v kompleksni mnogoterosti X je *analitična*, če za vsako točko $p \in X$ obstajajo okolica U točke p in končno mnogo takih holomorfnih funkcij na U, da je $Y \cap U$ množica skupnih ničel teh funkcij. Iz definicije sledi, da je analitična množica zaprta.

Na vsaki Steinovi mnogoterosti obstaja gladka strogo plurisubharmonična funkcija izčrpanja [Hör]. Pravimo, da je realna funkcija *funkcija* *izčrpanja* za dano mnogoterost, če so njene podnivojske množice relativno kompaktne. Navzgor polzvezna funkcija, ki je definirana na območju v $\mathbb{C}^N$, in, ki ni identično enaka $-\infty$, je *plurisubharmonična*, če je zožitev na presek območja z vsako kompleksno premico subharmonična. Za gladko funkcijo je ta pogoj ekvivalenten pogoju, da je v vsaki točki iz območja Levijeva forma nenegativna. Pravimo, da je gladka funkcija *strogo plurisubharmonična* na danem območju, če je Levijeva forma pozitivna v vsaki točki iz območja. Izkaže se, da je definicija neodvisna od izbire koordinatnega sistema, zato lahko (strogo) plurisubharmonične funkcije definiramo na kompleksnih mnogoterostih.

Podmnožica v kompleksni mnogoterosti je *pluripolarna*, če je vsebovana v $-\infty$ nivojnici neke plurisubharmonične funkcije, in je *kompletna pluripolarna*, če je enaka $-\infty$ nivojnici neke plurisubharmonične funkcije. Ničelne množice holomorfnih funkcij in analitične množice so kompletne pluripolarne.

Ena od motivacij za raziskovanje pravih holomorfnih preslikav je vprašanje o obstoju enorazsežnih analitičnih množic z določenimi lastnostmi v Steinovih mnogoterostih. Po Remmertovem izreku [Re1], [Re2], [Chi, stran 65] je namreč slika vsake prave holomorfne preslikave z diska v kompleksno mnogoterost enorazsežna analitična množica.

Po drugi strani, če je Y čista enorazsežna analitična množica, potem obstajata enorazsežna kompleksna mnogoterost Y^*, ki ji pravimo *normalizacija od* Y, in končna prava holomorfna preslikava $Y^* \to Y$, ki je biholomorfna nad množico regularnih točk od Y. Pravimo ji *normalizacijska preslikava* [Chi, stran 70]. Več o normalizacijskih preslikavah lahko bralec najde v dodatku 2.9.1. Če je Y še dodatno ireducibilna, je Y^* povezana, torej je Riemannova ploskev. Za vsako kompleksno mnogoterost X pa obstaja enolično določena (do biholomorfne preslikave) univerzalna krovna mnogoterost $\tilde{X}$ in projekcija $\tilde{X} \to X$, ki je lokalni biholomorfni krov. V primeru, da je X Riemannova ploskev, je $\tilde{X}$ ena od naslednjih mnogoterosti: enotski disk, kompleksna premica ali Riemannova sfera. Čisto enorazsežni ireducibilni analitični množici

Y smo na ta način priredili univerzalno krovno mnogoterost $\tilde{Y}^*$. Vsako holomorfno funkcijo z Y lahko dvignemo do holomorfne funkcije z $\tilde{Y}^*$. Ker nas zanimajo analitične podmnožice v Steinovi mnogoterosti, je univerzalna krovna mnogoterost bodisi enotski disk bodisi kompleksna premica.

V disertaciji obravnavamo prave holomorfne preslikave z diska v Steinovo mnogoterost.

V članku [Gl2] je J. Globevnik dokazal, da za poljubno diskretno množico S v odprti konveksni množici $D \subset \mathbb{C}^N$ obstaja prava holomorfna imerzija z diska v D, ki ima S v sliki. Če je $N \geq 3$, je konstruirana tudi vložitev. Znano je, da za vsako točko p v Steinovi mnogoterosti X obstaja prava holomorfna preslikava z diska v X, ki ima točko p v sliki [Gl1]. V prvem poglavju z uporabo metod iz teh dveh člankov dokažemo, da za dano diskretno podmnožico S v povezani Steinovi mnogoterosti X obstaja prava holomorfna imerzija $f\colon \triangle \to X$, ki ima množico S v sliki; če je $\dim X \geq 3$, lahko dosežemo, da je f vložitev. V točkah iz S lahko predpišemo še dotike višjega reda z danimi enorazsežnimi podmnogoterostmi v X.

Če je $\dim X \geq 3$ lahko z majhno perturbacijo odstranimo samopresečišča. Če je $\dim X = 2$, potem to z majhnimi perturbacijami ni mogoče. Že konstrukcija prave holomorfne vložitve diska v $\mathbb{C}^2$ je netrivialna [Ste]. F. Forstnerič, J. Globevnik in B. Stensones so v članku [FGS] z uporabo holomorfnih avtomorfizmov pokazali, da za vsako povezano psevdokonveksno Rungejevo območje $\Omega \subset \mathbb{C}^N$, $N \geq 2$, obstaja prava holomorfna vložitev, ki ima v sliki dano diskretno podmnožico v Ω. V članku [Gl3] je avtor dokazal, da lahko vsako pravo injektivno preslikavo z diskretne podmnožice v $\mathbb{C}^2$ razširimo do prave holomorfne vložitve z diska v $\mathbb{C}^2$. Naj bo Ω strogo psevdokonveksno območje v $\mathbb{C}^2$ in točka $w \in \Omega$. Ni znano, ali obstaja prava holomorfna vložitev z diska v Ω, ki ima točko w v sliki.

Avtorja v [FG1] navedeta primer omejenega območja z gladkim nepovezanim robom v $\mathbb{C}^N$, $N \geq 2$, ki ni psevdokonveksno, in, ki vsebuje točko, ki ne leži v sliki nobene prave holomorfne preslikave z diska v to območje. Vprašamo se lahko, katera območja D v $\mathbb{C}^N$ so taka, da je poljubna točka iz D vsebovana v pravem holomorfnem disku v D. Splošnejše odprto vprašanje je, katere točke v danem območju D v $\mathbb{C}^N$ lahko zadenemo s pravo holomorfno preslikavo z diska v D. Podobno se lahko vprašamo, katerim podmnožicam v danem območju ali v Steinovi mnogoterosti se lahko izognemo s sliko prave holomorfne preslikave.

Znano je, da se lahko vsaki kompaktni podmnožici v Steinovi mnogoterosti izognemo s pravim analitičnim diskom. Odprto pa je, katerim zaprtim množicam se lahko izognejo pravi analitični diski (glej [FG1, Gl1, FG2]). H. Alexander [Al1] je leta 1975 dokazal, da za zaprto polarno množico $E \subset \mathbb{C}$ obstaja taka prava holomorfna preslikava $F = (F_1, F_2)\colon \triangle \to \mathbb{C}^2$, da je $F_1(\triangle) \cap E = \emptyset$. Po drugi strani pa je že dalj časa znano, da slika vsake prave holomorfne preslikave z diska v $\mathbb{C}^2$ seka nepolarno družino vzporednih kompleksnih premic (glej [Jul, Tsu, Al1]). Avtorja sta v članku [FG2] za posebno družino plurisubharmoničnih funkcij dokazala, da obstaja pravi holomorfni disk v nadnivojski množici plurisubharmonične funkcije iz te družine. V istem članku je dokazano, da obstaja pravi holomorfni disk v $\mathbb{C}^2$, ki ne seka koordinatnih osi.

V tretjem poglavju dokažemo, da za zaprto konveksno podmnožico C v $\mathbb{C}^2$ velja, da za vsako točko $p \in \mathbb{C}^2 \setminus C$ obstaja taka prava holomorfna preslikava $\varphi\colon \triangle \to \mathbb{C}^2$, da je $\varphi(0) = p$ in $\varphi(\triangle) \cap C = \emptyset$ natanko tedaj, kadar je C bodisi kompleksna premica bodisi C ne vsebuje nobene kompleksne premice. Če je C zaprta konveksna podmnožica v $\mathbb{C}^N$, $N \geq 3$, ali če je C kompleksna premica v $\mathbb{C}^2$, potem skozi vsako točko v komplementu konstruiramo vložen disk.

N. Nikolov in P. Pflug sta v članku [NP] podobno dokazala za preslikave s kompleksne premice: naj bo C zaprta konveksna podmnožica v $\mathbb{C}^N$, $N \geq 2$. Potem lahko vsako injektivno preslikavo iz končne množice točk v $\mathbb{C}$ (ki vsebuje vsaj dve točki), ki slika v $\mathbb{C}^N \setminus C$, razširimo do prave holomorfne vložitve kompleksne premice v $\mathbb{C}^N$ s sliko v $\mathbb{C}^N \setminus C$ natanko tedaj, kadar je C bodisi kompleksna hiperravnina bodisi ne vsebuje nobene kompleksne hiperravnine.

V četrtem poglavju konstruiramo pravo holomorfno preslikavo z diska v Steinovo mnogoterost X, katere slika ne seka dane kompletne pluripolarne množice Y in ki ima v sliki izbrano točko iz $X \setminus Y$. Komplement pluripolarne množice v Steinovi mnogoterosti je lahko hiperboličen, zato v splošnem podoben rezultat za prave holomorfne preslikave s kompleksne premice ne velja.

Za odprte Riemannove ploskve pa je zanimiv problem vlaganja v $\mathbb{C}^2$. Laufer [Lau] je konstruiral vložitev kolobarja v $\mathbb{C}^2$, H. Alexander je v članku [Al2] konstruiral vložitev $\triangle \setminus \{0\}$ v $\mathbb{C}^2$. J. Globevnik in B. Stensones [GS] sta z uporabo avtomorfizmov prostora $\mathbb{C}^2$ dokazala, da se da vsako končno povezano območje v $\mathbb{C}$ brez izoliranih točk v robu vložiti v $\mathbb{C}^2$. M. Černe in J. Globevnik sta isti rezultat v članku [ČG] dokazala z drugimi sredstvi na bolj preprost način. M. Černe in F. Forstnerič [ČF] sta dokazala še več: na vsaki končni ploskvi $\mathcal{R}$ obstaja taka kompleksna struktura, da se da odprta Riemannova ploskev $\mathcal{R} \setminus b\mathcal{R}$ holomorfno vložiti v $\mathbb{C}^2$. Ni znano, ali za vsako odprto Riemannovo ploskev obstaja prava holomorfna vložitev v $\mathbb{C}^2$.

DRUGO POGLAVJE

Pravi holomorfni diski v Steinovih mnogoterostih skozi diskretne množice točk

Pokazali bomo, da za dano diskretno podmnožico S v povezani Steinovi mnogoterosti M obstaja prava holomorfna imerzija $f\colon \triangle \to M$, ki ima množico S v sliki; če je $\dim M \geq 3$, lahko dosežemo, da je f vložitev. V točkah iz S lahko predpišemo še dotike višjega reda z danimi enorazsežnimi podmnogoterostmi v M.

2.1. Uvod in rezultati

V [Gl2] je dokazano, da za dano diskretno podmnožico S v konveksnem območju $D \subset \mathbb{C}^N$ obstaja prava holomorfna preslikava $f\colon \triangle \to D$, za katero velja $S \subset f(\triangle)$; če je $N \geq 3$ lahko dosežemo, da je f vložitev. Podobno je v [Gl1] dokazano, da za dano Steinovo mnogoterost M, $\dim M \geq 2$, točko $z \in M$ in smer $X \in T_zM \setminus \{0\}$ obstaja prava holomorfna preslikava $f\colon \triangle \to M$, z lastnostjo, da je $f(0) = z$ in $f'(0) = \lambda X$ za nek $\lambda > 0$. Glavni rezultat v tem poglavju posploši zgornja izreka.

Izrek 2.1.1. *Naj bo $\{z_n; n \in \mathbb{N}\}$ diskretna podmnožica v povezani Steinovi mnogoterosti M z $\dim M \geq 2$. Potem obstaja prava holomorfna imerzija $f\colon \triangle \to M$ z lastnostjo $z_n \in f(\triangle)$ $(n \in \mathbb{N})$.*

Še več, če je $\dim M \geq 3$, potem lahko dobimo tako preslikavo f, ki je prava holomorfna vložitev.

Pravzaprav bomo dokazali močnejši rezultat. Predpisali bomo dotike višjega reda $f(\triangle)$ z danimi enorazsežnimi podmnogoterostmi v točkah z_n. Preden bomo formulirali izrek, razložimo, kaj imenujemo dotik reda vsaj k.

Naj bosta N in P p-razsežni podmnogoterosti kompleksne mnogoterosti M. Če se N in P sekata v točki $z_0 \in M$, pravimo, da *imata N in P v točki z_0 dotik reda vsaj* 0. Če se N in P sekata v točki $z_0 \in M$ in če je $T_{z_0}N = T_{z_0}P$, pravimo, da *imata N in P v točki z_0 dotik reda vsaj* 1. V tem primeru lahko izberemo holomorfni koordinatni sistem (V, ϕ) blizu z_0 in kompleksni podprostor $L \subset \mathbb{C}^{\dim M}$ z lastnostjo $T_{\phi(z_0)}\phi(N) \oplus L = \mathbb{C}^{\dim M}$. Pišimo $z = (z', z'')$, kjer je $z' \in T_{\phi(z_0)}\phi(N)$ in $z'' \in L$. Potem obstajajo okolica $U \subset T_{\phi(z_0)}\phi(N)$ od 0 in taki holomorfni preslikavi $g_N \colon U \to L$, $g_P \colon U \to L$, za kateri velja $g_N(0) = g_P(0) = 0$ in $Dg_N(0) = Dg_P(0) = 0$, in množica $\phi(N)$ je blizu $\phi(z_0)$ dana z $\{\phi(z_0) + (z', g_N(z')); z' \in U\}$, množica $\phi(P)$ pa z $\{\phi(z_0) + (z', g_P(z')); z' \in U\}$. Če imata preslikavi g_N in g_P isti brst reda k v 0, pravimo, da *imata N in P v točki z_0 dotik reda vsaj k*. S tem je dotik reda vsaj k dobro definiran.

IZREK 2.1.2. *Naj bo $\{z_n; n \in \mathbb{N}\}$ diskretna podmnožica v povezani Steinovi mnogoterosti M,* $\dim M \geq 2$.

Potem obstajata zaporedje $\{\zeta_n\} \subset \triangle$ in prava holomorfna imerzija $f \colon \triangle \to M$, za katera velja $f(\zeta_n) = z_n$ za vsak $n \in \mathbb{N}$.

Še več, če je dano zaporedje $\{X_n \in T_{z_n}M \setminus \{0\}\}$, lahko preslikavo f in zaporedje $\{\zeta_n\}$ izberemo na tak način, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ obstaja tak $\lambda_n > 0$, da je $f'(\zeta_n) = \lambda_n X_n$.

Še več, če je dano tako zaporedje lokalnih enorazsežnih kompleksnih podmnogoterosti $\{N_n\}$ v M, da je $z_n \in N_n$ in $X_n \in T_{z_n}N_n$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, in če je dano zaporedje naravnih števil $\{k_n\}$, potem obstajajo prava holomorfna imerzija $f \colon \triangle \to M$, zaporedje $\{\zeta_n\}$ in okolice $\mathcal{W}_n$ od ζ_n v $\triangle$ z lastnostjo, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $f(\zeta_n) = z_n$, $f'(\zeta_n) = \lambda_n X_n$ za nek $\lambda_n > 0$ in mnogoterosti $f_n(\mathcal{W}_n)$ ter N_n imata v točki z_n dotik reda vsaj k_n.

V primeru, ko je $\dim M \geq 3$, *lahko za preslikave* f *dosežemo, da so prave holomorfne vložitve.*

2.2. Tehnične priprave

Po vložitvenem izreku za Steinove mnogoterosti [Hör] lahko predpostavimo, da je M zaprta podmnogoterost v $\mathbb{C}^N$ za neki $N \in \mathbb{N}$. Po izreku Docquier in Grauert [GR, stran 257] obstajata odprta okolica E od M v $\mathbb{C}^N$ in taka holomorfna preslikava $\pi\colon E \to M$, da je $\pi(z) = z$ $(z \in M)$.

Naj bo $\rho_a(z) = |z-a|^2$ $(a \in \mathbb{C}^N,\ z \in \mathbb{C}^N)$. Po Sardovem izreku je skoraj za vsak $a \in \mathbf{B}$ funkcija ρ_a Morsova na M. Izberimo $n \in \mathbb{N}$. Ni težko videti, da je $\rho_a(z_n)$ regularna vrednost od $\rho_a|M$ natanko takrat, kadar sfera $\{z \in \mathbb{C}^N; |z-a| = |z_n - a|\}$ seka M transverzalno. Skoraj za vsak $a \in \mathbf{B}$ seka sfera $\{z \in \mathbb{C}^N; |z-a| = |z_n - a|\}$ mnogoterost M transverzalno (glej [GP, str. 68]). Torej skoraj za vsak $a \in \mathbf{B}$ in za vsak $n \in \mathbb{N}$ sfera $\{z \in \mathbb{C}^N; |z-a| = |z_n - a|\}$ seka M transverzalno in ρ_a je Morsova na M. Zato lahko po translaciji M za primeren majhen a privzamemo, da je funkcija $\rho = \rho_0$ Morsova na M in $\rho(z_n)$ je regularna vrednost od $\rho|M$ za vsak $n \in \mathbb{N}$.

Večkrat bomo uporabili naslednjo lemo, ki jo je dokazal R. Narasimhan [Nar].

LEMA 2.2.1. *Naj bo* U *okolica kompaktne množice* K *v* $\mathbb{C}$.

Če je preslikava $f\colon U \to \mathbb{C}^N$ *holomorfna, regularna in injektivna, potem obstaja tak* $\epsilon > 0$, *da je za vsako holomorfno preslikavo* $g\colon U \to \mathbb{C}^N$ *z lastnostjo* $|g(\zeta)| < \epsilon$ $(\zeta \in U)$ *preslikava* $f + g$ *regularna in injektivna na* K.

Če je $f\colon U \to \mathbb{C}^N$ *regularna holomorfna preslikava, potem obstaja tak* $\epsilon > 0$, *da je za vsako holomorfno preslikavo* $g\colon U \to \mathbb{C}^N$ *z lastnostjo* $|g(\zeta)| < \epsilon$ $(\zeta \in U)$ *preslikava* $f + g$ *regularna na* K.

2.3. Skica dokaza

V dokazu bomo uporabljali naslednjo lemo za potiskanje robov analitičnih diskov v M na višje nivoje funkcije izčrpanja:

Lema 2.3.1. *Naj bo $a < b < A < B < \infty$. Privzemimo, da ρ nima nobene kritične vrednosti na $[a, b] \cup [A, B]$. Naj bo $f\colon \overline{\triangle} \to M$ zvezna preslikava, holomorfna na $\triangle$, in naj velja $a < \rho(f(\zeta)) < b$ $(\zeta \in b\triangle)$.*

Za dane $\zeta_1, \ldots, \zeta_n \in \triangle$, $K \in \mathbb{N}$, R, $0 < R < 1$, in $\epsilon > 0$ obstajata r, $R < r < 1$, in zvezna preslikava $g\colon \overline{\triangle} \to M$, holomorfna na $\triangle$, za katera velja

(i) $A < \rho(g(\zeta)) < B \quad (\zeta \in b\triangle)$,
(ii) $\rho(g(t\zeta)) \geq \rho(f(\zeta)) - \epsilon \quad (\zeta \in b\triangle,\ r \leq t \leq 1)$,
(iii) $|g(\zeta) - f(\zeta)| < \epsilon \quad (|\zeta| \leq r)$,
(iv) $g^{(j)}(\zeta_i) = f^{(j)}(\zeta_i) \quad (0 \leq j \leq K,\ 1 \leq i \leq n)$.

Za $\delta > 0$ obstaja preslikava g, ki dodatno izpolnjuje še

(v) $\rho(g(\zeta)) > \rho(f(\zeta)) - \delta \quad (\zeta \in \overline{\triangle})$.

V dokazu naših izrekov bomo preslikavo dobili kot limito zaporedja preslikav. Točko (iii) zgoraj bomo potrebovali za konvergenco, točki (i) in (v) pa zato, da bo limitna preslikava prava.

Naj bo $S = \{z_n; n \in \mathbb{N}\}$. Izbrali bomo naraščajoče zaporedje $\{U_n\}$ komponent podnivojskih množic funkcije ρ z unijo M.

Preslikavo bomo konstruirali induktivno. V vsakem induktivnem koraku začnemo z analitičnim diskom, ki zadene točke iz $S \cap U_n$ in z robom blizu robu množice U_n. Najprej rob diska potisnemo blizu robu od U_{n+1}. Za vsako od točk iz $S \cap (U_{n+1} \setminus U_n)$ konstruiramo analitični disk, ki to točko zadene, in, katerega rob je blizu robu od U_{n+1}. Potem te diske zlepimo skupaj s potmi, ki so blizu robu od U_{n+1}. Nato uporabimo Mergeljanov aproksimacijski izrek v ambientnem prostoru in na ta način dobimo analitični disk, ki zadene vse točke $S \cap U_{n+1}$ in ima rob blizu robu množice U_{n+1}.

V konstrukciji bomo še dodatno poskrbeli, da bo limitna preslikava imerzija, da bo zadela dane točke v danih smereh in da bo imela ustrezne dotike z danimi podmnogoterostmi v M.

2.4. Potiskanje roba diska na višje nivoje funkcije ρ

Lema 2.3.1 je pravzaprav posplošitev leme 9.1 v [Gl1]. Glavna sprememba v dokazu je posplošitev konstrukcije zvezne družine analitičnih diskov iz primera, ko je $\dim M = 2$, na primer, ko je $\dim M \geq 3$. Konstrukcija poteka takole:

Naj bo $m = \dim M$. Za vsak $q \in \mathbb{C}^N \setminus \{0\}$ označimo z $E(q) = \{z \in \mathbb{C}^N; \langle z - q, q\rangle = 0\}$ afino kompleksno hiperravnino skozi q tangentno na sfero $b(q\mathbf{B})$. Za vsak $q \in M$ naj bo $T(q)$ afin kompleksen podprostor razsežnosti m skozi točko q in tangenten na M v točki q.

Privzemimo, da je $Q \subset M$ kompaktna množica sestavljena iz samih regularnih točk funkcije ρ. Za vsak $q \in Q$, $T(q)$ seka $E(q)$ transverzalno, zato je $E(q) \cap T(q) = L(q)$ afin kompleksen podprostor razsežnosti $m - 1$. Blizu q je $E(q) \cap M$ podmnogoterost od M razsežnosti $m - 1$ in je tangentna na $L(q)$ v točki q. Zato obstajata $\delta > 0$ in preslikava $g_q\colon L(q) \cap (q + \delta\mathbf{B}) \to L(q)^{\perp} = \{z \in \mathbb{C}^N;\ \langle z, w\rangle = 0,\ \forall w \in L(q)\}$ z lastnostmi $g_q(q) = 0$, $Dg_q(q) = 0$ in $M \cap E(q) \cap (q + \delta\mathbf{B}) = \{z + g_q(z); z \in L(q) \cap (q + \delta\mathbf{B})\} \cap (q + \delta\mathbf{B})$. Če je potrebno, δ tako zmanjšamo, da za vsak r, $0 < r < \delta$, in za vsak enorazsežen afin podprostor $N(q)$ od $L(q)$ skozi q analitični disk $\{z + g_q(z); z \in N(q) \cap (q + \delta\mathbf{B})\}$ seka $b(q + r\mathbf{B})$ transverzalno in, da je presek $\{z + g_q(z); z \in N(q) \cap (q + \delta\mathbf{B})\} \cap (q + r\mathbf{B})$ biholomorfno ekvivalenten disku. Ker je Q kompaktna, lahko izberemo tak $\delta > 0$, ki je dober za vse $q \in Q$.

Ker je $E(q)$ ortogonalna na q, so sfere v $E(q)$ s središčem v q nivojske množice funkcije $z \mapsto |z|^2$ zožene na $E(q)$. V posebnem primeru dobimo $\rho(w) = |q|^2 + r^2 = \rho(q) + r^2$ ($w \in \{z + g_q(z); z \in L(q) \cap (q + \delta\mathbf{B})\} \cap b(q + r\mathbf{B})$).

Zaradi transverzalnosti se vse gladko spreminja s $q \in M$ in r, $0 < r < \delta$.

Lema 2.4.1. *Naj bo $Q \subset M$ kompaktna množica regularnih točk funkcije $\rho|M$.*

Potem obstaja tak $\mu_0 > 0$, da za vsako pozitivno funkcijo μ na $b\triangle$, ki ustreza pogoju $\mu(\zeta) < \mu_0$ $(\zeta \in b\triangle)$, in za vsako zvezno preslikavo $f\colon b\triangle \to Q$, obstaja zvezna preslikava $F\colon b\triangle \times \overline{\triangle} \to M$ z naslednjimi lastnostmi

(i) *za vsak $\zeta \in b\triangle$ je funkcija $\eta \mapsto F(\zeta,\eta)$ holomorfna na $\triangle$,*
(ii) $F(\zeta,0) = f(\zeta) \quad (\zeta \in b\triangle)$,
(iii) $\rho(F(\zeta,\eta)) > \rho(f(\zeta)) \quad (\zeta \in b\triangle, \eta \in \overline{\triangle} \setminus \{0\})$,
(iv) $\rho(F(\zeta,\eta)) = \rho(f(\zeta)) + \mu(\zeta) \quad (\zeta \in b\triangle, \eta \in b\triangle)$.

Dokaz. Naj bodo δ, $L(q)$ in g_q kot zgoraj. Definirajmo $\mu_0 = \delta^2$. Ker je preslikava $f\colon b\triangle \to Q$ zvezna, je $\cup_{\zeta\in b\triangle}\{\zeta\}\times L(f(\zeta))$ kompleksni vektorski sveženj razsežnosti $m-1$ in obstaja enorazsežni podsveženj $\cup_{\zeta\in b\triangle}\{\zeta\} \times N(f(\zeta))$. Iz zgornjega sledi, da za vsak $\zeta \in b\triangle$ sfera $b(f(\zeta)+\mu(\zeta)^{\frac{1}{2}}\mathbf{B})$ seka množico $\{z+g_{f(\zeta)}(z); z \in N(f(\zeta))\cap(f(\zeta)+\delta\mathbf{B})\}$ transverzalno in presek

$$D(\zeta) = \{z + g_{f(\zeta)}(z); z \in N(f(\zeta)) \cap (f(\zeta) + \delta\mathbf{B})\} \cap (f(\zeta) + \mu(\zeta)^{\frac{1}{2}}\mathbf{B})$$

je biholomorfno ekvivalenten disku. Če w leži na robu tega diska, to je, če

$$w \in \{z + g_{f(\zeta)}(z); z \in N(f(\zeta)) \cap (f(\zeta) + \delta\mathbf{B})\} \cap b(f(\zeta) + \mu(\zeta)^{\frac{1}{2}}\mathbf{B}),$$

potem je $\rho(w) = \rho(f(\zeta)) + \mu(\zeta)$. Zaradi transverzalnosti in zaradi zveznosti f in μ se diski $D(\zeta)$ spreminjajo zvezno s ζ.

Ostanek dokaza je enak kot dokaz leme 4.1 v [Gl1]. $\square$

2.5. Konstrukcija diska skozi dano točko

V tem razdelku bomo konstruirali disk skozi dano točko, ki bo v tej točki tangenten na dano enorazsežno podmnogoterost v M. V dokazu izreka 2.1.2 bomo te diske zlepili skupaj.

LEMA 2.5.1. *Naj bo N lokalna enorazsežna kompleksna podmnogoterost v M. Naj bo p taka točka v N, da je $\rho(p)$ regularna vrednost funkcije $\rho|M$, X tangentni vektor k N v točki p in $K \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.*

Za $\eta > 0$, $\delta > 0$ in regularno vrednost a funkcije $\rho|M$ z lastnostjo $a > \rho(p)$ obstaja zvezna preslikava $f\colon \overline{\triangle} \to M$, holomorfna na $\triangle$, za katero velja

(i) $f(0) = p$, $f'(0) = \lambda X$ *za nek* $\lambda > 0$ *in obstaja taka okolica* $\mathcal{W}$ *od* 0, *da imata* $f(\mathcal{W})$ *in* N *v točki* p *dotik reda vsaj* K,
(ii) $a - \eta < \rho(f(\zeta)) < a \quad (\zeta \in b\triangle)$,
(iii) $\rho(f(\zeta)) \geq \rho(p) - \delta \quad (\zeta \in \overline{\triangle})$.

Dokaz. Ker je N enorazsežna kompleksna podmnogoterost od M skozi točko p, je blizu p, mnogoterost N graf nad njenim tangentnim prostorom v p. Zato obstaja majhen holomorfni disk $g\colon \overline{\triangle} \to M$, za katerega velja

(i) $g(0) = p$, $g'(0) = \lambda X$ za nek $\lambda > 0$ in obstaja taka okolica $\mathcal{U}$ od 0, da imata $g(\mathcal{U})$ in N v točki p dotik reda vsaj K,
(ii) $\rho(g(\zeta))$ je regularna vrednost funkcije $\rho|M \quad (\zeta \in b\triangle)$,
(iii) $\rho(g(\zeta)) \geq \rho(p) - \frac{\delta}{2} \quad (\zeta \in \overline{\triangle})$.

Sedaj z uporabo leme 2.3.1 dobimo zvezno preslikavo $f\colon \overline{\triangle} \to M$, holomorfno na $\triangle$, za katero velja

(i) $f^{(j)}(0) = g^{(j)}(0) \quad (0 \leq j \leq K)$,
(ii) $a - \eta < \rho(f(\zeta)) < a \quad (\zeta \in b\triangle)$,
(iii) $\rho(f(\zeta)) \geq \rho(g(\zeta)) - \frac{\delta}{2} \quad (\zeta \in \overline{\triangle})$.

Preslikava f ustreza vsem pogojem v lemi. Dokaz je končan. □

2.6. Perturbacija f do regularne preslikave

Spomnimo se, da je E okolica od M v $\mathbb{C}^N$ in $\pi\colon E \to M$ holomorfna retrakcija.

Kot smo že razložili v razdelku 2.3, bomo izrek 2.1.2 dokazali induktivno. V vsakem induktivnem koraku bo naša preslikava regularna na primerni kompaktni podmnožici od $\triangle$. Tako preslikavo bomo dobili z majhno perturbacijo.

LEMA 2.6.1. *Naj bo $f\colon \overline{\triangle} \to M$ nekonstantna zvezna preslikava, holomorfna na $\triangle$. Recimo, da so $\zeta_1, \ldots, \zeta_n \in \triangle$ regularne točke preslikave f.*

Za dane $U \subset\subset \triangle$, $K \in \mathbb{N}$ in $\epsilon > 0$ obstaja zvezna preslikava $g\colon \overline{\triangle} \to \mathbb{C}^N$, holomorfna na $\triangle$, z naslednjimi lastnostmi

(i) $|g(\zeta)| < \epsilon \quad (\zeta \in \overline{\triangle})$,
(ii) $(f+g)(\overline{\triangle}) \subset M$,
(iii) $f+g$ *je regularna na* U,
(iv) $(f+g)^{(i)}(\zeta_j) = f^{(i)}(\zeta_j) \quad (1 \le i \le K,\ 1 \le j \le n)$.

Dokaz. Ker je f nekonstantna, obstaja kvečjemu končno mnogo točk v U, v katerih je odvod f' enak 0. Naj bo

$$\{\zeta \in U; f'(\zeta) = 0\} = \{\eta_1, \ldots, \eta_s\}$$

in $z_j = f(\eta_j)$, $1 \le j \le s$.

Izberimo j, $1 \le j \le s$. Ker je f nekonstantna, obstajajo $m_j \in \mathbb{N}$ in take holomorfne preslikave $h_j\colon \triangle \to \mathbb{C}^N$, da je $f'(\zeta) = (\zeta - \eta_j)^{m_j} h_j(\zeta)$ $(\zeta \in \triangle)$ in $h_j(\eta_j) \neq 0$. Ker je $\dim M \ge 2$, obstaja tak vektor $B(j) \in T_{z_j}M$, da sta vektorja $h_j(\eta_j)$ in $B(j)$ linearno neodvisna. Ker je $T_{z_j}M \cap T_{z_j}\pi^{-1}(z_j) = \{0\}$, obstajata taka okolica (v Grassmannovi mnogoterosti) $\mathfrak{U}_j$ od $T_{z_j}\pi^{-1}(z_j)$ in $\nu_j > 0$, da velja

$$\begin{aligned}&\text{če je } A, B \in \mathbb{C}^N,\ |A - h_j(\eta_j)| < \nu_j,\ |B - B(j)| < \nu_j,\ U \in \mathfrak{U}_j,\\ &\text{potem je } \ U \cap \operatorname{Lin}\{A, B\} = \{0\}.\end{aligned} \tag{1}$$

Ker je preslikava $\pi\colon E \to M$ holomorfna retrakcija, je rang od π na M maksimalen in konstanten. Zato je rang od π konstanten še na okolici od M in po izreku o rangu je lokalno, v okolici vsake od točk $z \in M$ v $\mathbb{C}^N$, preslikava π holomorfna projekcija. Torej obstaja tak $\delta_j > 0$, da velja

$$\text{če je } z \in \mathbb{C}^N,\ |z - z_j| < \delta_j,\ \text{sledi da je } T_z\pi^{-1}(\pi(z)) \in \mathcal{U}_j\ . \qquad (2)$$

Izberimo tako holomorfno polinomsko preslikavo $P\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}^N$, da je

$$P'(\eta_j) = B(j)\ \ (1 \le j \le s) \text{ in } P^{(k)}(\zeta_i) = 0\ \ (0 \le k \le K,\ 1 \le i \le n).$$

Vzemimo tako majhen $\lambda > 0$, da za j, $1 \le j \le s$, in za ζ, $|\zeta - \eta_j| < \lambda$, velja

$$|h_j(\zeta) - h_j(\eta_j)| < \nu_j \text{ in } |P'(\zeta) - B(j)| < \nu_j. \qquad (3)$$

Če je potrebno, λ tako zmanjšamo, da obstaja $\alpha_0 > 0$, z lastnostjo, da za vsak j, $1 \le j \le s$, za vsak ζ, $|\zeta - \eta_j| < \lambda$ in za vsak α, $0 < \alpha < \alpha_0$, velja

$$|f(\zeta) + \alpha P(\zeta) - z_j| < \delta_j. \qquad (4)$$

Ker je f regularna na $U \setminus \cup_{i=1}^s \{\eta_i\}$, obstaja tak ϵ_1, $0 < \epsilon_1 < \epsilon$, da za vsako holomorfno preslikavo $g\colon \triangle \to \mathbb{C}^N$, za katero je $|g(\zeta)| < \epsilon_1$ $(\zeta \in \triangle)$, velja, da je preslikava $f+g$ regularna na $U \setminus \cup_{i=1}^s \{\zeta; |\zeta - \eta_i| < \lambda\}$. Vzemimo še tak $\epsilon_2 > 0$, da za preslikavo $h\colon \overline{\triangle} \to \mathbb{C}^N$, za katero je $|h(\zeta)| < \epsilon_2$ $(\zeta \in \overline{\triangle})$, sledi $f(\zeta) + h(\zeta) \in E$ in

$$|\pi(f(\zeta) + h(\zeta)) - f(\zeta)| < \epsilon_1\ \ (\zeta \in \overline{\triangle}).$$

Izberimo tako majhen α, $0 < \alpha < \alpha_0$, da je $|\alpha P(\zeta)| < \epsilon_2$ $(\zeta \in \overline{\triangle})$ in definirajmo

$$g(\zeta) = \pi(f(\zeta) + \alpha P(\zeta)) - f(\zeta).$$

Potem je točka (ii) izpolnjena. Zaradi izbire ϵ_2 sledi $|g(\zeta)| < \epsilon_1$ $(\zeta \in \overline{\triangle})$, kar dokaže (i), in kar dokaže, da je $f+g$ regularna na $U \setminus \cup_{i=1}^s \{\zeta; |\zeta - \eta_i| < \lambda\}$. Dalje, naj bo $1 \le j \le s$ in $|\zeta - \eta_j| < \lambda$. Izračunajmo $(f+g)'(\zeta) = D\pi(f(\zeta)+\alpha P(\zeta))(f'(\zeta)+\alpha P'(\zeta))$. Iz enakosti ker $D\pi(z) = T_z\pi^{-1}(\pi(z))$ $(z \in E)$ sledi po (4), (2), (3) in (1), da je $f'(\zeta) + \alpha P'(\zeta) \notin$

$\ker D\pi(f(\zeta) + \alpha P(\zeta))$. To dokaže (iii). Točka (iv) sledi iz dejstva, da je $P^{(k)}(\zeta_i) = 0$ $(0 \le k \le K,\ 1 \le i \le n)$, in, da je $\pi|M = id$. S tem je dokaz končan. $\square$

2.7. Odstranjevanje samopresečnih točk pravih imergiranih diskov

Lema 2.7.1. *Naj bo P območje v $\mathbb{C}^N$ in $m = \dim M \ge 3$. Naj bo $f\colon \overline{\triangle} \to M$ zvezna preslikava, holomorfna na $\triangle$, in množica $\mathcal{U} \subset\subset \triangle$ konformno ekvivalentna disku, z lastnostjo, da je $f|\mathcal{U}\colon \mathcal{U} \to P$ prava preslikava, regularna na $U \subset\subset \mathcal{U}$ in normalizacijska za analitično množico $f(\mathcal{U}) \subset P$. Izberimo območje $W \subset\subset U$. Privzemimo, da za $\zeta_1, \ldots, \zeta_n \in \triangle$ velja $f(\zeta_i) \ne f(\zeta_j)(i \ne j, 1 \le i \le n, 1 \le j \le n)$.*

Za dana $K \in \mathbb{N}$ in $\epsilon > 0$ obstaja zvezna preslikava $g\colon \overline{\triangle} \to \mathbb{C}^N$, holomorfna na $\triangle$, za katero velja

(i) $|g(\zeta)| < \epsilon \quad (\zeta \in \overline{\triangle})$,
(ii) $(f + g)(\overline{\triangle}) \subset M$,
(iii) *$f + g$ je regularna in injektivna na W,*
(iv) $(f + g)^{(i)}(\zeta_j) = f^{(i)}(\zeta_j) \quad (1 \le i \le K,\ 1 \le j \le n)$.

V dokazu leme 2.7.1 potrebujemo naslednjo lemo

Lema 2.7.2. *Naj bo $m = \dim M \ge 2$ in naj bosta $f, g\colon \triangle \to M$ holomorfni preslikavi, za kateri velja $f(0) = g(0)$, $f'(0) \ne 0$, $g'(0) \ne 0$. Naj bodo $P_j\colon \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$ $(1 \le j \le m-1)$ take holomorfne polinomske preslikave, da so vektorji $P_1(f(0)), \ldots P_{m-1}(f(0))$ linearno neodvisni, $P_j(f(0)) \in T_{f(0)}M$ $(1 \le j \le m-1)$ in $f'(0), g'(0) \notin \mathrm{Lin}\{P_1(f(0)), \ldots P_{m-1}(f(0))\}$. Privzemimo, da sta ϕ in ψ holomorfni funkciji na $\triangle$, za kateri velja $\phi(0) \ne \psi(0)$.*

Potem obstajata $\mu > 0$ in $\tau > 0$ z naslednjo lastnostjo: množica vseh $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}) \in \mathbb{C}^{m-1}$, $|\lambda| < \mu$, za katere je

$$\{\pi(f(\zeta) + \phi(\zeta) \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j P_j(f(\zeta))); |\zeta| < \tau\} \cap$$
$$\cap \{\pi(g(\zeta) + \psi(\zeta) \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j P_j(g(\zeta))); |\zeta| < \tau\} \neq \emptyset$$

ima trirazsežno Hausdorffovo mero 0.

Dokaz. Izberimo tako majhen $\alpha > 0$, da za vsak λ, $|\lambda| < \alpha$, in za vsak $\zeta \in \triangle$ velja

$$f(\zeta) + \phi(\zeta) \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j P_j(f(\zeta)) \in E$$

in

$$g(\zeta) + \phi(\zeta) \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j P_j(g(\zeta)) \in E.$$

Definirajmo

$$A = \big\{(\zeta, \eta, \lambda) \in \triangle \times \triangle \times \{z \in \mathbb{C}^{m-1}; |z| < \alpha\};$$
$$\pi(f(\zeta) + \phi(\zeta) \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j P_j(f(\zeta))) = \pi(g(\eta) + \psi(\eta) \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j P_j(g(\eta)))\big\}.$$

A je analitična množica v $\triangle \times \triangle \times \{z \in \mathbb{C}^{m-1}; |z| < \alpha\}$. Pokazali bomo, da je $0 \in \mathbb{C}^{m+1}$ izolirana točka množice $A \cap \{(\zeta, 0, \lambda)\}$.

Naj bo

$$\begin{aligned} H(\zeta, \lambda) &= \pi(f(\zeta) + \phi(\zeta) \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j P_j(f(\zeta))) \\ &\quad -\pi(g(0) + \psi(0) \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j P_j(g(0))) \quad (|\zeta| < 1,\ |\lambda| < \alpha). \end{aligned}$$

Za $\zeta \in \triangle$ pišimo $P_j(f(\zeta)) = Q_j(\zeta) + R_j(\zeta)$, $1 \leq j \leq m-1$, kjer je Q_j pravokotna projekcija $P_j(f(\zeta))$ na $T_{f(\zeta)}M$. Funkciji Q_j in R_j sta gladki na $\triangle$. Torej je

$$\begin{aligned} H(\zeta,\lambda) &= \pi(f(\zeta)+\phi(\zeta)\sum_{j=1}^{m-1}\lambda_jQ_j(\zeta)+\phi(\zeta)\sum_{j=1}^{m-1}\lambda_jR_j(\zeta)) \\ & \quad -\pi(g(0)+\psi(0)\sum_{j=1}^{m-1}\lambda_jP_j(g(0))). \end{aligned}$$

Ker je $f(0)=g(0)$, $D\pi(f(\zeta))|T_{f(\zeta)}M=I$, in $\pi(f(\zeta)+h)=f(\zeta)+D\pi(f(\zeta))h+O(|h|^2)$, dobimo

$$\begin{aligned} H(\zeta,\lambda) &= f(\zeta)+\phi(\zeta)\sum_{j=1}^{m-1}\lambda_jQ_j(\zeta)+D\pi(f(\zeta))(\phi(\zeta)\sum_{j=1}^{m-1}\lambda_jR_j(\zeta)) \\ &+ O(|\phi(\zeta)\sum_{j=1}^{m-1}\lambda_jP_j(f(\zeta)))|^2)-f(0)-\psi(0)\sum_{j=1}^{m-1}\lambda_jP_j(f(0))) \\ &- O(|\psi(0)\sum_{j=1}^{m-1}\lambda_jP_j(f(0)))|^2). \end{aligned}$$

Po preureditvi dobimo

$$\begin{aligned} H(\zeta,\lambda) = \Bigg[& f(\zeta)-f(0)+(\phi(\zeta)-\phi(0))\sum_{j=1}^{m-1}\lambda_jQ_j(\zeta) \\ + \;& \phi(0)\sum_{j=1}^{m-1}\lambda_j(Q_j(\zeta)-Q_j(0))+D\pi(f(\zeta))(\phi(\zeta)\sum_{j=1}^{m-1}\lambda_jR_j(\zeta))\Bigg] \\ + \;& \Bigg[(\phi(0)-\psi(0))\sum_{j=1}^{m-1}\lambda_jQ_j(0)+O(|\phi(\zeta)\sum_{j=1}^{m-1}\lambda_jP_j(f(\zeta))|^2) \\ - \;& O(|\psi(0)\sum_{j=1}^{m-1}\lambda_jP_j(f(0))|^2)\Bigg]. \end{aligned}$$

Ni težko videti, da velja

$$\begin{aligned}
f(\zeta) - f(0) &= \zeta f'(0) + \zeta^2 O(1) \quad (\zeta \to 0), \\
(\phi(\zeta) - \phi(0)) \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j Q_j(\zeta) &= \zeta |\lambda| O(1) \quad ((\zeta, \lambda) \to 0), \\
\phi(0) \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j (Q_j(\zeta) - Q_j(0)) &= \zeta |\lambda| O(1) \quad ((\zeta, \lambda) \to 0),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D\pi(f(\zeta))(\phi(\zeta) \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j R_j(\zeta)) &= \zeta |\lambda| O(1) \quad ((\zeta, \lambda) \to 0), \\
O(|\phi(\zeta) \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j P_j(f(\zeta))|^2) &= |\lambda|^2 O(1) \quad ((\zeta, \lambda) \to 0), \\
O(|\psi(0) \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j P_j(f(0))|^2) &= |\lambda|^2 O(1) \quad (\lambda \to 0).
\end{aligned}$$

Odtod sledi

$$\begin{aligned}
& H(\zeta, \lambda) = \zeta \Big[f'(0) + \zeta O(1) + |\lambda| O(1) \Big] \\
+ \quad & |\lambda| \Big[(\phi(0) - \psi(0)) \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j |\lambda|^{-1} P_j(f(0)) + |\lambda| O(1) \Big] \quad ((\zeta, \lambda) \to 0).
\end{aligned}$$

Iz $f'(0) \notin \mathrm{Lin}\{P_1(f(0)), \ldots P_{m-1}(f(0))\}$ izhaja, da obstaja tako majhen $\delta > 0$, da sta za vsak ζ, $|\zeta| < \delta$, in za vsak λ, $0 < |\lambda| < \delta$, vektorja v oklepajih linearno neodvisna. Zato za vsak ζ, $|\zeta| < \delta$, in za vsak λ, $0 < |\lambda| < \delta$ sledi, $H(\zeta, \lambda) \neq 0$. Ob upoštevanju tega in dejstva, da je $H(\zeta, 0) \neq 0$ za $0 < |\zeta| < \delta$, dobimo

$$A \cap \{(\zeta, 0, \lambda) \in \mathbb{C}^{m+1}; |\zeta| < \delta, \quad |\lambda| < \delta\} = \{0\},$$

kar pomeni, da je 0 izolirana točka množice

$$A \cap \{(\zeta, 0, \lambda) \in \mathbb{C}^{m+1}; |\zeta| < \delta, \quad |\lambda| < \delta\}.$$

Zato po [Chi, stran 34] velja $\dim_0 A \leq 1$. Tedaj obstaja taka okolica U od 0 v $\mathbb{C}^{m+1}$, da je $\dim (A \cap U) \leq 1$. Potem pa je trirazsežna Hausdorffova mera množice $A \cap U$ enaka 0. Naj bo $\Pi \colon \mathbb{C}^{m+1} \to \mathbb{C}^{m-1}$

projekcija $(z_1, z_2, z') \mapsto z'$. Tudi množica $\Pi(A \cap U)$ ima trirazsežno Hausdorffovo mero 0. Izberimo tako majhna $\tau > 0$ in $\mu > 0$, da je

$$\{(\zeta, \eta, \lambda); |\zeta| < \tau,\ |\eta| < \tau,\ |\lambda| < \mu\} \subset U.$$

S tem je lema dokazana. □

DOKAZ LEME 2.7.1. Dokaz leme je podoben dokazu leme 6.1 v [Gl2]. Označimo s S množico singularnih točk analitične množice $V = f(\mathcal{U})$ in naj bo $T = f^{-1}(S)$. Ker je preslikava f normalizacijska za V in regularna na U, je preslikava

$$f|[(\mathcal{U} \setminus T) \cup \{\zeta\}] \to (V \setminus S) \cup \{f(\zeta)\}$$

regularna in injektivna na $U \cap T$ (glej dodatek 2.9.1).

Naj bo $U \cap T = \{\eta_1, \ldots, \eta_s\}$ in $f(U \cap T) = \{z_1, \ldots, z_j\}$, kjer so točke $z_1, \ldots, z_j$ različne. Brez škode za splošnost smemo privzeti, da obstajajo taka naravna števila m_i $(1 \le i \le j+1)$, da je $f(\eta_l) = z_i$ $(m_i \le l < m_{i+1},\ 1 \le i \le j)$, in, če je $\zeta_l \in \{\eta_{m_i}, \eta_{m_i+1}, \ldots, \eta_{m_{i+1}-1}\}$, potem je $\zeta_l = \eta_{m_i}$. Izberimo tako holomorfno polinomsko preslikavo $(P_1, \ldots, P_{m-1})\colon \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$, da za vsak i, $1 \le i \le j$, velja

(i) vektorji $P_1(z_i), \ldots, P_{m-1}(z_i)$ so linearno neodvisni in $\mathrm{Lin}\{P_1(z_i), \ldots, P_{m-1}(z_i)\} \subset T_{z_i}M$,

(ii) $f'(\eta_l) \notin \mathrm{Lin}\{P_1(z_i), \ldots, P_{m-1}(z_i)\}$ $(m_i \le l < m_{i+1})$.

Izberimo tak polinom ϕ za katerega velja

$$\phi(\eta_{m_i+l}) = l \quad (0 \le l < m_{i+1} - m_i,\ 1 \le i \le j)$$

in

$$\phi^{(k)}(\zeta_i) = 0 \quad (0 \le k \le K, 1 \le i \le n).$$

Po lemi 2.7.2 obstajata $\mu > 0$ in $\tau > 0$ z naslednjo lastnostjo: množica vseh $\lambda \in \mathbb{C}^{m-1}$, $|\lambda| < \mu$, za katere je

$$\{\pi(f(\zeta) + \phi(\zeta) \textstyle\sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i P_i(f(\zeta))); |\zeta - \eta_k| < \tau\} \cap$$
$$\cap \{\pi(f(\zeta) + \phi(\zeta) \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i P_i(f(\zeta))); \ |\zeta - \eta_l| < \tau\} \neq \emptyset$$

za vsaj en par $k,\ l,\ k \neq l,\ 1 \leq k,\, l \leq s$, ima trirazsežno Hausdorffovo mero 0.

Privzeti smemo, da je τ tako majhen, da so množice $\eta_i + \tau\triangle \subset U$, $1 \leq i \leq s$, paroma disjunktne in da je množica W tako velika, da je $\eta_i + \tau\triangle \subset W$, $1 \leq i \leq s$.

Ker je $m \geq 3$, lahko za vsak $\epsilon > 0$ izberemo $\lambda \in \mathbb{C}^{m-1}$, $|\lambda| < \epsilon$, za katerega velja

$$\begin{aligned}
&\{\pi(f(\zeta) + \phi(\zeta)\sum_{i=1}^{m-1}\lambda_i P_i(f(\zeta))); |\zeta - \eta_k| < \tau\} \cap \\
&\cap\{\pi(f(\zeta) + \phi(\zeta)\sum_{i=1}^{m-1}\lambda_i P_i(f(\zeta))); |\zeta - \eta_l| < \tau\} = \emptyset \qquad (5)\\
&(1 \leq k, l \leq s,\ \ k \neq l).
\end{aligned}$$

Izberimo i, $1 \leq i \leq s$. Po predpostavki je preslikava f injektivna in regularna na množici $U \setminus \{\eta_k; 1 \leq k \leq s, k \neq i\}$. Z uporabo leme 2.2.1 dobimo ϵ_1, $0 < \epsilon_1 < \epsilon$, z lastnostjo, da za vsako holomorfno preslikavo $g\colon \triangle \to \mathbb{C}^N$, za katero je $|g(\zeta)| < \epsilon_1$ $(\zeta \in \triangle)$, in za vsak i, $1 \leq i \leq s$, sledi, da je preslikava $f + g$ injektivna in regularna na množici $W \setminus \cup_{k=1,k\neq i}^{s}(\eta_k + \tau\triangle)$. Sedaj izberimo tak $\lambda \in \mathbb{C}^{m-1}$, da velja (6) in da preslikava

$$g = \pi(f + \phi\sum_{i=1}^{m-1}\lambda_i P_i(f)) - f$$

ustreza pogoju $|g(\zeta)| < \epsilon_1$ $(\zeta \in \triangle)$. Očitno točka (i) velja. (ii) je izpolnjena po definiciji preslikave g. Na enak način kot v dokazu leme 6.1 v [Gl2] dokažemo, da je preslikava $f + g$ injektivna in regularna na W, kar da (iii). Točka (iv) sledi iz dejstva, da je

$$\phi^{(k)}(\zeta_i) = 0 \quad (0 \leq k \leq K, 1 \leq i \leq n)$$

in da je $\pi|M = id$. S tem je dokaz končan.

2.8. Dokaz izreka 2.1.2

Izrek 2.1.2 dokažemo najprej v primeru $\dim M \geq 3$ in odložimo enostavnejši dokaz za primer $\dim M = 2$ na konec tega razdelka.

1. del. Najprej bomo preštevilčili zaporedje $\{z_n\}$. Privzeti smemo, da je zaporedje $\{\rho(z_n)\}$ nepadajoče. Ker je mnogoterost M povezana, lahko izberemo naraščajoče zaporedje $\{a_n\}$ regularnih vrednosti funkcije $\rho|M$, ki konvergira v neskončno, in za katerega velja še naslednje: če je U_n komponenta podnivojske množice $\{z \in M; \rho(z) < a_n\}$, ki vsebuje z_1, potem za vsak $n \in \mathbb{N}$, množica U_{n+1} vsebuje prvi člen v zaporedju $\{z_n\}$, ki ni vsebovan v U_n, in rob množice U_n ne vsebuje nobene točke iz zaporedja $\{z_n\}$. Naj bo $a_{-1} = -\infty$.

Naj bo $S = \{z_n; n \in \mathbb{N}\}$. Za vsak n definirajmo $S_n = S \cap U_n$. Iz dejstva, da je zaporedje $\{a_n\}$ naraščajoče in divergentno ter iz dejstva, da je ρ funkcija izčrpanja za povezano mnogoterost M, sledi, da je S_n naraščajoče zaporedje končnih množic z unijo S. Če označimo z $m(n)$ število točk v S_n, $n \in \mathbb{N}$, lahko zaporedje $\{z_n\}$ preštevilčimo na tak način, da bo veljalo $S_n = \{z_1, \ldots, z_{m(n)}\}$ in

$$\rho(z_{m(n)+1}) = \min\{\rho(z_{m(n)+1}), \ldots, \rho(z_{m(n+1)-1})\}.$$

Označimo z z_0 minimum funkcije ρ na U_1 in naj bo $m(0) = 0$ ter $k_0 = 0$.

2. del. V tem delu bomo konstruirali regularno in injektivno preslikavo f_0, s katero bomo začeli konstrukcijo. Označimo s $\triangle_0$ enotski disk s središčem v 0. Ker je funkcija $\rho|M$ Morsova in je z_0 njen minimum, je z_0 izolirana kritična točka funkcije $\rho|M$. Blizu z_0 je M graf nad njenim tangentnim prostorom v z_0. Zato obstaja taka regularna, injektivna, holomorfna preslikava $\phi\colon \triangle \to M$, da je $\phi(0) = z_0$ in da je $\rho(\phi(\zeta)) > \rho(\phi(0))$ $(\zeta \in \triangle \setminus \{0\})$. Vzemimo tako regularno vrednost a_0 funkcije $\rho|M$, da je $\rho(z_0) < a_0 < \rho(z_1)$, in, da je množica $\{\zeta \in \triangle; \rho(\phi(\zeta)) < a_0\}$ relativno kompaktna v $\triangle$. Iz principa maksima za subharmonično funkcijo $\rho \circ \phi$ sledi, da je vsaka komponenta množice $\{\zeta \in \triangle; \rho(\phi(\zeta)) < a_0\}$ enostavno povezana in zato konformno ekvivalentna disku. Torej obstajata zvezna preslikava $f_0\colon \overline{\triangle_0} \to M$, holomorfna na $\triangle_0$, in $\gamma > 0$, za katera velja

(i) $f_0(0) = z_0$,
(ii) $\rho(f_0(\zeta)) = a_0$ $(\zeta \in b\triangle_0)$,
(iii) f_0 je injektivna in regularna na $\triangle_0$,
(iv) $\rho(z_0) < a_0 - 4\gamma$.

Z uporabo leme 2.2.1 dobimo $\epsilon_0 > 0$ z naslednjo lastnostjo:

$$\begin{gathered}\text{če je } g\colon \triangle_0 \to \mathbb{C}^N \text{ taka holomorfna preslikava, da je} \\ |f_0(\zeta) - g(\zeta)| < 2\epsilon_0\,(\zeta \in \{\xi \in \triangle_0;\ \rho(f_0(\xi)) < a_0 - \gamma\}), \text{potem} \\ \text{je } g \text{ regularna in injektivna na } \{\xi \in \triangle_0;\ \rho(f_0(\xi)) < a_0 - 2\gamma\}.\end{gathered} \tag{6}$$

Če je potrebno, ϵ_0 zmanjšamo, da bo dodatno veljalo še:

$$\text{če je } z, w \in M,\ \rho(z) < a_0,\ |z - w| < 2\epsilon_0,\ \text{velja } |\rho(z) - \rho(w)| < \gamma. \tag{7}$$

3. del. Sedaj bomo konstruirali zaporedje holomorfnih preslikav, katerega limita bo ustrezala pogojem v izreku 2.1.2.

Izberimo padajoče zaporedje δ_j pozitivnih števil, ki konvergira k 0, za katerega velja $\delta_0 \leq \frac{\gamma}{5}$, funkcija $\rho|M$ nima nobene kritične vrednosti na intervalu $(a_j - 3\delta_j, a_j + \delta_j)$ $(j \in \mathbb{N} \cup \{0\})$, $\rho(z_k) \notin (a_j - 3\delta_j, a_j + \delta_j)$ $(j, k \in \mathbb{N} \cup \{0\})$ in intervali $(a_j - 3\delta_j, a_j + \delta_j)$ $(j \in \mathbb{N} \cup \{0\})$ so paroma disjunktni.

Konstruirali bomo

(A) zaporedje β_k, $0 < \beta_k < 1$, in zaporedje območij $\triangle_j \subset \mathbb{C}$ z naslednjo lastnostjo: če je D_k odprt disk s polmerom 1 in s središčem v $3k$, potem bo za $j \in \mathbb{N}$ množica $\triangle_j$ unija $m(j)$ diskov $D_1, \ldots, D_{m(j)}$ in $m(j) - 1$ trakov $(3k, 3(k+1)) \times (-\beta_k, \beta_k)$, $1 \leq k \leq m(j) - 1$,

(B) naraščajoče zaporedje povezanih območij Ω_j, $\Omega_{-4} = \Omega_{-3} = \Omega_{-2} = \Omega_{-1} = \emptyset$, ki izpolnjujejo naslednje pogoje

$$\{\xi \in \triangle_0; \rho(f_0(\xi)) < a_0 - \gamma\} \subset \Omega_0,$$
$$\Omega_{j-1} \subset\subset \Omega_j \quad (j \geq 1), \quad \Omega_j \subset\subset \triangle_j \quad (j \geq 0) \text{ in}$$
$$\{\xi \in \triangle_j; \mathrm{dist}(\xi, b\triangle_j) > \tfrac{1}{j}\} \subset \Omega_j \quad (j \in \mathbb{N}) \ ,$$

(C) zaporedje preslikav f_j, ki za vsak $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ustrezajo pogojem

(i) preslikava $f_j \colon \overline{\triangle}_j \to M$ je zvezna, holomorfna na $\triangle_j$, in $\rho(f_j(\zeta)) \in (a_j - 2\delta_j, a_j]$ $(\zeta \in b\triangle_j)$,

(ii) f_j je regularna na Ω_{j-1} in injektivna na Ω_{j-3},

(iii) $\rho(f_j(\zeta)) < a_{j-1} + \delta_{j-1}$ $(\zeta \in \Omega_{j-1})$,

(iv) $\rho(f_{j+1}(\zeta)) \geq \min\{\rho(z_{m(j)+1}), a_j\} - \gamma$ $(\zeta \in \triangle_{j+1} \setminus \Omega_j)$,

(v) $f_{j+1}(\zeta_i) = z_i$, $f'_{j+1}(\zeta_i) = \mu_i X_i$ za nek $\mu_i > 0$ in obstaja taka okolica $\mathcal{V}_i$ točke $3i$ v D_i, da imata $f_{j+1}(\mathcal{V}_i)$ in N_i v točki z_i dotik reda vsaj k_i $(m(j) + 1 \leq i \leq m(j + 1))$ in $f^{(l)}_{j+1}(\zeta_i) = f^{(l)}_j(\zeta_i)$ $(0 \leq l \leq k_i,\ 0 \leq i \leq m(j))$,

(vi) $|f_{j+1}(\zeta) - f_j(\zeta)| < \frac{\epsilon_j}{2^j}$ $(\zeta \in \Omega_j)$,

(D) padajoče zaporedje pozitivnih števil ϵ_j, ki konvergira k 0, in tako, da za vsak $j \in \mathbb{N}$ velja

(a) če je $g \colon \Omega_{j-3} \to \mathbb{C}^N$ holomorfna preslikava in je $|g(\zeta)| < \epsilon_j$ $(\zeta \in \Omega_{j-3})$, potem je preslikava $f_j + g$ regularna in injektivna na Ω_{j-4},

(b) če je $z, w \in M$, $\min\{\rho(z_{m(j-1)+1}), a_{j-1}\} - \gamma < \rho(z) \leq a_j$ in $|z - w| < \frac{\epsilon_j}{2^{j-1}}$, potem velja

$$\rho(w) > \min\{\rho(z_{m(j-1)+1}), a_{j-1}\} - 2\gamma,$$

(E) zaporedje pozitivnih števil α_j, padajoče zaporedje pozitivnih števil λ_j, ki konvergira k 0, $\lambda_1 = 1$, in padajoče zaporedje pozitivnih števil η_j, ki konvergira k 0, in tako, da za vsak

$j \in \mathbb{N}$ velja, $0 < \lambda_j < \min\{\frac{\epsilon_j}{4\cdot 2^j}, \frac{\alpha_j}{4}\}$, $0 < \eta_j < \frac{\lambda_j}{2}$ in

$$\begin{aligned} &\text{če je } z, w \in M,\ \rho(z) \le a_{j+1} \text{ in } |z-w| < \lambda_j, \\ &\text{potem velja } |\rho(z) - \rho(w)| < \tfrac{\delta_{j+1}}{4}, \qquad (8) \\ &\text{če je } z \in M,\ \rho(z) \le a_{j+1},\ w \in \mathbb{C}^N \text{ in } |w-z| < \eta_j, \\ &\text{potem velja } w \in E,\ |\pi(w) - w| < \tfrac{\lambda_j}{2}. \qquad (9) \end{aligned}$$

Sedaj bomo na kratko razložili induktivno konstrukcijo. V (A) opišemo območja, kjer so definirane preslikave f_j. V (B) definiramo območja $\Omega_j \subset \triangle_j$, kjer f_{j+1} aproksimiramo s f_j. V (C) opišemo lastnosti preslikav f_j: (iv) in (vi) skupaj z (D) bodo zagotavljali pravost limitne preslikave. (ii) in (vi) skupaj z (D) bodo zagotovili, da bo limitna preslikava regularna in injektivna, iz (v) bo sledilo, da slika limitne preslikave zadene predpisane točke v predpisanih smereh in ima dotike danega reda s predpisanimi podmnogoterostmi v M. (iii) skupaj z (D) bomo uporabili v induktivni konstrukciji preslikave f_{j+1}, da bomo v 1. koraku naredili injektivno preslikavo na Ω_{j+1}. Točka (E) bo poskrbela, da bo na vsakem koraku v induktivni konstrukciji konstruirani disk ležal pod a_{j+1} nivojem funkcije izčrpanja, in, da ne bo padel iz okolice E, kjer je definirana holomorfna retrakcija.

4. del. Privzemimo za trenutek, da smo zaključili konstrukcijo v 3. delu. Z dokazom izreka nadaljujemo podobno kot v [Gl2]. Naj bo $\Omega = \cup_{n=1}^{\infty} \triangle_n$. Ni težko videti, da je območje Ω enostavno povezano. Zato obstaja biholomorfna preslikava $\Phi\colon \triangle \to \Omega$, za katero velja $\Phi(0) = 0$ in $\Phi'(0) > 0$. Ker je območje Ω simetrično glede na realno os, velja še $\Phi(\mathbb{R} \cap \triangle) = \mathbb{R} \cap \Omega$ in $\Phi'(\zeta) > 0$ $(\zeta \in \mathbb{R} \cap \triangle)$.

Iz (B) sledi $\Omega = \cup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ in zato iz (vi) dobimo, da za vsak $\zeta \in \Omega$, obstaja $f(\zeta) = \lim_{n\to\infty} f_n(\zeta)$ in je preslikava f holomorfna na Ω. Ker je $f_n(\triangle_n) \subset M$ in ker je M zaprta v $\mathbb{C}^N$, je $f(\Omega) \subset M$. Pokažimo, da je f regularna in injektivna na Ω. Izberimo $n \in \mathbb{N}$. Iz (vi) sledi

$$\begin{aligned} |f_n(\zeta) - f(\zeta)| &\le |f_n(\zeta) - f_{n+1}(\zeta)| + |f_{n+1}(\zeta) - f_{n+2}(\zeta)| + \cdots < \\ &< \tfrac{\epsilon_n}{2^n} + \tfrac{\epsilon_{n+1}}{2^{n+1}} + \cdots < \epsilon_n \quad (\zeta \in \Omega_n). \end{aligned}$$

Ker je $\Omega_{n-3} \subset \Omega_n$, sledi iz (a), da je f regularna in injektivna na Ω_{n-4}. Zato je za vsak $n \in \mathbb{N}$ preslikava f regularna in injektivna na Ω_{n-4}, torej je f regularna in injektivna na Ω.

V nadaljevanju bomo pokazali, da je $f\colon \Omega \to M$ prava preslikava. Izberimo $n \in \mathbb{N}$ in $\zeta \in \Omega_{n+1} \setminus \Omega_n$. Iz (vi) sklepamo, da velja

$$\begin{aligned} |f_{n+1}(\zeta) - f(\zeta)| &\leq |f_{n+1}(\zeta) - f_{n+2}(\zeta)| + |f_{n+2}(\zeta) - f_{n+3}(\zeta)| + \cdots < \\ &< \tfrac{\epsilon_{n+1}}{2^{n+1}} + \tfrac{\epsilon_{n+2}}{2^{n+2}} + \cdots < \tfrac{\epsilon_{n+1}}{2^n}. \end{aligned}$$

Iz (iv) dobimo

$$\rho(f_{n+1}(\zeta)) \geq \min\{\rho(z_{m(n)+1}), a_n\} - \gamma$$

in sedaj iz (b) izpeljemo, da je

$$\rho(f(\zeta)) \geq \min\{\rho(z_{m(n)+1}), a_n\} - 2\gamma.$$

Ker je $\min\{\rho(z_{m(n)+1}), a_n\} \geq \rho(z_{m(n-1)+1})$, dobimo

$$\rho(f(\zeta)) \geq \rho(z_{m(n-1)+1}) - 2\gamma.$$

Zaporedje $\rho(z_{m(n-1)+1}) - 2\gamma$ je nepadajoče in $\Omega = \cup_{k=n+1}^{\infty}\Omega_k$, zato je $\rho(f(\zeta)) \geq \rho(z_{m(n-1)+1}) - 2\gamma$ za $\zeta \in \Omega\setminus\Omega_n$. Ker zaporedje $\rho(z_{m(n-1)+1}) - 2\gamma$ konvergira v ∞, sledi, da je $f\colon \Omega \to M$ prava preslikava.

Če povzamemo, f je injektivna, regularna in prava, torej je vložitev.

Pokazati moramo še, da slika f zadene predpisane točke v predpisanih smereh in ima dotike danega reda s predpisanimi podmnogoterostmi v M. Izberimo $n \in \mathbb{N}$ in i, $m(n-1)+1 \leq i \leq m(n)$. Iz (v) dobimo $f_n^{(l)}(\zeta_i) = f_{n+l}^{(l)}(\zeta_i)$ za $0 \leq l \leq k_i$, $l \in \mathbb{N}$, kar pokaže, da je $f_n^{(l)}(\zeta_i) = f^{(l)}(\zeta_i)$ za $0 \leq l \leq k_i$. Ker po (v) velja, da je $f_n(\zeta_i) = z_i$, $f_n'(\zeta_i) = \mu_i X_i$ in da imata $f_n(\mathcal{V}_i)$ in N_i v točki z_i dotik reda vsaj k_i, sledi, da je $f(\zeta_i) = z_i$, $f'(\zeta_i) = \mu_i X_i$, in, da obstaja taka okolica $\mathcal{W}_i \subset \mathcal{V}_i$ od ζ_i, da imata $f(\mathcal{W}_i)$ in N_i v točki z_i dotik reda vsaj k_i.

Ker je $\Phi'(\zeta) > 0$ ($\zeta \in \mathbb{R} \cap \triangle$), ima preslikava $f \circ \Phi$ vse zahtevane lastnosti iz izreka 2.1.2.

5. del. f_0, $\triangle_0$ in ϵ_0, ki smo jih konstruirali v 2. delu, ustrezajo pogojem (A), (C)(i)-(iii) in (D). Recimo, da smo za nek $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

konstruirali f_j, $\triangle_j$, ϵ_j, $\beta_{m(j-1)}, \ldots, \beta_{m(j)-1}$, $0 \leq j \leq n$, in Ω_j, α_j, λ_j, η_j, $0 \leq j \leq n-1$, ki ustrezajo pogojem (A), (C)(i)-(iii) in (D) za $0 \leq j \leq n$ in pogojem (B), (C)(iv)-(vi) in (E) za $0 \leq j \leq n-1$.

1. korak. Preslikavo f_n bomo malo perturbirali in tako dobili preslikavo $g_1\colon \overline{\triangle}_n \to M$, ki bo injektivna v okolici množice Ω_{n-2}. Ker je $\Omega_{-2} = \Omega_{-1} = \emptyset$, lahko za $n = 0, 1$ definiramo $g_1 = f_n$ in $U = \emptyset$. Predpostavimo sedaj, da je $n \geq 2$. Naj bo U taka odprta množica, za katero velja $\Omega_{n-2} \subset U \subset \Omega_{n-1}$. Vzemimo $c \in (a_{n-1} + \delta_{n-1}, a_n - 2\delta_n)$. Po (iii) obstaja komponenta $\mathcal{U}$ množice $\{\zeta \in \triangle; \rho(f_n(\zeta)) < c\}$, ki vsebuje $\overline{\Omega}_{n-1}$. Iz (i) sledi, da je $\mathcal{U} \subset\subset \triangle$. Zaradi principa maksima za subharmonično funkcijo $\rho \circ f_n$ dobimo, da je množica $\mathcal{U}$ konformno ekvivalentna disku.

Vzemimo k, $1 \leq k \leq n$, in $\zeta \in \Omega_k \setminus \Omega_{k-1}$. Iz (i) in (iv) sledi, da je

$$\min\{\rho(z_{m(k-1)+1}), a_{k-1}\} - \gamma \leq \rho(f_k(\zeta)) \leq a_k,$$

iz (vi) pa sledi, da velja

$$\begin{aligned} |f_k(\zeta) - f_n(\zeta)| &\leq |f_k(\zeta) - f_{k+1}(\zeta)| + \cdots + |f_{n-1}(\zeta) - f_n(\zeta)| \leq \\ &\leq \tfrac{\epsilon_k}{2^k} + \tfrac{\epsilon_{k+1}}{2^{k+1}} + \cdots + \tfrac{\epsilon_{n-1}}{2^{n-1}} \leq \tfrac{\epsilon_k}{2^{k-1}}. \end{aligned}$$

Po (b) odtod lahko sklepamo, da je

$$\rho(f_n(\zeta)) \geq \min\{\rho(z_{m(k-1)+1}), a_{k-1}\} - 2\gamma \geq a_0 - 2\gamma.$$

Kar z upoštevanjem (iv) da $\rho(f_n(\zeta)) \geq a_0 - 2\gamma$ $(\zeta \in \triangle_n \setminus \Omega_0)$.

Po (vi) dobimo

$$\begin{aligned} |f_0(\zeta) - f_n(\zeta)| &\leq |f_0(\zeta) - f_1(\zeta)| + \cdots + |f_{n-1}(\zeta) - f_n(\zeta)| \leq \\ &\leq \epsilon_0 + \tfrac{\epsilon_1}{2} + \cdots + \tfrac{\epsilon_{n-1}}{2^{n-1}} < 2\epsilon_0 \quad (\zeta \in \Omega_0). \end{aligned}$$

Odtod po (B) in (7) sledi, da je f_n regularna in injektivna na

$$\{\xi \in \triangle_0;\, \rho(f_0(\xi)) < a_0 - 2\gamma\}$$

in iz (7) sledi, da velja

$$\{\xi \in \Omega_0;\, \rho(f_n(\xi)) < a_0 - 3\gamma\} \subset \{\xi \in \triangle_0;\, \rho(f_0(\xi)) < a_0 - 2\gamma\}.$$

Ker je $\rho(f_n(\zeta)) > a_0 - 2\gamma$ ($\zeta \in \triangle_n \setminus \Omega_0$), je preslikava f_n regularna in injektivna na neprazni množici $\{\xi \in \triangle_n;\, \rho(f_n(\xi)) < a_0 - 3\gamma\}$ in je tako po lemi 2.9.2, preslikava $f_n|\mathcal{U}\colon \mathcal{U} \to \{z \in M; \rho(z) < c\}$ normalizacijska. Z uporabo leme 2.7.1 dobimo zvezno preslikavo $g_1\colon \overline{\triangle}_n \to M$, holomorfno na $\triangle_n$, za katero velja

(1i) $|g_1(\zeta) - f_n(\zeta)| < \min\{\frac{\epsilon_n}{4 \cdot 2^n}, \lambda_{n-1}\}$ $\quad (\zeta \in \overline{\triangle}_n)$,
(1ii) g_1 je regularna in injektivna na U,
(1iii) $g_1^{(j)}(\zeta_i) = f^{(j)}(\zeta_i)$ $\quad (0 \le j \le k_i,\ 0 \le i \le m(n))$.

2. korak. Rob diska $g_1\colon \overline{\triangle}_n \to M$ bomo potisnili na višje nivoje funkcije $\rho|M$.

Vzemimo tako majhen $\alpha_n > 0$, da bo za holomorfno preslikavo $h\colon U \to \mathbb{C}^N$ z lastnostjo $|g_1(\zeta) - h(\zeta)| < \alpha_n$ ($\zeta \in U$) veljalo, da je regularna in injektivna na Ω_{n-2}. Izberimo tak $\lambda_n < \min\{\lambda_{n-1}, \frac{\alpha_n}{4}, \frac{\epsilon_n}{4 \cdot 2^n}\}$, ki ustreza (8) za $j = n$. Vzemimo še tako majhen $\eta_n < \frac{\lambda_n}{2}$, da velja (9) za $j = n$.

Ker je $|g_1(\zeta) - f_n(\zeta)| < \lambda_{n-1}$ ($\zeta \in \overline{\triangle}_n$) in $\rho(f_n(\zeta)) \in (a_n - 2\delta_n, a_n)$ ($\zeta \in b\triangle_n$), sledi iz (8), da velja $\rho(g_1(\zeta)) \in (a_n - 3\delta_n, a_n + \frac{\delta_n}{4})$ ($\zeta \in b\triangle$), in odtod, da je množica $(\rho \circ g_1)(b\triangle)$ sestavljena iz samih regularnih vrednosti funkcije $\rho|M$. Naj bo $K \subset \triangle_n$ taka kompaktna množica, da je $\Omega_{n-1} \cup \{z; \operatorname{dist}(z, b\triangle_n) > \frac{1}{n}\} \subset K$. Po lemi 2.3.1 obstajata zvezna preslikava $g_2\colon \overline{\triangle}_n \to M$, holomorfna na $\triangle_n$, in odprta množica Ω_n, $K \subset \Omega_n \subset\subset \triangle_n$, ki ustrezata naslednjim pogojem

(2i) $a_{n+1} - \delta_{n+1} < \rho(g_2(\zeta)) < a_{n+1} - \frac{\delta_{n+1}}{2}$ $\quad (\zeta \in b\triangle_n)$,
(2ii) $\rho(g_2(\zeta)) \ge a_n - 4\delta_n$ $\quad (\zeta \in \triangle_n \setminus \Omega_n)$,
(2iii) $|g_2(\zeta) - g_1(\zeta)| < \min\{\lambda_n, \frac{\delta_{n+1}}{8}\}$ $\quad (\zeta \in \Omega_n)$,
(2iv) $g_2^{(j)}(\zeta_i) = g_1^{(j)}(\zeta_i)$ $\quad (0 \le j \le k_i,\ 0 \le i \le m(n))$.

3. korak. Za vsak j, $m(n) + 1 \le j \le m(n+1)$, bomo konstruirali analitični disk, ki bo zadel točko z_j v predpisani smeri, ki bo imel pri z_j dotik predpisanega reda z dano podmnogoterostjo v M in z robom blizu a_{n+1} nivoju funkcije izčrpanja $\rho|M$. Potem bomo te diske in preslikavo g_2 zlepili skupaj.

Z uporabo leme 2.5.1 dobimo zvezne preslikave

$$h_j\colon \overline{D}_j \to M \quad (m(n)+1 \le j \le m(n+1)),$$

holomorfne na D_j, za katere velja

(hi) $h_j(3j) = z_j$, $h_j'(3j) = \mu_j X_j$ za nek $\mu_j > 0$ in obstaja taka okolica $\mathcal{V}_j$ od $3j$ v D_j, da imata $f(\mathcal{V}_j)$ in N_j v točki z_j dotik reda vsaj k_j,

(hii) $\rho(h_j(\zeta))) \in (a_{n+1} - \delta_{n+1}, a_{n+1} - \frac{\delta_{n+1}}{2}) \quad (\zeta \in bD_j)$,

(hiii) $\rho(h_j(\zeta)) \ge \rho(z_j) - \frac{\gamma}{4} \quad (\zeta \in \overline{D}_j)$.

Posledica izreka 2 na strani 227 v [GR] je dejstvo, da je rob vsake komponente podnivojske množice funkcije $\rho|M$ povezan. Zato lahko povežemo točki $f_n(3m(n)+1)$ in $h_{m(n)+1}(3(m(n)+1)-1)$ s potjo, ki leži v $U_{n+1} \cap \rho^{-1}((a_{n+1} - \delta_{n+1}, a_{n+1} - \frac{\delta_{n+1}}{2}))$ in podobno, za vsak j, $m(n)+1 \le j \le m(n+1)-1$ lahko povežemo točki $h_j(3j+1)$ in $h_{j+1}(3(j+1)-1)$ s potjo, ki leži v $U_{n+1} \cap \rho^{-1}((a_{n+1} - \delta_{n+1}, a_{n+1} - \frac{\delta_{n+1}}{2}))$.

Torej, če je L_{n+1} unija $\triangle_n$, diskov $D_{m(n)+1}, \ldots, D_{m(n+1)}$ in daljic $I_j = [3j+1, 3(j+1)-1]$, $m(n) \le j \le m(n+1)-1$, obstaja zvezna preslikava $g_3\colon \overline{L}_{n+1} \to U_{n+1}$, ki je razširitev preslikav $f_n, h_{m(n)+1}, \ldots, h_{m(n+1)}$, in velja

$$g_3|bL_{n+1} \subset (a_{n+1} - \delta_{n+1}, a_{n+1} - \frac{\delta_{n+1}}{2})\ . \tag{10}$$

Preslikava g_3 je zvezna na L_{n+1} in holomorfna v notranjosti množice L_{n+1}.

4. korak. Uporabili bomo različico Mergeljanovega izreka, da bomo aproksimirali preslikavo g_3 s polinomsko preslikavo v ambientnem prostoru. Na ta način bomo dobili preslikavo iz okolice od L_{n+1} na retrakcijsko okolico E in nato bomo to preslikavo komponirali s holomorfno retrakcijo π.

Po trditvi 2.9.3 obstaja tak holomorfen polinom $P\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}^N$, da velja

(3i) $|P(\zeta) - g_3(\zeta)| < \eta_n \quad (\zeta \in \overline{L}_{n+1})$,

(3ii) $P^{(j)}(\zeta_i) = g_3^{(j)}(\zeta_i) \quad (0 \le j \le k_i,\ 0 \le i \le m(n+1))$.

Vzemimo $\zeta \in \overline{L}_{n+1}$. Po (9) velja $P(\zeta) \in E$ in $|\pi(P(\zeta)) - P(\zeta)| < \frac{\lambda_n}{2}$. Odtod po (3i) dobimo

$$|\pi(P(\zeta)) - g_3(\zeta)| < \eta_n + \frac{\lambda_n}{2} < \lambda_n \quad (\zeta \in \overline{L}_{n+1})$$

in po (8) sledi še

$$|\rho(\pi(P(\zeta))) - \rho(g_3(\zeta))| < \tfrac{\delta_{n+1}}{4} \quad (\zeta \in \overline{L}_{n+1}).$$

To in (10) pokaže, da je

$$\rho(\pi(P(\zeta))) \in (a_{n+1} - \tfrac{5\delta_{n+1}}{4}, a_{n+1} - \tfrac{\delta_{n+1}}{4}) \quad (\zeta \in bL_{n+1}).$$

Zadnji pogoj je izpolnjen še za ζ v neki okolici od bL_{n+1} v $\mathbb{C}$. Zato lahko izberemo tak β, $0 < \beta < 1$, da je $\rho(\pi(P(\zeta))) \in (a_{n+1} - \frac{5\delta_{n+1}}{4}, a_{n+1} - \frac{\delta_{n+1}}{4})$ $(\zeta \in ([3j, 3(j+1)] \times (-\beta, \beta)) \setminus (D_j \cup D_{j+1}),\ m(n) \leq j \leq m(n+1) - 1)$. Naj bo $\beta_j = \beta$ $(m(n) \leq j \leq m(n+1) - 1)$. To definira $\triangle_{n+1}$, kot je opisano v (A).

Naj bo $g_4(\zeta) = \pi(P(\zeta))$ za $\zeta \in \triangle_{n+1}$. Preslikava $g_4 \colon \overline{\triangle}_{n+1} \to M$ je zvezna, holomorfna na $\triangle_{n+1}$, in velja

(4i) $\rho(g_4(\zeta)) \in (a_{n+1} - \frac{5\delta_{n+1}}{4}, a_{n+1} - \frac{\delta_{n+1}}{4})$ $\quad (\zeta \in b\triangle_{n+1})$,
(4ii) $\rho(g_4(\zeta)) \in (a_{n+1} - \frac{5\delta_{n+1}}{4}, a_{n+1} - \frac{\delta_{n+1}}{4})$ $\quad (\zeta \in ([3j, 3(j+1)] \times (-\beta_j, \beta_j)) \setminus (D_j \cup D_{j+1}),\ m(n) \leq j \leq m(n+1) - 1)$,
(4iii) $|g_4(\zeta) - g_3(\zeta)| < \lambda_n \quad (\zeta \in L_{n+1})$,
(4iv) $g_4^{(j)}(\zeta_i) = g_3^{(j)}(\zeta_i) \quad (0 \leq j \leq k_i,\ 0 \leq i \leq m(n+1))$.

5. korak. Preslikavo g_4 bomo perturbirali, da bomo dobili regularno preslikavo na Ω_n.

Z uporabo leme 2.6.1 dobimo zvezno preslikavo $g_5 \colon \overline{\triangle}_{n+1} \to M$, holomorfno na $\triangle_{n+1}$, za katero velja

(5i) g_5 je regularna na Ω_n,
(5ii) $|g_5(\zeta) - g_4(\zeta)| < \lambda_n \quad (\zeta \in \overline{\triangle}_{n+1})$,
(5iii) $g_5^{(j)}(\zeta_i) = g_4^{(j)}(\zeta_i) \quad (0 \leq j \leq k_i,\ 0 \leq i \leq m(n+1))$.

Iz (8), (4i) in (5ii) sledi, da je

(5iv) $\rho(g_5(\zeta)) \in (a_{n+1} - \frac{3\delta_{n+1}}{2}, a_{n+1}) \quad (\zeta \in b\triangle_{n+1})$.

6. korak. Definirajmo $f_{n+1} = g_5$. Izberimo tako majhen $\epsilon_{n+1} < \min\{\frac{1}{n}, \epsilon_n\}$, da (D) velja za $j = n+1$. Pokazali bomo, da ima preslikava f_{n+1} vse predpisane lastnosti.

Po (5iv), je točka (i) izpolnjena za $j = n+1$. Iz (5ii), (4iii) in (2iii) sledi, da velja $|f_{n+1}(\zeta) - g_1(\zeta)| < \alpha_n$ $(\zeta \in U)$. Preslikava g_1 je regularna in injektivna na U in iz definicije α_n sledi, da je preslikava f_{n+1} regularna in injektivna na Ω_{n-2}. Po (5i) je preslikava f_{n+1} regularna na Ω_n, torej točka (ii) velja za $j = n+1$.

Vzemimo $\zeta \in \Omega_n$. Po (i), (8) in (1i) dobimo $\rho(g_1(\zeta)) < a_n + \frac{\delta_n}{4}$. Iz (2iii), (4iii), (5ii) in (8) sledi, da velja $\rho(f_{n+1}(\zeta)) < \rho(g_1(\zeta)) + \frac{3\delta_{n+1}}{4}$. Zato je $\rho(f_{n+1}(\zeta)) < a_n + \frac{\delta_n}{4} + \frac{3\delta_{n+1}}{4}$ in ker je zaporedje $\{\delta_n\}$ padajoče, velja (iii) za $j = n+1$.

Spomnimo se, da za padajoče zaporedje δ_n velja $\delta_0 \leq \frac{\gamma}{5}$ in da je

$$\rho(z_{m(n)+1}) = \min\{\rho(z_{m(n)+1}), \rho(z_{m(n)+2}), \dots, \rho(z_{m(n+1)-1})\}.$$

Za $\zeta \in \triangle_n \setminus \Omega_n$ iz (5ii), (4i), (8), (4iii) in (2ii) sledi, da je $\rho(f_{n+1}(\zeta)) \geq a_n - \gamma$. Izberimo $\zeta \in \triangle_{n+1} \setminus \triangle_n$. Po (hiii), (4iii), (4i), (8) in (4ii) je $\rho(g_4(\zeta)) \geq \min\{\rho(z_{m(n)+1}) - \frac{\gamma}{2}, a_n - \frac{\gamma}{2}\}$ in po (5ii), (4i), (8) dobimo $\rho(g_5(\zeta)) \geq \rho(g_4(\zeta)) - \frac{\gamma}{2} \geq \min\{\rho(z_{m(n)+1}), a_n\} - \gamma$. Torej (iv) drži za $j = n$.

Naj bo $\zeta \in \Omega_n$. Iz (5ii), (4iii), (2iii), (1i) in (E) sklepamo

$$\begin{aligned} |f_{n+1}(\zeta) - f_n(\zeta)| \quad &\leq \quad |g_5(\zeta) - g_4(\zeta)| + |g_4(\zeta) - g_2(\zeta)| + \\ &\quad + |g_2(\zeta) - g_1(\zeta)| + |g_1(\zeta) - f_n(\zeta)| < \frac{\varepsilon_n}{2^n}, \end{aligned}$$

zato je (vi) izpolnjena za $j = n$.

Iz konstrukcije preslikave g_3 in iz (1iii), (2iv), (3ii), (4iv), (5iii) dobimo (v) za $j = n$.

S tem je dokaz za primer $\dim M \geq 3$ končan.

V primeru $\dim M = 2$ izpustimo povsod injektivnost in v prvem koraku definiramo $g_1 = f_n$. Ostanek dokaza ostane enak. S tem je izrek 2.1.2 dokazan.

2.9. Dodatek

2.9.1. Normalizacijske preslikave

Naj bo P območje v $\mathbb{C}^N$, $N \geq 2$, in naj bo $\Phi\colon \triangle \to P$ prava holomorfna preslikava. Potem je po Remmertovem izreku $V = \Phi(\triangle)$ analitična množica v P [Re1, Re2, Chi]. Označimo s S singularno množico od $\Phi(\triangle)$. Pravimo, da je preslikava Φ *normalizacijska preslikava* za analitično množico $\Phi(\triangle)$, če je preslikava

$$\Phi|\triangle \setminus \Phi^{-1}(S) \to \Phi(\triangle) \setminus S$$

biholomorfna. Privzemimo, da je Φ regularna v točki $\zeta \in \Phi^{-1}(S)$. Potem je preslikava $\Phi|(\triangle \setminus \Phi^{-1}(S)) \cup \{\zeta\} \to (\Phi(\triangle) \setminus S) \cup \Phi(\zeta)$ regularna in injektivna.

Potrebovali bomo naslednji izrek o normalizacijskih preslikavah, ki je dokazan v [Sto].

LEMA 2.9.1. *Naj bo P območje v $\mathbb{C}^N$, $N \geq 2$, in naj bo $\Phi\colon \triangle \to P$ prava holomorfna preslikava.*

Potem je $\Phi = \Psi \circ B$, kjer je B končen Blaschkejev produkt in Ψ normalizacijska preslikava za $\Phi(\triangle)$.

Naj bo $M(a) = \{z \in M; \rho(z) < a\}$ podnivojska množica funkcije $\rho|M$.

LEMA 2.9.2. *Naj bo $a < A$ in naj bo $\Phi\colon \triangle \to M(A)$ prava holomorfna preslikava. Privzemimo, da je množica $\omega = \{\zeta \in \triangle; \rho(\Phi(\zeta)) < a\}$ neprazna, in, da je Φ injektivna na ω.*

Potem je Φ normalizacijska preslikava za analitično množico $\Phi(\triangle)$.

Dokaz. Ker je $\rho(z) = |z|^2$, je preslikava Φ prava holomorfna preslikava z diska v $\{z \in \mathbb{C}^N; |z|^2 < A\}$, zato je lema posledica leme 3.2 iz [Gl2]. $\square$

2.9.2. Mergeljanov izrek

V dokazu izreka 2.1.2 potrebujemo aproksimacijo s polinomskimi preslikavami in interpolacijo vrednosti in končno mnogo odvodov na končni množici točk. Uporabljamo naslednjo posledico Mergeljanovega izreka:

Trditev 2.9.3. *Naj bo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Naj bo K kompaktna podmnožica v $\mathbb{C}$ s povezanim komplementom. Privzemimo, da točke $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ ležijo v notranjosti K. Naj bo f zvezna kompleksna funkcija na K, ki je holomorfna v notranjosti K.*

Za dani $\epsilon > 0$ obstaja polinom P, za katerega velja $|f(\zeta) - P(\zeta)| < \epsilon$ $(\zeta \in K)$ in $P^{(j)}(\zeta_i) = f^{(j)}(\zeta_i)$ $(0 \le j \le k, 1 \le i \le n)$.

Dokaz. Definirajmo $Q_i^j(\zeta) = \frac{(\zeta-\zeta_i)^j \prod_{l\neq i,\, l=1}^{n}(\zeta-\zeta_l)^{j+1}}{j! \prod_{l\neq i,\, l=1}^{n}(\zeta_i-\zeta_l)^{j+1}}$ $(j \in \mathbb{N}\cup\{0\},\ 1 \le i \le n)$. Potem velja

$$(Q_i^j)^{(l)}(\zeta_s) = 0 \ (0 \le l \le j-1) \text{ in } (Q_i^j)^{(j)}(\zeta_s) = \delta_{is} \tag{11}$$

Naj bo $M_j = \sup\{Q_i^j(\zeta);\ 1 \le i \le n,\ \zeta \in K\}$ $(j \in \mathbb{N} \cup \{0\})$. Nadaljujemo z indukcijo na k. Za $k = 0$ definirajmo $\eta = \min\{\frac{\epsilon}{3}, \frac{\epsilon}{3M_0 n}\}$. Po Mergeljanovem izreku [Rud, izrek 20.5, stran 350] obstaja polinom P_0, za katerega je $|f(\zeta) - P_0(\zeta)| < \eta$ $(\zeta \in K)$. Naj bo $P_1(\zeta) = \sum_{i=1}^{n}(f(\zeta_i) - P_0(\zeta_i))Q_i^0(\zeta)$. Potem velja

$$|f(\zeta) - P_0(\zeta) - P_1(\zeta)| \le |f(\zeta) - P_0(\zeta)| + |P_1(\zeta)| < \eta + M_0 n \eta < \epsilon$$

in po (11) sledi, da je $f(\zeta_i) - P_0(\zeta_i) - P_1(\zeta_i) = 0$ $(1 \le i \le n)$. Zato $P = P_0 + P_1$ ustreza vsem pogojem v trditvi.

Recimo, da trditev velja za k. Naj bo $\eta = \min\{\frac{\epsilon}{3}, \frac{\epsilon}{3M_{k+1}n}\}$. Po predpostavki obstaja polinom P_k, za katerega je $|f(\zeta) - P_k(\zeta)| < \eta$ $(\zeta \in K)$ in $P_k^{(j)}(\zeta_i) = f^{(j)}(\zeta_i)$ $(0 \le j \le k, 1 \le i \le n)$. Definirajmo

$$P_{k+1}(\zeta) = \sum_{i=1}^{n}(f^{(k+1)}(\zeta_i) - P_k^{(k+1)}(\zeta_i))Q_i^{k+1}(\zeta).$$

Izračunajmo

$$|f(\zeta) - P_k(\zeta) - P_{k+1}(\zeta)| \le |f(\zeta) - P_k(\zeta)| + |P_{k+1}(\zeta)| < \eta + M_{k+1} n \eta < \epsilon$$

in po (11) sledi, da je $f^{(j)}(\zeta_i) - P_k^{(j)}(\zeta_i) - P_{k+1}^{(j)}(\zeta_i) = 0$ $(0 \leq j \leq k+1,\ 1 \leq i \leq n)$. Tako smo dokazali, da $P = P_k + P_{k+1}$ ustreza pogojem v trditvi, kar zaključi dokaz. $\square$

TRETJE POGLAVJE

Pravi holomorfni diski v komplementih zaprtih konveksnih množic v $\mathbb{C}^N$

3.1. Rezultat

Glavni izrek v tem poglavju je naslednji

Izrek 3.1.1. *Naj bo C zaprta konveksna podmnožica v $\mathbb{C}^2$. Naslednji trditvi sta ekvivalentni:*

(a) *za vsako točko $p \in \mathbb{C}^2 \setminus C$ obstaja taka prava holomorfna preslikava $\varphi\colon \triangle \to \mathbb{C}^2$, da je $\varphi(0) = p$ in $\varphi(\triangle) \cap C = \emptyset$.*

(b) *C je bodisi kompleksna premica bodisi C ne vsebuje nobene kompleksne premice.*

Znano je, da se prava holomorfna preslikava z diska v $\mathbb{C}^2$ ne more izogniti nepolarni množici vzporednih kompleksnih premic (glej [Jul, Tsu, Al1, FG2]). Če zaprta konveksna množica C vsebuje kompleksno premico L in ji ni enaka, potem C vsebuje interval vzporednih kompleksnih premic. Ker interval ni polarna množica, vsak pravi holomorfni disk seka C.

H. Alexander [Al1] je dokazal, da za vsako zaprto polarno množico $E \subset \mathbb{C}$, ki vsebuje vsaj dve točki, obstaja prava holomorfna preslikava $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)\colon \triangle \to \mathbb{C}^2$, za katero je $\varphi_1\colon \triangle \to \mathbb{C} \setminus E$ univerzalna krovna preslikava z diska na $\mathbb{C} \setminus E$. Torej za kompleksno premico C in točko $p \notin C$ obstaja taka prava holomorfna preslikava φ z enotskega diska v $\mathbb{C}^2$, da je $\varphi(0) = p$ in $\varphi(\triangle) \cap C = \emptyset$.

Zato izrek 3.1.1 sledi iz naslednjega izreka:

IZREK 3.1.2. *Naj bo C zaprta konveksna podmnožica v $\mathbb{C}^2$, ki ne vsebuje nobene kompleksne premice in naj bo točka $p \in \mathbb{C}^2 \setminus C$.*

Potem obstaja taka prava holomorfna preslikava $\varphi\colon \triangle \to \mathbb{C}^2$, da velja $\varphi(0) = p$ in $\varphi(\triangle) \cap C = \emptyset$.

Najprej bomo pokazali, da je izrek 3.1.2 dovolj dokazati v posebnem primeru, ko je $C = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2;\ \operatorname{Re} z_1 \leq 0, \operatorname{Re} z_2 \leq 0\}$:

LEMA 3.1.3. *Naj bo C zaprta konveksna podmnožica v $\mathbb{C}^2$, ki ne vsebuje nobene kompleksne premice.*

Potem lahko s kompleksno afino zamenjavo koordinat dosežemo, da v novih koordinatah velja

$$C \subset \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2; \operatorname{Re} z_1 \leq 0, \operatorname{Re} z_2 \leq 0\}.$$

Še več, če $p \notin C$ in $M > 0$ lahko koordinate zamenjamo tako, da v novih koordinatah velja še dodatno $p = (M, M)$.

Dokaz. V C obstaja točka, ki je najbližja p; privzeti smemo, da je ta točka kar izhodišče. Naj bo Φ kompleksni linearni funkcional definiran s $\Phi(z) = \langle z, p \rangle$ kjer smo s $\langle\ ,\ \rangle$ označili običajni hermitski skalarni produkt na $\mathbb{C}^2$. Potem je $\Phi(p) > 0$ in $\operatorname{Re} \Phi \leq 0$ na C.

Ker C ne vsebuje nobene kompleksne premice, jedro funkcionala Φ ni vsebovano v C. Torej obstaja točka $q \notin C$ v jedru od Φ. Podobno kot zgoraj obstaja kompleksni linearni funkcional Ψ z lastnostjo $\operatorname{Re} \Psi(q) > \sup_C \operatorname{Re} \Psi$. Ker je $0 \in C$, iz neenakosti sledi, da je $\Psi(q) \neq 0$. Odtod pa sledi, da Ψ ni večkratnik Φ. Torej par funkcij Φ, $\Psi - \sup_C \operatorname{Re} \Psi$ definira tako kompleksno linearno zamenjavo koordinat, da v novih koordinatah velja $p = (p_1, p_2)$, kjer je $p_1 > 0$, in $C \subset \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2; \operatorname{Re} z_1 \leq 0, \operatorname{Re} z_2 \leq 0\}$.

Izberimo tako majhen $\epsilon > 0$, da po dodatni zamenjavi koordinat

$$(z_1, z_2) \mapsto (z_1, z_1 + \epsilon(z_2 - i\operatorname{Im} p_2))$$

v novih koordinatah velja $p = (p_1, p_2)$, kjer je $p_1 > 0$, $p_2 > 0$ in $C \subset \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2; \operatorname{Re} z_1 \leq 0, \operatorname{Re} z_2 \leq 0\}$.

Z raztegom

$$(z_1, z_2) \mapsto (Mz_1/p_1, Mz_2/p_2)$$

dosežemo, da je v novih koordinatah $p = (M, M)$ in $C \subset \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2; \operatorname{Re} z_1 \leq 0, \operatorname{Re} z_2 \leq 0\}$, kar zaključi dokaz. $\square$

Dokaz izreka 3.1.2. Po izreku 1.3 v [FG2] obstaja prava holomorfna preslikava $\psi = (\psi_1, \psi_2)\colon \triangle \to \mathbb{C}^2$ s sliko $\psi(\triangle)$ v $\mathbb{C}^2 \setminus \{z_1 z_2 = 0\}$. Zato lahko definiramo $(\lambda_1, \lambda_2) = (\log \psi_1, \log \psi_2)$. Preslikava (λ_1, λ_2) je prava holomorfna preslikava iz enotskega diska v $\mathbb{C}^2$. Velja še

$$\max\{\operatorname{Re} \lambda_1(\zeta), \operatorname{Re} \lambda_2(\zeta)\} \to \infty, \quad \text{ko gre } |\zeta| \to 1\,.$$

Če prištejemo še primerno veliko konstanto, dobimo pravo holomorfno preslikavo, katere slika ne seka množice

$$\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2; \operatorname{Re} z_1 \leq 0, \operatorname{Re} z_2 \leq 0\}$$

in ki zadene točko (M, M) za nek $M > 0$. Po lemi 3.1.3 je tako izrek dokazan. $\square$

3.2. O vložitvah

Ne vemo, ali izrek 3.1.1 drži tudi za prave holomorfne vložitve. Iz leme 3.2.1 spodaj in iz dokaza izreka 3.1.2 lahko zaključimo, da ima to vprašanje pritrdilen odgovor v primeru, če izrek 1.3 v [FG2] velja za prave holomorfne vložitve. To je, če obstaja taka prava holomorfna vložitev enotskega diska v $\mathbb{C}^2$, da njena slika ne seka koordinatnih osi.

Lema 3.2.1. *Naj bo C kompleksna premica v $\mathbb{C}^2$ in točka $p \notin C$.*

Potem obstaja taka prava holomorfna vložitev $\varphi\colon \triangle \to \mathbb{C}^2$, da je $\varphi(0) = p$ in $\varphi(\triangle) \cap C = \emptyset$.

Dokaz. Dovolj je, da dokažemo, da obstaja taka prava holomorfna vložitev

$$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)\colon \triangle \to \mathbb{C}^2,$$

da je $\varphi_2(\zeta) \neq 0$ $(\zeta \in \triangle)$.

Po [RR, stran 78] obstaja biholomorfna preslikava

$$\Phi = (\Phi_1, \Phi_2) \colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2,$$

ki fiksira obe koordinatni osi in njena slika $\Omega = \Phi(\mathbb{C}^2)$ ni gosta v $\mathbb{C}^2$. Ω je območje privlaka in je zato Rungejevo.

Privzeti smemo, da $(1,1) \notin \Omega$. Naj bo D tista povezana komponenta preseka Ω s kompleksno premico $z_2 = 1$, ki vsebuje $(0,1)$. Ker je Ω Rungejevo, je množica D biholomorfno ekvivalentna enotskemu disku; naj bo $h \colon \triangle \to D$ biholomorfna preslikava. Označimo s Σ os z_1 in s Ψ inverzno preslikavo preslikavi Φ. Ker je Ψ injektivna in je $D \cap \Sigma = \emptyset$, sledi, da je $\Psi(D) \cap \Psi(\Sigma) = \emptyset$. Odtod dobimo $\Psi(D) \cap \Sigma = \emptyset$, kajti $\Psi(\Sigma) = \Sigma$. Zato je preslikava $\varphi = \Psi \circ h$ prava holomorfna vložitev enotskega diska v $\mathbb{C}^2$ in velja $\varphi_2(\zeta) \neq 0$ $(\zeta \in \triangle)$. S tem je dokaz končan. $\square$

Opomba. Naj bo C zaprta konveksna podmnožica v $\mathbb{C}^N$, $N \geq 3$, in točka $p \notin C$. Potem obstaja prava holomorfna vložitev $\varphi \colon \triangle \to \mathbb{C}^N$ z lastnostma $\varphi(0) = p$ in $\varphi(\triangle) \cap C = \emptyset$. Da bi to dokazali, vzemimo tako realno afino hiperravnino H skozi p, da je $C \cap H = \emptyset$. Označimo s $H^C \subset \mathbb{C}^N$ enolično določeno kompleksno afino hiperravnino skozi p, ki leži v H. Kompleksna dimenzija H^C je vsaj 2, zato obstaja prava holomorfna vložitev $\varphi \colon \triangle \to H^C$ z lastnostjo $\varphi(0) = p$.

ČETRTO POGLAVJE

Pravi holomorfni diski v komplementih kompletnih pluripolarnih množic

V tem poglavju bomo dokazali, da se lahko vsaki kompletni pluripolarni podmnožici v Steinovi mnogoterosti izognemo s sliko prave holomorfne preslikave iz diska. Še več, s to pravo holomorfno preslikavo lahko zadenemo tudi poljubno točko v komplementu dane kompletne pluripolarne množice.

4.1. Uvod in rezultat

Naj bo X Steinova mnogoterost. Pravimo, da je zaprta podmnožica Y v X *kompletna pluripolarna*, če obstaja taka plurisubharmonična funkcija u na X, da je $Y = \{u = -\infty\}$.

H. Alexander [Al1] je leta 1975 dokazal, da za zaprto polarno množico $E \subset \mathbb{C}$ obstaja taka prava holomorfna preslikava $F = (F_1, F_2)\colon\ \triangle \to \mathbb{C}^2$, da je $F_1(\triangle) \cap E = \emptyset$. To je najsplošnejši rezultat v tej smeri. Po drugi strani pa je znano, da vsak pravi holomorfni disk v $\mathbb{C}^2$ seka nepolarno množico vzporednih kompleksnih premic (glej [Jul, Tsu, Al1]).

Glavni rezultat v tem poglavju je naslednji

Izrek 4.1.1. *Naj bo X Steinova mnogoterost z dimenzijo vsaj 2. Za dano kompletno pluripolarno množico $Y \subset X$, točko $p \in Y \setminus X$ in tangentni vektor V na X v točki p obstaja prava holomorfna preslikava $f\colon \triangle \to X$, za katero velja $f(0) = p$, $f'(0) = \lambda V$ za nek $\lambda > 0$ in $f(\triangle) \cap Y = \emptyset$.*

Znano je [Gl1], da za dano Steinovo mnogoterost X, $\dim X \geq 2$, točko $p \in X$, in smer V v tangentnem prostoru X v točki p obstaja prava holomorfna preslikava $f\colon \triangle \to X$, za katero je $f(0) = p$ in $f'(0) = \lambda V$ za nek $\lambda > 0$.

Vsaka analitična množica je kompletna pluripolarna. Zato izrek 4.1.1 odgovori na vprašanje, ki je bilo zastavljeno v [FG2] o obstoju pravih holomorfnih diskov v komplementu kompleksnih hiperploskev.

4.2. Dokaz izreka 4.1.1

Po vložitvenem izreku za Steinove mnogoterosti [Hör] lahko predpostavimo, da je M zaprta podmnogoterost v $\mathbb{C}^N$ za neki $N \in \mathbb{N}$. Enako kot v [Gl1] se lahko omejimo na primer, ko je $\dim X = 2$. Po izreku Docquier in Grauert [GR, stran 257] obstajata odprta okolica E od M v $\mathbb{C}^N$ in taka holomorfna preslikava $\pi\colon E \to M$, da je $\pi(z) = z$ $(z \in M)$.

Ker je Y kompletna pluripolarna množica, obstaja taka plurisubharmonična funkcija u na X, da je $Y = \{u = -\infty\}$. Njene nivojske množice niso nujno kompaktne. Zato v induktivnem procesu ne moremo potiskati roba diska na višje nivoje funkcije u na isti način kot v [FG2] ali [Gl1]. Oviro premagamo na naslednji način: izberemo naraščajoče zaporedje holomorfno konveksnih kompaktnih množic $\{X_n\}$ z unijo X. Na vsakem induktivnem koraku potisnemo rob diska, ki leži zunaj množice $X_n \cup Y$, v komplement množice $X_{n+1} \cup Y$. Na ta način problem spet postavimo v kompakten prostor.

V konstrukciji bomo poskrbeli, da bo limitna preslikava prava holomorfna preslikava, ki ne seka Y.

Z naslednjo lemo bomo potiskali robove holomorfnih diskov v induktivnem postopku iz nivojske množice ene plurisubharmonične funkcije na nivojsko množico druge plurisubharmonične funkcije. Glavno lemo bomo dokazali v naslednjih razdelkih.

GLAVNA LEMA 4.2.1. *Naj bo X Steinova mnogoterost z dimenzijo vsaj 2 in D odprta relativno kompaktna podmnožica v X. Recimo, da sta u in v gladki strogo plurisubharmonični funkciji na X, za kateri velja, da je 0 regularna vrednost od u in v, da se množici $\{z \in D; u(z) = 0\}$ in $\{z \in D; v(z) = 0\}$ sekata transverzalno in je množica $\{z \in D; u(z) < 0, v(z) > 0\}$ relativno kompaktna v D. Naj bo $F\colon \overline{\triangle} \to X$ zvezna preslikava, holomorfna na $\triangle$, naj bo K enostavno povezana kompaktna podmnožica v $\triangle$ in recimo, da velja $F(\zeta) \in D$ $(\zeta \in \overline{\triangle} \setminus K)$, $v(F(\zeta)) > 0$ $(\zeta \in \overline{\triangle} \setminus K)$, $v(F(\zeta)) = 0$ $(\zeta \in bK)$ in $u(F(\zeta)) < 0$ $(\zeta \in b\triangle)$.*

Potem za dane $\epsilon > 0$, $\delta > 0$ in $M > 0$ obstajajo območje $\triangle' \subset \triangle$, konformno ekvivalentno disku, in enostavno povezana kompaktna množica K', $K \subset K' \subset \triangle'$, za katero velja $\{\zeta \in \triangle'; \mathrm{dist}(\zeta, b\triangle') > \frac{1}{M}\} \subset K'$ in zvezna preslikava $G\colon \overline{\triangle'} \to X$, holomorfna na $\triangle'$, z naslednjimi lastnostmi

(I) $G(\zeta) \in D \quad (\zeta \in \triangle' \setminus K')$,
(II) $u(G(\zeta)) > 0 \quad (\zeta \in \triangle' \setminus K')$ *in* $u(G(\zeta)) = 0 \quad (\zeta \in bK')$,
(III) $v(G(\zeta)) > -\delta \quad (\zeta \in \triangle' \setminus K)$,
(IV) $|G(\zeta) - F(\zeta)| < \epsilon \quad (\zeta \in K)$,
(V) $F(0) = G(0)$, $F'(0) = G'(0)$.

V dokazu izreka 4.1.1 potrebujemo še naslednjo lemo:

LEMA 4.2.2. *Naj bo X Steinova mnogoterost z dimenzijo vsaj 2 in $Y \subset X$ kompletna pluripolarna množica. Naj bosta $L_1 \subset L_2 \subset X$ holomorfno konveksni kompaktni množici.*

Potem je množica $(L_1 \cup Y) \cap L_2$ holomorfno konveksna.

Dokaz. Privzemimo, da $z_0 \notin L_2$. Ker je L_2 holomorfno konveksna, obstaja taka holomorfna funkcija f na X, da velja $\sup_{L_2} |f(z)| < |f(z_0)|$. Odtod sledi, da je $\sup_{(L_1 \cup Y) \cap L_2} |f(z)| < |f(z_0)|$. Vzemimo sedaj $z_0 \in L_2 \setminus (L_1 \cup Y)$. Naj bo u taka plurisubharmonična funkcija na X, da je $Y = \{u = -\infty\}$. Iz holomorfne konveksnosti L_1 sledi, da lahko izberemo holomorfno funkcijo f na X z lastnostma $\sup_{L_1} |f(z)| < \frac{1}{2}$

in $f(z_0) = 1$. Funkcija $\epsilon u + |f|^2$ je plurisubharmonična na X. Če je $\epsilon > 0$ dovolj majhen, je $\sup_{L_2} \epsilon u(z) < \frac{1}{4}$ in $|\epsilon u(z_0)| < \frac{1}{4}$. Zato dobimo $\sup_{(L_1 \cup Y) \cap L_2} \epsilon u + |f|^2 < \frac{1}{2}$ in $\epsilon u(z_0) + |f(z_0)|^2 > \frac{3}{4}$. Torej je množica $(L_1 \cup Y) \cap L_2$ holomorfno konveksna. S tem je dokaz končan. □

Sedaj dokažimo izrek 4.1.1.

Dokaz izreka 4.1.1. Izberimo gladko strogo plurisubharmonično funkcijo izčrpanja U za Steinovo mnogoterost X. Privzeti smemo, da je $U(p)$ regularna vrednost funkcije U. Obstaja majhen analitični disk, to je zvezna preslikava $F_1 \colon \overline{\triangle} \to X \setminus Y$, holomorfna na $\triangle$, za katero velja $F_1(0) = p$, $F_1'(0) = \tau V$ $(\tau > 0)$ in $U(F_1(\zeta)) > U(F_1(0))$ $(\zeta \in \overline{\triangle} \setminus \{0\})$. Brez izgube splošnosti smemo predpostaviti, da obstajata regularna vrednost $M_1 > 0$ funkcije U in enostavno povezana kompaktna množica $K_1 \subset \triangle$, da je $K_1 = \{\zeta;\, U(F_1(\zeta)) \leq M_1\}$. Sedaj izberimo strogo naraščajoče zaporedje regularnih vrednosti $\{M_n\}$ funkcije U, ki konvergira v ∞, in označimo z X_n podnivojsko množico $\{U < M_n\}$ in definirajmo $X_0 = \emptyset$. Privzeti smemo, da je $F_1(\zeta) \in X_2$ $(\zeta \in \overline{\triangle})$.

Induktivno bomo konstruirali

(A) padajoče zaporedje območij $\{\triangle_n\}$, ki so konformno ekvivalentna disku,

(B) naraščajoče zaporedje enostavno povezanih kompaktnih množic $\{K_n\}$, za katerega velja

$$\{\zeta \in \triangle_n; \operatorname{dist}(\zeta, b\triangle_n) > \tfrac{1}{n}\} \subset K_n \subset \triangle_n \quad (n \in \mathbb{N}),$$

(C) zaporedje zveznih preslikav $F_n \colon \overline{\triangle}_n \to X$, holomorfnih na $\triangle_n$,

(D) padajoče zaporedje pozitivnih števil $\{\epsilon_n\}$,

ki za vsak $n \in \mathbb{N}$ izpolnjujejo naslednje pogoje

(I) $F_n(\zeta) \in X_{n+1} \setminus (\overline{X}_n \cup Y) \quad (\zeta \in \overline{\triangle}_n \setminus K_n)$,
$F_n(\zeta) \in bX_n \quad (\zeta \in bK_n)$,

(II) $F_{n+1}(\zeta) \notin \overline{X}_{n-1} \cup Y \quad (\zeta \in \overline{\triangle}_{n+1} \setminus K_n)$,

(III) $|F_{n+1}(\zeta) - F_n(\zeta)| < \frac{\epsilon_n}{2^n} \quad (\zeta \in K_n)$,

(IV) $F_n(0) = p$, $F_n'(0) = \tau V$,

(V) če je $z \in X$ in $\mathrm{dist}(z, F_n(K_n)) < \epsilon_n$, potem je $z \notin Y$,

(VI) če je $z \in X$ in $\mathrm{dist}(z, F_{n+1}(\triangle_{n+1} \setminus K_n)) < \epsilon_{n+1}$, potem je $z \notin X_{n-1}$.

Naj bosta F_1 in K_1 kot zgoraj in naj bo $\triangle_1 = \triangle$. Potem (I) in (IV) držita. Izberimo tako majhen ϵ_1, da je točka (V) izpolnjena. Recimo, da smo za nek $j \in \mathbb{N}$ že konstruirali F_n, $\triangle_n$, K_n in ϵ_n, $1 \leq n \leq j$, ki ustrezajo pogojem (I), (IV) in (V) za $1 \leq n \leq j$ in pogojem (II), (III) in (VI) za $1 \leq n \leq j-1$.

Iz leme 4.2.2 sledi, da je množica $(\overline{X}_j \cup Y) \cap \overline{X}_{j+2}$ holomorfno konveksna. Zato po izreku 5.1.6 v [Hör] obstaja taka gladka strogo plurisubharmonična funkcija v_j na X, da je

$$v_j(z) < 0 \quad (z \in (\overline{X}_j \cup Y) \cap \overline{X}_{j+2}) \text{ in } v_j(F_j(\zeta)) > 0 \quad (\zeta \in b\triangle_j).$$

Privzamemo lahko, da se množici $\{v_j = 0\}$ in $\{U = M_{j+1}\}$ sekata transverzalno znotraj $\overline{X}_{j+2}$. Seveda je množica $\{U < M_{j+1}, v_j > 0\}$ relativno kompaktna v X_{j+2}. Če uporabimo (I), dobimo $v_j(F_j(\zeta)) \leq 0$ $(\zeta \in bK_j)$. Označimo s K_j' tisto komponento množice $\{\zeta;\, v_j(F_j(\zeta)) \leq 0\}$, ki vsebuje K_j. Izberemo lahko tako območje $\triangle_j'$, $K_j' \subset \triangle_j' \subset \triangle_j$, ki je konformno ekvivalentno disku, da velja $v_j(F_j(\zeta)) > 0$ $(\zeta \in \overline{\triangle}_j' \setminus K_j')$. Sedaj uporabimo glavno lemo v primeru $D = X_{j+1}$, $v = v_j$, $u = U - M_{j+1}$, $\triangle = \triangle_j'$, $K = K_j'$, $F = F_j$, $\epsilon = \frac{\epsilon_j}{2^j}$, za primerno majhen δ in dovolj velik M, da dobimo $\triangle_{j+1}$, K_{j+1}, F_{j+1} ki ustrezajo točkama (I), (IV) za $n = j+1$ in točkama (II), (III) za $n = j$. Iz točk (III) in (V) sledi, da je $F_{j+1}(K_j) \cap Y = \emptyset$. Iz točke (II) dobimo $F_{j+1}(K_{j+1} \setminus K_j) \cap Y = \emptyset$. Torej lahko po točki (II) izberemo tako majhen ϵ_{j+1}, $0 < \epsilon_{j+1} < \epsilon_j$, da je točka (V) izpolnjena za $n = j+1$ in da pogoj (VI) drži za $n = j$. S tem je konstrukcija končana.

Naj bo $\Omega = \cap_{j=1}^{\infty} \triangle_j$. Iz (B) dobimo $\Omega = \cup_{j=1}^{\infty} K_j$, odkoder po točki (III) sledi, da za vsak $\zeta \in \Omega$ obstaja $F(\zeta) = \lim_{n\to\infty} F_n(\zeta)$ in da je preslikava F holomorfna na Ω. Iz dejstva, da je $F_j(\overline{\triangle}_j) \subset X$, sledi, da je $F(\Omega) \subset X$. Območje Ω je konformno ekvivalentno disku, ker je limita padajočega zaporedja območij, ki vsa vsebujejo K_2 [Pom, stran

29]. Pokažimo, da je preslikava F prava. Izberimo $j \in \mathbb{N}$. Iz (III) sledi, da je

$$|F_{j+1}(\zeta) - F(\zeta)| \leq |F_{j+1}(\zeta) - F_{j+2}(\zeta)| + |F_{j+2}(\zeta) - F_{j+3}(\zeta)| + \cdots <$$
$$< \frac{\epsilon_{j+1}}{2^{j+1}} + \frac{\epsilon_{j+2}}{2^{j+2}} + \cdots < \epsilon_{j+1} \ (\zeta \in K_{j+1}). \qquad (12)$$

Zato za $\zeta \in K_{j+1} \setminus K_j$ iz (VI) sledi $F(\zeta) \notin X_{j-1}$. Torej je F prava preslikava. Da bi dokazali, da $F(\Omega)$ ne seka Y, izberimo $\zeta \in \Omega$. Obstaja tako velik $j \in \mathbb{N}$, da je $\zeta \in K_{j+1}$. Iz neenakosti (12) in iz (V) dobimo, da $F(\zeta) \notin Y$. Iz (IV) sledi, da je $F(\zeta) = p$ in $F'(0) = \tau V$.

Naj bo $h\colon \triangle \to \Omega$ biholomorfna preslikava z lastnostma $h(0) = 0$ in $h'(0) > 0$. Potem preslikava $f = F \circ h$ ustreza vsem pogojem v izreku 4.1.1. $\square$

4.3. Skica dokaza glavne leme

Ker je dokaz glavne leme precej dolg in tehnično zahteven, najprej razložimo idejo dokaza v preprostem primeru, ko je $X = \mathbb{C}^2$, $u(z) = |z|^2 - 1$ in $v(z) = |z+2|^2 - 5$. Definirajmo

$$u_\lambda(z) = (1-\lambda)v(z) + \lambda u(z), \quad \lambda \in [0,1],\ z \in \mathbb{C}^2.$$

Potem je u_λ gladka družina strogo plurisubharmoničnih funkcij na $\mathbb{C}^2$. Za $\lambda \in [0,1)$ ima množica

$$\{z;\, u_\lambda(z) > 0,\, u(z) < 0\}$$

obliko lunice. Konstrukcijo začnemo s holomorfnim diskom z robom v $\{z;\, v(z) > 0,\, u(z) < 0\}$. Na vsakem koraku potisnemo rob diska v množico $\{z;\, u_\lambda(z) > 0,\, u(z) < 0\}$ za čedalje večje $\lambda \in [0,1]$. To naredimo na enak način kot v [FG1, FG2, Gl1]: rob holomorfnega diska potisnemo na holomorfen način vzdolž zvezne družine majhnih diskov, ki so tangentni na $\{z;\, u_\lambda(z) = 0\}$. Na ta način dobimo holomorfni disk z robom blizu $\{z;\, u_\lambda(z) = \delta\}$ za nek $\delta > 0$ in poljubno blizu prejšnjemu disku na predpisani kompaktni podmnožici v $\triangle$. Rob diska lahko pade tudi ven iz lunice $\{z;\, v(z) > 0,\, u(z) < 0\}$. Zato disk odrežemo s podnivojsko množico $\{z;\, u_{\lambda+\sigma}(z) < 0\}$ za nek primeren σ. Privzeti smemo, da je presek transverzalen. Nadaljujemo s tisto komponento diska, ki vsebuje dano kompaktno množico.

Na koncu, po končno mnogo korakih, dobimo holomorfen disk z robom blizu $\{z;\, u(z) = 0\}$.

V splošnem je konstrukcija precej bolj zapletena, čeprav osrednja ideja ostane enaka. Do težav pride zato, ker se na nekaterih nivojskih množicah pojavijo kritične točke. Prisotnosti kritičnih točk se ne moremo izogniti, ker se lahko spreminja topološka struktura nivojskih množic.

Še vedno bomo potiskali robove diskov na višje nivoje primernih plurisubharmoničnih funkcij. Čez kritični nivo potisnemo rob diska na isti način kot v [Gl1, FG2]. Ta način pa je neholomorfen. Zato po prvem prehodu čez kritično nivojsko množico dobimo dva diska: zvezni disk z robom v predpisanem območju in holomorfni disk, ki je zveznemu enakomerno blizu. Naprej potiskamo rob zveznega diska na holomorfen način na višje regularne nivoje primernih plurisubharmoničnih funkcij. Hkrati se holomorfen disk spreminja na holomorfen način in ostane enakomerno blizu zveznemu disku. Potem zvezni disk odrežemo s primerno podnivojsko množico. Enako odrežemo tudi holomorfni disk. Pri prehodu čez kritični nivo holomorfnega diska ne spreminjamo. Razdalja med zveznim in holomorfnim diskom se poveča, vendar ostane enakomerno majhna. Ker bi radi konstrukcijo končali s holomorfnim diskom z robom v predpisanem območju, bomo najprej spremenili območje in potem izvedli zgoraj opisan postopek potiskanja.

4.4. Dokaz glavne leme

V prvem podrazdelku bomo poiskali $\alpha, \beta > 0$ z naslednjo lastnostjo: če je rob zveznega diska dovolj blizu množici

$$\{z \in D;\, u(z) = \alpha,\, v(z) > \beta\},$$

potem je rob holomorfnega diska, ki je enakomerno dovolj blizu zveznemu disku, blizu množici

$$\{z \in D;\, u(z) > 0,\, v(z) > 0\}.$$

Nato bomo funkcijo v malo perturbirali in s tem dobili tako gladko strogo plurisubharmonično funkcijo v_1 na D, da za funkcijo

$$U_\lambda(z) = \lambda(u(z) - \alpha) + (1 - \lambda)(v_1(z) - \beta) \quad (\lambda \in [0, 1],\, z \in D)$$

velja, da je za vsak, razen za končno mnogo λ, 0 regularna vrednost funkcije U_λ na $\{z \in D;\, u(z) < \alpha,\, v(z) > \beta\}$, in, če je 0 kritična vrednost funkcije U_λ na $\{z \in D;\, u(z) < \alpha,\, v(z) > \beta\}$, potem obstaja samo končno mnogo kritičnih točk funkcije U_λ na ničelni nivojski množici in vse kritične točke so nedegenerirane.

Potiskanje robov diskov čez regularne nivojske množice bomo opisali v drugem podrazdelku, potiskanje čez kritične nivoje pa v tretjem. Dokaz glavne leme bomo zaključili z induktivno konstrukcijo v četrtem podrazdelku.

4.4.1. Spreminjanje območja

Označimo z $D_{\alpha,\beta}$ množico

$$\{z \in D;\, u(z) < \alpha,\, v(z) > \beta\}$$

za $\alpha \geq 0$ in $\beta \geq 0$. Ker je 0 regularna vrednost od u in v na X in je $D \subset\subset X$, obstajata $\alpha_0 > 0$ in $\beta_0 > 0$ z naslednjimi lastnostmi: za vsak α, $0 < \alpha \leq \alpha_0$, in za vsak β, $0 < \beta \leq \beta_0$, je α regularna vrednost funkcije u na $\overline{D}$, β je regularna vrednost funkcije v na $\overline{D}$, množici $\{z \in D;\, u(z) = \alpha\}$ in $\{z \in D;\, u(z) = \beta\}$ se sekata transverzalno in množica $\{z \in D;\, u(z) < \alpha,\, v(z) > \beta\}$ je relativno kompaktna v D. Naj bo

$$\Lambda_0 = \frac{\max\{v(z);\, z \in D\}}{\alpha_0 + \max\{v(z);\, z \in D\}} \text{ in } u_\lambda(z) = \lambda(u(z) - \alpha_0) + (1 - \lambda)v(z).$$

Trdimo, da velja

$$\text{če je } z \in D,\, \Lambda_0 \leq \lambda \leq 1 \text{ in } u_\lambda(z) > 0, \text{ potem velja } u(z) > 0. \quad (13)$$

Iz neenakosti $u_\lambda(z) > 0$ sledi

$$\lambda(u(z) - \alpha_0) + (1 - \lambda)\max\{v(z);\, z \in D\} > 0.$$

Ker je $\Lambda_0 \leq \lambda \leq 1$, dobimo

$$u(z) \geq \alpha_0 - (\tfrac{1}{\Lambda_0} - 1)\max\{v(z);\, z \in D\}$$

in to število je enako 0 po definiciji Λ_0, kar dokaže trditev.

Ker je 0 regularna vrednost od u_1 na $\overline{D}$, zaradi kompaktnosti $\overline{D}$ in gladkosti $u_\lambda(z)$ v z in λ lahko izberemo $\gamma_0 > 0$ in Λ, $\Lambda_0 \leq \Lambda < 1$, tako blizu 1, da je za vsak λ, $\Lambda \leq \lambda \leq 1$, in za vsak γ, $-\gamma_0 < \gamma < \gamma_0$, število γ regularna vrednost funkcije u_λ na $\overline{D}$. Zato obstajata tak α_1, $0 < \alpha_1 < \alpha_0$, in tak $\beta_1 > 0$, da je za vsak α, $\alpha_1 < \alpha < \alpha_0$, in za vsak β, $0 < \beta < \beta_1$, 0 regularna vrednost funkcije $u_\lambda + \lambda(\alpha_0 - \alpha) + (1-\lambda)(-\beta)$ za vsak λ, $\Lambda \leq \lambda \leq 1$.

Naj bo $t_0 = \min\{v(F(\zeta));\, \zeta \in b\triangle\}$. Po Sardovem izreku obstaja regularna vrednost t, $0 < t < \min\{t_0, \beta_1\}$, funkcije $v \circ F$. Potem je množica $(v \circ F)^{-1}(t)$ končna unija enostavno sklenjenih krivulj in obstaja relativno kompaktna komponenta komplementa ene od krivulj, ki vsebuje K. To komponento označimo s $\triangle_0$. Izberimo tak s, $0 < s < t$, blizu t, da je s regularna vrednost funkcije $v \circ F$ in označimo s K_0 komponento $\{\zeta \in \triangle_0;\, v(F(\zeta)) \leq s\}$, ki vsebuje K. Če je s dovolj blizu t, dobimo

$$\{\zeta \in \triangle_0;\, \mathrm{dist}(\zeta, b\triangle_0) < \frac{1}{M}\} \subset K_0 \text{ in } v(F(\zeta)) > s\ (\zeta \in \overline{\triangle}_0 \backslash K_0). \quad (14)$$

Naj bo $\beta = s$. Iz zgornjega sledi $\beta < \beta_1$. Izberimo α, $\alpha_1 < \alpha < \alpha_0$, da velja

$$\alpha > \alpha_0 - \frac{1}{3}(1 - \Lambda)\beta. \quad (15)$$

Definirajmo

$$\tilde{U}_\lambda(z) = \lambda(u(z) - \alpha) + (1 - \lambda)(v(z) - \beta)\ (z \in D,\, 0 \leq \lambda \leq 1).$$

Če povzamemo: 0 je regularna vrednost funkcije $\tilde{U}_\lambda$ na D za vsak λ, $\Lambda \leq \lambda \leq 1$.

Po predpostavki v glavni lemi velja $u(F(\zeta)) < 0$ $(\zeta \in b\triangle)$. Odtod z uporabo principa maksima dobimo $u(F(\zeta)) < 0$ $(\zeta \in \overline{\triangle})$. Zmanjšajmo $\epsilon > 0$, če je potrebno, da velja še

$$\text{če je } z \in \mathbb{C}^N,\ \zeta \in K_0 \text{ in } |F(\zeta) - z| < \epsilon, \text{ potem velja } u(\pi(z)) < 0 \tag{16}$$

Izberimo tako majhen ν, $0 < 2\nu < \epsilon$, da velja

$$\pi(\overline{D}_{\alpha,\beta} + 2\nu\mathbf{B}^N) \subset\subset D_{\alpha_0,0}, \tag{17}$$

$$\begin{gathered} \text{če je } z \in \mathbb{C}^N,\ w \in D \text{ in } |z - w| < 2\nu, \text{ potem velja} \\ |\pi(z) - w| < \epsilon \text{ in } |u_\lambda(\pi(z)) - u_\lambda(w)| < \frac{1}{3}(1 - \Lambda)\beta \quad (0 \le \lambda \le 1), \end{gathered} \tag{18}$$

$$\begin{gathered} \text{če je } z \in \mathbb{C}^N,\ \zeta \in \overline{\triangle} \setminus K \text{ in } |F(\zeta) - z| < 2\nu, \\ \text{potem velja } v(\pi(z)) > -\delta. \end{gathered} \tag{19}$$

Poglejmo si bolj natančno kritične točke funkcije $\tilde{U}_\lambda$ v množici $\{z \in D_{\alpha,\beta};\ \tilde{U}_\lambda(z) = 0\}$. Označimo z L_λ množico vseh kritičnih točk funkcije $\tilde{U}_\lambda$, ki ležijo v $\{z \in D_{\alpha,\beta};\ \tilde{U}_\lambda(z) = 0\}$, in naj bo $L = \cup_{\lambda\in[0,1]} L_\lambda$. Ker se množici $\{z \in D;\ u(z) = \alpha\}$ in $\{z \in D;\ v(z) = \beta\}$ sekata transverzalno in ker je 0 regularna vrednost $\tilde{U}_\lambda$ v $D_{\alpha,\beta}$ za $\Lambda \le \lambda \le 1$ ter za $\lambda = 0$, je $L \subset\subset D_{\alpha,\beta}$ in $0 < \tilde{U}_\lambda(z) < \Lambda$ $(z \in L)$. Izberimo odprto okolico V_L od L, za katero velja $V_L \subset\subset D_{\alpha,\beta}$ in $0 < \tilde{U}_\lambda(z) < \Lambda$ $(z \in V_L)$. Enačbo $\tilde{U}_\lambda = 0$ lahko prepišemo v obliko $\lambda((v - \beta) - (u - \alpha)) = v - \beta$ in po deljenju z $((v - \beta) - (u - \alpha))$, za $z \in D_{\alpha,\beta}$ dobimo

$$\lambda = \frac{v(z) - \beta}{(v(z) - \beta) - (u(z) - \alpha)} = g(z),$$

kar definira gladko funkcijo g na $D_{\alpha,\beta}$. Z odvajanjem enakosti $g(u - \alpha) + (1 - g)(v - \beta) \equiv 0$ dobimo, da za $z \in D_{\alpha,\beta}$ in $\lambda = g(z)$ velja, da je z regularna točka funkcije g natanko tedaj, kadar je z regularna točka funkcije $\tilde{U}_\lambda$. S ponovnim odvajanjem dobimo, da je z nedegenerirana kritična točka funkcije g natanko tedaj, kadar je z nedegenerirana kritična točka funkcije $\tilde{U}_\lambda$. Račun pokaže, da obstaja tako majhen $\theta_0 > 0$, da iz neenakosti $|g - g_1|_{C_c^\infty(V_L)} < \theta_0$ sledi, da lahko definiramo gladko funkcijo v_1 s predpisom

$$v_1(z) = \begin{cases} v(z), & z \in D \setminus V_L \\ -\frac{g_1(z)}{1-g_1(z)}(u(z) - \alpha) + \beta, & z \in V_L \end{cases}$$

in velja ocena

$$|v - v_1|_{C^\infty(D)} < c|g(z) - g_1(z)|_{C^\infty(D_{\alpha,\beta})},$$

kjer je konstanta c odvisna samo od g in V_L. Zato lahko izberemo tako majhen θ, $0 < \theta < \theta_0$, da iz ocene $|g - g_1|_{C^\infty(D_{\alpha,\beta})} < \theta$ sledi, da je funkcija v_1 strogo plurisubharmonična na D in velja še $v_1(F(\zeta)) > \beta$ $(\zeta \in \triangle_0 \setminus K_0)$, $v_1(F(\zeta)) = \beta$ $(\zeta \in bK_0)$ in

$$|v_1(\zeta) - v(\zeta)| < \frac{1}{3}(1 - \Lambda)\beta \quad (\zeta \in D). \tag{20}$$

Po Morsovi teoriji lahko privzamemo, da je g_1 Morsova. Definirajmo

$$U_\lambda(z) = \lambda(u(z) - \alpha) + (1 - \lambda)(v_1(z) - \beta)\ (z \in D,\ 0 \le \lambda \le 1).$$

Naj bo $\eta_0 = 0$. Ker je $U_\lambda(z) = 0$ natanko tedaj, ko je $g_1(z) = \lambda$ in je g_1 Morsova, sledi po zgornjem, da obstajajo $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k$, $0 < \eta_1 < \eta_2 < \cdots < \eta_k < \Lambda$, z naslednjo lastnostjo: če je $0 \le \lambda \le 1$, $\lambda \ne \eta_j$ $(1 \le j \le k)$, potem je 0 regularna vrednost funkcije U_λ na $\overline{D}_{\alpha,\beta}$; na množici $\{z \in D_{\alpha,\beta};\ U_{\eta_j}(z) = 0\}$ $(1 \le j \le k)$ ima funkcija U_{η_j} končno mnogo kritičnih točk, ki so vse nedegenerirane.

Izberimo $z \in D$ in λ, $0 \le \lambda \le \Lambda$. Iz (15) in (20) dobimo

$$\begin{aligned} U_\lambda(z) &\le \lambda(u(z) - \alpha) + (1 - \lambda)(v(z) - \beta) + \tfrac{1}{3}(1 - \Lambda)\beta \le \\ &\le u_\lambda(z) + \lambda(\alpha_0 - \alpha) + (1 - \lambda)(-\beta) + \tfrac{1}{3}(1 - \Lambda)\beta \le \\ &\le u_\lambda(z) - \tfrac{1}{3}(1 - \Lambda)\beta. \end{aligned}$$

Odtod z uporabo (18) dobimo

$$\begin{gathered} \text{če je } z \in D,\ w \in \mathbb{C}^N,\ |z - w| < 2\nu,\ 0 \le \lambda \le \Lambda \text{ in } U_\lambda(z) > 0, \\ \text{potem velja } u_\lambda(\pi(w)) > 0. \end{gathered} \tag{21}$$

Če vzamemo $\lambda = \Lambda$ in dodatno upoštevamo še (13), dobimo

$$\begin{aligned}&\text{če je } z \in D,\ w \in \mathbb{C}^N,\ |z-w| < 2\nu \text{ in } U_\Lambda(z) > 0,\\ &\text{potem velja } u(\pi(w)) > 0.\end{aligned} \tag{22}$$

To je ravno pogoj, ki zagotavlja naslednje: če ima zvezni disk rob v $\{z;\, U_\Lambda(z) > 0\}$, potem ima holomorfni disk rob v $\{z;\, u(z) > 0\}$.

4.4.2. Potiskanje robov v primeru regularne vrednosti

Lema 4.4.1 je pravzaprav posplošitev leme 4.1 v [Gl1]. Edini spremembi v dokazu sta uvedba gladkega parametra in konstrukcija zvezne družine majhnih diskov, ki je bila za primer $X = \mathbb{C}^2$ narejena v [FG2, stran 261] in jo lahko z majhnimi spremembami naredimo na kompleksni mnogoterosti. Zato bomo dokaz izpustili.

Lema 4.4.1. *Naj bo $L \subset D \times [0,1]$ taka kompaktna množica, da je za vsak λ, $0 \le \lambda \le 1$, množica $L_\lambda = \{z \in X;\, (z,\lambda) \in L\}$ sestavljena iz samih regularnih točk funkcije U_λ.*

Potem obstaja tak $\mu_0 > 0$, da za vsak λ, $0 \le \lambda \le 1$, za vsako zvezno preslikavo $\varphi\colon b\triangle \to L_\lambda$ in za vsako pozitivno zvezno funkcijo μ na $b\triangle$, ki ustreza pogoju $\mu(\zeta) < \mu_0$ $(\zeta \in b\triangle)$, obstaja zvezna preslikava $g\colon b\triangle \times \overline{\triangle} \to D$ z naslednjimi lastnostmi

(i) *za vsak $\zeta \in b\triangle$ je funkcija $\eta \mapsto g(\zeta,\eta)$ holomorfna na $\triangle$,*
(ii) $g(\zeta,0) = \varphi(\zeta) \quad (\zeta \in b\triangle)$,
(iii) $U_\lambda(g(\zeta,\eta)) > U_\lambda(\varphi(\zeta)) \quad (\zeta \in b\triangle,\ \eta \in \overline{\triangle} \setminus \{0\})$,
(iv) $U_\lambda(g(\zeta,\eta)) = U_\lambda(\varphi(\zeta)) + \mu(\zeta) \quad (\zeta \in b\triangle,\ \eta \in b\triangle)$.

Ko uporabimo to lemo (namesto leme 4.1 v [Gl1]) v dokazu leme 5.2 iz [Gl1], dokažemo naslednjo

Lema 4.4.2. *Naj bo $L \subset D \times [0,1]$ taka kompaktna množica, da je za vsak λ, $0 \le \lambda \le 1$, množica $L_\lambda = \{z \in X;\, (z,\lambda) \in L\}$ sestavljena iz samih regularnih točk funkcije U_λ.*

Potem obstaja $\mu_0 > 0$ z naslednjo lastnostjo: Vzemimo $\lambda \in [0,1]$. Recimo da je $\varphi\colon \overline{\triangle} \to X$ taka zvezna preslikava, holomorfna v okolici

0, da je $\varphi(\zeta) \in L_\lambda$ $(\zeta \in b\triangle)$ in, da je $|\varphi(\zeta) - G(\zeta)| \le \tau$ $(\zeta \in \overline{\triangle})$, kjer je $G\colon \overline{\triangle} \to \mathbb{C}^N$ zvezna preslikava, holomorfna na $\triangle$ in ki ustreza pogojema $G(0) = \varphi(0)$ ter $G'(0) = \varphi'(0)$.

Za dani R, $0 < R < 1$, $\epsilon > 0$ in pozitivno zvezno funkcijo μ na $b\triangle$ z lastnostjo $\mu(\zeta) < \mu_0$ $(\zeta \in b\triangle)$ obstajajo r, $R < r < 1$, zvezna preslikava $\psi\colon \overline{\triangle} \to X$, holomorfna v okolici 0 in zvezna preslikava $H\colon \overline{\triangle} \to \mathbb{C}^N$, holomorfna na $\triangle$, ki ustrezajo pogojem

(i) $\psi(\zeta) \in D \quad (r \le |\zeta| \le 1)$,

(ii) $|U_\lambda(\psi(\zeta)) - [U_\lambda(\varphi(\zeta)) + \mu(\zeta)]| < \epsilon \quad (\zeta \in b\triangle)$,

(iii) $U_\lambda(\psi(t\zeta)) \ge U_\lambda(\varphi(\zeta)) - \epsilon \quad (r \le t \le 1,\ \zeta \in b\triangle)$

(iv) $|\psi(\zeta) - \varphi(\zeta)| < \epsilon \quad (|\zeta| < r)$,

$|H(\zeta) - G(\zeta)| < \epsilon \quad (|\zeta| < r)$,

(v) $|H(\zeta) - \psi(\zeta)| < \tau + \epsilon \quad (\zeta \in \overline{\triangle})$,

(vi) $\psi(0) = H(0) = \varphi(0)$, $\psi'(0) = H'(0) = \varphi'(0)$.

Naša naslednja lema potisne rob zveznega diska na holomorfen način čez ničelno nivojsko množico funkcije U_λ, če je le ta ničelna množica regularna.

Lema 4.4.3. *Naj bo $0 \le \lambda_0 < \lambda_1 \le 1$, $t_0 < 0 < t_1$ in privzemimo, da je za vsak λ, $\lambda_0 \le \lambda \le \lambda_1$, in za vsak t, $t_0 \le t \le t_1$, število t regularna vrednost funkcije U_λ na $\overline{D}_{\alpha,\beta}$.*

Potem obstaja $\sigma_0 > 0$ z naslednjo lastnostjo: Recimo, da je $\varphi\colon \overline{\triangle} \to X$ zvezna preslikava, holomorfna v okolici 0, in taka, da je $|\varphi(\zeta) - G(\zeta)| \le \tau$ $(\zeta \in \overline{\triangle})$, kjer je $G\colon \overline{\triangle} \to \mathbb{C}^N$ zvezna preslikava, holomorfna na $\triangle$, in ki ustreza pogojema $G(0) = \varphi(0)$ ter $G'(0) = \varphi'(0)$. Privzemimo, da za λ, $\lambda_0 \le \lambda \le \lambda_1$, in za enostavno povezano kompaktno množico $K \subset \triangle$ velja $\varphi(\overline{\triangle \setminus K}) \subset D_{\alpha,\beta}$, $U_\lambda(\varphi(\zeta)) \in (0, t_1)$ $(\zeta \in b\triangle)$ in $U_\lambda(\varphi(\zeta)) \le 0$ $(\zeta \in bK)$.

Potem za dane $\epsilon > 0$, σ, $0 \le \sigma \le \sigma_0$ in t_2, $0 < t_2 \le t_1$ obstajajo območje $\triangle_1 \subset \triangle$ konformno ekvivalentno disku, enostavno povezana kompaktna množica K_1, $K \subset K_1 \subset \triangle_1$, zvezna preslikava $\psi\colon \overline{\triangle}_1 \to X$, *holomorfna v okolici* 0*, in zvezna preslikava* $H\colon \overline{\triangle}_1 \to \mathbb{C}^N$*, holomorfna na* $\triangle_1$*, ki ustrezajo naslednjim pogojem*

(i) $\psi(\overline{\triangle_1 \setminus K_1}) \subset D_{\alpha,\beta}$,

(ii) $U_{\lambda+\sigma}(\psi(\zeta)) \in (0, t_2) \quad (\zeta \in \overline{\triangle}_1 \setminus K_1)$,

(iii) $U_{\lambda+\sigma}(\psi(\zeta)) = 0 \quad (\zeta \in bK_1)$,

(iv) $|\psi(\zeta) - \varphi(\zeta)| < \epsilon \quad (\zeta \in K)$,
$|H(\zeta) - G(\zeta)| < \epsilon \quad (\zeta \in K)$,

(v) $|H(\zeta) - \psi(\zeta)| < \tau + \epsilon \quad (\zeta \in \overline{\triangle}_1)$,

(vi) $\psi(0) = H(0) = \varphi(0)$, $\psi'(0) = H'(0) = \varphi'(0)$,

(vii) *če je* $\zeta \in K_1 \setminus K$ *in* $U_{\lambda+\sigma}(\psi(\zeta)) \leq 0$*, potem je* $\psi(\zeta) \in D_{\alpha,\beta}$*.*

Dokaz. Opazimo, da je množica

$$\{(z, \lambda) \in \overline{D}_{\alpha,\beta} \times [\lambda_0, \lambda_1];\, U_\lambda(z) \in [t_0, t_1]\}$$

kompaktna v $D \times [0, 1]$. Z uporabo leme 4.4.2 dobimo μ_0. Definirajmo

$$m = \max\{|(v_1(z) - \beta) - (u(z) - \alpha)|;\, z \in \overline{D}\}.$$

Jasno je $m > 0$.

Naj bo $\sigma_0 = \frac{\mu_0}{m}$. Izberimo σ, λ, K, φ, G, ϵ in t_2 kot v lemi. Označimo z L množico

$$\{\zeta \in \overline{\triangle \setminus K};\, U_\lambda(\varphi(\zeta)) \leq 0\}.$$

Seveda velja $bK \subset L \subset\subset \triangle$. Zaradi $\varphi(\overline{\triangle \setminus K}) \subset D_{\alpha,\beta}$ in zaradi $(u(z) - \alpha) - (v_1(z) - \beta) < 0$ $(z \in D_{\alpha,\beta})$ in ker je $U_{\lambda+\sigma}(z) = U_\lambda(z) + \sigma((u(z) - \alpha) - (v_1(z) - \beta))$, obstajata kompaktna okolica L' od L v $\triangle \setminus K$, $L' \subset\subset \triangle$, in ϵ', $0 < \epsilon' < \epsilon$ z naslednjo lastnostjo

$$\text{če je } \zeta \in L',\ z \in X \text{ in } |\varphi(\zeta) - z| < \epsilon',\ \text{potem velja } U_{\lambda+\sigma}(z) < 0. \quad (23)$$

Izberimo tak $R < 1$, da je $L' \subset\subset R\triangle$. Naj bo $c = \inf\{U_\lambda(\varphi(\zeta));\, \zeta \in \overline{\triangle \setminus (K \cup L')}\}$. Opazimo, da velja $c > 0$. Izberimo še tako majhen

$\epsilon'' > 0$, ki ustreza naslednjim pogojem

$$\epsilon'' < \frac{1}{2}\min\{\epsilon', c\},\ \pi(\varphi(R\triangle \setminus K) + \epsilon''\mathbf{B}^N) \subset D_{\alpha,\beta}, \tag{24}$$

$$\text{če je } z \in X,\ \zeta \in \overline{\triangle \setminus (K \cup L')} \text{ in } |\varphi(\zeta) - z| < \epsilon'',$$

$$\text{potem velja } U_\lambda(z) > \frac{1}{2}c. \tag{25}$$

Z uporabo leme 4.4.2 za $\mu(\zeta) = \sigma m$ in φ, G, R, ϵ'' ter λ kot zgoraj dobimo zvezno preslikavo $\psi\colon \overline{\triangle} \to X$, holomorfno v okolici 0, in zvezno preslikavo $H\colon \overline{\triangle} \to \mathbb{C}^N$, holomorfno na $\triangle$, in r, $R < r < 1$, za katere velja

(i') $\psi(\zeta) \in D \quad (\zeta \in \triangle \setminus K)$,
(ii') $|U_\lambda(\psi(\zeta)) - [U_\lambda(\varphi(\zeta)) + \mu(\zeta)]| < \epsilon'' \quad (\zeta \in b\triangle)$,
(iii') $U_\lambda(\psi(t\zeta)) \geq U_\lambda(\varphi(\zeta)) - \epsilon'' \quad (r \leq t \leq 1,\ \zeta \in b\triangle)$,
(iv') $|\psi(\zeta) - \varphi(\zeta)| < \epsilon'' \quad (|\zeta| < r)$,
$|H(\zeta) - G(\zeta)| < \epsilon'' \quad (|\zeta| < r)$,
(v') $|H(\zeta) - \psi(\zeta)| < \tau + \epsilon'' \quad (\zeta \in \overline{\triangle})$,
(vi') $\psi(0) = H(0) = \varphi(0)$, $\psi'(0) = H'(0) = \varphi'(0)$.

Točke (iv), (v) in (vi) v lemi sledijo iz (iv'), (v') in (vi'). Sedaj bomo definirali K_1 in $\triangle_1$, ki še dodatno ustrezata pogojem (i)-(iii) in (vii).

Trdimo, da velja

$$U_\lambda(\psi(\zeta)) > \frac{1}{2}c \quad (\zeta \in \overline{\triangle \setminus (K \cup L')}). \tag{26}$$

Za ζ, $r \leq |\zeta| \leq 1$, to sledi iz (iii') in iz definicije c in ϵ''. Za $\zeta \in r\triangle \setminus (K \cup L')$ je zgornje posledica (iv') in (25).

Iz (i'), (ii') in (25) dobimo

$$U_{\lambda+\sigma}(\psi(\zeta)) \geq U_\lambda(\psi(\zeta)) - m\sigma \geq U_\lambda(\varphi(\zeta)) - m\sigma + m\sigma - \epsilon'' \geq \frac{1}{2}c\,(\zeta \in b\triangle). \tag{27}$$

Po (iv'), (24) in (23) velja še

$$U_{\lambda+\sigma}(\psi(\zeta)) < 0 \quad (\zeta \in L'). \tag{28}$$

Označimo z N množico

$$\{\zeta \in \overline{\triangle \setminus K};\, U_{\lambda+\sigma}(\psi(\zeta)) \leq 0\}.$$

Dokazali bomo, da je $\psi(\zeta) \in D_{\alpha,\beta}$ $(\zeta \in N)$. Za $\zeta \in L'$ je to posledica (iv') in (24). Izberimo $\zeta \in N \setminus L'$. Iz (26) sledi, da je $U_\lambda(\psi(\zeta)) > \frac{1}{2}c$. Po definiciji N dobimo $U_{\lambda+\sigma}(\psi(\zeta)) \leq 0$. Opazimo, da iz $U_\lambda(z) > 0$ in $U_{\lambda+\sigma}(z) \leq 0$ sledi, da je $z \in D_{\alpha,\beta}$. Zato je $\psi(\zeta) \in D_{\alpha,\beta}$.

Iz (28) sledi, da je $L' \subset N$. Po (27) dobimo $N \subset\subset \triangle$. Označimo z N_1 tisto komponento množice $N \cup K$, ki vsebuje K. Naj bo K' zaprtje relativno kompaktnih komponent komplementa od N_1 v $\triangle$. Zato je množica $K_1 = N_1 \cup K'$ enostavno povezana in $bK' \subset bN_1$. Ker je $\psi(\zeta) \in D_{\alpha,\beta}$ $(\zeta \in N)$, obstaja taka okolica U od K_1 v $\triangle$, da velja $U \cap (N \cup K) = N_1$ in da velja

$$\psi(\zeta) \in D_{\alpha,\beta}\ (\zeta \in \overline{U \setminus (K \cup K')}),\ U_{\lambda+\sigma}(\psi(\zeta)) < t_2\ (\zeta \in \overline{U \setminus (K \cup K')}).$$

Hitro vidimo, da je $U_{\lambda+\sigma}(\psi(\zeta)) > 0$ $(\zeta \in U \setminus K_1)$. Po Sardovem izreku obstaja tako majhna regularna vrednost $s > 0$ funkcije $U_{\lambda+\sigma} \circ \psi$ zožene na $U \setminus (K \cup K')$, da je množica $(U_{\lambda+\sigma} \circ \psi)^{-1}(s)$ končna unija enostavno sklenjenih krivulj. Obstaja relativno kompaktna komponenta komplementa ene od krivulj, ki vsebuje K_1. Označimo jo s $\triangle_1$. Območje $\triangle_1$ je enostavno povezano in velja $K \subset K_1 \subset\subset \triangle_1 \subset \triangle$.

Hitro vidimo, da so točke (i)-(iii) v lemi izpolnjene. Izberimo $\zeta \in K_1 \setminus K$. Če je $U_{\lambda+\sigma}(\psi(\zeta)) \leq 0$, potem je $\zeta \in N$, odkoder po že dokazanem sledi $\psi(\zeta) \in D_{\alpha,\beta}$. Zato velja (vii). S tem je lema dokazana. $\square$

Lema 4.4.4. *Naj bo $0 \leq \lambda_0 < \lambda_1 \leq \Lambda$. Privzemimo, da je 0 regularna vrednost funkcije U_λ na $\overline{D}_{\alpha,\beta}$ za vsak $\lambda \in [\lambda_0, \lambda_1]$. Naj bo $\tau < \nu$. Recimo, da je $\varphi\colon \overline{\triangle} \to X$ zvezna preslikava, holomorfna v okolici 0. Recimo, da je $L \subset \triangle$ kompaktna množica in K, $L \subset K \subset \triangle$, enostavno povezana kompaktna množica in velja $\varphi(\overline{\triangle \setminus K}) \subset D_{\alpha,\beta}$, $U_{\lambda_0}(\varphi(\zeta)) > 0$ $(\zeta \in b\triangle)$, $U_{\lambda_0}(\varphi(\zeta)) \leq 0$ $(\zeta \in bK)$ in $|\varphi(\zeta) - G(\zeta)| < \tau$ $(\zeta \in \overline{\triangle})$, kjer je $G\colon \overline{\triangle} \to \mathbb{C}^N$ zvezna preslikava, holomorfna na $\triangle$, za katero velja $G(0) = \varphi(0)$, $G'(0) = \varphi'(0)$ ter $\pi(G(\zeta)) \in D_{\alpha_0,0}$ $(\zeta \in \overline{\triangle \setminus L})$.*

Za dani $\epsilon < \tau$ obstajajo območje $\triangle' \subset \triangle$ konformno ekvivalentno $\triangle$, enostavno povezana kompaktna množica K', $K \subset K' \subset \triangle'$, zvezna preslikava $\psi\colon \overline{\triangle'} \to X$, holomorfna v okolici 0, in zvezna preslikava $H\colon \overline{\triangle'} \to \mathbb{C}^N$, holomorfna na $\triangle'$, ki ustrezajo naslednjim pogojem

(i) $\psi(\overline{\triangle' \setminus K'}) \subset D_{\alpha,\beta}$,

(ii) $U_{\lambda_1}(\psi(\zeta)) > 0 \quad (\zeta \in \overline{\triangle'} \setminus K')$,

(iii) $U_{\lambda_1}(\psi(\zeta)) = 0 \quad (\zeta \in bK')$,

(iv) $|\psi(\zeta) - \varphi(\zeta)| < \epsilon \quad (\zeta \in K)$,

(v) $|H(\zeta) - \psi(\zeta)| < \tau + \epsilon \quad (\zeta \in \overline{\triangle'})$,

(vi) $\psi(0) = H(0) = \varphi(0)$, $\psi'(0) = H'(0) = \varphi'(0)$,

(vii) $\pi(H(\zeta)) \in D_{\alpha_0,0} \quad (\zeta \in \overline{\triangle' \setminus L})$.

Dokaz. Zaradi kompaktnosti $\overline{D}_{\alpha,\beta}$ in gladkosti $U_\lambda(z)$ glede na z in λ, obstaja tak $t_0 > 0$, da je vsak t, $-2t_0 < t < 2t_0$, regularna vrednost funkcije U_λ na $\overline{D}_{\alpha,\beta}$ za vsak λ, $\lambda_0 \le \lambda \le \lambda_1$. Naj bo σ_0 konstanta iz leme 4.4.3. Vzemimo tako velik l, da je $l\sigma_0 > \lambda_1 - \lambda_0$. Naj bo $\sigma = \frac{\lambda_1 - \lambda_0}{l}$ in $\epsilon' = \frac{\epsilon}{l}$.

Definirajmo $\psi_0 = \varphi$, $H_0 = G$, $K_0 = K$ in $\triangle_0 = \triangle$. Z uporabo leme 4.4.3 l-krat, induktivno konstruiramo območja $\triangle_j$, $1 \le j \le l$, konformno ekvivalentna disku, $\triangle_l \subset \triangle_{l-1} \subset \cdots \subset \triangle_0$, enostavno povezane kompaktne podmnožice K_j v $\triangle_j$ $(1 \le j \le l)$, z lastnostjo $K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_l$, zvezne preslikave $\psi_j\colon \triangle_j \to X$, holomorfne v okolici 0, in zvezne preslikave $H_j\colon \triangle_j \to \mathbb{C}^N$, holomorfne na $\triangle_j$, za katere za vsak j, $0 \le j \le l$, velja

(i') $\psi_j(\overline{\triangle_j \setminus K_j}) \subset D_{\alpha,\beta}$,

(ii') $U_{\lambda_0 + j\sigma}(\psi_j(\zeta)) \in (0, t_0) \quad (\zeta \in b\triangle_j)$
in za $j \ge 1$: $U_{\lambda_0 + j\sigma}(\psi_j(\zeta)) \in (0, t_0) \quad (\zeta \in \overline{\triangle_j} \setminus K_j)$,

(iii') $U_{\lambda_0 + j\sigma}(\psi_j(\zeta)) \le 0 \quad (\zeta \in bK_j)$,

(iv') $|\psi_j(\zeta) - \varphi(\zeta)| < \frac{j\epsilon}{l} \quad (\zeta \in K)$,

(v') $|H_j(\zeta) - \psi_j(\zeta)| < \tau + \frac{j\epsilon}{l} \quad (\zeta \in \overline{\triangle_j})$,

(vi') $\psi_j(0) = H_j(0) = \varphi(0)$, $\psi_j'(0) = H_j'(0) = \varphi'(0)$,

(vii') $\pi(H_j(\zeta)) \in D_{\alpha_0,0} \quad (\zeta \in \overline{\triangle_j \setminus L})$.

Pa recimo, da smo za nek n, $0 \leq n \leq l-1$, že konstruirali K_j, $\triangle_j$, ψ_j in H_j za $0 \leq j \leq n$. Izberimo tako majhen $\delta' > 0$, da velja

$$\pi(H_n(\overline{\triangle_n \setminus L}) + \delta' \mathbf{B}^N) \subset D_{\alpha_0,0}.$$

Naj bo $\epsilon'' = \min\{\delta', \frac{\epsilon}{l}, \frac{\tau}{l}\}$. Sedaj z uporabo leme 4.4.3 dobimo K_{n+1}, $\triangle_{n+1}$, ψ_{n+1} in H_{n+1}, ki ustrezajo naslednjim pogojem

(i”) $\psi_{n+1}(\overline{\triangle_{n+1} \setminus K_{n+1}}) \subset D_{\alpha,\beta}$,

(ii”) $U_{\lambda_0+(n+1)\sigma}(\psi_{n+1}(\zeta)) \in (0, t_0) \quad (\zeta \in \overline{\triangle}_{n+1} \setminus K_{n+1})$,

(iii”) $U_{\lambda_0+(n+1)\sigma}(\psi_{n+1}(\zeta)) = 0 \quad (\zeta \in bK_{n+1})$,

(iv”) $|\psi_{n+1}(\zeta) - \psi_n(\zeta)| < \epsilon'' \quad (\zeta \in K_n)$,
$|H_{n+1}(\zeta) - H_n(\zeta)| < \epsilon'' \quad (\zeta \in K_n)$,

(v”) $|H_{n+1}(\zeta) - \psi_{n+1}(\zeta)| < \tau + \frac{j\epsilon}{l} + \epsilon'' \quad (\zeta \in \overline{\triangle}_{n+1})$,

(vi”) $\psi_{n+1}(0) = H_{n+1}(0) = \psi_n(0)$, $\psi'_{n+1}(0) = H'_{n+1}(0) = \psi'_n(0)$,

(vii”) če je $\zeta \in K_{n+1} \setminus K_n$ in $U_{\lambda+\sigma}(\psi_{n+1}(\zeta)) \leq 0$, potem velja $\psi_{n+1}(\zeta) \in D_{\alpha,\beta}$.

Lastnosti (i”)-(vi”) pokažejo, da veljajo točke (i’)-(vi’). Iz (iv”) in iz definicij ϵ'' in δ lahko sklepamo, da (vii’) drži za $\zeta \in K_n \setminus L$. Za $\zeta \in \overline{\triangle_{n+1} \setminus K_{n+1}}$ točka (vii’) sledi iz (i”), (v”) in (17). Izberimo $\zeta \in K_{n+1} \setminus K_n$. Če je $U_{\lambda_0+(n+1)\sigma}(\psi_{n+1}(\zeta)) \leq 0$, potem iz (vii”) dobimo $\psi_{n+1}(\zeta) \in D_{\alpha,\beta}$ in podobno kot zgoraj sledi iz (v”) in (17), da je $\pi(H_{n+1}(\zeta)) \in D_{\alpha_0,0}$. Če je $U_{\lambda_0+(n+1)\sigma}(\psi_{n+1}(\zeta)) > 0$, potem iz (v”) in (21) sklepamo, da je $u_{\lambda_0+(n+1)\sigma}(\pi(H_{n+1}(\zeta))) > 0$. Ker je $\pi(H_{n+1}(\zeta)) \in D_{\alpha_0,0}$ $(\zeta \in b\triangle_{n+1})$, dobimo z uporabo principa maksima za subharmonično funkcijo $u_1 \circ \pi \circ H_{n+1}$, da je $u_1(\pi(H_{n+1}(\zeta))) < 0$ $(\zeta \in \overline{\triangle}_{n+1})$. Zato je $u_0(\pi(H_{n+1}(\zeta)) > 0$, kar dokaže, da je $\pi(H_{n+1}(\zeta)) \in D_{\alpha_0,0}$. S tem je konstrukcija končana.

Potem $K' = K_l$, $\triangle' = \triangle_l$, $\psi = \psi_l$ in $H = H_l$ ustrezajo vsem zahtevam v lemi. S tem je lema dokazana. □

4.4.3. Potiskanje robov v primeru kritične vrednosti

Naj bosta $D_{\alpha,\beta}$ in U_λ kot prej.

Lema 4.4.5. *Naj bo* 0 *kritična vrednost funkcije* U_λ *na* $\overline{D}_{\alpha,\beta}$.

Za dani $\epsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$ z naslednjo lastnostjo: če je $\varphi\colon \overline{\triangle} \to X$ zvezna preslikava in je K enostavno povezana podmnožica v $\triangle$, za katero velja $\varphi(\overline{\triangle \setminus K}) \subset D_{\alpha,\beta}$, $U_{\lambda-\delta}(\varphi(\zeta)) > 0$ $(\zeta \in \overline{\triangle} \setminus K)$ in $U_{\lambda-\delta}(\varphi(\zeta)) = 0$ $(\zeta \in bK)$, potem obstajata območje $\triangle'$, $K \subset \triangle' \subset \triangle$, konformno ekvivalentno disku, in zvezna preslikava $\psi\colon \overline{\triangle}' \to X$, ki ustrezata naslednjim pogojem

(i) $\psi(\overline{\triangle' \setminus K}) \subset D_{\alpha,\beta}$,

(ii) $U_\lambda(\psi(\zeta)) > 0 \quad (\zeta \in b\triangle')$,

(iii) $\psi(\zeta) = \varphi(\zeta) \quad (\zeta \in K)$,

(iv) $|\psi(\zeta) - \varphi(\zeta)| < \epsilon \quad (\zeta \in \overline{\triangle}')$,

(v) $\varphi(0) = \psi(0)$, $\varphi'(0) = \psi'(0)$.

Dokaz. Najprej bomo pokazali, da je dovolj dokazati, da obstaja tak $\delta > 0$, da za vsako zvezno preslikavo $\varphi_1\colon b\triangle \to D_{\alpha,\beta}$, za katero velja $U_{\lambda-\delta}(\varphi_1(\zeta)) > 0$ $(\zeta \in b\triangle)$ in $U_\lambda(\varphi_1(\zeta)) < 0$ $(\zeta \in b\triangle)$, lahko konstruiramo homotopijo $H\colon b\triangle \times [0,1] \to D_{\alpha,\beta}$ z naslednjimi lastnostmi

$$\begin{aligned} H(\zeta,0) &= \varphi_1(\zeta) \ \ (\zeta \in b\triangle), \\ U_\lambda(H(\zeta,1)) &> 0 \ \ (\zeta \in b\triangle), \\ |H(\zeta,t) - H(\zeta,t')| &< \tfrac{\epsilon}{2} \ \ (\zeta \in b\triangle, t, t' \in [0,1]). \end{aligned}$$

Naj bosta φ in K kot v lemi. Obstaja tako območje $\triangle'$, $K \subset \triangle' \subset \triangle$, konformno ekvivalentno disku, za katero velja $U_\lambda(\varphi(\zeta)) < 0$ $(\zeta \in \overline{\triangle}' \setminus K)$. Brez škode za splošnost smemo privzeti, da je $\triangle' = \triangle$. Izberimo tako majhen $\mu > 0$, da je $K \subset (1-\mu)\triangle$ in da za $\zeta, \zeta' \in \overline{\triangle}$ z lastnostjo $|\zeta - \zeta'| < \mu$ sledi, da je $|\varphi(\zeta) - \varphi(\zeta')| < \frac{\epsilon}{2}$. Naj bo $\varphi_1(\zeta) = \varphi((1-\mu)\zeta)$ $(\zeta \in b\triangle)$. Recimo, da obstaja homotopija H kot zgoraj. Definirajmo preslikavo

$$\psi(\zeta) = \begin{cases} \varphi(\zeta), & \zeta \in \overline{(1-\mu)\triangle} \\ H(\frac{\zeta}{|\zeta|}, \frac{|\zeta|-(1-\mu)}{\mu}), & \zeta \in \overline{\triangle \setminus (1-\mu)\triangle} \end{cases} .$$

Lahko je videti, da preslikava ψ ustreza vsem pogojem v lemi.

Sedaj bomo konstruirali homotopijo H z zgoraj opisanimi lastnostmi. Naj bodo $p_1, \ldots p_n$ vse kritične točke funkcije U_λ v množici $\{z \in$

$\overline{D}_{\alpha,\beta};\, U_\lambda(z) = 0\}$. Po predpostavkah velja, da $p_j \in D_{\alpha,\beta}$ $(1 \le j \le n)$. Za potiskanje roba diska čez nivo $\{z \in \overline{D}_{\alpha,\beta};\, U_\lambda(z) = 0\}$ bomo uporabili gradientni tok θ_t funkcije U_λ podobno kot v dodatku k [FG2]. Označimo z $W^s(p_j)$ $(1 \le j \le n)$ stabilno mnogoterost toka θ_t [Shu]. Potem obstaja tak $\delta > 0$, da je za vsak j $(1 \le j \le n)$ množica

$$W^s(p_j) \cap \{z \in D_{\alpha,\beta};\, U_{\lambda-\delta}(z) > 0,\, U_\lambda(z) < 0\}$$

zaprta realna podmnogoterost od $\{z \in D_{\alpha,\beta};\, U_{\lambda-\delta}(z) > 0,\, U_\lambda(z) < 0\}$ dimenzije ne več kot 2. Če je potrebno, zmanjšamo δ, da še dodatno velja

$$\begin{aligned}
&|\theta_t(z) - \theta_{t'}(z)| < \frac{\epsilon}{12}, \quad \frac{\partial}{\partial t}(U_{\lambda-\delta} \circ \theta_t)(z) > 0 \\
&(z \in \{z \in D_{\alpha,\beta};\, U_{\lambda-\delta}(z) > 0,\, U_\lambda(z) < 0\} \setminus (\cup_{j=1}^n W^s(p_j)), \\
&U_\lambda(\theta_t(z)) < 0,\, U_\lambda(\theta_{t'}(z)) < 0).
\end{aligned}$$

Homotopijo H bomo konstruirali v treh korakih. Najprej definirajmo homotopijo $H\colon b\triangle \times [0, \frac{1}{3}] \to D_{\alpha,\beta}$ od preslikave φ_1 do gladke preslikave, ki je tako blizu φ_1, da velja

$$\begin{aligned}
&|H(\zeta, t) - H(\zeta, t')| < \tfrac{\epsilon}{6} \quad (\zeta \in b\triangle,\, t,\, t' \in [0, \tfrac{1}{3}]) \\
&H(\zeta, t) \in \{z \in D_{\alpha,\beta};\, U_{\lambda-\delta}(z) > 0,\, U_\lambda(z) < 0\} \quad (\zeta \in b\triangle,\, t \in [0, \tfrac{1}{3}]).
\end{aligned}$$

Zaradi transverzalnosti in gladkosti majhna perturbacija množice $H(\zeta, \frac{1}{3})$ $(\zeta \in b\triangle)$ ne seka $W^s(p_j)$ $(1 \le j \le n)$. Zato obstaja homotopija $H\colon b\triangle \times [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \to D_{\alpha,\beta}$ od preslikave $H(\zeta, \frac{1}{3})$ do gladke preslikave $H(\zeta, \frac{2}{3})$, za katero velja

$$\begin{aligned}
&|H(\zeta, t) - H(\zeta, t')| < \tfrac{\epsilon}{6} \quad (\zeta \in b\triangle,\, t,\, t' \in [\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}]) \\
&H(\zeta, t) \in \{z \in D_{\alpha,\beta};\, U_{\lambda-\delta}(z) > 0, U_\lambda(z) < 0\} \setminus (\cup_{j=1}^n W^s(p_j)) \\
&(\zeta \in b\triangle, t \in [\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}]).
\end{aligned}$$

Sedaj bomo izbrali tako gladko pozitivno funkcijo a na $b\triangle$, da za vsak $\zeta \in b\triangle$ velja

$$\theta_t(H(\zeta, \tfrac{2}{3})) \in D_{\alpha,\beta} \quad (0 \le t \le a(\zeta)),$$

$U_\lambda(\theta_{a(\zeta)}(H(\zeta,\frac{2}{3}))) > 0$ in $|\theta_t(z) - \theta_{t'}(z)| < \frac{\epsilon}{6}$ $(0 \le t,\, t' \le a(\zeta))$. Torej, če definiramo

$$H(\zeta,t) = \theta_{(3t-2)a(\zeta)}(H(\zeta,\tfrac{2}{3})) \quad (\zeta \in b\triangle,\, t \in [\tfrac{2}{3},1]),$$

dobimo

$$|H(\zeta,t) - H(\zeta,t')| < \tfrac{\epsilon}{6} \quad (\zeta \in b\triangle,\, t,\, t' \in [\tfrac{2}{3},1]),$$
$$H(\zeta,t) \in D_{\alpha,\beta} \quad (\zeta \in b\triangle,\, t \in [\tfrac{1}{3},\tfrac{2}{3}]),$$
$$U_\lambda(H(\zeta,1)) > 0.$$

Homotopija H ima vse zahtevane lastnosti. S tem je dokaz končan. $\square$

4.4.4. Induktivna konstrukcija

Naj bo $\varphi_0 = G_0 = F$, $\varphi_0(\zeta) = p$ $(\zeta \in \overline{\triangle})$ in $K_0 = \emptyset$. Induktivno bomo konstruirali območja $\triangle_j$, $1 \le j \le k$, konformno ekvivalentna disku, za katera velja $\triangle_k \subset \triangle_{k-1} \subset \cdots \subset \triangle_0 \subset \triangle$, enostavno povezane kompaktne množice $K_j \subset \triangle_j$, $1 \le j \le k$, z lastnostjo $K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_k$, zvezne preslikave $\varphi_j\colon \overline{\triangle}_j \to X$, holomorfne v okolici 0, $1 \le j \le k$, in zvezne preslikave $G_j\colon \overline{\triangle}_j \to \mathbb{C}^N$, holomorfne na $\triangle_j$, $1 \le j \le k$, ki za vsak j, $0 \le j \le k$, ustrezajo naslednjim pogojem

(i) $\varphi_j(\overline{\triangle}_j \setminus K_j) \subset D_{\alpha,\beta}$,
(ii) $U_{\eta_j}(\varphi_j(\zeta)) > 0 \quad (\zeta \in b\triangle_j)$,
(iii) $U_{\eta_j}(\varphi_j(\zeta)) \le 0 \quad (\zeta \in bK_j)$,
(iv) $|\varphi_j(\zeta) - \varphi_{j-1}(\zeta)| < \frac{1}{k+2}\nu \quad (\zeta \in K_{j-1})$,
(v) $|G_j(\zeta) - \varphi_j(\zeta)| < \frac{j+1}{k+2}\nu \quad (\zeta \in \overline{\triangle}_j)$,
(vi) $\varphi_j(0) = G_j(0) = \varphi_0(0)$, $\varphi_j'(0) = G_j'(0) = \varphi_0'(0)$,
(vii) $\pi(G_j(\overline{\triangle}_j \setminus K_0)) \subset D_{\alpha_0,0}$.

Ni težko preveriti, da $\triangle_0$, K_0, φ_0 in G_0 ustrezajo (i)-(vii) za $j = 0$. Vzemimo l, $0 \le l \le k-1$, in privzemimo, da smo že konstruirali $\triangle_j$, K_j, φ_j in G_j za $0 \le j \le l$. Izberimo tako majhen $\delta_1^l > 0$, $\eta_l + \delta_1^l < \eta_{l+1}$, da velja $U_{\eta_l+\delta_1^l}(\varphi_l(\zeta)) > 0$ $(\zeta \in b\triangle_l)$. Ker za $z \in D_{\alpha,\beta}$ drži

$$U_{\eta_l+\delta_1^l}(z) = U_{\eta_l}(z) + \delta_1^l((u(z)-\alpha) - (v_1(z)-\beta)) \le U_{\eta_l}(z),$$

sledi, da $U_{\eta_l+\delta_1^l}(\varphi_l(\zeta)) \leq 0$ $(\zeta \in bK_l)$. Z uporabo leme 4.4.5 za $\lambda = \eta_{l+1}$ in $\epsilon = \frac{1}{2(k+2)}\nu$ dobimo δ_2^l. Lahko privzamemo, da δ_2^l ustreza neenačbi $\eta_l + \delta_1^l < \eta_{l+1} - \delta_2^l$. Sedaj uporabimo lemo 4.4.4 za $\lambda_0 = \eta_l + \delta_1^l$ in $\lambda_1 = \eta_{l+1} - \delta_2^l$, da dobimo območje $\triangle'_{l+1} \subset \triangle_l$ konformno ekvivalentno disku, enostavno povezano kompaktno množico K_{l+1}, $K_l \subset K_{l+1} \subset \triangle'_{l+1}$, zvezno preslikavo $\psi_{l+1} \colon \overline{\triangle}'_{l+1} \to X$, holomorfno v okolici 0, in zvezno preslikavo $G_{l+1} \colon \overline{\triangle}'_{l+1} \to \mathbb{C}^N$, holomorfno na $\triangle'_{l+1}$, ki ustrezajo naslednjim pogojem

(i') $\psi_{l+1}(\overline{\triangle'_{l+1} \setminus K_{l+1}}) \subset D_{\alpha,\beta}$,
(ii') $U_{\eta_{l+1}-\delta_2^l}(\psi_{l+1}(\zeta)) > 0 \quad (\zeta \in \overline{\triangle'_{l+1} \setminus K_{l+1}})$,
(iii') $U_{\eta_{l+1}-\delta_2^l}(\psi_{l+1}(\zeta)) = 0 \quad (\zeta \in bK_{l+1})$,
(iv') $|\psi_{l+1}(\zeta) - \varphi_l(\zeta)| < \frac{1}{2(k+2)}\nu \quad (\zeta \in K_l)$,
(v') $|G_{l+1}(\zeta) - \psi_{l+1}(\zeta)| < \frac{l+1}{k+2}\nu + \frac{1}{2(k+2)}\nu \quad (\zeta \in \overline{\triangle'_{l+1}})$,
(vi') $\psi_{l+1}(0) = G_{l+1}(0) = \varphi_0(0)$, $\psi'_{l+1}(0) = G'_{l+1}(0) = \varphi'_0(0)$,
(vii') $\pi(G_{l+1}(\zeta)) \in D_{\alpha_0,0} \quad (\zeta \in \overline{\triangle'_{l+1} \setminus K_0})$.

Sedaj z uporabo leme 4.4.5 dobimo območje $\triangle_{l+1}$, $K_{l+1} \subset \triangle_{l+1} \subset \triangle'_{l+1}$, konformno ekvivalentno disku, in zvezno preslikavo $\varphi_{l+1} \colon \overline{\triangle}_{l+1} \to X$, ki imata naslednje lastnosti

(i") $\varphi_{l+1}(\overline{\triangle_{l+1} \setminus K_{l+1}}) \subset D_{\alpha,\beta}$,
(ii") $U_{\eta_{l+1}}(\varphi_{l+1}(\zeta)) > 0 \quad (\zeta \in b\triangle_{l+1})$,
(iii") $\varphi_{l+1}(\zeta) = \psi_{l+1}(\zeta) \quad (\zeta \in K_{l+1})$,
(iv") $|\varphi_{l+1}(\zeta) - \psi_{l+1}(\zeta)| < \frac{1}{2(k+2)}\nu \quad (\zeta \in \overline{\triangle}_{l+1})$.

Iz točke (iii") sledi, da je preslikava φ_{l+1} holomorfna v okolici točke 0. Točke (i), (ii) in (vii) so izpolnjene zaradi (i"), (ii") in (vii'). Za $\zeta \in bK_{l+1}$ iz točk (iii') in (i') dobimo, da je $U_{\eta_{l+1}}(\psi_{l+1}(\zeta)) \leq 0$ in odtod in iz (iii) sledi (iii"). Izberimo $\zeta \in K_l$. Iz (iv') in (iv") dobimo

$$|\varphi_{l+1}(\zeta) - \varphi_l(\zeta)| \leq |\varphi_{l+1}(\zeta) - \psi_{l+1}(\zeta)| + |\psi_{l+1}(\zeta) - \varphi_l(\zeta)| < \tfrac{1}{k+2}\nu,$$

kar dokaže (iv). Za $\zeta \in \overline{\triangle}_{l+1}$ sledi iz (v') in (iv"), da velja

$$|G_{l+1}(\zeta) - \varphi_{l+1}(\zeta)| \leq |G_{l+1}(\zeta) - \psi_{l+1}(\zeta)| + |\psi_{l+1}(\zeta) - \varphi_{l+1}(\zeta)| < \tfrac{l+2}{k+2}\nu,$$

kar dokaže (v). (vi) je posledica (vi') in (iii"). S tem je konstrukcija končana.

Kot zgoraj, iz (i), (ii) in (iii) sledi, da obstaja tak $\delta_k > 0$, da je $U_{\eta_k+\delta_k}(\varphi_k(\zeta)) > 0$ $(\zeta \in b\triangle_k)$ in $U_{\eta_k+\delta_k}(\varphi_k(\zeta)) \leq 0$ $(\zeta \in bK_k)$. Lemo 4.4.4 uporabimo še enkrat za $\lambda_0 = \eta_k + \delta_k$ in $\lambda_1 = \Lambda$. Tako dobimo območje $\triangle_{k+1}$, $\triangle_{k+1} \subset \triangle_k$, konformno ekvivalentno disku, enostavno povezano kompaktno množico K_{k+1}, $K_k \subset K_{k+1} \subset \triangle_{k+1}$, zvezno preslikavo $\varphi_{k+1}\colon \overline{\triangle}_{k+1} \to X$, holomorfno v okolici 0, in zvezno preslikavo $G_{k+1}\colon \overline{\triangle}_{k+1} \to \mathbb{C}^N$, holomorfno na $\triangle_{k+1}$, ki imajo naslednje lastnosti

(i"') $\varphi_{k+1}(\overline{\triangle_{k+1} \setminus K_{k+1}}) \subset D_{\alpha,\beta}$,

(ii"') $U_\Lambda(\varphi_{k+1}(\zeta)) > 0 \quad (\zeta \in \overline{\triangle_{k+1}} \setminus K_{k+1})$,

(iii"') $U_\Lambda(\varphi_{k+1}(\zeta)) = 0 \quad (\zeta \in bK_{k+1})$,

(iv"') $|\varphi_{k+1}(\zeta) - \varphi_k(\zeta)| < \frac{1}{2(k+2)}\nu \quad (\zeta \in K_k)$,

(v"') $|G_{k+1}(\zeta) - \varphi_{k+1}(\zeta)| < \nu \quad (\zeta \in \overline{\triangle_{k+1}})$,

(vi"') $\varphi_{k+1}(0) = G_{k+1}(0) = \varphi_0(0)$, $\varphi'_{k+1}(0) = G'_{k+1}(0) = \varphi'_0(0)$,

(vii"') $\pi(G_{k+1}(\zeta)) \in D_{\alpha_0,0} \quad (\zeta \in \overline{\triangle_{k+1} \setminus K_0})$.

Iz (ii"'), (v"') in (22) dobimo $u(\pi(G_{k+1}(\zeta))) > 0$ $(\zeta \in b\triangle_{k+1})$. Izberimo $\zeta \in K_0$. Iz (iv), (iv"') in (v"') sledi, da velja

$$
\begin{aligned}
& |G_{k+1}(\zeta) - F(\zeta)| \leq \\
\leq \quad & |G_{k+1}(\zeta) - \varphi_{k+1}(\zeta)| + |\varphi_{k+1}(\zeta) - \varphi_k(\zeta)| + \cdots + |\varphi_1(\zeta) - F(\zeta)| \leq \\
\leq \quad & 2\nu < \epsilon
\end{aligned} \tag{29}
$$

in sedaj (16) pokaže, da je $u(\pi(G_{k+1}(\zeta))) < 0$. Označimo s K' tisto komponento množice

$$\{\zeta \in \triangle_{k+1};\, u(\pi(G_{k+1}(\zeta))) \leq 0\},$$

ki vsebuje K_0. Zaradi principa maksima je K' enostavno povezana. Obstaja regularna vrednost $t > 0$ funkcije $u \circ \pi \circ G_{k+1}$, ki je tako blizu 0, da velja: če označimo s $\triangle'$ tisto komponento množice $(u \circ \Pi \circ G_{k+1})^{-1}(-\infty, t)$, ki vsebuje K', potem je $u(\pi(G_{k+1}(\zeta))) > 0$ $(\zeta \in \triangle' \setminus K')$. Naj bo $G = \pi \circ G_{k+1}$. Iz točke (vii"') sledi točka (I) v glavni lemi. Iz zgornjega sledi, da je izpolnjena točka (II). Za $\zeta \in K_0 \setminus K$ sledi iz (29), da je $|G_{k+1}(\zeta) - F(\zeta)| \leq 2\nu$, odkoder po (19) sledi, da velja $v(\pi(G_{k+1}(z)) > -\delta$. Za $\zeta \in \triangle' \setminus K_0$ velja po točki (vii"'), da $\pi(G_{k+1}(\zeta)) \in D_{\alpha_0,0}$, torej je $v(\pi(G_{k+1}(z)) > 0$. Odtod sledi (III). Točki (29) in (18) dokažeta (IV). Točka (V) velja zaradi (vi"'). S tem je glavna lema dokazana.

Stvarno kazalo

Literatura

[AM] S. Abhyankar, T. Moh, *Embeddings of the line in the plane*, J. Reine Angew. Math. **276** (1975), 148–166.

[Al1] H. Alexander, *On a problem of Julia*, Duke Math. J. **42** (1975), 327–332.

[Al2] H. Alexander, *Explicit imbedding of the (punctured) disc into* $\mathbb{C}^2$, Comment. Math. Helv. **52** (1977), 539–544.

[BF] G. T. Buzzard, J. E. Fornaess, *An embedding of* $\mathbb{C}$ *into* $\mathbb{C}^2$ *with hyperbolic complement*, Math. Ann. **306** (1996), 539–546.

[Chi] E. M. Chirka, *Complex analytic sets* (in English), Kluwer, Dordrecht, 1989.

[Col] M. Coltoiu, *Complete locally pluripolar sets*, J. Reine Angew. Math. **412** (1990), 108–112.

[ČF] M. Černe, F. Forstnerič, *Embedding some bordered Riemann surfaces in the affine plane*, Math. Res. Lett. **9** (2002), 683–696.

[ČG] M. Černe, J. Globevnik, *On holomorphic embeddings of planar domains into* $\mathbb{C}^2$, J. Anal. Math. (Jerus.) **81** (2000), 269–282.

[Dr1] B. Drinovec Drnovšek, *Discs in Stein manifolds containing given discrete sets*, Math. Z. **239** (2002), 683–702.

[Dr2] B. Drinovec Drnovšek, *Proper holomorphic discs avoiding closed convex sets*, Math. Z. **241** (2002), 593–596.

[FG1] F. Forstnerič, J. Globevnik, *Discs in pseudoconvex domains*, Comment. Math. Helvetici **67** (1992), 129–145.

[FG2] F. Forstnerič, J. Globevnik, *Proper holomorphic discs in* $\mathbb{C}^2$, Math. Res. Lett. **8** (2001), 257–274.

[FGR] F. Forstnerič, J. Globevnik, J.-P. Rosay, *Non-straightenable complex lines in* $\mathbb{C}^2$, Ark. Mat. **34** (1996), 97–101.

[FGS] F. Forstnerič, J. Globevnik, B. Stensones, *Embedding holomorphic discs through discrete sets*, Math. Ann. **305** (1996), 559–569.

[Gl1] J. Globevnik, *Discs in Stein manifolds*, Indiana Univ. Math. J. **49** (2000), 553–574.

[Gl2] J. Globevnik, *Relative embeddings of discs into convex domains*, Invent. Math. **98** (1989), 331 – 350.

[Gl3] J. Globevnik, *Interpolation by proper holomorphic embeddings of the disc into* $\mathbb{C}^2$, Math. Res. Lett. **9** (2002), 567–577.

[GS] J. Globevnik, B. Stensones, *Holomorphic embeddings of planar domains into* $\mathbb{C}^2$, Math. Ann. **303** (1995), 579–597.

[GP] V. Guillemin, A. Pollack, *Differential topology*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1974.

[Gun] R. C. Gunning, *Introduction to holomorphic functions of several variables*, Vol. I-III, Wadsworth & Brooks/Cole, 1990.

[GR] R. C. Gunning, H. Rossi, *Analytic functions of several complex variables*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1965.

[Hör] L. Hörmander, *An introduction to complex analysis in several variables*, Van Nostrand, Princeton, 1973.

[Jul] G. Julia, *Sur le domaine d'existence d'une fonction implicite définie par une relation entière* $G(x, y) = 0$, Bull. Soc. Math. France **54** (1926), 26–37.

[Lau] H. B. Laufer, *Imbedding annuli in* $\mathbb{C}^2$, J. Analyse Math. **26** (1973), 187–215.

[Nar] R. Narasimhan, *Imbedding of holomorphically complete complex spaces*, Am. J. Math. **82** (1960), 917–934.

[NP] N. Nikolov, P. Pflug, *Entire curves avoiding given sets in* $\mathbb{C}^N$, Preprint 2003.

[Pom] C. Pommerenke, *Univalent functions*, (Math. Lehrb., Bd. 25), Vanderhoeck and Rupprecht, Göttingen, 1975.

[Re1] R. Remmert, *Projektionen analytischer Mengen*, Math. Ann. **130** (1956), 410–441.

[Re2] R. Remmert, *Holomorphe und meromorphe Abbildungen komplexer Räume*, Math. Ann. **133** (1957), 328–370.

[RR] J.P. Rosay, W. Rudin, *Holomorphic maps from* $\mathbb{C}^N$ *to* $\mathbb{C}^N$, Trans. Amer. Math. Soc. **310** (1988), 47–86.

[Rud] W. Rudin, *Real and complex analysis*, Third edition, McGraw-Hill Book Co., New York, 1987.

[Shu] M. Shub, *Global stability of dynamical systems*, Translated from the French by Joseph Christy, Springer, New York-Berlin, 1987.

[Ste] J.-L. Stehle, *Plongements du disque dans* $\mathbb{C}^2$, Séminare Pierre Lelong (Analyse), Année 1970–1971, 119-130.

[Sto] E. L. Stout, *The bounded extension problem. The case of polydiscs*, J. Anal. Math. **28**, (1975) 239–254.

[Tsu] M. Tsuji, *Theory of meromorphic functions in a neighborhood of a closed set of capacity zero*, Japanese J. Math. **19** (1944), 139–154.

Izjava

Izjavljam, da je disertacija rezultat lastnega raziskovalnega dela.

Barbara Drinovec Drnovšek