

Univerza  
v Ljubljani  
Fakulteta  
*za gradbeništvo  
in geodezijo*



Doktorand  
**GAŠPER ŠTEBE**

**KOMBINIRANE KINEMATIČNE GEODETSKE  
MERITVE Z VISOKO FREKVENČNIM ZAJEMOM  
PODATKOV**

Doktorska disertacija

**COMBINED KINEMATIC GEODETIC  
MEASUREMENTS WITH HIGH FREQUENCY DATA  
ACQUISITION**

Doctoral dissertation

Ljubljana, 2022



Univerza  
v Ljubljani  
Fakulteta  
*za gradbeništvo  
in geodezijo*



**Mentor:** izr. prof. dr. Dušan Kogoj, UL FGG.

**Komisija za spremljanje doktorskega študenta:**

doc. dr. Dušan Petrovič, UL FGG,

doc. dr. Aleš Marjetič, UL FGG,

izr. prof. dr. Nedim Tunjo, Gradbena fakulteta, Univerza v Sarajevu.



## Zahvala

Tik preden gre v tisk delo, ki ga bralec iz kakršnega koli razloga držiš v rokah, meni vrejo na plano in se med seboj prelivajo podobe, dogodki, čustva in ljudje, vtisnjeni v spomin obdobja nastajanja doktorata. Obdobja rasti in sprememb.

V vsem tem času je, Dušan, tvoja vloga presegla okvire mentorstva doktorskemu študentu. Vedno čutim tvojo podporo pri vsem kar počnem. Usmerjaš najprej z zgledom nato z nasveti. Ustvaril si okolje, kjer se človek počuti sprejetega in cenjenega. Zares je privilegij s takimi občutki hoditi v službo, ki je že zdavnaj postala več kot to. Hvala za vse!

Simona, hvala, ker skrbiš, da nikomur nič ne manjka in vodiš katedro z največjo skrbnostjo. Tomaž, tebi za vso nalezljivo dobro voljo. Aleš in Klemen, občutek pri delu z vama pa je, bolj kot delu, podoben lahkotnemu petkovemu druženju s prijatelji. Neprecenljivo. Janez, Božo in Tilen, hvala tudi vam!

Zahvaljujem se tudi vsem ostalim sodelavcem na Oddelku za geodezijo. Še posebej Oskarju, za vso pomoč in nesebično deljenje svojega znanja. Probleme, zaradi katerih sam obupujem, lahkotno rešiš s kavo v roki. Jernej, ti si mi predstavil svet nizkocenovnih senzorjev in njihovo neskončno možnost uporabe, zares sem ti hvaležen!

Najlepša hvala Petru Krapežu in Janezu Podobniku. Koncept doktorske naloge je končno tudi zaživel ob testiranju v Laboratoriju za robotiko, Fakultete za elektrotehniko, Univerze v Ljubljani. Hvala vama za vse ideje in pomoč pri članku!

Hvala vsem prijateljem, s katerimi smo skupaj gulili srednješolske klopi in še vedno drug drugega ženemo naprej. Aleš, Iztok, Ambrož, Rok, Blaž in vsi ostali. Vedno je lepo imeti blizu nekoga, ki zares navija zate. Tomo, Bojan in Gašper Rak, hvala vam! Hvala tudi staršem ter Janezu in Špeli za vso podporo.

Je pa doktorat le košček sestavljanke, ki ne pomeni prav veliko, če ga ne osmisli cela slika. David, Jakob in Neli. Hvala vam za otroško radovednost, pristnost in iskrenost, ki se na poti v odraslost nekje potuhne. Saša, hvala tebi, ker vsak dan obarvaš še posebej lepo. S teboj so še ostali koščki sestavljanke na svojem mestu ☺.

*»Ta stran je namenoma prazna«*

## Popravki – errata

Stran z napako

Vrstica z napako

Namesto

Naj bo

*»Ta stran je namenoma prazna«*



## Bibliografsko-dokumentacijska stran in izvleček

<b>UDK:</b>	681.5.015.44:528.02:528.531(043)
<b>Avtor:</b>	Gašper Štebe uni. dipl. inž. geod
<b>Mentor:</b>	izr. prof. dr. Dušan Kogoj
<b>Naslov:</b>	Kombinirane kinematične geodetske meritve z visoko frekvenčnim zajemom podatkov
<b>Tip dokumenta:</b>	Doktorska disertacija
<b>Obseg in oprema:</b>	XIX, 149 str., 13 pregl., 82 sl., 196 en., 93 virov
<b>Ključne besede:</b>	kinematične meritve, robotski tahimeter, IMU, Kalmanov filter, Zero Phase filter, kinematično merjenje premikov

### Izvleček

Za kontrolo stabilnosti objektov, na katerih pričakujemo nenehne premike in deformacije, uporabljamo merske metode, ki omogočajo kontinuirano kinematično spremljanje premikov objekta glede na stabilno okolico. Sodobni robotski tahimetri (RTS) v kinematičnem načinu merjenja omogočajo določitev položaja s frekvencami v velikostnem razredu 10 Hz. V primeru oscilacij objektov z višjimi frekvencami s takim načinom ne moremo več določiti kakovostne trajektorije objekta, s katero bi lahko opisali dejansko nihanje objekta. V doktorski disertaciji analiziramo možnost izboljšanja rezultatov kinematičnih meritev robotskega tahimetra s kombiniranjem visokofrekvenčnih meritev nizkocenovnega senzorja inercialne merske enote (IMU).

Analizirali smo kakovost rezultatov, ki jih dosežemo z ločeno in samostojno uporabo obeh merskih sistemov. Pri obdelavi kinematičnih meritev RTS smo predstavili metodo Kalmanovega filtra. Pri obdelavi meritev nizkocenovnih senzorjev IMU smo razvili model in postopek kalibracije senzorja. S samostojno uporabo nizkocenovnega senzorja IMU smo brez nadaljnje obdelave rezultatov določili trajektorijo objekta, pri kateri je bilo po minuti delovanja prisotno lezenje v položaju v velikostnem razredu nekaj sto metrov.

Analizirali smo metode, s katerimi lahko v veliki meri odstranimo lezenje položaja, najboljše rezultate smo dobili z uporabo visoko prepustnega Zero Phase filtra. Kinematične meritve z RTS in meritve IMU smo združili z uporabo razširjenega modela meritev Kalmanovega filtra v kombinaciji s postopkom glajenja in z metodo združevanja trajektorij, določenih z linearno interpolacijo odstopanj med trajektorijama določenima z meritvami RTS in IMU, ki so obdelana s postopkom Zero Phase filtra. Z eksperimentalnim delom smo potrdili primernost metod in v našem primeru rezultate kinematičnega merjenja z RTS izboljšali za skoraj 50 %.

*»Ta stran je namenoma prazna«*

## **Bibliographic-documentalistic information and abstract**

<b>UDC:</b>	<b>681.5.015.44:528.02:528.531(043)</b>
<b>Author:</b>	<b>Gašper Štebe uni. dipl. inž. geod</b>
<b>Supervisor:</b>	<b>Assoc. Prof. Dušan Kogoj Ph. D.</b>
<b>Title:</b>	<b>Combined kinematic geodetic measurements with high frequency data acquisition</b>
<b>Document type:</b>	<b>Doctoral dissertation</b>
<b>Notes:</b>	<b>XIX, 149 p., 13 tab., 82 fig., 196 eq., 92 ref.</b>
<b>Keywords:</b>	<b>kinematic measurements, robotic total station, IMU, Kalman filter, Zero Phase filter, kinematic tracking measurement</b>

### **Abstract**

To control the stability of objects where continuous motion and deformation are expected, measurement techniques are used that provide continuous kinematic monitoring of the object's motion with respect to a stable environment. Modern robotic total stations (RTS) in kinematic measurement mode allow position determination with frequencies around 10Hz. In the case of oscillations of objects with higher frequencies, it is no longer possible to determine the representative trajectory of the object with these methods. In the dissertation we investigate the possibility of improving the results of kinematic measurements of a robotic total station by combining high-frequency measurements of a low-cost inertial measurement unit (IMU).

We analyzed the quality of the results obtained by using both measurement systems separately. For processing the kinematic RTS measurements, we presented the Kalman filter method. For processing the measurements from low-cost IMU sensors, we developed a model and a method for calibrating the sensor. By using a standalone low-cost IMU sensor without further processing of the results, we determined the trajectory of the object in which a drift of several hundred meters occurred after one minute of operation.

We analyzed methods that can largely eliminate the drift, and the best results were obtained with a high-pass Zero Phase filter. Kinematic RTS measurements and IMU measurements were combined using an extended Kalman filter measurement model in combination with a smoothing procedure and a method for combining trajectories obtained by linear interpolation of the differences between trajectories determined by RTS and IMU measurements processed with the Zero Phase filter. We have confirmed the suitability of the methods with experimental work, and in our case the results of the kinematic RTS measurements were improved by almost 50%.

*»Ta stran je namenoma prazna«*

# Kazalo

<b>Zahvala</b> .....	<b>I</b>
<b>Popravki – errata</b> .....	<b>III</b>
<b>Bibliografsko-dokumentacijska stran in izvleček</b> .....	<b>V</b>
<b>Bibliographic-documentalistic information and abstract</b> .....	<b>VII</b>
<b>Kazalo</b> .....	<b>IX</b>
<b>Kazalo slik</b> .....	<b>XII</b>
<b>List of figures</b> .....	<b>XV</b>
<b>Kazalo preglednic</b> .....	<b>XVIII</b>
<b>List of tables</b> .....	<b>XIX</b>
<b>1 Uvod</b> .....	<b>1</b>
1.1 Opis področja .....	2
1.2 Opredelitev teme in hipoteze doktorske disertacije .....	6
1.2.1 Utemeljitev relevantnosti .....	6
1.2.2 Namen in hipoteze doktorske disertacije.....	6
1.3 Zgradba doktorske disertacije .....	7
<b>2 Uporaba Kalmanovega filtra pri kinematičnih meritvah</b> .....	<b>9</b>
2.1 Kinematične meritve z RTS.....	9
2.2 Osnovni model Kalmanovega filtra.....	10
2.2.1 Model procesa .....	10
2.2.2 Model meritev .....	11
2.2.3 Napoved stanja sistema .....	12
2.2.4 Popravek stanja sistema.....	13
2.3 Model PVA Kalmanovega filtra .....	15
2.3.1 Model meritev .....	16
2.3.2 Model procesa .....	16
2.3.3 Inicializacija Kalmanovega filtra .....	19
<b>3 Inercialni navigacijski sistem</b> .....	<b>20</b>
3.1 Izračun navigacijskih parametrov .....	21
<b>4 Pogreški senzorjev MEMS-IMU</b> .....	<b>26</b>
4.1 Sistematični pogreški senzorja IMU .....	26

---

4.2	Slučajni pogreški senzorja IMU .....	27
4.3	Analiza šuma IMU senzorja z Allanovo varianco .....	28
<b>5</b>	<b>Kalibracija senzorja IMU .....</b>	<b>33</b>
5.1	Kalibracija magnetometra .....	33
5.2	Kalibracija pospeškometra .....	36
5.2.1	6-položajni test .....	37
5.2.2	Kalibracija senzorja IMU s pomočjo robotskega tahimetra .....	38
5.2.3	Kalibracijski model pospeškometra .....	39
5.2.3.1	Poenostavljen test kalibracije pospeškometra .....	42
5.2.3.2	Popolni test kalibracije pospeškometra .....	46
5.2.3.3	Primerjava poenostavljenega in popolnega testa kalibracije.....	48
5.3	Kalibracija žiroskopa.....	49
5.3.1	Kalibracijski model žiroskopa .....	49
5.3.1.1	Poenostavljen test kalibracije žiroskopa.....	53
5.3.1.2	Popolni test kalibracije žiroskopa.....	57
5.3.1.3	Primerjava enostavnega in popolnega testa kalibracije .....	60
5.4	Vpliv napak IMU na določitev položaja .....	61
<b>6</b>	<b>Določitev položaja s samostojno uporabo senzorja IMU .....</b>	<b>63</b>
6.1	Aproksimacija trenda lezenja položaja s polinomom višje stopnje .....	64
6.2	Odstranitev trenda lezenja položaja z Zero Phase filtrom .....	67
6.3	Komentar k rezultatom simuliranih napak IMU .....	70
<b>7</b>	<b>Eksploiment: Visokofrekvenčno sledenje trajektorije oscilirajočega objekta z nizkocenovnim senzorjem IMU .....</b>	<b>71</b>
7.1	Referenčna trajektorija .....	72
7.2	Trajektorija IMU .....	73
7.2.1	Aproksimacije trenda lezenja položaja s polinomom višje stopnje.....	75
7.2.2	Odstranitev trenda lezenja položaja z Zero Phase filtrom .....	77
7.2.3	Komentar k rezultatom uporabe metod za odstranjevanje trenda .....	81
<b>8</b>	<b>Eksploiment: Spremljanje potresne mize med simulacijo potresa s kombinacijo meritev robotskega tahimetra in nizkocenovnega senzorja IMU .....</b>	<b>83</b>
8.1	Ocena trajektorije na podlagi meritev RTS .....	86
8.2	Ocena trajektorije na podlagi meritev IMU .....	89

8.3	Ocena trajektorije na podlagi združenih meritev RTS in IMU .....	91
8.3.1	PVA Kalmanov filter z razširjenim modelom meritev .....	91
8.3.2	Glajenje rezultatov PVA Kalmanovega filtra z razširjenim modelom meritev .	94
8.3.3	Linearna interpolacija odstopanj (RTS+ZPF).....	96
<b>9</b>	<b>Eksperiment: Spremljanje nihanja stolpa na Rašici .....</b>	<b>101</b>
<b>10</b>	<b>Zaključek.....</b>	<b>108</b>
10.1	Kinematične meritve z RTS.....	108
10.2	Samostojna uporaba nizkocenovnega IMU .....	109
10.3	Eksperimentalno delo .....	110
10.4	Razprava o ciljih in hipotezah .....	112
<b>11</b>	<b>Povzetek .....</b>	<b>114</b>
11.1	Obdelava kinematičnih meritev RTS.....	115
11.2	Obdelava meritev senzorja IMU .....	115
11.3	Praktični preizkusi.....	119
11.3.1	Eksperiment: Visokofrekvenčno sledenje trajektorije oscilirajočega objekta z nizkocenovnim IMU senzorjem .....	119
11.3.2	Eksperiment: Spremljanje potresne mize med simulacijo potresa s kombinacijo meritev robotskega tahimetra in nizkocenovnega senzorja IMU.....	120
11.3.3	Eksperiment: Spremljanje nihanja stolpa na Rašici .....	122
11.4	Zaključek.....	123
<b>12</b>	<b>Summary .....</b>	<b>126</b>
12.1	Processing of RTS kinematic measurements .....	127
12.2	Processing of IMU sensor measurements .....	127
12.3	Practical tests.....	131
12.3.1	Experiment: High frequency tracking of the trajectory of an oscillating object with a low-cost sensor IMU. ....	131
12.3.2	Experiment: Earthquake tracking during an earthquake simulation using a combination of robotic total stations and low-cost IMU sensor measurements .....	132
12.3.3	Experiment: Monitoring the oscillations of the Rašica tower .....	134
12.4	Conclusion.....	135
	<b>Literatura in viri.....</b>	<b>138</b>

## Kazalo slik

Slika 2.1: Zanka Kalmanovega filtra .....	14
Slika 2.2: Blokovni diagram sistema PVA (Hwang idr., 2012).....	15
Slika 3.1: Lokalni geodetski koordinatni sistem in ECEF .....	22
Slika 3.2: Objektni koordinatni sistem .....	22
Slika 4.1: Rezultat analize šuma signala z Allanovo varianco .....	29
Slika 4.2: Rezultat analize šuma signala z Allanovo varianco za MEMS-IMU MPU-9250 .....	32
Slika 5.1: Kalibracija magnetometra MPU-9250 .....	36
Slika 5.2: Kalibracija pospeškometra pri 6-položajnem testu .....	37
Slika 5.3: Kalibracija senzorja IMU s pomočjo robotskega tahimetra .....	39
Slika 5.4: Postopek enostavnega testa kalibracije pospeškometra .....	43
Slika 5.5: Povprečni odčitki pospeškometra v 73 položajih daljnogleda .....	44
Slika 5.6: Težnostni pospešek pred kalibracijo pospeškometra po poenostavljenem testu in po njej.....	45
Slika 5.7: Meritve pospeškometra pri popolnem testu .....	46
Slika 5.8: Težnostni pospešek pred kalibracijo pospeškometra po popolnem testu in po njej .	47
Slika 5.9: Primerjava rezultatov enostavnega in popolnega postopka kalibracije .....	48
Slika 5.10: Postopek enostavnega testa kalibracije žiroskopa .....	54
Slika 5.11: Meritve žiroskopa pri enostavnem testu kalibracije.....	54
Slika 5.12: Izmerjeni koti zasuka pri enostavnem testu kalibracije žiroskopa .....	55
Slika 5.13: Izmerjeni koti zasuka z upoštevanimi kalibracijskimi parametri žiroskopa.....	56
Slika 5.14: Primerjava izmerjenih kotov z upoštevanjem in brez upoštevanja kalibracijskih parametrov .....	56
Slika 5.15: Vrednost pogreška začetne vrednosti v mirujočem intervalu med rotacijami .....	57
Slika 5.16: Meritve žiroskopa pri popolnem testu .....	57
Slika 5.17: Izmerjeni koti zasuka pri popolnem testu.....	58
Slika 5.18: Izmerjeni koti zasuka z upoštevanimi kalibracijskimi parametri žiroskopa.....	59
Slika 5.19: Izmerjeni koti zasuka brez upoštevanja kalibracijskih parametrov in z upoštevanimi kalibracijskimi parametri .....	59
Slika 5.20: Primerjava izmerjenih kotov zasuka pri enostavnem in popolnem testu .....	60



Slika 5.21: Vpliv neodpravljenega pogreška odmika začetne vrednosti pospeškomera ( $ba = 0.003 \text{ m/s}^2$ ).....	62
Slika 5.22: Vpliv neodpravljenega pogreška odmika začetne vrednosti žiroskopa ( $bg = 0.001 \text{ rad/s}$ ).....	62
Slika 6.1: Simulirana referenčna trajektorija .....	63
Slika 6.2: Simulacija izmerjene trajektorije .....	63
Slika 6.3: Referenčna trajektorija in trajektorija z odštetim trendom določenim s aproksimacijo polinoma .....	65
Slika 6.4: Razlika med $r_{ref}$ in $r_{pol}$ .....	65
Slika 6.5: Normalizirana frekvenčna spektralna gostota .....	68
Slika 6.6: Referenčna trajektorija in trajektorija filtrirana z Zero Phase filtrom.....	69
Slika 6.7: Razlika med filtrirano in referenčno trajektorijo .....	69
Slika 7.1: Postavitev eksperimenta .....	72
Slika 7.2: Modul IMU .....	72
Slika 7.3: Robotska roka UR5e z modulom IMU.....	72
Slika 7.4: Optotrak Certus in Leica MS50 .....	72
Slika 7.5: Referenčna trajektorija izmerjena z Optotrakom .....	73
Slika 7.6: Pospešek v lokalnem navigacijskem koordinatnem sistem.....	73
Slika 7.7: Hitrost v lokalnem navigacijskem koordinatnem sistemu .....	74
Slika 7.8: Trajektorija v lokalnem navigacijskem koordinatnem sistemu .....	74
Slika 7.9: Trajektorija $r_{PF}$ .....	75
Slika 7.10: Referenčna trajektorija $r_{ref}$ in trajektorija $r_{PF}$ .....	76
Slika 7.11: Razlike med referenčno trajektorijo $r_{ref}$ in trajektorijo $r_{PF}$ .....	76
Slika 7.12: Postopek filtriranja z Zero Phase filtrom.....	77
Slika 7.13: Normalizirana frekvenčna spektralna gostota .....	78
Slika 7.14: Analiza Fouriereve transformacije pospeška v lokalnem navigacijskem koordinatnem sistemu .....	78
Slika 7.15: Filtrirana hitrost v lokalnem koordinatnem sistemu .....	79
Slika 7.16: Trajektorija objekta v lokalnem koordinatnem sistemu (izračunana na podlagi filtrirane hitrosti v lokalnem koordinatnem sistemu).....	79
Slika 7.17: Končna trajektorija objekta v lokalnem koordinatnem sistemu.....	80

Slika 7.18: Primerjava referenčne trajektorije in končne filtrirane trajektorije .....	80
Slika 7.19: Razlike med referenčno trajektorijo in končno filtrirano trajektorijo .....	81
Slika 7.20: Primerjava referenčne trajektorije, trajektorije PF in trajektorije ZPF .....	82
Slika 8.1: Potresna miza Quanser Shake Table II .....	83
Slika 8.2: Postavitev eksperimenta pri spremljanju potresne mize med simulacijo potresa ...	84
Slika 8.3: Shematičen prikaz obravnavanih trajektorij .....	85
Slika 8.4: Referenčna trajektorija potresne mize.....	85
Slika 8.5: Čas vzorčenja kinematičnih meritev Leica Nova MS50 .....	86
Slika 8.6: Trajektorije REF, RTS in $KF_{PVA}$ .....	87
Slika 8.7: Rezultat PVA Kalmanovega filtra s povečano frekvenco napovedi .....	88
Slika 8.8: Trajektorija IMU .....	90
Slika 8.9: Trajektorija ZPF .....	90
Slika 8.10: Trajektorije REF, RTS in KF .....	93
Slika 8.11: Trajektorije REF, RTS in $KF_{fb}$ .....	95
Slika 8.12: Združevanje trajektorij RTS in ZPF z linearno interpolacijo odstopanj med trajektorijama .....	96
Slika 8.13: Trajektorije REF, RTS+ZPF, RTS .....	97
Slika 8.14: Velikost cenilke kakovosti $RMSE$ za vse obravnavane trajektorije .....	98
Slika 8.15: Velikost cenilke kakovosti $SNR$ za vse obravnavane trajektorije .....	98
Slika 8.16: Velikost cenilke kakovosti $corr$ za vse obravnavane trajektorije .....	98
Slika 8.17: Rezultat združenih meritev RTS in IMU pri času vzorčenja meritev RTS 1,5 s.....	99
Slika 8.18: Rezultat združenih meritev RTS in IMU pri času vzorčenja meritev RTS 5 s.....	100
Slika 9.1: Razgledni stolp na Rašici.....	102
Slika 9.2: Leica Nova MS50 med meritvami .....	102
Slika 9.3: Modul IMU, pritrjen nad zgornjo pohodno ploščadjo stolpa na Rašici.....	102
Slika 9.4: Rezultat kinematičnih meritev RTS.....	103
Slika 9.5: Pospšek objekta v lokalnem koordinatnem sistemu.....	103
Slika 9.6: Prikaz trajektorije ZPF in trajektorije RTS .....	104
Slika 9.7: Prikaz trajektorije RTS+ZPF .....	105
Slika 9.8: Primerjava trajektorij ZPF, RTS in RTS+ZPF .....	106
Slika 9.9: Primerjava trajektorij $KF_{fb}$ , RTS+ZPF in RTS.....	107

## List of figures

<i>Figure 2.1: Kalman filter loop</i> .....	14
<i>Figure 2.2: Block diagram of PVA system (Hwang idr., 2012)</i> .....	15
<i>Figure 3.1: ECEF and Local Geodetic coordinate frame</i> .....	22
<i>Figure 3.2: The body frame of a moving platform</i> .....	22
<i>Figure 4.1: Different Noise processes on an Allan Variance Plot</i> .....	29
<i>Figure 4.2: Allan Variance Curve for MEMS-IMU MPU-9250</i> .....	32
<i>Figure 5.1: Calibration results for MPU-9250 magnetometer</i> .....	36
<i>Figure 5.2: Calibrating an accelerometer with 6-position test</i> .....	37
<i>Figure 5.3: IMU Calibration with Robotic Total Station</i> .....	39
<i>Figure 5.4: Accelerometer calibration in a simple test procedure</i> .....	43
<i>Figure 5.5: Accelerometer average readings in 73 telescope positions</i> .....	44
<i>Figure 5.6: Gravitational acceleration before and after calibration of the accelerometer after the simplified test</i> .....	45
<i>Figure 5.7: Accelerometer measurements in a complete test</i> .....	46
<i>Figure 5.8: Gravitational acceleration before and after calibration of the accelerometer after a complete test</i> .....	47
<i>Figure 5.9: Comparison of the results of a simple and complete calibration procedure</i> .....	48
<i>Figure 5.10: A simple test procedure of gyroscope calibration</i> .....	54
<i>Figure 5.11: Gyroscope measurements in a simple calibration test</i> .....	54
<i>Figure 5.12: Measured rotation angles in a simple gyroscope calibration test</i> .....	55
<i>Figure 5.13: Measured rotation angles with considered gyroscope calibration parameters</i> .....	56
<i>Figure 5.14: Comparison of measured angles with and without consideration of calibration parameters</i> .....	56
<i>Figure 5.15: Bias offset in the stationary interval between rotations</i> .....	57
<i>Figure 5.16: Gyroscope measurements in a complete test</i> .....	57
<i>Figure 5.17: Measured rotation angles in a complete test</i> .....	58
<i>Figure 5.18: Measured rotation angles with considered gyroscope calibration parameters</i> .....	59
<i>Figure 5.19: Measured rotation angles without considering the calibration parameters and with the calibration parameters taken into account</i> .....	59
<i>Figure 5.20: Comparison of measured rotation angles in a simple and complete test</i> .....	60
<i>Figure 5.21: Impact of uncorrected accelerometer bias error (<math>ba = 0.003 \text{ m/s}^2</math>)</i> .....	62
<i>Figure 5.22: Impact of uncorrected gyroscope bias error (<math>bg = 0.001 \text{ rad/s}</math>)</i> .....	62
<i>Figure 6.1: Simulated reference trajectory</i> .....	63
<i>Figure 6.2: Simulation of measured trajectory</i> .....	63

<i>Figure 6.3: Reference trajectory and trajectory with subtracted trend determined by polynomial approximation</i> .....	65
<i>Figure 6.4: Difference between <math>r_{ref}</math> in <math>r_{pol}</math></i> .....	65
<i>Figure 6.5: Normalized power spectral density</i> .....	68
<i>Figure 6.6: Reference trajectory and trajectory filtered by Zero Phase filter</i> .....	69
<i>Figure 6.7: Difference between filtered and reference trajectory</i> .....	69
<i>Figure 7.1: Experiment setup</i> .....	72
<i>Figure 7.2: IMU Module</i> .....	72
<i>Figure 7.3: Robotic arm UR5e with IMU module</i> .....	72
<i>Figure 7.4: Optotrak Certus and Leica MS50</i> .....	72
<i>Figure 7.5: Reference trajectory measured with Optotrak</i> .....	73
<i>Figure 7.6: Acceleration in the local navigation coordinate frame</i> .....	73
<i>Figure 7.7: Velocity in the local navigation coordinate frame</i> .....	74
<i>Figure 7.8: Trajectory in the local navigation coordinate frame</i> .....	74
<i>Figure 7.9: Trajectory <math>r_{PF}</math></i> .....	75
<i>Figure 7.10: Reference trajectory <math>r_{ref}</math> and trajectory <math>r_{PF}</math></i> .....	76
<i>Figure 7.11: Difference between reference trajectory <math>r_{ref}</math> and trajectory <math>r_{PF}</math></i> .....	76
<i>Figure 7.12: Diagram of calculation steps of filtering with the Zero Phase Filter</i> .....	77
<i>Figure 7.13: Normalized power spectral density</i> .....	78
<i>Figure 7.14: Fourier transformation analysis of the acceleration in the local navigation frame</i> .....	78
<i>Figure 7.15: Filtered velocity in the local navigation frame</i> .....	79
<i>Figure 7.16: Object trajectory in the local coordinate system (calculated based on the filtered velocity in the local coordinate system)</i> .....	79
<i>Figure 7.17: The final trajectory of the object in the local coordinate system</i> .....	80
<i>Figure 7.18: Comparison of the reference trajectory and the final filtered trajectory</i> .....	80
<i>Figure 7.19: Differences between the reference trajectory and the final filtered trajectory</i> .....	81
<i>Figure 7.20: Comparison of reference, PF and ZPF trajectories</i> .....	82
<i>Figure 8.1: Quanser Shake Table II</i> .....	83
<i>Figure 8.2: Setting up a monitoring experiment during an earthquake simulation</i> .....	84
<i>Figure 8.3: Schematic representation of the considered trajectories</i> .....	85
<i>Figure 8.4: Reference trajectory of the Shake table</i> .....	85
<i>Figure 8.5: Sampling time of the Leica Nova MS50 kinematic measurements</i> .....	86
<i>Figure 8.6: REF, RTS in <math>KF_{PVA}</math> trajectories</i> .....	87
<i>Figure 8.7: The result of a PVA Kalman filter with increased prediction frequency</i> .....	88
<i>Figure 8.8: IMU trajectory</i> .....	90
<i>Figure 8.9: ZPF trajectory</i> .....	90
<i>Figure 8.10: REF, RTS and KF trajectories</i> .....	93

<i>Figure 8.11: REF, RTS and <math>KF_{fb}</math> trajectories</i> .....	95
<i>Figure 8.12: Combining RTS and ZPF trajectories by linear interpolation of deviations between trajectories</i> .....	96
<i>Figure 8.13: REF, RTS+ZPF, RTS trajectories</i> .....	97
<i>Figure 8.14: The size of the RMSE quality estimator for all considered trajectories</i> .....	98
<i>Figure 8.15: The size of the SNR quality estimator for all considered trajectories</i> .....	98
<i>Figure 8.16: The size of the corr quality estimator for all considered trajectories</i> .....	98
<i>Figure 8.17: The result of the combined RTS and IMU measurements at the sampling time of the RTS measurements at 1.5 s</i> .....	99
<i>Figure 8.18: The result of the combined RTS and IMU measurements at the sampling time of the RTS measurements at 5 s</i> .....	100
<i>Figure 9.1: Rašica tower</i> .....	102
<i>Figure 9.2: Leica Nova MS50 during measurements</i> .....	102
<i>Figure 9.3: IMU module attached above the upper walking platform of the Rašica tower</i> .....	102
<i>Figure 9.4: The result of the RTS kinematic measurements</i> .....	103
<i>Figure 9.5: Acceleration of an object in the local coordinate system</i> .....	103
<i>Figure 9.6: ZPF trajectory and RTS trajectory</i> .....	104
<i>Figure 9.7: RTS+ZPF trajectory</i> .....	105
<i>Figure 9.8: Comparison of ZPF, RTS and RTS+ZPF trajectories</i> .....	106
<i>Figure 9.9: Comparison of <math>KF_{fb}</math>, RTS+ZPF and RTS trajectories</i> .....	107

## Kazalo preglednic

Preglednica 6.1: Vrednosti cenilk kakovosti trajektorije $r_{pol}$ .....	66
Preglednica 6.2: Vrednosti cenilk kakovosti trajektorije $r_{zpf}$ .....	69
Preglednica 7.1: Koeficienti polinomov .....	75
Preglednica 7.2: Cenilke kakovosti trajektorije $r_{PF}$ .....	77
Preglednica 7.3: Cenilke kakovosti trajektorije $r_{ZPF}$ .....	81
Preglednica 7.4: Primerjava cenilk kakovosti trajektorij $r_{PF}$ in $r_{ZPF}$ .....	82
Preglednica 8.1: Cenilke kakovosti trajektorij .....	89
Preglednica 8.2: Cenilke kakovosti trajektorije ZPF .....	91
Preglednica 8.3: Cenilke kakovosti trajektorij KF in RTS .....	93
Preglednica 8.4: Cenilke kakovosti trajektorij $KF_{fb}$ in RTS .....	95
Preglednica 8.5: Cenilke kakovosti trajektorij ZPF, RTS*, RTS, $KF_{PVA}$ , $KF_{PVA10}$ , KF, RTS+ZPF in $KF_{fb}$ .....	98
Preglednica 8.6: Cenilke kakovosti trajektorij ZPF, RTS, RTS+ZPF in $KF_{fb}$ pri povprečnem času vzorčenja kinematičnih RTS meritev 1,5 sekunde .....	100
Preglednica 8.7: Cenilke kakovosti trajektorij ZPF, RTS, RTS+ZPF in $KF_{fb}$ pri povprečnem času vzorčenja kinematičnih RTS meritev 5 sekund .....	100

## List of tables

<i>Table 6.1: rpol trajectory quality estimators</i> .....	66
<i>Table 6.2: rzpf trajectory quality estimators</i> .....	69
<i>Table 7.1: Polynomials coefficients</i> .....	75
<i>Table 7.2: Quality estimators of the rPF trajectory</i> .....	77
<i>Table 7.3: Quality estimators of the rZPF trajectory</i> .....	81
<i>Table 7.4: Comparison of the rPF and rZPF trajectory quality estimators</i> .....	82
<i>Table 8.1: Quality estimators of trajectories</i> .....	89
<i>Table 8.2: Quality estimators of ZPF trajectory</i> .....	91
<i>Table 8.3: Quality estimators of KF and RTS trajectories</i> .....	93
<i>Table 8.4: Quality estimators of <math>KF_{fb}</math> and RTS trajectories</i> .....	95
<i>Table 8.5: ZPF, RTS*, RTS, KFPVA, KFPVA10, KF, RTS+ZPF and <math>KF_{fb}</math> trajectory quality estimators</i> .....	98
<i>Table 8.6: ZPF, RTS, RTS + ZPF and <math>KF_{fb}</math> trajectory quality estimators at an average sampling time of kinematic RTS measurements at 1.5 seconds</i> .....	100
<i>Table 8.7: ZPF, RTS, RTS + ZPF and <math>KF_{fb}</math> trajectory quality estimators at an average sampling time of kinematic RTS measurements at 5 seconds</i> .....	100





## 1 Uvod

Za ugotavljanje premikov objektov uporabljamo fizikalne in geodetske metode. S fizikalnimi metodami merimo relativne spremembe na objektu. Premike lahko spremljamo zvezno in z visoko absolutno točnostjo, vendar pa nam ne podajo informacij o stanju objekta glede na njegovo okolico. Za slednje uporabljamo geodetske metode, ki nam omogočajo obravnavo zaznanih premikov glede na stabilno okolje. Izbira metode in načina spremljanja premikov je odvisna od velikosti in hitrosti pričakovanih premikov ter posledično od zahtevane natančnosti določitve premikov.

Na objektih, ki so zgrajeni na skrbno izbranem stabilnem okolju in ni predvidenih večjih premikov, stabilnost objekta kontroliramo s terminskimi izmerami z geodetskimi metodami. Pri kontroli stabilnosti objektov, pri katerih lahko pričakujemo nenadne premike in deformacije, pa uporabimo metode, ki omogočajo zvezno spremljanje v realnem času. Princip izmere temelji na kinematičnih geodetskih merjenjih, določitev statistično značilnih premikov objekta pa na posebnem načinu obdelave rezultatov kinematičnih merjenj. Pri kinematičnih merjenjih običajno nimamo nadštevlnih meritev, na podlagi katerih bi lahko ocenili natančnosti meritev in iskanih količin. V kinematičnih procesih problem razširimo na določitev časovne vrste signala, pri tem pa poskusimo z glajenjem in filtriranjem odpraviti oz. zmanjšati šum signala.

Uveljavljene geodetske metode, kot so uporaba globalnih navigacijskih satelitskih sistemov (GNSS) in tahimetrične meritve, omogočajo določitev položaja s frekvencami v velikostnem razredu 10 Hz. Objektu, ki se premika s hitrostjo nekaj m/s, lahko določimo položaj le na vsakih nekaj 10 cm. V primeru nihanja objekta z višjimi frekvencami so take meritve praktično neuporabne, saj je nemogoče določiti točno trajektorijo in s tem pravo naravo nihanja objekta.

**Problem poskušajmo rešiti s kombinacijo geodetskih meritev z meritvami senzorjev, ki omogočajo visokofrekvenčni zajem merskih podatkov.** Predpostavimo, da lahko s takim načinom gibanje objekta opišemo s trajektorijo, ki ima višjo časovno ločljivost in s tem pridobimo zanesljivejšo informacijo o točnem gibanju objekta.

## 1.1 Opis področja

Kinematično merjenje trajektorije objekta je postalo mogoče s tehnološkim razvojem geodetskega instrumentarija. Prvi motorizirani tahimetri so se pojavili v drugi polovici osemdesetih let prejšnjega stoletja. V devetdesetih letih so razvili serije tahimetrov z možnostjo samodejnega viziranja in sledenja tarče. Ob koncu devetdesetih so tahimetri omogočali sledenje in določitev položaja gibljivega objekta s frekvenco do 10 Hz (Tuno idr., 2019). Pri uporabi prvih generacij instrumentov, ki so omogočali avtomatsko viziranje in sledenje, je bilo kar nekaj omejitev. V (Gikas idr., 2006) so testirali uporabo motoriziranega tahimetra Leica TCA 1800. Pokazali so, da je z instrumentom možno zanesljivo merjenje oscilacij objektov s frekvencami nihanja, ki so nižje od 0,5 Hz. Izpostavili so vpliv časovnega zamika med meritvijo smeri in dolžine, na podlagi katerih se izračuna položaj točke. To je bil največji problem v začetku razvoja kinematičnih tahimetričnih meritev. Skokovit razvoj tehnologije v zadnjih dvajsetih letih je tahimetrom dodal nove in tehnološko veliko bolj dovršene senzorje, njihovo delovanje pa nadzira kompleksna programska oprema. Slikovna podpora, velika hitrost merjenja, ki omogoča skeniranje, izboljšana tehnologija viziranja in sledenja bistveno povečajo funkcionalnost tahimetrov. V (Ehrhart idr., 2017) so opisali karakteristike in zmogljivosti najnovejših robotiziranih tahimetrov, ki se uporabljajo za kinematično sledenje. Pri sodobnih tahimetrih časovnega zamika med merjenimi smermi in dolžinami praktično ni več, vpliv zamika na rezultat meritve je postal skoraj zanemarljiv. V (Lenda idr., 2019) so v analizi časovnega zamika za instrument Leica Nova MS50 prišli do ugotovitve, da je pri gibanju objekta s hitrostjo nekaj m/s vpliv časovnega zamika na rezultat zanemarljiv. Vpliv je sicer zaznaven, vendar srednji standardni odklon ni presegel vrednosti 0,5 mm. Zmogljivosti instrumenta Leica Nova MS60 so v (Lienhart idr., 2017) preverili na primeru visokofrekvenčnih meritev vibracij mostu. V laboratorijskih testih so z uporabo primernih ukazov GeoCOM dosegli zajem merskih vrednosti s frekvenco okoli 20 Hz. V (Lerke idr., 2021) so analizirali simulacijo kinematičnih meritev mreže več robotskih tahimetrov, ki so določali absolutni položaj in prostorsko orientacijo žerjavov in dvigal pri prelaganju tovora. V primeru izpada meritev robotskih tahimetrov zaradi prekinjenih vizur so za določitev orientacije žerjava analizirali uporabo senzorjev IMU. Kinematične meritve se uporabljajo tudi pri različnih aplikacijah, kjer je treba določiti frekvenco in amplitudo nihanja, ali pa trajektorijo objekta. S kinematičnim merjenjem dinamičnega odziva mostov, velikosti amplitude in frekvence nihanja mostu so se ukvarjali v (Psimoulis idr., 2007), (Xu idr., 2009), (Kovačič idr., 2019) in (Marendić idr., 2017). V (Omidalizarandi idr., 2019) so zasnovali sistem za izmero premikov in vibracij mostu, v katerem so poleg klasičnih kinematičnih meritev robotskega tahimetra uporabili tudi pospeškometer. V (Paraforos idr., 2015) so primerjali so uporabo metode RTK-GNSS in kinematičnega merjenja z robotskim tahimetrom Trimble SPS930. Razlike med rezultati obeh metod so bile do 15 cm. S pomočjo robotske roke so nato izvedli preizkus točnosti kinematičnega sledenja tarči in prišli do ugotovitev, da z robotskim tahimetrom dosežejo točnost določitve trajektorije objekta v velikostnem razredu 1 cm

(Paraforos idr., 2017). Na podlagi kinematičnih meritev z robotskim tahimetrom so ocenili kakovost določitve položaja avtonomnega robotskega vozila (McLoughlin idr., 2018) in natančnost določitve parametrov železniških tirnic (Sánchez idr., 2017). V (Kerekes idr., 2018) so zasnovali sistem, ki združuje meritve več robotskih tahimetrov, ki v realnem času hkrati sledijo istemu objektu. Na tak način so izboljšali kakovost in zanesljivost sledenja objekta v primeručasne prekinitve vizur enega od robotskih tahimetrov.

Kinematična geodetska merjenja nam podajo rezultate, ki vsebujejo še neodpravljen šum v meritvah in v rezultatih, ki so iz njih izvedeni. Zato je treba signal gladiti in filtrirati (Chow, 2017). Uporabo Kalmanovega filtra pri kinematičnih geodetskih meritvah opisujejo (Gamse, 2010), (Hwang idr., 2012) in (Bar-Shalom idr., 2001). Zaradi enolične določitve položaja, tj. določitev brez nadštevilnih meritev, se kakovost meritev ocenjuje in rezultate meritev gladi na podlagi modela Kalmanovega filtra. Pospešek objekta, ki ga ocenimo v postopku Kalmanovega filtriranja, v tem primeru predstavlja eno izmed neznanek v vektorju stanj. Z uporabo dodatnih senzorjev je mogoče pospešek objekta tudi izmeriti. Za to lahko uporabimo senzorje MEMS-IMU. Razvoj in delovanje sodobnih senzorjev opisuje (Soloman, 2010). Nizkocenovni senzorji MEMS-IMU zaradi omejene natančnosti in zmogljivosti sicer niso uporabni kot samostojna enota za določitev položaja, saj napake v položaju po minuti delovanja lahko že presežejo več sto metrov (Woodman, 2007). INS zagotavlja visokofrekvenčna merjenja, vendar napake s časom izredno narastejo, zunanja absolutna določitev položaja z nižjo frekvenco pa zagotavlja položaj s konstantno natančnostjo in ni dovzetna za napake INS. Zaradi tega se INS v navigacijskih aplikacijah običajno kombinira z ostalimi metodami absolutne določitve položaja v izbranem koordinatnem sistemu (GNSS, tahimetrična izmera, fotogrametrija ...). Različne osnovne metode navigacije so predstavljene v (Noureldin, Karamat in Georgy, 2013), (Farrell, 2008), (Woodman, 2007), (Shin, 2001), (Angrisano, 2010), (Groves, 2008). Meritve INS in GNSS lahko združimo s Kalmanovim filtrom na več načinov. V načinu zapete povezave INS in GNSS delujeta kot osnovna senzorja in s Kalmanovim filtrom dobimo rezultat, ki predstavlja skupno rešitev obeh senzorjev. V načinu prosto sklopljenih sistemov INS in GNSS pa dobimo ločeni rešitvi za položaj, hitrost in orientacijo senzorja, kar je opisano v (Hieu idr., 2012) in (Falco idr., 2012). Integracijo GNSS in INS s Kalmanovim filtrom izvedemo preko definiranega stanja sistema. Osnovnih devet stanj sistema so položaj, hitrost in orientacija objekta v trirazsežnem prostoru. Lahko pa upoštevamo tudi natančnosti in avtokoreliranost signala žiroskopa in pospeškomera senzorjev MEMS-IMU in uporabimo razširjen Kalmanov filter s petnajstimi stanji (Van idr., 2015). Pri tem so v (Nassar in El-Sheimy, 2006) predlagali algoritem za izboljšani model napak senzorjev INS za točnejšo navigacijo INS/GNSS. Aplikativna uporaba nizkocenovnih senzorjev je opisana v (Shin, 2001), kjer z združevanjem nizko cenovnih senzorjev INS/GNSS izboljšajo natančnost določitve položaja objekta. V (Zihajehzadeh idr., 2015) predlagajo kaskadni Kalmanov filter GNSS/IMU za določitev trajektorije v športnih aplikacijah. Postopek določitve trajektorije skoka športnikov je opisan v (Sadi in Klukas, 2013), kjer so prav tako uporabili kombinacijo nizkocenovnega MEMS-IMU in GNSS v Kalmanovem filtru s 15 stanji.

Pri nizkocenovnih senzorjih IMU so pogreški v izmerjenih vrednostih izraziti in brez primerne kalibracije niso primerni za nadaljnjo uporabo. Zaradi krajevne, časovne in temperaturne nestabilnosti kalibracijskih parametrov je priporočena kalibracija senzorja pred vsako uporabo (Cheuk idr., 2012). Kalibracijo senzorjev opisujejo (Chow, 2017), (Cheuk idr., 2012), (Madgwick, 2010a), (Renaudin, Afzal in Lachapelle, 2010) in drugi. V (Eldesoky, 2017) opisujejo izboljšanje delovanja nizkocenovnega MEMS-IMU z uporabo razširjene kalibracije senzorja. Na podlagi kalibriranega senzorja MEMS-IMU lahko določimo orientacijo senzorja v prostoru, kar podrobno opisujejo (Sabatelli idr., 2012), (Won, Melek in Golnaraghi, 2010), (Madgwick, 2010b), (Leccadito, 2013), (Abyarjoo idr., 2015), (Lee, Park in Robinovitch, 2012). Določitev orientacije senzorja v prostoru z Eulerjevimi koti lahko pripelje do singularnosti sistema (Sabatini, 2006), (Sabatelli idr., 2012) in (Wang, Zhang in Sun, 2015), zato predlagajo določitev orientacije senzorja z elementi kvaterniona (Kregar idr., 2014).

Možnosti uporabe nizkocenovnih senzorjev MEMS-IMU so velike, tako so v (Hasan idr., 2013) ocenili njihovo uporabnost za notranjo navigacijo. (Ibrahim idr., 2016) so senzorje IMU uporabili pri sledenju objektov v notranjih prostorih. V (Botero Valencia idr., 2016) so predstavili metodo za ocenjevanje trajektorije robotske platforme na ravnini, ki sledi izbrani geometrijski obliki. Šum meritev senzorja IMU so odstranili z uporabo 1D Kalmanovega filtra. V (Zhang idr., 2016) je predstavljena izboljšana ocena trajektorije in položaja objekta v prostoru z združeno uporabo dveh senzorjev IMU. (Toyozumi idr., 2016) so opisali rekonstrukcijo poti pisala, na katerem so imeli pritrjena dva senzorja IMU. V (Hu in Tao, 2013) so predstavili način izračuna velikosti nihanja ladje v realnem času. Pri tem so uporabili meritve IMU, rezultate pa so pridobili z uporabo prilagojenega Zero Phase filtra. Na tak način lahko določimo položaj nihajočega objekta v prostoru s samostojno uporabo IMU. Zero Phase filter sicer med drugim opisujejo v (Cohen Tenoudji, 2016), (Toivonen, 2004), (Mitra, 1997).

Pospeškometri MEMS so bili uporabljeni tudi v aplikacijah, kjer so merili vibracije in oscilacije različnih konstrukcij. Premik objekta so ocenili na osnovi dvojne integracije pospeška v času. Šum signala pospeškometra in sistematični pogreški po dvojni integraciji privedejo do ogromnega lezenja (angl. drift) v položaju. Rezultat ni neposredno uporaben za nadaljnjo obravnavo brez dodatnih obdelav. Uporabljajo se različni pristopi, s katerimi lahko izboljšamo rezultate. Šum pospeškometra lahko zmanjšamo že pred korakom dvojne integracije. V (Gindy idr., 2008) so za zmanjšanje napak nižjih frekvenc surovih meritev pospeškometra uporabili matematični model sistema, ki povezuje spremenljivke stanj z vhodnimi in izhodnimi parametri sistema (angl. state-space approach). V (Park idr., 2005) so za zmanjšanje nizkofrekvenčnega lezenja uporabili visoko prepustni filter, pri čemer so upoštevali ocenjeno začetno hitrost objekta. Z metodo, opisano v (Lotfi idr., 2016), so šum pospeškometra zmanjšali s postopkom glajenja, ki temelji na difuzijski enačbi, ki predstavlja parcialno diferencialno enačbo. V primeru, da meritve pospeškometra ne vsebujejo neopravljenega vpliva gravitacije in začetne napake pospeškometra, lahko z naštetimi metodami bistveno zmanjšamo napako v končnem izračunanem položaju. Te metode so primerne predvsem pri uporabi visoko

kakovostnih pospeškometerov in pri krajšem času delovanja. Pri daljšem času delovanja in uporabi nižje kakovostnih (nižje cenovnih) pospeškometerov moramo za zmanjšanje napak uporabiti druge metode.

Do sedaj našteje metode problem lezenja položaja odpravljajo z zmanjševanjem šuma in napak iz meritev pospeškometra. Z drugačnim pristopom pa bi lahko sistematično nižje-frekvenčno lezenje odpravili tudi po obeh korakih integracije pospeška iz izračunane hitrosti in položaja objekta. Lezenje hitrosti in položaja lahko aproksimiramo s polinomske funkcije, ki jo nato odštejemo od osnovnega gibanja. Izvedenke takega pristopa so opisane v (Zhu idr., 2020) in (Yang idr., 2006). Raziskovalci so v (Millor idr., 2014) razvili PB-algorem, ki temelji na aproksimaciji polinomske funkcije, interpolacije zlepkov in na valjni transformaciji. S to metodo so uspeli zmanjšati lezenje v primeru konstantnih periodičnih gibanj. Nizko-frekvenčno lezenje lahko iz osnovnega gibanja odstranimo s pomočjo različnih filtrov. Avtorji v (Gomez idr., 2018) so zasnovali filter FIR (angl. finite impulse response), ki temelji na generaliziranem problemu minimizacije s Tikhonovo regularizacijo. V (Zhu idr., 2020) so za izračun premikov, določenih na podlagi meritev pospeškometra, zasnovali metodo, ki temelji na algoritmu LFA (angl. low-frequency attenuation). Nizko frekvenčno lezenje lahko odstranimo s pomočjo visoko prepustnih filtrov, vendar se pri tem ne moremo izogniti faznemu zamiku signala, ki je večji pri višjih stopnjah filtra. Z Zero-Phase filtrom pa lahko na zaključenem signalu eliminiramo fazni zamik tudi pri višjih stopnjah filtra. Metoda Zero-Phase filtra je uporabljena v (Gou idr., 2019), kjer so merili vibracije, ki jih povzročajo eksplozije v kamnolomih. Tudi v (Matsuo idr., 2020) so fazni zamik signala pri uporabi nizko prepustnih filtrov odpravili z Zero-Phase filtrom.

Naštete metode uspešno odstranijo nižje-frekvenčno lezenje in ohranijo visoko-frekvenčno gibanje. Pri tem pa odstranimo tudi vsak dejanski odmik od začetne lege in dejansko počasno gibanje. Rešitev je lahko v sistemu, ki združuje nizko frekvenčne senzorje in visokofrekvenčne senzorje (Wu idr., 2019). Nizko frekvenčni senzorji omogočajo zaznavanje počasnega lezenja položaja, visokofrekvenčni senzorji pa omogočajo zajem oscilacij višjih frekvenc. Za izračun nihanja objekta so v (Wu idr., 2019) uporabili linearni Kalmanov filter. Raziskovalci v (Smyth idr., 2007) in (Kim idr., 2014) so za spremljanje visokofrekvenčnih premikov predlagali kombinacijo visokofrekvenčnih meritev pospeškometra in nižje frekvenčnih meritev odstopanj z zunanjim senzorjem. Meritve so združili z večstopenjskim Kalmanovim filtrom (angl. Multi-rate Kalman Filter). Lezenje položaja lahko zmanjšamo tudi s postopkom glajenja Kalmanovega filtra, ki je kombinacija filtriranja in glajenja (angl. forward-backward Kalman Filter). Postopek je opisan v (Bishop, 2006; Kim idr., 2014; Chatzi idr., 2015). Problem pri tem pristopu pa lahko nastopi, če so intervali med koraki posodobitve Kalmanovega filtra predolgi. To je še posebej problematično pri uporabi nizko-cenovnih senzorjev MEMS-IMU.

## 1.2 Opredelitev teme in hipoteze doktorske disertacije

### 1.2.1 Utemeljitev relevantnosti

Glede na dostopno literaturo do sedaj še ni bil preizkušen merilni sistem za točnejšo določitev trajektorije objekta, ki ga sestavljajo nizkocenovni senzorji IMU in robotski tahimeter. Sodobni tahimetri omogočajo zajem merskih vrednosti s frekvenco okoli 20 Hz. Pri gibajočem objektu s hitrostjo nekaj m/s to pomeni, da je oddaljenost med izmerjenima sosednjima položajema nekaj decimetrov. Za izračun položaja med izmerjenimi vrednostmi so do sedaj uporabljali različne interpolacije, aproksimacije s polinomi višje stopnje ali glajenje z uporabo Kalmanovega filtra. Vendar bi ob oscilacijah objekta z višjo frekvenco tako izgubili pravi podatek trajektoriji objekta.

Obstoječe geodetske kinematične merske postopke lahko dopolnimo z uporabo inercialnih senzorjev IMU (angl. inertial measurement unit). Senzorji IMU združujejo triosni magnetometer, žiroskop in pospeškomer in omogočajo frekvenco zajema podatkov v velikostnem razredu 1000 Hz. S tehnološkim razvojem mikro-elektromehanskih senzorjev (MEMS) se je pojavila možnost uporabe nizkocenovnih senzorjev IMU v širokem naboru aplikacij. Njihova uporaba je danes najbolj razširjena v navigacijskih aplikacijah nižje natančnosti. Nizkocenovni senzorji IMU sicer niso primerni za neposredno določitev položaja objekta v prostoru, saj se šum pospeškometra po dvojni integraciji kvadratično akumulira v izračunanem položaju objekta in povzroči napako v položaju. Ta napaka po minuti uporabe lahko preseže nekaj sto metrov. Rezultate lahko izboljšamo z uporabo filtrov. Ti do določene mere odpravijo šum v meritvah ali rezultatih, ki so pridobljeni na podlagi teh meritev. Tako lahko nizkocenovne senzorje IMU v kombinaciji z absolutno določitvijo položaja objekta v prostoru uporabimo za visokofrekvenčno določevanje trajektorije objekta z robotskimi tahimetri.

Aplikacije, kjer potrebujemo točno trajektorijo objekta, so primerne za kontrolo stabilnosti grajenih in naravnih objektov, ki so izpostavljeni nenadnim spremembam zunanjih sil. Spremljamo lahko na primer obnašanje konstrukcij, ki so izpostavljene sunkom vetra, valovanju vodne gladine, potresom, prometu, delovanju strojnih naprav idr. Točno in visokofrekvenčno določeno trajektorijo objekta potrebujemo tudi v nalogah, kjer je od točnega položaja merilnega sistema v izbranem koordinatnem sistemu odvisna kakovost končnega izdelka.

### 1.2.2 Namen in hipoteze doktorske disertacije

Glavni namen doktorske disertacije je predlagati postopek visokofrekvenčnega določevanja trajektorije objekta v prostoru, s katerim bomo razširili obstoječe uveljavljene metode

geodetskega kinematičnega merjenja. Predstavili bomo uporabnost nizkocenovnega senzorja MEMS-IMU kot nadgradnjo obstoječih geodetskih merskih postopkov.

Pri uporabi nizkocenovnih senzorjev MEMS-IMU je treba posebno pozornost nameniti kalibraciji senzorja, ki je osnova za nadaljnje pridobivanje uporabnih rezultatov. Za kalibracijo senzorja se v splošnem uporablja posebna strojna oprema, ki je temu namenjena. Mi pa bomo preizkusili, ali si pri kalibraciji senzorja IMU lahko pomagamo s sodobnim robotskim tahimetrom. Ovrednotili bomo tudi samostojno uporabo nizkocenovnega senzorja MEMS-IMU pri določitvi trajektorije nihajočega objekta. S kombinacijo nizkofrekvenčnih kinematičnih meritev robotskega tahimetra in meritev visokofrekvenčnega nizkocenovnega senzorja MEMS-IMU bomo izboljšali postopek določitve trajektorije objekta v prostoru.

V temi doktorske disertacije smo postavili tri hipoteze:

*Hipoteza 1: Kalibracijo senzorja IMU lahko uspešno izvedemo s pomočjo robotskega tahimetra.*

*Hipoteza 2: Nizkocenovne senzorje IMU lahko uporabimo za samostojno določitev položaja nihajočega objekta v prostoru.*

*Hipoteza 3: Z integracijo klasičnih postopkov kinematičnih geodetskih meritev in nizkocenovnega senzorja IMU lahko izboljšamo določitev trajektorije objekta v prostoru.*

### **1.3 Zgradba doktorske disertacije**

Doktorsko disertacijo sestavlja deset poglavij. V uvodu smo izpostavili osnovni problem in predstavili motivacijo doktorske disertacije. V opisu področja smo pregledali relevantno strokovno literaturo, ki naslavlja problematiko spremljanja položaja objektov. Predstavili smo vire, ki se nanašajo na kinematična merjenja z robotskimi tahimetri, in uporabo drugih senzorjev, ki jih lahko obravnavamo ločeno ali pa meritve vseh merilnih sistemov združimo. V nadaljevanju utemeljimo relevantnost teme in podamo hipoteze doktorske disertacije.

V drugem poglavju opišemo kinematične meritve z RTS in uporabo Kalmanovega filtra pri kinematičnih meritvah. Najprej definiramo osnovni model Kalmanovega filtra, kjer podamo splošna teoretična izhodišča modela procesa in modela meritev. Nato izpeljemo model Kalmanovega filtra z definiranim stanjem sistema PVA, ki opisuje položaj, hitrost in pospešek objekta v izbranem koordinatnem sistemu.

V tretjem poglavju opišemo inercialni navigacijski sistem (INS), ki ga sestavlja procesna enota skupaj z inercialno mersko enoto (IMU). V nadaljevanju definiramo koordinatne sisteme, ki so potrebni za opis trenutnega pospeška, hitrosti in položaja objekta in postopek izračuna vseh treh navigacijskih parametrov na podlagi meritev IMU.

V četrtem poglavju obravnavamo sistematične in slučajne pogreške oz. napake sensorja IMU in predstavimo analizo šuma sensorja IMU s postopkom Allan variance.

V petem poglavju predstavimo kalibracijo nizkocenovnega sensorja IMU, kjer ločeno obravnavamo vse tri sensorje, ki jih vsebuje IMU. Predstavljena sta model in postopek kalibracije magnetometra, pospeškomera in žiroskopa. Prikazani so rezultati kalibracije nizkocenovnega sensorja IMU MPU-9250, ki ga kasneje uporabimo pri praktičnem delu. Poleg kalibracije sensorja so predstavljeni tudi vplivi neodpravljenih napak IMU na položaja objekta, ki jih določimo na podlagi samostojnih meritev IMU.

V šestem poglavju na podlagi simuliranih meritev in napak IMU prikažemo možnosti določitve trajektorije objekta s samostojno uporabo IMU. Sprva prikažemo trajektorijo, ki jo pridobimo na podlagi določenih navigacijskih parametrov, zatem pa obravnavamo možnosti izboljšanja rezultatov z uporabo metode aproksimacije trenda lezenja položaja s polinomom višje stopnje in uporabo metode odstranitve trenda lezenja položaja z Zero Phase filtrom.

V sedmem poglavju predstavimo eksperiment, s katerim smo možnosti določitve trajektorije s samostojno uporabo sensorja IMU preizkusili na realnih podatkih, ki smo jih pridobili z meritvami v Laboratoriju za robotiko. Na podlagi gibanja objekta, ki smo ga inducirali z robotsko roko, in meritev z Optotrakom smo lahko določili točno trajektorijo objekta s prostorsko in časovno enoto, ki je predstavljala osnovo za ocenjevanje kakovosti trajektorije, izmerjene z IMU. Analizirali smo primernost metod za odstranjevanje trenda lezenja položaja objekta, ki so posledica (ne)natančnosti meritev IMU in neodpravljenih napak IMU.

Združevanje kinematičnih meritev RTS in meritev IMU opišemo v osmem poglavju. Tu smo izvedli eksperiment na potresni mizi ob simulaciji potresa, kjer smo hkrati izvajali kinematične meritve RTS in meritve IMU. Določili smo trajektorijo IMU modula ob potresu pri čemer smo najprej obravnavali meritve IMU in RTS ločeno, nato pa smo jih z različnimi metodami obravnavali združeno. Najprej smo določili trajektorijo z uporabo PVA Kalmanovega filtra z razširjenim modelom meritev, nato smo določili trajektorijo z uporabo glajenja in na koncu še z linearno interpolacijo odstopanj med ločenima trajektorijama, ki smo jih pridobili z meritvami RTS in s postopkom Zero Phase filtra. Kakovost vseh trajektorij vrednotimo na podlagi referenčne trajektorije potresne mize.

V devetem poglavju predstavimo eksperiment, kjer smo spremljali nihanje stolpa na Rašici. Tu smo meritve izvedli v realnih pogojih, stran od zavetja laboratorijskega okolja. Določitev poti nihanja stolpa smo izvedli na podlagi kinematičnih meritev RTS in meritev IMU. Pri tem smo ovrednotili primernost metod za združevanje obeh tipov meritev.

V zadnjem, desetem, poglavju zberemo vse glavne ugotovitve, do katerih smo prišli v doktorski disertaciji in ovrednotimo uspešnost zastavljenih ciljev ter pregledamo stanje postavljenih hipotez.



## 2 Uporaba Kalmanovega filtra pri kinematičnih meritvah

### 2.1 Kinematične meritve z RTS

Robotske totalne postaje (RTS) se zaradi svojih lastnosti, ki omogočajo izredno hitro in natančno merjenje dolžin in smeri, uporabljajo v širokem naboru aplikacij, kjer je potrebno kinematično sledenje objektov. Prvi motorizirani instrumenti so na trgu že od začetka devetdesetih let. Za določitev prostorskih koordinat kinematičnega objekta morajo biti meritve dolžin horizontalnih smeri, zenitnih razdalj in odčitkov na kompenzatorju instrumenta časovno sinhronizirane. Ravno časovna sinhronizacija vseh odčitkov senzorjev instrumenta je sprva predstavljala največjo omejitev pri zanesljivem določevanju položaja kinematičnega objekta, kar pa se je izboljšalo z razvojem strojne in programske opreme instrumentov. Pri novejših instrumentih (npr. Leica MS50) so napake zaradi nepopolne sinhronizacije meritev že zanemarljivo majhne (Kerekes idr., 2018), (Lenda idr., 2019). Kljub temu pa pri uporabi kinematičnega načina merjenja položaja z RTS ostaja nekaj omejitev, ki so vezane predvsem na najvišjo možno frekvenco zajema meritev in hitrost sledenja tarči. Najnovejši instrumenti s pogoni na osnovi tehnologije piezo dosegajo hitrosti vrtenja do 400 gon/s (Leica, 2015). Brez dodatnih senzorjev instrumenti pri operativnem delovanju v realnih pogojih običajno dosežejo hitrost zajema meritev okoli 10 Hz (Lienhart idr., 2017). Pri tem so mogoči tudi kratkotrajni izpadi signala, bodisi zaradi preobremenjenega sistema instrumenta, bodisi zaradi prekinjene vizure med instrumentom in prizmo reflektorja. Do ponovnega zajema meritev običajno preteče nekaj sekund (Kerekes idr., 2018). Problem zaradi izpada signala lahko rešimo na več načinov: z uporabo dodatnih senzorjev ali z uporabo več RTS, združenih v mrežo. RTS so primerno razporejeni okoli opazovanega objekta in ob prekinitvi signala enega instrumenta, nalogo določevanja položaja kinematičnega objekta prevzame drug instrument (Kerekes idr., 2018).

V primeru samostojne uporabe kinematičnih meritev RTS je trajektorija objekta določena enolično. Poleg izmerjenih točk objekta lahko v sistem dodamo še fizikalni model gibanja objekta in združimo predpostavko o gibanju objekta z meritvami položaja objekta. Fizikalni model in meritve lahko združimo s pomočjo Kalmanovega filtra. Na tak način lahko zmanjšamo šum signala, ki nastane zaradi napake v meritvah in posledično napačno določenih koordinat točk trajektorije objekta. Z ocenjenim stanjem sistema pa določimo tudi hitrost in pospešek v trenutku meritev RTS, kar lahko uporabimo za oceno položaja objekta znotraj intervala med zajemom meritev. Pri najsodobnejših geodetskih instrumentih šum v meritvah ni več glavni dejavnik pri natančnosti kinematično izmerjenih točk, saj instrumenti postajajo vse bolj zanesljivi. Omejitev ostaja pri omejeni frekvenci zajema meritev. V nadaljevanju bomo najprej opisali uporabo Kalmanovega filtra pri kinematičnih meritvah nato pa še možnost uporabe nizkocenovnih senzorjev MEMS-IMU.

Kalmanov filter torej uporabljamo za glajenje signalov, obremenjenih s šumom, in za pridobivanje napovedi ocenjenih neznank stanja sistema. S Kalmanovim filtrom lahko združimo vse vrste meritev ne glede na njihovo natančnost. Pogoj je le, da obstaja funkcijska zveza med meritvami in definiranim stanjem sistema. Opisali bomo osnovni model Kalmanovega filtra nato pa še izveden model PVA Kalmanovega filtra, ki ga bomo uporabili tudi pri združevanju meritev RTS in meritev IMU.

## 2.2 Osnovni model Kalmanovega filtra

V splošnem je Kalmanov filter algoritem, ki optimalno oceni napake stanja na podlagi meritev, ki so obremenjene s pogreški. Je inverzni algoritem, ki zagotavlja optimalno, nepristransko oceno stanja dinamičnega sistema. Prednost Kalmanovega filtra je v tem, da združuje vse vrste meritev ne glede na njihovo natančnost. Pogoj je le, da obstaja zveza med meritvami in definiranim stanjem sistema (Noureldin idr., 2013). Kalmanov filter torej združuje dva osnovna modela: model stanja in model meritev, med katerima obstaja funkcijska zveza.

### 2.2.1 Model procesa

Zvezni dinamični sistem procesa je podan z diferencialno enačbo prvega reda (Jekeli, 2001):

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}(t)\mathbf{u}(t), \quad (2.1)$$

kjer so:

$\mathbf{x}$  ... vektor stanj,

$\mathbf{F}$  ... dinamična matrika prehoda stanj,

$\mathbf{G}$  ... matrika porazdelitev procesnega šuma

$\mathbf{u}$  ... procesni beli šum.

V primeru, ko imamo opravka z meritvami, ki jih pridobivamo v časovnih intervalih, uporabimo diskretno obliko diferencialne enačbe (2.1), ki ima naslednjo rešitev (Angrisano, 2010):

$$\mathbf{x}_{k+1} = \boldsymbol{\Phi}_{k+1}\mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k, \quad (2.2)$$

kjer je  $\boldsymbol{\Phi}$  matrika diskretnega prehajanja stanj:

$$\boldsymbol{\Phi} = e^{\mathbf{F}\Delta t}. \quad (2.3)$$

Enačbo (2.3) lahko rešimo z razvojem v Taylorjevo vrsto in matriko diskretnega prehajanja stanj izračunamo kot:

$$\boldsymbol{\phi} = e^{\mathbf{F}\Delta t} = \mathbf{I} + \mathbf{F}\Delta t + \frac{1}{2!}(\mathbf{F}\Delta t)^2 + \frac{1}{3!}(\mathbf{F}\Delta t)^3 + \dots \quad (2.4)$$

Šum sistema  $\mathbf{w}_k$  je definiran kot:

$$\mathbf{w}_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \boldsymbol{\phi}(t_{k+1}, \tau) \mathbf{G}(\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau. \quad (2.5)$$

### 2.2.2 Model meritev

Z modelom meritev funkcijsko povežujemo vektor stanj z meritvami. Diskretni linearni model meritev je podan z enačbo:

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \boldsymbol{\eta}_k, \quad (2.6)$$

kjer so:

$\mathbf{z}_k$  ...vektor meritev,

$\mathbf{x}_k$  ... vektor stanj,

$\mathbf{H}_k$  ... merska matrika,

$\boldsymbol{\eta}_k$  ... šum meritev.

Algoritem v trenutku  $t_k$  na podlagi diskretnih meritev  $\mathbf{z}_k$  oceni vektor stanj  $\mathbf{x}_k$ . Matrika diskretnega prehoda stanj  $\boldsymbol{\phi}_k$  povezuje dve zaporedni stanji sistema  $\mathbf{x}_{k+1}$  in  $\mathbf{x}_k$ . Merska matrika  $\mathbf{H}_k$  definira razmerje med vektorjem stanj  $\mathbf{x}_k$  in meritvami  $\mathbf{z}_k$ .

Kalmanov filter temelji na naslednjih predpostavkah (Gamse, 2010):

- Sistema meritev in procesa lahko opišemo z linearnim modelom.
- Procesni šum  $\mathbf{w}$  in šum meritev  $\boldsymbol{\eta}$  sta neodvisna in predstavljata slučajni beli šum z normalno porazdelitvijo, kjer velja:

$$E[\mathbf{w}_k] = 0 \text{ in } E[\boldsymbol{\eta}_k] = 0, \quad (2.7)$$

$$E[\mathbf{w}_k \boldsymbol{\eta}_j^T] = 0, \quad (2.8)$$

$$E[\mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T] = \begin{cases} \mathbf{Q}_k, & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases}, \quad (2.9)$$

$$E[\boldsymbol{\eta}_k \boldsymbol{\eta}_k^T] = \begin{cases} \mathbf{R}_k, & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases}, \quad (2.10)$$

kjer sta:

$\mathbf{Q}_k$  ... kovariančna matrika sistema,

$\mathbf{R}_k$  ... kovariančna matrika meritev.

c) Vektor začetnega stanja  $\mathbf{x}_0$  ob inicializaciji sistema je nekoreliran z  $\boldsymbol{\eta}_k$  in  $\mathbf{w}_k$ :

$$E[\mathbf{x}_0 \boldsymbol{\eta}_k^T] = 0 \text{ in } E[\mathbf{x}_0 \mathbf{w}_k^T] = 0. \quad (2.11)$$

d) Srednja vrednost začetnega stanja  $\bar{\mathbf{x}}_0$  in pripadajoča kovariančna matrika  $\mathbf{P}_0$  sta znana:

$$\bar{\mathbf{x}}_0 = E[\mathbf{x}_0] \text{ in } \mathbf{P}_0 = E[(\bar{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{x}_0)(\bar{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{x}_0)^T]. \quad (2.12)$$

Kalmanov filter je sestavljen iz dveh faz: napovedi stanja in popravka stanja.

### 2.2.3 Napoved stanja sistema

Napoved stanja sistema izvedemo preden pridobimo meritve. Oceno stanja v koraku  $k$  pridobimo na podlagi prehodne matrike stanja (v koraku  $k$ ) in a-posteriori ocene stanja v prejšnjem koraku  $k - 1$ :

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \boldsymbol{\Phi}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+ \quad (2.13)$$

kjer nadpisan znak " - " pomeni napovedano (a-priori) vrednost stanja, ki jo dobimo pred mersko posodobitvijo in znak " + " pomeni popravljeno (a-posteriori) vrednost stanja, ki jo dobimo po merski posodobitvi.

Kovariančno matriko  $\mathbf{P}_k^-$  napovedanega stanja  $\hat{\mathbf{x}}_k^-$  dobimo (Faragher, 2012):

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_k^- &= E[(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-)(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-)^T] = \\ &= E[(\boldsymbol{\Phi}_k(\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^-) + \mathbf{w}_k) \cdot (\boldsymbol{\Phi}_k(\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^-) + \mathbf{w}_k)^T] = \\ &= \boldsymbol{\Phi}_k E[(\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^-)(\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^-)^T] \boldsymbol{\Phi}_k^T + \\ &\quad + \boldsymbol{\Phi}_k E[(\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^-) \mathbf{w}_k^T] + E[\mathbf{w}_k(\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^-)] \boldsymbol{\Phi}_k^T + E[\mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T] = \\ &= \boldsymbol{\Phi}_k \mathbf{P}_{k-1} \boldsymbol{\Phi}_k^T + \mathbf{Q}_k. \end{aligned} \quad (2.14)$$

## 2.2.4 Popravek stanja sistema

Popravek oz. mersko posodobitev sistema izvedemo, ko imamo na voljo zunanje meritve. Ocenjeno popravljeno (a-posteriori) stanje sistema izračunamo (Hwang idr., 2012):

$$\hat{\mathbf{x}}_k^+ = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k(\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k\hat{\mathbf{x}}_k^-), \quad (2.15)$$

kjer je  $\mathbf{K}_k$  Kalmanova matrika ojačavanja, ki jo bomo definirali v nadaljevanju. Kovariančna matrika procesa  $P_k$  je definirana:

$$\mathbf{P}_k = E[(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^+)(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^+)^T]. \quad (2.16)$$

Če enačbo (2.6) vstavimo v (2.15) in to upoštevamo v (2.16) dobimo:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_k = E[ & \left( (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-) - \mathbf{K}_k(\mathbf{H}_k\mathbf{x}_k + \boldsymbol{\eta}_k - \mathbf{H}_k\hat{\mathbf{x}}_k^-) \right) \cdot \\ & \cdot \left( (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-) - \mathbf{K}_k(\mathbf{H}_k\mathbf{x}_k + \boldsymbol{\eta}_k - \mathbf{H}_k\hat{\mathbf{x}}_k^-) \right)^T ]. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Ob upoštevanju enačbe (2.14) definiramo kovariančno matriko  $\mathbf{P}_k$  kot:

$$\mathbf{P}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k\mathbf{H}_k)\mathbf{P}_k^-(\mathbf{I} - \mathbf{K}_k\mathbf{H}_k)^T + \mathbf{K}_k\mathbf{R}_k\mathbf{K}_k^T. \quad (2.18)$$

Sedaj želimo  $\mathbf{K}_k$  definirati tako, da bo minimiziral diagonalne elemente  $\mathbf{P}_k$ , saj ti predstavljajo ocenjene variance elementov ocenjenega vektorja stanj. Želimo torej minimizirati sled matrike  $\mathbf{P}_k$ , saj to predstavlja vsoto kvadratov popravkov ocenjenih vrednosti v vektorju stanj (Hwang idr., 2012):

$$\frac{d(\text{tr}(\mathbf{P}_k))}{d\mathbf{K}_k} = -2(\mathbf{H}_k\mathbf{P}_k^-) + 2\mathbf{K}_k(\mathbf{H}_k\mathbf{P}_k^-\mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k) = 0, \quad (2.19)$$

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^-\mathbf{H}_k^T(\mathbf{H}_k\mathbf{P}_k^-\mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1}. \quad (2.20)$$

Iz enačbe (2.20) vidimo, da je  $\mathbf{K}_k$  odvisen od a-priori kovariančne matrike procesa  $\mathbf{P}_k^-$  in kovariančne matrike meritev  $\mathbf{R}_k$ . V primeru slabše natančnosti meritev (večje vrednosti  $\mathbf{R}_k$ ) in manjšega procesnega šuma (večje vrednosti  $\mathbf{P}_k^-$ ) bo vrednost  $\mathbf{K}_k$  manjša. Iz enačbe (2.15) vidimo, da imajo ob manjšem  $\mathbf{K}_k$ , meritve  $\mathbf{z}_k$  manjši vpliv na popravljeno a-posteriori stanje sistema. Če zapišemo še obratno: večje zaupanje v meritve (manjši  $\mathbf{R}_k$ ) in manjše zaupanje v proces (večji  $\mathbf{P}_k^-$ ) vodi do večje vrednosti  $\mathbf{K}_k$ , kar pomeni, da bodo imele meritve večji vpliv na določitev a-posteriori stanja sistema.

Za inicializacijo Kalmanovega filtra moramo določiti še kovariančno matriko sistema  $\mathbf{Q}_k$  (Hwang idr., 2012), (Angrisano, 2010):

$$\mathbf{Q}_k = E[\mathbf{w}_k\mathbf{w}_k^T] = \iint_{t_k}^{t_{k+1}} \boldsymbol{\phi}(t_{k+1}, \xi) \mathbf{G}(\xi) E[\mathbf{u}(\xi)\mathbf{u}^T(\eta)] \mathbf{G}^T(\eta) \boldsymbol{\phi}^T(t_{k+1}, \eta) d\xi d\eta, \quad (2.21)$$

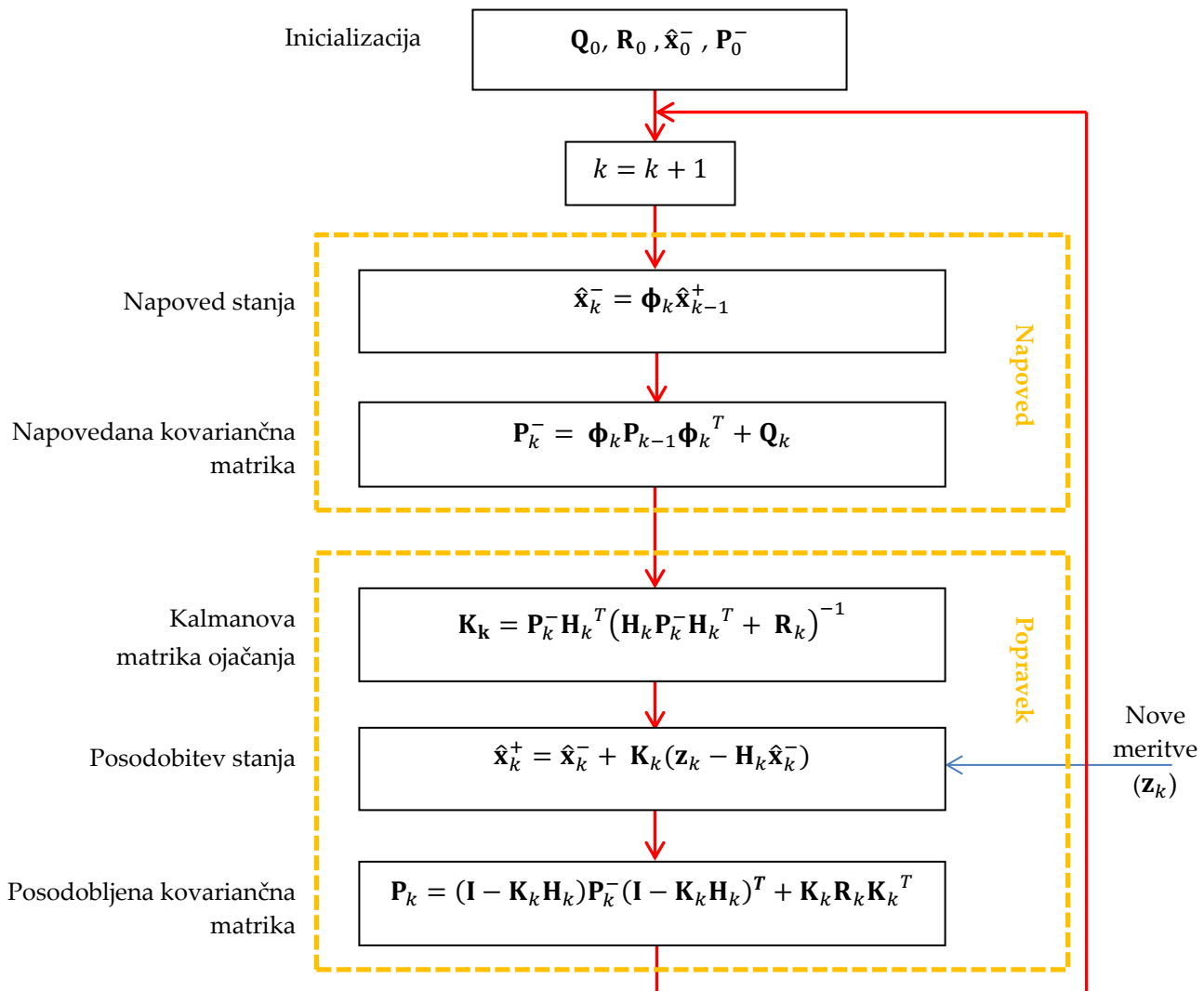
kjer je  $E[\mathbf{u}(\xi)\mathbf{u}^T(\eta)]$  Diracova delta funkcija, znana iz zveznega dinamičnega modela.

Za določitev matrike  $\mathbf{Q}_k$  lahko uporabimo tudi pristop transformacijske funkcije (angl. transfer function), kjer definiramo funkcijo  $G(s)$ , ki opisuje povezavo med vhodnimi  $f(t)$  in izhodnimi količinami  $x(t)$ :

$$E[\mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T] = \iint_0^{\Delta t} g_1(\xi) g_2(\eta) E[\mathbf{u}(\xi) \mathbf{u}^T(\eta)] d\xi d\eta. \quad (2.22)$$

Funkciji  $g_1$  in  $g_2$  določimo s pomočjo enostranske inverzne Laplaceove transformacije funkcije  $G(s)$ . Funkcija  $G(s)$  predstavlja časovno stabilen proces, funkcija  $g(t)$  pa časovno odvisen proces (Hwang idr., 2012).

Algoritem Kalmanovega filtra lahko zapišemo shematično, kar je prikazano na sliki 2.1. Orisana sta procesa napovedi in popravka stanja sistema in korak vstopa novih meritev v model meritev. Postopek Kalmanovega filtra se po začetni inicializaciji parametrov ponavlja, kar je na sliki 2.1 prikazano z rdečo zanko.



Slika 2.1: Zanka Kalmanovega filtra

Figure 2.1: Kalman filter loop

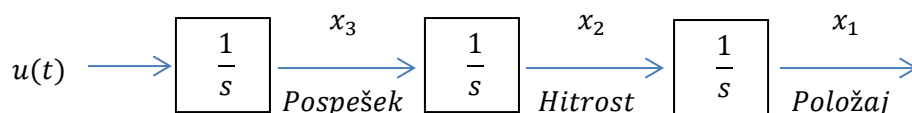
## 2.3 Model PVA Kalmanovega filtra

Pri filtriranju kinematičnih meritev uporabimo model PVA Kalmanovega filtra, ki združuje model enakomernega pospešenega gibanja s kinematičnimi meritvami gibajočega objekta. Izraz PVA se nanaša na angleški izraz za položaj, hitrost in pospešek (Position, Velocity, Acceleration) obravnavanega objekta, kar predstavlja tudi količine stanja sistema. Za rešitev problema lahko uporabimo dva pristopa oz. dve različici Kalmanovega filtra:

- razširjeni Kalmanov filter (angl. Extended Kalman Filter), kjer bi v filtru obdelali direktne meritve, ki jih izvedemo s TPS-jem ali sprejemnikom GNSS,
- linearni Kalmanov filter, kjer nastopajo indirektno meritve položaja objekta, ki so izražene s koordinatami  $(x, y, z)$ .

Ker lahko položaj objekta določimo z različnimi tehnologijami (TPS, GNSS, fotogrametrija, TDOA ...), se bomo v nalogi osredotočili na splošni model linearnega Kalmanovega filtra. Pri tem je treba sprejeti predpostavko, da je pospešek objekta med posameznimi trenutki določitve položaja enak, kar predstavlja Wienerjev proces (Bar-Shalom idr., 2001).

V Kalmanovem filtru bomo definirali devet stanj sistema: položaj, hitrost in pospešek objekta v vseh treh koordinatnih oseh. Blokovni diagram procesa sistema PVA, ki opisuje naš problem je prikazan na sliki 2.2:



Slika 2.2: Blokovni diagram sistema PVA (Hwang idr., 2012)

Figure 2.2: Block diagram of PVA system (Hwang idr., 2012)

V nadaljevanju bomo definirali model meritev in model procesa pri PVA Kalmanovem filtru ter postopek inicializacije Kalmanovega filtra.

### 2.3.1 Model meritev

Kalmanov filter optimalno oceni stanje stohastičnega linearnega dinamičnega sistema, ki ga opisuje  $u$ -razsežni vektor stanj  $\mathbf{x}$ , na podlagi  $n$  izvedenih meritev v vektorju  $\mathbf{z}$ . Vektor stanj sestavljajo položaj, hitrost in pospešek objekta v smeri vseh treh koordinatnih osi. Model opazovanj tako opisuje zvezo med vektorjem opazovanj  $\mathbf{z}$  in vektorjem neznank  $\mathbf{x}$  v trenutku  $k$ :

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \boldsymbol{\eta}_k, \quad (2.23)$$

kjer so:

$$\mathbf{x}_k = [x \ v_x \ a_x \ y \ v_y \ a_y \ z \ v_z \ a_z]^T, \quad (2.24)$$

$$\mathbf{z}_k = [x \ y \ z]^T, \quad (2.25)$$

$$\mathbf{H}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.26)$$

$x, y, z \dots$  položaj objekta v koordinatnem sistemu,

$v_x, v_y, v_z \dots$  hitrost objekta v smeri vseh treh osi,

$a_x, a_y, a_z \dots$  pospešek objekta v vseh treh oseh.

Pri tem se vektor šuma  $\boldsymbol{\eta}_k$  meritev porazdeljuje po normalni porazdelitvi. Variančno kovariančno matriko meritev  $\mathbf{R}_k$  sestavimo na podlagi natančnosti opazovanj koordinat objekta  $x, y, z$ .

### 2.3.2 Model procesa

Zvezni dinamični model sistem procesa opisuje spremembo vektorja stanj  $\mathbf{x}$  v času, kar lahko opišemo z diferencialno enačbo prvega reda:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}(t)\mathbf{u}(t). \quad (2.27)$$

Ob upoštevanju predpostavke, da se pospešek objekta znotraj intervala meritev ne spreminja ( $\dot{a} = 0$ ), lahko diferencialno enačbo (2.27) zapišemo v matrični obliki:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{v}_x \\ \dot{a}_x \\ \dot{y} \\ \dot{v}_y \\ \dot{a}_y \\ \dot{z} \\ \dot{v}_z \\ \dot{a}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ v_x \\ a_x \\ y \\ v_y \\ a_y \\ z \\ v_z \\ a_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t). \quad (2.28)$$



Diskretna oblika diferencialne enačbe ima naslednjo rešitev:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \boldsymbol{\Phi}_{k+1} \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k, \quad (2.29)$$

Kjer se vektor šuma sistema  $\mathbf{w}_k$  porazdeljuje po normalni porazdelitvi. Matriko prehoda stanj  $\boldsymbol{\Phi}$  določimo z razvojem v Taylorjevo vrsto:

$$\boldsymbol{\Phi} = e^{\mathbf{F}\Delta t} = \mathbf{I} + \mathbf{F}\Delta t + \frac{1}{2!}(\mathbf{F}\Delta t)^2 + \dots, \quad (2.30)$$

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t & \frac{\Delta t^2}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \Delta t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \Delta t & \frac{\Delta t^2}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \Delta t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \Delta t & \frac{\Delta t^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \Delta t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.31)$$

Kovariančno matriko sistema  $\mathbf{Q}_k$  določimo na podlagi (2.22), kjer je transformacijska funkcija  $G(s)$  glede na blokovni diagram (slika 2.2) definirana kot:

$$G_1(s) = G(u \rightarrow x_1) = \frac{1}{s^3}, \quad (2.32)$$

$$G_2(s) = G(u \rightarrow x_2) = \frac{1}{s^2}, \quad (2.33)$$

$$G_3(s) = G(u \rightarrow x_3) = \frac{1}{s}. \quad (2.34)$$

Na podlagi enostranske inverzne Laplaceove transformacije definiramo funkcijo  $g(t)$  (Logan, 2011):

$$g_1(t) = \frac{t^2}{2}, \quad (2.35)$$

$$g_2(t) = t, \quad (2.36)$$

$$g_3(t) = 1. \quad (2.37)$$

Kovariančno matriko sistema  $\mathbf{Q}_k$  definiramo kot:

$$\mathbf{Q}_k = E[\mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T] = \begin{bmatrix} E[x_1 x_1] & E[x_1 x_2] & E[x_1 x_3] \\ E[x_1 x_2] & E[x_2 x_2] & E[x_2 x_3] \\ E[x_1 x_3] & E[x_2 x_3] & E[x_3 x_3] \end{bmatrix}. \quad (2.38)$$

Na podlagi (2.22) lahko zapišemo elemente matrike  $\mathbf{Q}_k$ :

$$E[x_i x_j] = \iint_0^{\Delta t} g_i(\alpha) g_j(\beta) E[\mathbf{u}(\alpha) \mathbf{u}^T(\beta)] d\alpha d\beta. \quad (2.39)$$

$$E[x_1 x_1] = \iint_0^{\Delta t} g_1(\alpha) g_1(\beta) E[\mathbf{u}(\alpha) \mathbf{u}^T(\beta)] d\alpha d\beta = \iint_0^{\Delta t} \frac{\alpha^2 \beta^2}{2} W \delta(\alpha - \beta) d\alpha d\beta = W \frac{\Delta t^5}{20}, \quad (2.40)$$

$$E[x_1 x_2] = \iint_0^{\Delta t} \frac{\alpha^2}{2} \beta W \delta(\alpha - \beta) d\alpha d\beta = W \frac{\Delta t^4}{8}, \quad (2.41)$$

$$E[x_1 x_3] = \iint_0^{\Delta t} \frac{\alpha^2}{2} W \delta(\alpha - \beta) d\alpha d\beta = W \frac{\Delta t^3}{6}, \quad (2.42)$$

$$E[x_2 x_2] = \iint_0^{\Delta t} \alpha \beta W \delta(\alpha - \beta) d\alpha d\beta = W \frac{\Delta t^3}{3}, \quad (2.43)$$

$$E[x_2 x_3] = \iint_0^{\Delta t} \alpha W \delta(\alpha - \beta) d\alpha d\beta = W \frac{\Delta t^2}{2}, \quad (2.44)$$

$$E[x_3 x_3] = \iint_0^{\Delta t} W \delta(\alpha - \beta) d\alpha d\beta = W \Delta t. \quad (2.45)$$

Kovariančna matrika sistema  $\mathbf{Q}_k$  ima tako obliko:

$$\mathbf{Q}_k = \begin{bmatrix} \frac{\Delta t^5}{20} & \frac{\Delta t^4}{8} & \frac{\Delta t^3}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\Delta t^4}{8} & \frac{\Delta t^3}{3} & \frac{\Delta t^2}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\Delta t^3}{6} & \frac{\Delta t^2}{2} & \Delta t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\Delta t^5}{20} & \frac{\Delta t^4}{8} & \frac{\Delta t^3}{6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\Delta t^4}{8} & \frac{\Delta t^3}{3} & \frac{\Delta t^2}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\Delta t^3}{6} & \frac{\Delta t^2}{2} & \Delta t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\Delta t^5}{20} & \frac{\Delta t^4}{8} & \frac{\Delta t^3}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\Delta t^4}{8} & \frac{\Delta t^3}{3} & \frac{\Delta t^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\Delta t^3}{6} & \frac{\Delta t^2}{2} & \Delta t \end{bmatrix}. \quad (2.46)$$

Spremembe pospeška skozi interval vzorčenja so stopnje  $\sqrt{\mathbf{Q}_i(3,3)} = \sqrt{W\Delta t}$ . To nam služi kot smernica pri izbiri velikostnega reda procesnega šuma  $W$ . Na podlagi empiričnih testiranj avtorji (Bar-Shalom idr., 2001) predlagajo izbiro procesnega šuma v intervalu  $\frac{1}{2}\Delta a \leq \sqrt{W} \leq \Delta a$ , kjer  $\Delta a$  predstavlja največjo spremembo pospeška znotraj intervala meritev. Spremembe pospeška znotraj intervala vzorčenja naj bi bile majhne v primerjavi z dejanskimi spremembami pospeška skozi čas (Bar-Shalom idr., 2001).

### 2.3.3 Inicializacija Kalmanovega filtra

V začetnem koraku Kalmanovega filtra je treba definirati:

- začetne vrednosti kovariančne matrike sistema  $\mathbf{Q}_0$ ,
- začetne vrednosti kovariančne matrike meritev  $\mathbf{R}_0$ ,
- začetne vrednosti stanja sistema  $\hat{\mathbf{x}}_0^-$ ,
- začetne vrednosti kovariančne matrike napovedanega stanja  $\mathbf{P}_0^-$ .

Pri inicializaciji sta matriki  $\mathbf{Q}_0$  in  $\mathbf{R}_0$  že znani, začetne vrednosti stanja  $\hat{\mathbf{x}}_0$  lahko ocenimo na podlagi predhodne meritve ali pa nastavimo na 0, saj v nadaljevanju hitro konvergirajo k pravi vrednosti.  $\mathbf{P}_0^-$  nastavimo glede na to, kako točno informacijo o začetnem stanju imamo, oz. koliko zaupamo začetnim parametrom. V primeru, da je informacija o začetnem stanju nezanesljiva, moramo paziti, da so vrednosti v  $\mathbf{P}_0^-$  dovolj visoke, da začetni pogoji ne bi vplivali na kasnejše rezultate.

### 3 Inercialni navigacijski sistem

Namen doktorske disertacije je optimizirati in izboljšati rezultate kinematičnega merjenja z RTS. Do določene mere lahko samostojne kinematične meritve z RTS izboljšamo z uporabo Kalmanovega filtra. Osnovna predpostavka pri opisanem PVA Kalmanovim filtru je konstanten pospešek objekta znotraj intervala meritev. V primeru, ko merimo gibanje objekta, ki oscilira z višjo frekvenco, kot je frekvenca zajema meritev z RTS, pa ta predpostavka ne drži več. V tem primeru moramo za določitev trajektorije objekta uporabiti merilno napravo, ki omogoča zajem merskih vrednosti, s katerimi lahko opišemo gibanje objekta z višjo frekvenco. Za to lahko uporabimo inercialni navigacijski sistem (INS), ki predstavlja samostojno enoto, s katero lahko spremljamo položaj objekta v prostoru. Inercialne merske enote (IMU) predstavljajo skupek senzorjev, na podlagi katerih INS lahko določi navigacijske parametre. V osnovi so to združeni triosni pospeškomer, žiroskop in magnetometer. Osnovna meritev pospeškomera je trenutni pospešek v posameznih oseh ( $m/s^2$ ), žiroskop pa nam poda trenutno kotno hitrost zasuka posameznih osi ( $rad/s$ ). Na podlagi obdelanih signalov senzorjev lahko izračunamo položaj, trenutno hitrost in orientacijo objekta v prostoru. Sprva so bili instrumenti v INS le mehanski in so jih zaradi svoje velikosti, mase in visoke cene uporabljali v ozkem naboru aplikacij. Tehnološki napredek pa je omogočil hitro rast razvoja mikro-elektromehanskih senzorjev (MEMS), ki jih odlikuje majhna velikost in cenovna dostopnost. Danes nizkocenovne različice enote MEMS-IMU stanejo nekaj evrov in združujejo triosne pospeškomere, žiroskope in ponekod tudi triosne magnetometre. Zaradi omenjenih lastnosti imajo senzori MEMS-IMU širok krog uporabe. Kljub temu pa nizkocenovni senzori MEMS-IMU zaradi omejene natančnosti in zmogljivosti brez nadaljnje obdelave meritev niso uporabni kot samostojna enota za določitev položaja. Napake v položaju po minuti delovanja lahko že presežejo več sto metrov (Štebe idr., 2021), (Woodman, 2007). Zaradi tega se INS običajno kombinira z ostalimi metodami absolutne določitve položaja v izbranem koordinatnem sistemu (GNSS, fotogrametrija, klasična geodezija, TDOA,...). INS zagotavlja visokofrekvenčne meritve, vendar napake s časom izredno narastejo, zunanja absolutna določitev položaja z nižjo frekvenco pa zagotavlja položaj s konstantno natančnostjo in ni dovzetna za napake INS. V nadaljevanju bomo predstavili možnosti samostojne uporabe senzorjev IMU pri določitvi navigacijskih parametrov (položaj, hitrost in orientacija objekta) in uporabo IMU kot dodatni senzor pri določitvi trajektorije objekta z RTS.

### 3.1 Izračun navigacijskih parametrov

Inercialni navigacijski sistem (INS) je avtonomni sistem, ki na podlagi meritev senzorjev IMU zagotavlja informacije o navigacijskih parametrih: položaju, hitrosti in orientaciji objekta v prostoru. INS zagotavlja položaj objekta »na slepo« (angl. dead reckoning), kar pomeni, da položaj objekta v prostoru v nekem trenutku določi na podlagi znanega položaja objekta v prejšnjem trenutku.

Osnova za izračun položaja objekta v prostoru sta prva dva Newtonova zakona o gibanju:

- Prvi Newtonov zakon: Telo se giblje premo enakomerno, če je vsota vseh sil, ki deluje na telo, enaka nič.
- Drugi Newtonov zakon: Pospešek telesa je premo sorazmeren rezultanti sil, ki delujejo nanj in obratno sorazmeren masi telesa. Pospešek ima smer rezultante sil. Newton je definiral silo kot spremembo gibalne količine v času. Ob konstantni masi  $m$  lahko zapišemo:  $F = \frac{d(mv)}{dt}$ .

Hitrost ( $v$ ) in položaj ( $s$ ) objekta lahko torej izračunamo na podlagi izmerjenega pospeška:

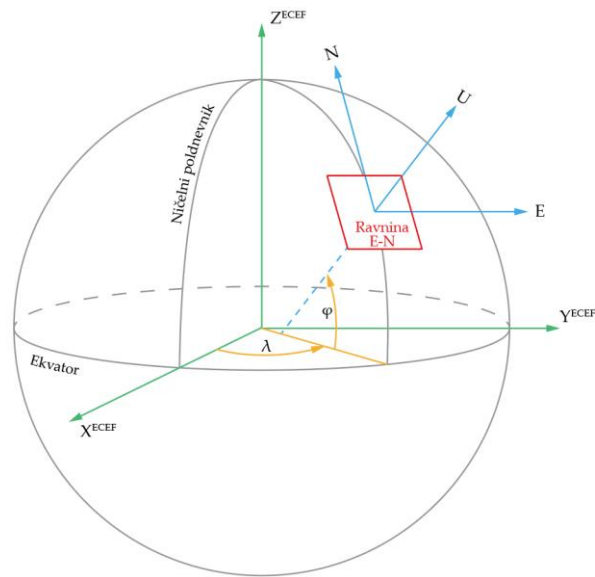
$$v(t) = \int a(t)dt + C_1, \quad (3.1)$$

$$s(t) = \iint a(t)dt^2 + C_1t + C_2. \quad (3.2)$$

V nadaljevanju bomo opisali koordinatne sisteme, ki jih bomo potrebovali za definicijo položaja, orientacije in hitrosti objekta v prostoru.

Položaj objekta definiramo v koordinatnem sistemu ECEF (angl. Earth-Centered Earth-Fixed), ki je prikazan na sliki 3.1. Izhodišče sistema ECEF leži v težišču Zemlje. Os  $Z^{ECEF}$  sovpada z rotacijsko osjo Zemlje, os  $X^{ECEF}$  leži v presečišču ravnin Ekvatorja in ničelnega poldnevnik, os  $Y^{ECEF}$  leži na ekvatorski ravnini in sistem dopolnjuje v desnosučnega.

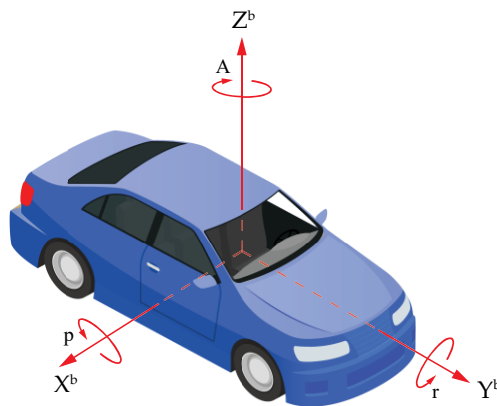
Orientacija, hitrost in položaj objekta so definirani glede na lokalni geodetski koordinatni sistem. Izhodišče lokalnega geodetskega koordinatnega sistema sovpada z izhodiščem osi senzorja IMU. Os  $N$  je usmerjena proti severu, os  $E$  proti vzhodu, os  $U$  pa dopolnjuje sistem v desnosučnega in kaže navzgor. Lokalni geodetski koordinatni sistem je skupaj z ECEF koordinatnim sistemom prikazan na sliki 3.1.



**Slika 3.1: Lokalni geodetski koordinatni sistem in ECEF**

*Figure 3.1: ECEF and Local Geodetic coordinate frame*

Meritve sensorja IMU se nanašajo na objektni koordinatni sistem. Objektni koordinatni sistem (prikazan na sliki 3.2) je definiran z izhodiščem, ki se nahaja v težišču opazovanega objekta. Os  $Y^b$  kaže v smeri osnovnega gibanja objekta, os  $X^b$  je pravokotna na os  $Y^b$  in je usmerjena v prečni smeri glede na osnovno lego objekta, os  $Z^b$  je usmerjena vertikalno glede na osi  $Y^b$  ter  $X^b$  in dopolnjuje sistem v desnosučnega.



**Slika 3.2: Objektni koordinatni sistem**

*Figure 3.2: The body frame of a moving platform*

Orientacijo objekta v prostoru opišemo s koti zasukov okoli vseh treh osi objektnega koordinatnega sistema glede na lokalni geodetski koordinatni sistem. Azimut  $A$  predstavlja zasuk osi  $Y^b$  od severa v smeri urinega kazalca v ravnini E-N, kot nagiba (angl. pitch)  $p$  je kot med osjo  $Y^b$  in ravnino E-N, kot vrtenja (angl. roll)  $r$  pa kot med osjo  $X^b$  in ravnino E-N.

Pri določitvi navigacijskih parametrov izhajamo iz meritev senzorja IMU. To so meritve žiroskopa  $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ , pospeškometra  $(f_x, f_y, f_z)$  in magnetometra  $(m_x, m_y, m_z)$ . Izračun navigacijskih parametrov lahko opišemo v naslednjih korakih:

1. Pridobitev kotnih hitrosti iz žiroskopa  $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$  in pospeškov iz pospeškometra  $(f_x, f_y, f_z)$  v objektnem koordinatnem sistemu.
2. Izračun orientacije objekta v lokalnem geodetskem koordinatnem sistemu. Izračun kotov nagiba  $p$ , vrtenja  $r$ , azimuta  $A$  ter transformacijske matrike med objektnim in lokalnim geodetskim koordinatnim sistemom  $(R_b^l)$ .
  - a) V prvem koraku ob začetku meritev lahko orientacijo objekta izračunamo po naslednjih enačbah (Farrell, 2008; Abyarjoo idr., 2015):

$$p = \operatorname{atan}\left(\frac{-f_x}{\sqrt{f_y^2 + f_z^2}}\right) \text{ in } r = \operatorname{atan}\left(\frac{f_y}{f_z}\right). \quad (3.3)$$

Teoretično bi azimut objekta  $A$  lahko izračunali na podlagi vrednosti kotnih hitrosti, ki so posledica rotacije Zemlje, vendar je pri nizkocenovnih senzorjih MEMS-IMU šum signala prevelik, da bi lahko zaznali tako počasne rotacije. Zato lahko v našem primeru uporabimo še tretji senzor – triosni magnetometer  $(m_x, m_y, m_z)$ . Projekcijo  $x$  osi magnetometra iz objektnega koordinatnega sistema v tangentno ravnino E-N opišemo z rotacijsko matriko:

$$\mathbf{R}_b^w = \mathbf{R}_x(p)^T \mathbf{R}_y(r)^T. \quad (3.4)$$

Vrednosti magnetometra v tangentni ravnini so tako predstavljene:

$$\mathbf{m}^w = \mathbf{R}_b^w \mathbf{m}. \quad (3.5)$$

Vrednost azimuta  $A$  lahko izračunamo (Renaudin idr., 2010), (Farrell, 2008):

$$A = \operatorname{atan}\left(\frac{m_y^w}{m_x^w}\right) \pm D, \quad (3.6)$$

kjer je  $D$  vrednost magnetne deklinacije.

Sedaj lahko definiramo rotacijsko matriko  $\mathbf{R}_b^l$  (Farrell, 2008):

$$\mathbf{R}_b^l = \mathbf{R}_z(A)^T \mathbf{R}_x(p)^T \mathbf{R}_y(r)^T, \quad (3.7)$$

$$\mathbf{R}_b^l = \begin{bmatrix} \cos A \cos p & \sin A \cos p & -\sin p \\ -\sin A \cos r + \cos A \sin p \sin r & \cos A \cos r + \sin A \sin p \sin r & \cos p \sin r \\ \sin A \sin r + \cos A \sin p \cos r & -\cos A \sin r + \sin A \sin p \cos r & \cos p \cos r \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

Za rotacijsko matriko  $\mathbf{R}_b^l$  velja:

$$\mathbf{R}_b^l = (\mathbf{R}_b^l)^{-1} = \mathbf{R}_b^{lT}. \quad (3.9)$$

Obratno lahko na podlagi znane rotacijske matrike  $\mathbf{R}_b^l$  izračunamo kote  $p$ ,  $r$ , in  $A$ :

$$p = \tan^{-1} \left\{ \frac{\mathbf{R}_b^{l(3,2)}}{\sqrt{[\mathbf{R}_b^{l(1,2)}]^2 + [\mathbf{R}_b^{l(2,2)}]^2}} \right\}, \quad (3.10)$$

$$A = -\tan^{-1} \left[ \frac{\mathbf{R}_b^{l(1,2)}}{\mathbf{R}_b^{l(2,2)}} \right], \quad (3.11)$$

$$r = -\tan^{-1} \left[ \frac{\mathbf{R}_b^{l(3,1)}}{\mathbf{R}_b^{l(3,3)}} \right], \quad (3.12)$$

- b) V naslednjih korakih lahko transformacijsko matriko  $\mathbf{R}_b^l$  določimo na podlagi majhnih izmerjenih vrednosti kotnih hitrosti žiroskopa (Woodman, 2007; Lee idr., 2012; Noureldin idr., 2013):

$$\mathbf{R}_{b_k}^l = \mathbf{R}_{b_{k-1}}^l \left( \mathbf{I} + \frac{\sin|\theta|}{|\theta|} \mathbf{S} - \frac{1 - \cos|\theta|}{|\theta|^2} \mathbf{S}^2 \right), \quad (3.13)$$

pri čemer je:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \Delta t, \quad (3.14)$$

$$|\theta|^2 = (\omega_{x_k}^2 + \omega_{y_k}^2 + \omega_{z_k}^2) \Delta t^2, \quad (3.15)$$

kjer je:

$\Delta t$  ... časovni razmik med zaporednima meritvama.

3. Izmerjene pospeške  $\mathbf{f}$  v objektnem koordinatnem sistemu transformiramo v lokalni geodetski koordinatni sistem z uporabo rotacijske matrike  $\mathbf{R}_b^l$ . Pospeškomer je pod stalnim vplivom gravitacijske sile  $g$ , zato moramo ta vpliv odstraniti. Tako dobimo trenutni pospešek objekta v lokalnem geodetskem koordinatnem sistemu  $\mathbf{a}^l = [a_E \ a_N \ a_U]^T$ :

$$\mathbf{a}^l = \mathbf{R}_b^l \mathbf{f} - [0, 0, -g]^l. \quad (3.16)$$



Na tem mestu bi bilo teoretično treba odstraniti tudi vpliv Coriolisove sile, ki nastane zaradi rotacije Zemlje, vendar je ta vpliv pri uporabi nizkocenovnih senzorjev IMU zaradi njihove omejene natančnosti zanemarljiv (Noureldin idr., 2013).

4. Z integracijo pospeškov objekta v lokalnem geodetskem koordinatnem sistemu v koraku  $k$  lahko določimo trenutno hitrost objekta  $\mathbf{v}_k$ :

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{v}_{k-1} + \mathbf{a}^l \Delta t. \quad (3.17)$$

5. Izračun geografskih koordinat objekta  $\mathbf{r}_k$  v lokalnem geodetskem koordinatnem sistemu:

$$\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_{k-1} + \mathbf{D} \frac{1}{2} (\mathbf{v}_{k-1} + \mathbf{v}_k) \Delta t, \quad (3.18)$$

pri čemer so:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \varphi \\ \lambda \\ h \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_E \\ v_N \\ v_U \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{(R_m+h)} & 0 \\ \frac{1}{\cos \varphi (R_n+h)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

kjer so:

$\varphi, \lambda, h$  ... geografske koordinate točke,

$v_E, v_N, v_U$  ... komponente vektorja hitrosti,

$R_n$  ... polmer prvega vertikalna,

$R_m$  ... polmer meridana.

## 4 Pogreški senzorjev MEMS-IMU

Pri uporabi vseh vrst merilnih sistemov je treba posebno pozornost nameniti identifikaciji pogreškov, ki so prisotni v meritvah. Le na tak način lahko zagotovimo optimalne končne rezultate. Pri nizkokcenovnih senzorjih MEMS-IMU mora biti poudarek pri določitvi in odpravi pogreškov še toliko večji, saj brez tega ne bi dobili uporabnih merskih vrednosti. Senzorje MEMS sestavljajo elementi, ki so zgrajeni iz polprevodnikov in so izredno občutljivi na proizvodni proces. Zato imajo senzorji MEMS v osnovi izredno velik raztros senzorskih parametrov, ki so še posebej podvrženi časovni in temperaturni odvisnosti.

V tem poglavju bomo najprej teoretično opisali pogreške v meritvah senzorjev MEMS-IMU, v nadaljevanju pa z razvitim modelom kalibracije glavne pogreške odpravili in zagotovili merske vrednosti, ki so primerne za nadaljnjo uporabo. V splošnem so meritve senzorjev MEMS-IMU obremenjene s pogreški, ki jih lahko razdelimo v dva razreda: sistematični pogreški in slučajni pogreški (Modic, 2016). Nekatero sistematične pogreške bomo v postopku določitve kalibracijskih parametrov senzorjev odpravili, velikost slučajnih pogreškov pa bomo upoštevali pri stohastičnih modelih.

### 4.1 Sistematični pogreški senzorja IMU

#### **Odmik ničelne vrednosti (angl. bias offset)**

Pogrešek odmika ničelne vrednosti vsebujejo vsi senzorji inercialne merske enote in predstavlja vrednost odčitka senzorja brez kakršnegakoli zunanje vpliva. Odmik ničelne vrednosti v primeru žiroskopa predstavlja velikost odčitka pri popolnoma mirujočem senzorju, pri pospeškometeru je to vrednost odčitka senzorja, ki ni pod vplivom zunanjih sil, pri magnetometru pa je to vrednost odčitka brez prisotnosti magnetnega polja. Velikost odmika ničelne vrednosti je neodvisna od velikosti odčitkov senzorja.

#### **Sprememba merila (angl. scale factor)**

Pogrešek spremembe merila predstavlja spremembo med vhodnim in izhodnim gradientom količine na enoto. Vpliv pogreška spremembe merila je sorazmeren z velikostjo odčitka senzorja. V primeru pospeškometra se vpliv povečuje z velikostjo izmerjenega pospeška, pri žiroskopu se vpliv povečuje z velikostjo izmerjene kotne hitrosti, pri magnetometru pa z velikostjo izmerjene jakosti magnetnega polja.

### **Nelinearnost (angl. non-linearity)**

Pogrešek nelinearnosti se odraža v nekonstantnem pogrešku spremembe merila. V tem primeru se faktor spremembe merila spreminja z večanjem oz. manjšanjem odčitkov na senzorju.

### **Asimetrija pogreška merila (angl. scale factor error sign assymetry)**

Pri asimetriji pogreška merila je faktor spremembe merila drugačen za pozitivne in negativne odčitke na senzorju.

### **Kvantizacijski pogrešek (angl. quantization error)**

Kvantizacijski pogrešek je prisoten v vseh digitalnih sistemih, kjer je izhodni signal generiran na podlagi analognega vhodnega signala. Njegova velikost je odvisna od občutljivosti senzorja.

### **Neortogonalnost osi (angl. non-orthogonality error)**

Pogrešek neortogonalnosti osi senzorja je prisoten pri večsnih senzorjih, kjer osi senzorja med seboj niso popolnoma ortogonalne. Pogrešek običajno nastane pri izdelavi senzorja, zato je njegova velikost odvisna od kakovosti izdelave senzorja. Pri nizkocenovnih senzorjih je zato ta pogrešek lahko večji.

### **Neuskklajenost osi (angl. misalignment error)**

Pogrešek neuskklajenosti osi nastane zaradi zasuka senzornih osi inercialnih senzorjev glede na pravokotne osi okvirja telesa senzorja (angl. Body-Frame).

## **4.2 Slučajni pogreški senzorja IMU**

### **Spremenljivost odmika ničelne vrednosti (angl. run-to-run bias offset)**

Pogrešek spremenljivosti odmika ničelne vrednosti se pojavi v primeru, ko se odmik ničelne vrednosti spreminja pri vsakem zagonu senzorja.

### **Spremenljivost spremembe merila (angl. run-to-run scale factor)**

Pogrešek spremenljivosti spremembe merila se pojavi v primeru, ko se vrednost spremeni pri zagonu senzorja.

### **Lezenje odmika ničelne vrednosti (angl. bias drift)**

V primeru lezenja imamo opravka z naključno spremembo odmika ničelne vrednosti med delovanjem senzorja. Eden izmed vzrokov za ta pogrešek je sprememba temperature med delovanjem senzorja.

**Nestabilnost spremembe merila (angl. scale factor instability)**

Naključne spremembe faktorja merila med delovanjem senzorja so največkrat posledica temperaturnih sprememb.

**Beli šum (angl. white noise)**

To je nekoreliran šum, ki je enakomerno razporejen po celem frekvenčnem spektru signala. Beli šum je prisoten v vseh signalih in ima bistveno krajši korelacijski čas od časa vzorčenja.

**4.3 Analiza šuma IMU senzorja z Allanovo varianco**

Izhodni signal senzorja IMU (signal triosnega žiroskopa, pospeškomera in magnetometra) je obremenjen z naključnim šumom, ki ga v časovni domeni lahko analiziramo z Allanovo varianco. Metoda Allanove variance je bila najprej razvita za analizo fazne in frekvenčne stabilnosti oscilatorjev, lahko pa se jo uporabi pri analizi šumov katerihkoli senzorjev. Metoda v osnovi predstavlja napake RMS naključnega lezenja odčitka senzorja v odvisnosti od dolžine časa povprečenja odčitkov stacionarnega senzorja. Allanovo varianco lahko uporabimo tudi za karakterizacijo in prepoznavo osnovnih naključnih procesov, ki povzročajo šum v signalu senzorja IMU. S prepoznavanjem naključnih šumov in njihovo analizo tako pridobimo informacijo o stohastičnih procesih senzorja IMU, kot so kvantizacijski šum, beli šum, koreliran šum, sinusni šum, nestabilnost odmika ničelne vrednosti, hitrost spremembe ničelne vrednosti in rate ramp (Modic, 2016).

Predpostavimo, da imamo opravka z  $N$  odčitki senzorja (žiroskopa) z intervalom vzorčenja  $\tau_0$  (frekvenca vzorčenja je v tem primeru  $1/\tau_0$ ). Nato posamezne odčitke z intervalom vzorčenja  $\tau_0$  združimo v skupine/grozde (angl. cluster) različnih dolžin  $\tau_0, 2\tau_0, 3\tau_0, \dots, m\tau_0$  ( $m < \frac{(N-1)}{2}$ ) in izračunamo srednjo vrednost vsote odčitkov v posamezni skupini. Allanova varianca je definirana kot funkcija dolžine grozda. Natančneje, v primeru signala žiroskopa je Allanova varianca lahko definirana bodisi iz vidika izhodne hitrosti  $\Omega(t)$  ali izhodnega kota  $\theta(t)$ , ki ga izračunamo:

$$\theta(t) = \int^t \Omega(t') dt' \quad (4.1)$$

Spodnja meja intervala integracije ni definirana, saj v izračunu nastopajo le razlike kotov (IEEE Std 647-2006, 2006). Kotne meritve so zajete v diskretnih časovnih trenutkih  $t = k\tau_0, k = 1, 2, 3, \dots, N$ .

Povprečna hitrost med časoma  $t_k$  in  $t_k + \tau$  je podana z enačbo:

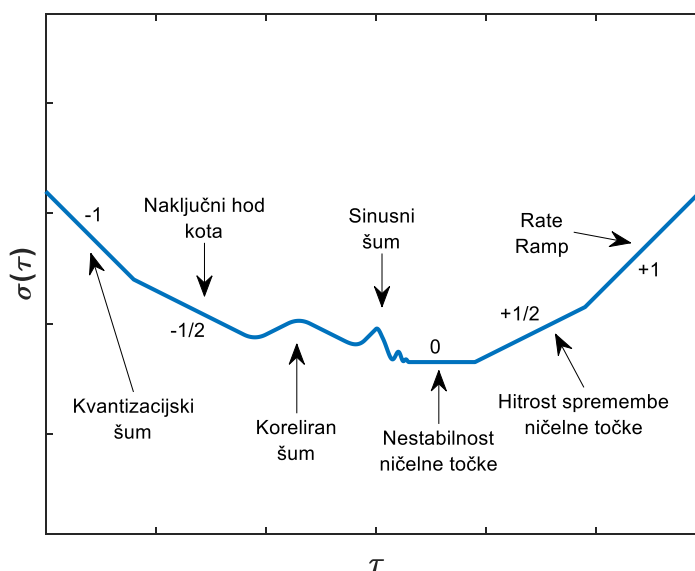
$$\bar{\Omega}_k(\tau) = \frac{\theta_{k+m} - \theta_k}{\tau}, \quad (4.2)$$

kjer je  $\theta_k = \theta(k\tau_0)$  in  $\tau = m\tau_0$ .

Allanova varianca je ocenjena kot:

$$\sigma^2(\tau) = \frac{1}{2\tau^2(N-2m)} \sum_{k=1}^{N-2m} (\theta_{k+2m} - 2\theta_{k+m} + \theta_k)^2 \quad (4.3)$$

Vrednosti Allanove deviacije  $\sigma(\tau)$  se običajno analizira na grafu z logaritemsko skalo. V tem primeru različne tipe šumov identificiramo na različnih območjih  $\tau$  (IEEE Std 647-2006, 2006). Primer grafične predstavitve rezultatov Allanove variance signala žiroskopa je prikazan na sliki 4.1. Na podlagi naklona funkcije  $\sigma(\tau)$  lahko prepoznamo različne naključne procese, kjer vrednosti velikosti šumov lahko preberemo neposredno z log-log grafa v različnih območjih  $\tau$ .



**Slika 4.1: Rezultat analize šuma signala z Allanovo varianco**

*Figure 4.1: Different Noise processes on an Allan Variance Plot*

Na podlagi definirane Allanove variance lahko ocenimo vrednosti naključnih šumov v signalu senzorja IMU. V nadaljevanju so obravnavani naslednji naključni procesi, ki so prikazani tudi na sliki 4.1:

- kvantizacijski šum,
- naključni hod,
- nestabilnost ničelne točke,
- hitrost spremembe ničelne točke,
- rate ramp,
- koreliran Markov šum
- sinusni šum.

**a) Kvantizacijski šum (angl. quantization noise)**

Do kvantizacijskega šuma pride pri pretvorbi vseh analognih senzorskih signalov, digitaliziranih s pretvornikom A/D. Napako povzroči razlika med dejansko amplitudo signala in končno ločljivostjo pretvornika A/D (Modic, 2016). Zveza med koeficientom kvantizacijskega šuma ( $Q$ ) in Allanovo varianco ( $\sigma^2(\tau)$ ) je:

$$\sigma^2(\tau) = \frac{3Q^2}{\tau^2}. \quad (4.4)$$

Kvantizacijski šum se pojavi na grafu, kjer je naklon premice enak  $-1$ . Magnitudo kvantizacijskega šuma lahko odčitamo iz log-log grafa pri  $\tau = \sqrt{3}$ .

**b) Naključni hod kota (angl. angle random walk)**

Visokofrekvenčni šum senzorja, ki ima korelacijski čas veliko krajši od časa vzorčenja pri žiroskopu, prispeva k naključnemu hodu kota, v primeru pospeškomera pa k naključnemu hodu hitrosti. Definiran je z enačbo:

$$\sigma^2(\tau) = \frac{N^2}{\tau}, \quad (4.5)$$

kjer  $N$  predstavlja koeficient naključnega hoda kota. Kot vidimo iz slike 3 in, kot nakazuje enačba (4.5), ima graf  $\sigma(\tau)$  v odvisnosti od  $\tau$  na log-log skali naklon enak  $-\frac{1}{2}$ . Numerično vrednost koeficienta naključnega hoda kota  $N$  lahko odčitamo na grafu pri  $\tau = 1$ . V primeru analiziranja šuma pospeškomera bi  $N$  predstavljal koeficient naključnega hoda hitrosti.

**c) Nestabilnost ničelne točke (angl. bias instability)**

Izvor napake se nahaja v elektronskih in mehanskih komponentah senzorja, ki so dovzetne za pojav naključnega šuma. Zaradi nizko frekvenčne narave nihanja šuma, se napaka odraža v nestabilnosti ničelne točke. Allanova varianca je s to napako povezana preko enačbe:

$$\sigma^2(\tau) = \frac{2B^2}{\pi} \left[ \ln 2 - \frac{\sin^3 x}{2x^2} (\sin x + 4x \cos x) + C_i(2x) - C_i(4x) \right], \quad (4.6)$$

kjer je  $x = \pi f_0 \tau$ .  $B$  predstavlja koeficient nestabilnosti ničelne točke,  $f_0$  mejno frekvenco (angl. Cutoff Frequency),  $C_i$  pa kosinusno-integralno funkcijo.

Na podlagi enačbe (4.6) velja:

$$\sigma^2(\tau) \rightarrow 0, \text{ za } \tau \ll \frac{1}{f_0}, \quad (4.7)$$

$$\sigma^2(\tau) = \frac{2B^2 \ln 2}{\pi}, \text{ za } \tau \gg \frac{1}{f_0}. \quad (4.8)$$

Lastnosti nestabilnosti ničelne točke lahko vidimo na sliki 4.1, kjer je naklon premice enak 0.

#### **d) Hitrost spremembe ničelne točke (angl. rate random walk)**

To je naključni proces negotovega izvora, verjetno posledica eksponentno koreliranega šuma z zelo dolgim korelacijskim časom. Koeficient hitrosti spremembe ničelne točke  $K$  je opisan z enačbo:

$$\sigma^2(\tau) = \frac{K^2\tau}{3}. \quad (4.9)$$

Hitrost spremembe ničelne točke je na grafu prisotna, kjer je naklon premice enak  $+\frac{1}{2}$ . Magnitudo napake lahko preberemo iz log-log grafa na sliki 4.1 pri  $\tau = 3$ .

#### **e) Rate ramp**

Ta napaka na dolgih končnih intervalih signala nima lastnosti naključnega šuma, ampak je deterministične narave. Prisotnost napake v signalu nakazuje na zelo počasne monotone spremembe signala za dolge časovne periode in je opisana z enačbo:

$$\sigma^2(\tau) = \frac{R^2\tau^2}{2}. \quad (4.10)$$

Napaka se na log-log grafu (slika 4.1) pojavi kot krivulja z naklonom  $+1$ , njeno magnitudo pa lahko odčitamo iz grafa pri  $\tau = \sqrt{2}$ .

#### **f) Koreliran Markov šum (angl. correlated markov noise)**

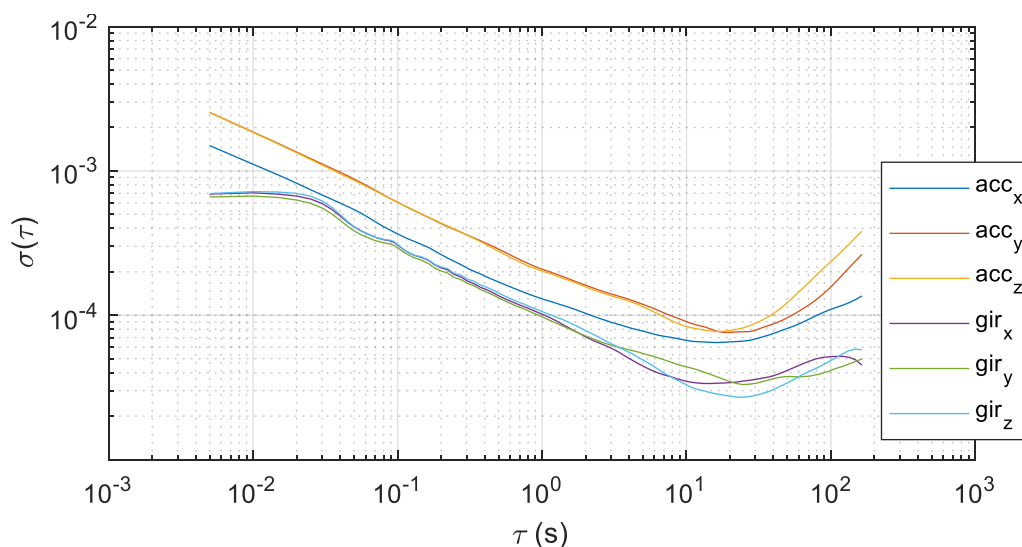
Koreliran Markov šum ima lastnost eksponentno dušene funkcije s končnim korelacijskim časom. Na log-log grafu se amplituda korelacijskega šuma in čas določita z vrha, ujetega v intervalu krivulje z naklonom  $+\frac{1}{2}$  in  $-\frac{1}{2}$  (Modic, 2016).

#### **g) Sinusni šum (angl. sinusoidal noise)**

Na log-log grafu Allanove variance je sinusni šum v signalu viden na območju z več zaporednimi vrhovi, ki se jim amplituda postopoma zmanjšuje in spreminja frekvenca. Ocena velikosti napake je z Allanovo varianco zahtevna in je opisana v (IEEE Std 647-2006, 2006).

Na podlagi analize šuma senzorja IMU z Allanovo varianco pridobimo podatek, v kakšnem časovnem intervalu šum  $\tau$  izhodnega signala senzorja konvergira. V krajših časovnih intervalih običajno prevladuje naključni hod (angl. Random walk), medtem ko pri daljših časovnih intervalih prevladuje vpliv nestabilnosti ničelne točke. V časovnem intervalu, v katerem šum izhodnega signala konvergira, lahko predpostavimo, da je v signalu senzorja prisoten le beli šum. (Ma idr., 2014).

Na sliki 4.2 so predstavljeni rezultati analize Allanove variance meritev nizkocenovnega senzorja MEMS-IMU MPU-9250, ki smo ga v nadaljevanju uporabili pri praktičnih eksperimentih. Vse meritve so bile opravljene pri konstantni temperaturi. Na sliki 4.2 je prikazana Allanova deviacija  $\sigma(\tau)$  triosnega pospeškmera ( $acc_x, acc_y, acc_z$ ) in žiroskopa ( $gir_x, gir_y, gir_z$ ). Določiti moramo, kolikšna je dolžina niza povprečenja signala, pri katerem meritve pospeškmera in žiroskopa statičnega senzorja IMU konvergirajo. Na podlagi grafikona (slika 4.2) je razvidno, da je pri vseh šestih senzorjih potreben čas povprečenja okoli 20 sekund. Takrat je Allanova deviacija  $\sigma(\tau)$  najnižja. To je podatek, ki ga bomo potrebovali v nadaljevanju za določitev kalibracijskih parametrov senzorjev, saj bodo v kalibracijskem modelu nastopale meritve, ki predstavljajo povprečje odčitkov v 20 sekundnem intervalu.



**Slika 4.2: Rezultat analize šuma signala z Allanovo varianco za MEMS-IMU MPU-9250**

*Figure 4.2: Allan Variance Curve for MEMS-IMU MPU-9250*



## 5 Kalibracija senzorja IMU

Pri kalibraciji nizkocenovnega senzorja MEMS-IMU bomo v nadaljevanju ločeno obravnavali magnetometer, pospeškometer in žiroskop. S kalibracijo senzorjev bomo določili kalibracijske parametre, ki imajo največji vpliv na končne rezultate: odmik od ničelne vrednosti, pogrešek merila, neortogonalnost in neusklajenost osi. Za določitev kalibracijskih parametrov pospeškometra in žiroskopa smo razvili metodo kalibracije z uporabo sodobnega robotskega tahimetra, za kalibracijo magnetometra pa ne potrebujemo dodatne opreme. V tem poglavju so predstavljene metode kalibracije in rezultati kalibracije na realnih podatkih senzorja IMU MPU-9250.

### 5.1 Kalibracija magnetometra

Magnetometer poleg zemeljskega magnetnega polja zaznava tudi magnetne šume iz bližnje okolice, ki povzročajo sistematične napake pri izmerjenih vrednostih. To so pogrešek začetne vrednosti, pogrešek faktorja merila in pogrešek vpliva nepravokotnosti osi. Pogreške, ki izhajajo iz zunanjih vplivov lahko razvrstimo v vpliv »*hard iron*« in vpliv »*soft iron*« (Renaudin idr., 2010). Vpliv »*hard iron*« nastane zaradi magnetnega vira s stalnim magnetnim poljem. Vpliv »*soft iron*« nastaja zaradi zapletenih magnetnih polj, ki nastajajo v okolici feromagnetnih snovi in izkrivljajo osnovno magnetno polje (Groves, 2008). Problem določitve kalibracijskih parametrov je analogen transformaciji poljubnega 3D elipsoida v sfero, ki ima center v izhodišču koordinatnega sistema magnetometra (Cheuk idr., 2012). Enačbo ploskve drugega reda lahko v splošni obliki zapišemo:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + 2Gx + 2Hy + 2Iz - 1 = 0. \quad (5.1)$$

Enačba lahko opiše katerokoli od kvadričnih površin (hiperboloid, paraboloid, elipsoid ...). Da enačba opisuje elipsoid, morajo veljati dodatni pogoji (Bektas, 2014):

$$4j - i^2 > 0, \quad (5.2)$$

pri čemer sta:

$$i = A + B + C, \quad (5.3)$$

$$j = AB + BC + AC - F^2 - E^2 - D^2. \quad (5.4)$$

Enačbo (5.1) rešimo z določitvijo vseh devetih parametrov  $[A B C D E F G H I]$ , ki jih dobimo s algebraičnim fitanjem elipsoida. Lahko zapišemo sistem linearnih enačb:

$$\mathbf{D} \mathbf{v}_u = \mathbf{1} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (5.5)$$

pri čemer je  $\boldsymbol{\varepsilon}$  vektor popravkov in:

$$\mathbf{v}_u = [A \ B \ C \ D \ E \ F \ G \ H \ I]^T, \quad (5.6)$$

$$\mathbf{l} = [1 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1]^T,$$

$i$ -ta vrstica matrike  $\mathbf{D}_{n \times u}$ , z dimenzijo  $n \times 9$ :

$$\mathbf{D}_i = [x_i^2 \ y_i^2 \ z_i^2 \ 2x_i y_i \ 2x_i z_i \ 2y_i z_i \ 2x_i \ 2y_i \ 2z_i]. \quad (5.7)$$

Sistem linearnih enačb rešimo po metodi najmanjših kvadratov:

$$\mathbf{v} = (\mathbf{D}^T \mathbf{P} \mathbf{D})^{-1} \mathbf{D}^T \mathbf{P} \mathbf{l}, \quad (5.8)$$

kjer  $\mathbf{P}$  predstavlja matriko uteži točk. V primeru enakih natančnosti točk in so točke med seboj tudi nekorelirane, je  $\mathbf{P}$  enotska matrika.

Metoda najmanjših kvadratov nam poda optimalno rešitev za  $\|\boldsymbol{\varepsilon}\| = \min$ , kjer je

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}_i \mathbf{v} - \mathbf{l}. \quad (5.9)$$

Kalibracijski model magnetometra lahko zapišemo (Renaudin idr., 2010):

$$\mathbf{c} = \mathbf{T}(\mathbf{u} - \mathbf{b} - \mathbf{w}), \quad (5.10)$$

$$\mathbf{u} = [m_x \ m_y \ m_z]^T, \quad (5.11)$$

$$\mathbf{b} = [b_x \ b_y \ b_z]^T, \quad (5.12)$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix}, \quad (5.13)$$

kjer so:

$\mathbf{c}$  ... kalibrirane vrednosti magnetometra v vseh treh oseh,

$\mathbf{u}$  ... surove meritve magnetometra v vseh treh oseh,

$\mathbf{b}$  ... skupne začetne vrednosti v vseh treh oseh, ki zajemajo vpliv merila, nepravokotnosti osi, vpliv »*hard iron*« in začetno vrednost magnetometra (angl. bias)

$\mathbf{T}$  ... transformacijska matrika, v kateri so zajeti vplivi merila osi, nepravokotnosti osi in vpliv »*soft iron*«.

$\mathbf{w}$  ... Gaussov šum, porazdeljen po standardizirani normalni porazdelitvi  $\sim N(0, \sigma_w^2)$ .

Skupna začetna vrednost  $\mathbf{b}$  predstavlja središče elipsoida, ki ga opisujejo izmerjene vrednosti magnetometra:

$$\mathbf{H}\mathbf{b} + \mathbf{g} = \mathbf{0}_{3 \times 1}, \quad (5.14)$$

pri čemer je

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{bmatrix}, \quad (5.15)$$

$$\mathbf{g} = [G \quad H \quad I], \quad (5.16)$$

$$\mathbf{0}_{3 \times 1} = [0 \quad 0 \quad 0]^T. \quad (5.17)$$

Ocenjeno središče elipsoida  $\mathbf{b} = [x_0 \quad y_0 \quad z_0]$  tako dobimo (Bektas, 2014):

$$\mathbf{b} = -\mathbf{H}^{-1}\mathbf{g}. \quad (5.18)$$

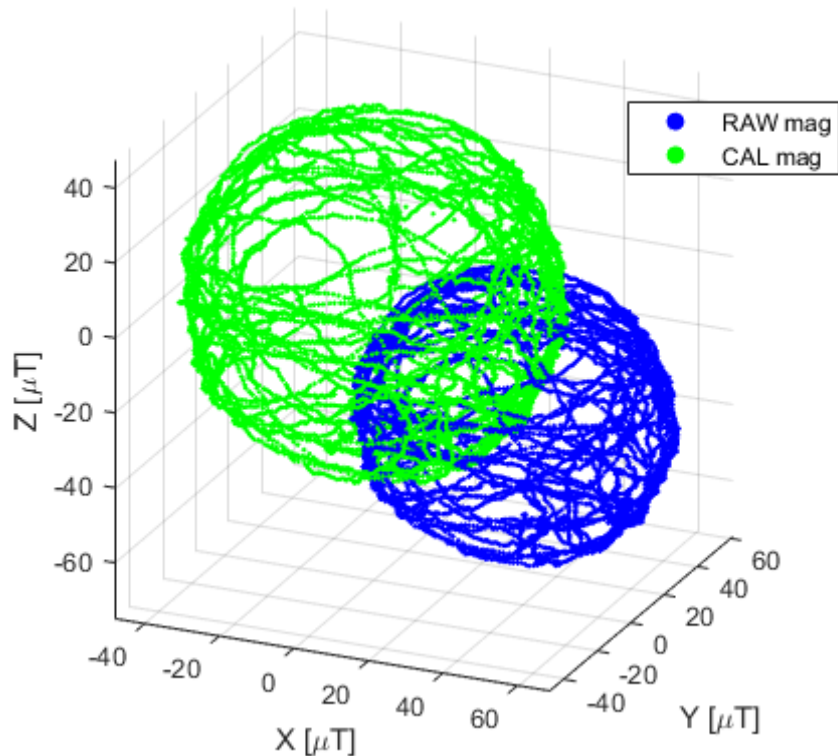
Transformacijsko matriko  $\mathbf{T}$  dobimo na podlagi (Renaudin idr., 2010), (Kok idr., 2016):

$$\mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{g}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{g} - d}} \mathbf{H}^{-1}, \quad (5.19)$$

kjer je  $d$  v našem primeru enak  $-1$  (5.1).

Z ocenjenim središčem  $\mathbf{b}$  (5.18) in transformacijsko matriko  $\mathbf{T}$  (5.19) lahko na podlagi kalibracijskega modela (5.10) določimo popravljene vrednosti magnetometra  $\mathbf{c}$ .

Kalibracijski postopek smo izvedli z senzorjem IMU MPU-9250. Senzor smo v prostoru poljubno vrteli. Rezultati meritev in kalibracije magnetometra so prikazani na sliki 5.1. Surovi odčitki magnetometra v prostoru opišejo elipsoid s premaknjenim središčem, kar je na sliki 5.1 prikazano z modro barvo. Z uporabo izračunanih kalibracijskih parametrov surove odčitke popravimo in dobimo končen rezultat, ki je na sliki 5.1 prikazan z zeleno barvo. Odčitki magnetometra z upoštevanimi kalibracijskimi parametri v prostoru tako opišejo kroglo s središčem v izhodišču koordinatnega sistema.



Slika 5.1: Kalibracija magnetometra MPU-9250

Figure 5.1: Calibration results for MPU-9250 magnetometer

Vrednosti kalibracijskih parametrov glede na definiran kalibracijski model (5.10) so:

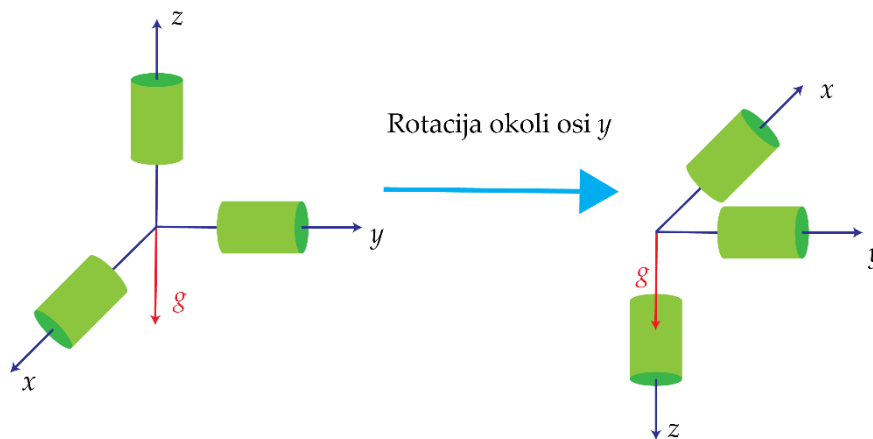
$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1.2203 & 0.0222 & -0.0225 \\ 0.0222 & 1.1740 & 0.0656 \\ -0.0225 & 0.0656 & 1.2098 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3.30 \\ 38.86 \\ -16.52 \end{bmatrix} \mu T.$$

## 5.2 Kalibracija pospeškometera

Za kalibracijo triosnega pospeškometera se uporabljajo različni pristopi. Najprej bomo opisali enostaven 6-položajni statični test (Noureldin idr., 2013), pri katerem ne potrebujemo nobene dodatne opreme, nato pa bomo predstavili metodo kalibracije pospeškometera s pomočjo robotskega tahimetra, ki smo jo razvili v sklopu doktorske disertacije.

### 5.2.1 6-položajni test

Pri tem testu je senzor IMU postavljen tako, da je ena os senzorja usmerjena enkrat v smeri gravitacijske sile in drugič v nasprotno smer, kot je prikazano na sliki 5.2. Pri triosnem pospeškometeru tako senzor postavimo v šest različnih položajev (Noureldin idr., 2013).



Slika 5.2: Kalibracija pospeškometera pri 6-položajnem testu

Figure 5.2: Calibrating an accelerometer with 6-position test

Na podlagi odčitkov lahko s 6-položajnim testom določimo odmik od ničelne vrednosti in pogrešek merila senzorja. Za posamezno os pospeškometera lahko za dva odčitka (enkrat je os obrnjena navzgor, drugič navzdol) zapišemo enačbo:

$$a_1 = b + (1 + S)g \quad (5.20)$$

$$a_2 = b - (1 + S)g \quad (5.21)$$

Kjer so:

$a_1$  ... odčitek navzgor usmerjene osi,

$a_2$  ... odčitek navzdol usmerjene osi,

$b$ ... odmik ničelne vrednosti,

$S$  ... pogrešek merila,

$g$ ... težnostni pospešek.

Odmik ničelne vrednosti  $b$  lahko izračunamo:

$$b = \frac{a_1 + a_2}{2}. \quad (5.22)$$

Pogrešek merila na podlagi meritev določimo:

$$S = \frac{a_1 - a_2 - 2g}{2g}. \quad (5.23)$$

Problem, ki nastopi pri standardnem 6-položajnem testu, je ta, da mehansko zelo težko uravnamo osi pospeškomera s smerjo gravitacijske sile. Kakršenkoli odmik osi bi se neposredno odražal v določenih kalibracijskih parametrih. Prav tako pa s tem načinom kalibracije ne moremo določiti pogreškov neortogonalnosti osi in neuskkljenosti osi. Opisani problem lahko rešimo z uporabo robotskega tahimetra, ki je opisan v nadaljevanju.

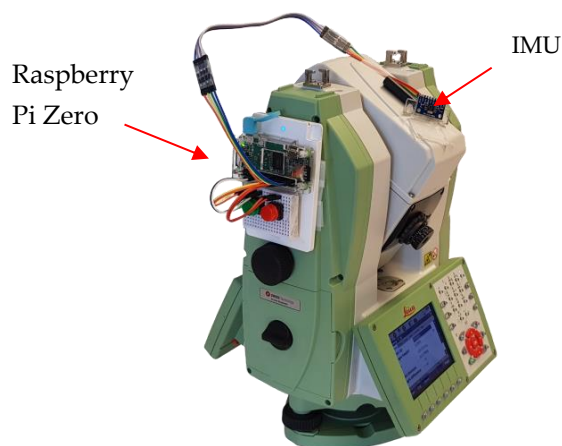
## 5.2.2 Kalibracija senzorja IMU s pomočjo robotskega tahimetra

Sodobni robotski tahimetri združujejo celo vrsto sodobnih senzorjev, ki zagotavljajo natančno in zanesljivo merjenje ter upravljanje instrumenta na daljavo. Robotizirani tahimetri vsebujejo pogon, ki omogoča vrtenje tahimetra. Prvi robotizirani instrumenti so imeli precizne stopenjske motorje, novejša različica instrumentov pa vsebujejo pogon piezo, ki omogoča hitrejše, preciznejše in enakomerno vrtenje instrumenta. Za upravljanje na daljavo imajo instrumenti omogočene komunikacijske vmesnike, preko katerih se lahko z instrumentom povežemo preko osebnega računalnika.

Pri kalibraciji senzorja IMU bomo izkoristili lastnost sodobnega robotskega tahimetra, ki omogoča vrtenje in natančno usmerjanje daljnogleda. Senzor IMU, ki ga namestimo na daljnogled tahimetra (slika 5.3), lahko zavrtimo za izbrani poljuben kot z visoko natančnostjo.

Za kalibracijo senzorja IMU bomo uporabili instrument Leica Nova MS50, ki je samodejni robotski elektronski tahimeter z možnostjo daljinske komunikacije preko vmesnikov Bluetooth® in RS232. Ima vzpostavljene komunikacijske protokole in omogoča dvosmerno komunikacijo na podlagi protokola GeoCOM (Leica Geosystems, 2010).

GeoCOM je produkt Leica Geosystems in predstavlja vmesnik za komunikacijo z instrumenti. Ideja GeoCOM temelji na protokolu RPC (remote procedure call) podjetja SUN Microsystems. Na osnovnem nivoju izvedbe protokola je vsakemu postopku, ki ga sprožimo z zunanje enote (osebnega računalnika), dodeljena enolična identifikacijska številka, na podlagi katere se izvede želeni ukaz. To je osnova komunikacije ASCII, ki jo lahko izvajamo na vseh operacijskih sistemih. Na višjem nivoju implementacije, GeoCOM omogoča komunikacijo preko knjižnic v programskih jezikih C/C++ in MS-VBA, ki delujeta na operacijskem sistemu Microsoft Windows. Preko teh knjižnic nam je omogočeno upravljanje instrumenta na enak način kot neposredno na instrumentu. GeoCOM deluje na principu standarda client/server, kjer client predstavlja zunanjo napravo (računalnik), server pa instrument, ki ga upravljamo.



Slika 5.3: Kalibracija senzorja IMU s pomočjo robotskega tahimetra  
Figure 5.3: IMU Calibration with Robotic Total Station

### 5.2.3 Kalibracijski model pospeškometra

Splošni kalibracijski model triosnega pospeškometra zapišemo z enačbo (Fong idr., 2008; Ye idr., 2017):

$$\mathbf{a}_b = \mathbf{T}\mathbf{u} - \mathbf{b}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 \\ k_{21} & k_{22} & 0 \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix}, \quad (5.24)$$

kjer so:

$\mathbf{a}_b$  ... vektor kalibriranih odčitkov pospeškometra:  $[a_x, a_y, a_z]^T$ ,

$\mathbf{T}$  ... transformacijska matrika, ki vključuje faktorje merila ( $k_{11}, k_{22}, k_{33}$ ) in pogreške neortogonalnosti osi ter neusklajenosti osi ( $k_{21}, k_{31}, k_{33}$ ),

$\mathbf{u}$  ... vektor surovih odčitkov pospeškometra:  $[a_{ux}, a_{uy}, a_{uz}]^T$ ,

$\mathbf{b}$  ... vektor pogreškov začetnih vrednosti:  $[b_x, b_y, b_z]^T$ .

Rešitev kalibracijskega modela (5.24) dobimo s postopkom splošnega modela izravnave po metodi najmanjših kvadratov. Vsota kvadratov odčitkov mirujočega pospeškometra mora biti teoretično enaka velikosti kvadrata lokalnega težnostnega pospeška:

$$g^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2. \quad (5.25)$$

Kalibracijske parametre lahko ocenimo z minimizacijo izraza:

$$F(\hat{\mathbf{T}}, \hat{\mathbf{b}}) = \operatorname{argmin} \sum_{i=1}^N \left( g^2 - (a_{x_i}^2 + a_{y_i}^2 + a_{z_i}^2) \right), \quad (5.26)$$

kjer  $N$  predstavlja število statičnih odčitkov pospeškometra. Za  $i$ -to postavitev pospeškometra lahko na podlagi enačbe (5.24) in enačbe (5.26) zapišemo:

$$F_i = g^2 - (k_{11}a_{ux_i} - b_x)^2 - (k_{21}a_{ux_i} + k_{22}a_{uy_i} - b_y)^2 - (k_{31}a_{ux_i} + k_{32}a_{uy_i} + k_{33}a_{uz_i} - b_z)^2, \quad (5.27)$$

kjer  $a_{ux_i}$ ,  $a_{uy_i}$  in  $a_{uz_i}$  predstavljajo povprečje  $i$ -te postavitve pospeškometra.

Splošni model izravnave po metodi najmanjših kvadratov lahko zapišemo:

$$\mathbf{F}(\mathbf{I} + \mathbf{v}, \mathbf{x}_0 + \mathbf{\Delta}) = 0. \quad (5.28)$$

Z linearizacijo enačbe (5.28) lahko zapišemo lineariziran model (Mikhail idr., 1978):

$$\mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{B}\mathbf{\Delta} = \mathbf{f}, \quad (5.29)$$

kjer so:

$\mathbf{A}$  ... matrika koeficientov opazovanj,

$\mathbf{B}$  ... matrika koeficientov neznank,

$\mathbf{v}$  ... vektor popravkov opazovanj,

$\mathbf{\Delta}$  ... vektor popravkov približnih vrednosti neznank,

$\mathbf{f}$  ... vektor odstopanj.

Matrika  $\mathbf{A}$  je blokovna diagonalna matrika, kjer je  $i$ -ti blok definiran kot:

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_i}{\partial a_{ux}} & \frac{\partial F_i}{\partial a_{uy}} & \frac{\partial F_i}{\partial a_{uz}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \mathbf{A}_N \end{bmatrix}, \quad (5.30)$$

kjer so odvodi funkcije  $F$  po meritvah definirani kot:

$$\frac{\partial F_i}{\partial a_{ux}} = -2k_{11}(-b_x + a_x k_{11}) - 2k_{21}(-b_y + a_x k_{21} + a_y k_{22}) - 2k_{31}(-b_z + a_x k_{31} + a_y k_{32} + a_z k_{33}), \quad (5.31)$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial a_{uy}} = -2k_{12}(-b_x + a_x k_{11}) - 2k_{22}(-b_y + a_x k_{21} + a_y k_{22}) - 2k_{32}(-b_z + a_x k_{31} + a_y k_{32} + a_z k_{33}), \quad (5.32)$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial a_{uz}} = -2k_{13}(-b_x + a_x k_{11}) - 2k_{23}(-b_y + a_x k_{21} + a_y k_{22}) - 2k_{33}(-b_z + a_x k_{31} + a_y k_{32} + a_z k_{33}). \quad (5.33)$$



Matrika  $\mathbf{B}$  je definirana:

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_i}{\partial b_x} & \frac{\partial F_i}{\partial b_y} & \frac{\partial F_i}{\partial b_z} & \frac{\partial F_i}{\partial k_{11}} & \frac{\partial F_i}{\partial k_{22}} & \frac{\partial F_i}{\partial k_{33}} & \frac{\partial F_i}{\partial k_{21}} & \frac{\partial F_i}{\partial k_{31}} & \frac{\partial F_i}{\partial k_{32}} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{B}_N \end{bmatrix}, \quad (5.34)$$

kjer so odvodi funkcije  $F$  po neznankah definirani kot:

$$\frac{\partial F_i}{\partial b_x} = 2(-b_x + a_x k_{11}), \quad (5.35)$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial b_y} = 2(-b_y + a_x k_{21} + a_y k_{22}), \quad (5.36)$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial b_z} = 2(-b_z + a_x k_{31} + a_y k_{32} + a_z k_{33}), \quad (5.37)$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial k_{11}} = -2a_x(-b_x + a_x k_{11}), \quad (5.38)$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial k_{12}} = -2a_y(-b_x + a_x k_{11}), \quad (5.39)$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial k_{13}} = -2a_z(-b_x + a_x k_{11}), \quad (5.40)$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial k_{21}} = -2a_x(-b_x + a_x k_{21} + a_y k_{22}), \quad (5.41)$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial k_{22}} = -2a_y(-b_x + a_x k_{21} + a_y k_{22}), \quad (5.42)$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial k_{23}} = -2a_z(-b_x + a_x k_{21} + a_y k_{22}), \quad (5.43)$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial k_{31}} = -2a_x(-b_x + a_x k_{31} + a_y k_{32} + a_z k_{33}), \quad (5.44)$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial k_{32}} = -2a_y(-b_x + a_x k_{31} + a_y k_{32} + a_z k_{33}), \quad (5.45)$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial k_{33}} = -2a_z(-b_x + a_x k_{31} + a_y k_{32} + a_z k_{33}). \quad (5.46)$$

Vektor odstopanj  $\mathbf{f}$  je definiran:

$$f_i = (k_{11}a_{ux_i} - b_x)^2 + (k_{21}a_{ux_i} + k_{22}a_{uy_i} - b_y)^2 + (k_{31}a_{ux_i} + k_{32}a_{uy_i} + k_{33}a_{uz_i} - b_z)^2 - g^2, \quad (5.47)$$

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{bmatrix}.$$

Vektor popravkov neznank  $\Delta$  je definiran kot:

$$\Delta = [\delta b_x \quad \delta b_y \quad \delta b_z \quad \delta k_{11} \quad \delta k_{22} \quad \delta k_{33} \quad \delta k_{21} \quad \delta k_{31} \quad \delta k_{32}]^T. \quad (5.48)$$

Vektor popravkov neznank  $\Delta$  izračunamo (Mikhail idr., 1978):

$$\Delta = \left( \mathbf{B}^T (\mathbf{AQA}^T)^{-1} \mathbf{B} \right)^{-1} \mathbf{B}^T (\mathbf{AQA}^T)^{-1} \mathbf{f}, \quad (5.49)$$

kjer je  $\mathbf{Q}$  matrika kofaktorjev opazovanj.

Natančnost neznank ocenimo s kovariančno matriko  $\Sigma_{\text{dd}}$ :

$$\Sigma_{\text{dd}} = \hat{\sigma}_0^2 \left( \mathbf{B}^T (\mathbf{AQA}^T)^{-1} \mathbf{B} \right)^{-1}, \quad (5.50)$$

kjer je  $\hat{\sigma}_0^2$  referenčna varianca aposteriori, ki jo izračunamo:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{Pv}}{r}, \quad (5.51)$$

kjer je  $r$  število prostostnih stopenj. Referenčna varianca aposteriori nam poda oceno uteženega povprečja natančnosti opravljenih meritev. V vektorju  $\mathbf{v}$  so zbrani popravki meritev:

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}^T (\mathbf{AQA}^T)^{-1} (\mathbf{f} - \mathbf{B}\Delta). \quad (5.52)$$

V prvi iteraciji izravnave za približne vrednosti neznank lahko izberemo:

$$\mathbf{T}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_0 = [0 \quad 0 \quad 0]^T. \quad (5.53)$$

Iteracije izravnave nato tečejo vse dokler je  $|\Delta| > \varepsilon$ , kjer je  $\varepsilon$  izbrano poljubno majhno število.

### 5.2.3.1 Poenostavljen test kalibracije pospeškometra

Pri poenostavljenem testu senzor IMU namestimo na daljnogled robotskega tahimetra v eni orientaciji in ga vrtimo okoli osi daljnogleda za izbrani poljuben kot. Začetna vrednost pospeškometra je konstantna ne glede na orientacijo sensorja. V primeru, da senzor obrnemo za  $180^\circ$ , bo vsota izmerjenih pospeškov v posameznih oseh obremenjena za dvojni pogrešek odmika začetne vrednosti. Na tak način lahko ločeno določimo šest kalibracijskih parametrov, odmik začetne vrednosti in faktorje merila v vseh treh oseh pospeškometra.

Odmik začetne vrednosti določimo:

$$\mathbf{b} = \frac{\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_{180}}{2}, \quad (5.54)$$

kjer vektor  $\mathbf{u}_0$  predstavlja izmerjene vrednosti pospeškometra v začetnem položaju in vektor  $\mathbf{u}_{180}$  predstavlja izmerjene vrednosti mirujočega pospeškometra, obrnjenega za  $180^\circ$ .

Glede na kalibracijski model pospeškometra (5.24) lahko torej določimo tudi faktorje merila ( $k_{11}, k_{22}, k_{33}$ ). Matrika  $\mathbf{B}$  v tem primeru definirana:

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_i}{\partial k_{11}} & \frac{\partial F_i}{\partial k_{22}} & \frac{\partial F_i}{\partial k_{33}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{B}_N \end{bmatrix}. \quad (5.55)$$

Vektor odstopanj  $\mathbf{f}$  je definiran:

$$f_i = (k_{11}a_{ux_i} - b_x)^2 + (k_{22}a_{uy_i} - b_y)^2 + (k_{33}a_{uz_i} - b_z)^2 - g^2, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{bmatrix}. \quad (5.56)$$

Vektor popravkov neznank  $\Delta$  je definiran kot:

$$\Delta = [\delta k_{11} \quad \delta k_{22} \quad \delta k_{33}]^T. \quad (5.57)$$

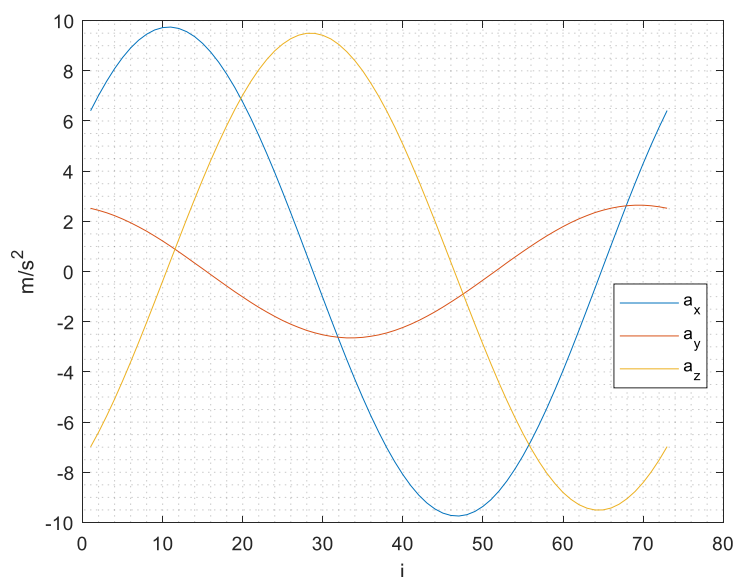
Postopek testiranja je sestavljen iz vrtenja tahimetra okoli vrtilne osi daljnogleda. Daljnogled tahimetra preko osi daljnogleda zavrtimo za  $360^\circ$  po  $5^\circ$  korakih. S tem pridobimo 73 parov odčitkov, ki se med seboj razlikujejo za  $180^\circ$ . Postopek testiranja je shematično prikazan na sliki 5.4.



**Slika 5.4: Postopek enostavnega testa kalibracije pospeškometra**

*Figure 5.4: Accelerometer calibration in a simple test procedure*

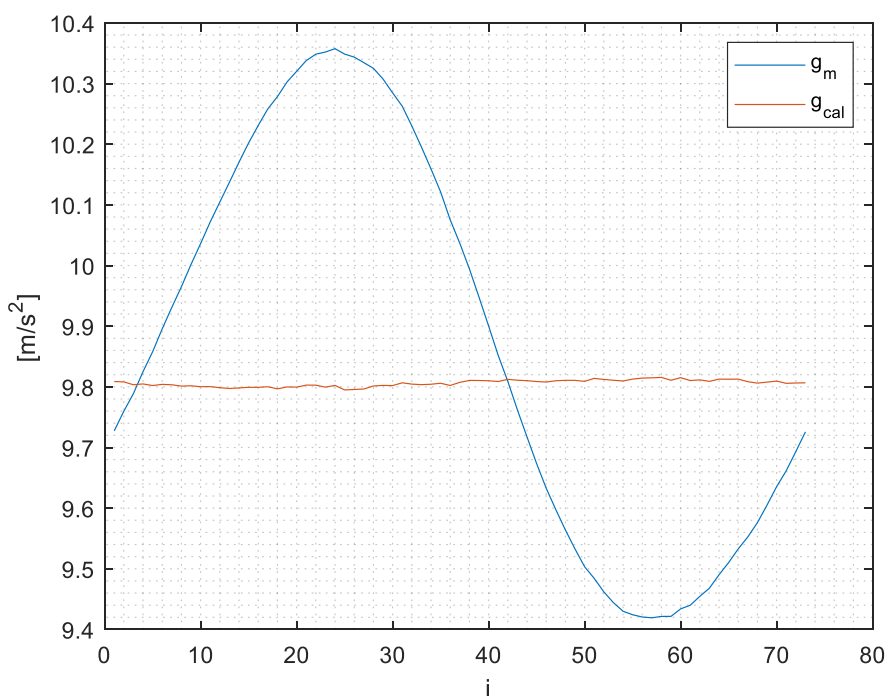
Na sliki 5.5 so prikazana povprečja odčitkov pospeškometra v vseh 73 položajih daljnogleda.



**Slika 5.5: Povprečni odčitki pospeškometra v 73 položajih daljnogleda**

*Figure 5.5: Accelerometer average readings in 73 telescope positions*

Vsota kvadratov odčitkov mirujočega pospeškometra bi morala biti teoretično enaka velikosti kvadrata lokalnega težnostnega pospeška (5.25). Zaradi pogrškov pospeškometra se izmerjeni težnostni pospešek spreminja in razlikuje od lokalnega težnostnega pospeška, ki na mestu kalibracije znaša  $g = 9.807 m/s^2$  (Krevh, 2015). Na sliki 5.6 je prikazan izmerjen težnostni pospešek v vseh 73 položajih daljnogleda pred kalibracijo prikazan z modro barvo ( $g_m$ ). Z upoštevanjem kalibracijskih parametrov pospeškometra smo izračunali popravljen težnostni pospešek, ki je na sliki 5.6 prikazan z rdečo barvo ( $g_{cal}$ ).



**Slika 5.6: Težnostni pospešek pred kalibracijo pospeškometra po poenostavljenem testu in po njej**  
*Figure 5.6: Gravitational acceleration before and after calibration of the accelerometer after the simplified test*

Kalibracijski parametri pospeškometra senzorja IMU MPU-2950, pridobljeni z poenostavljenim testom, so:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0.9983 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9902 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9896 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0.2203 \\ 0.0292 \\ 0.4254 \end{bmatrix} m/s^2.$$

Srednji standardni odklon meritev znaša  $\hat{\sigma}_0 = 0.0021 m/s^2$ . Standardni odklon končnih ocenjenih kalibracijskih parametrov pa je:

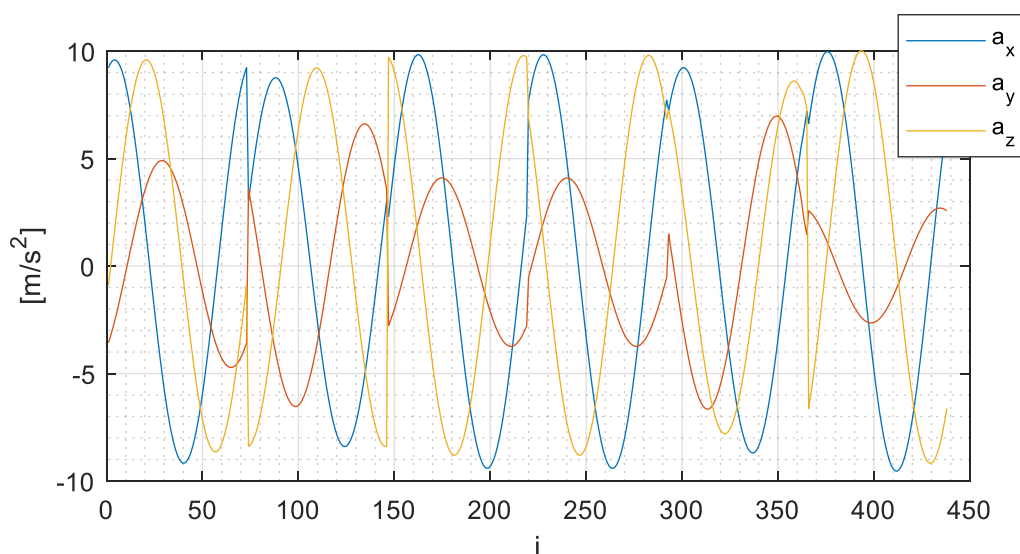
$$\sigma_{k_{11}} = 0.0001, \sigma_{k_{22}} = 0.0020, \sigma_{k_{33}} = 0.0002,$$

$$\sigma_{b_x} = 0.0015 m/s^2, \sigma_{b_y} = 0.0014 m/s^2, \sigma_{b_z} = 0.0020 m/s^2.$$

### 5.2.3.2 Popolni test kalibracije pospeškmera

Pri popolnem testu je postopek testiranja podoben kot pri poenostavljenem testu, le da je v tem primeru pospeškmer na daljnogled tahimetra treba namestiti v vsaj treh različnih orientacijah. Z rotacijami sensorja skozi celoten prostor zagotovimo dovolj neodvisnih meritev, da lahko določimo 9 kalibracijskih parametrov. S tem smo odstranili konfiguracijski defekt matematičnega modela in zagotovili poln rang matričnega sistema (Pelzer, 1974).

Na sliki 5.7 so predstavljene meritve pospeškmera pri popolnem testu. Pospeškmer smo na daljnogled namestili pri šestih različnih orientacijah. Postopek testiranja je ekvivalenten šestim poenostavljenim testom, pri čemer smo IMU pred vsakim postopkom testiranja namestili na robotski tahimeter Leica MS50 pri različni orientaciji.



Slika 5.7: Meritve pospeškmera pri popolnem testu

Figure 5.7: Accelerometer measurements in a complete test

Na podlagi postopka izračuna kalibracijskih parametrov, predstavljenega v poglavju 5.2.3 *Kalibracijski model pospeškmera*, smo določili devet kalibracijskih parametrov:

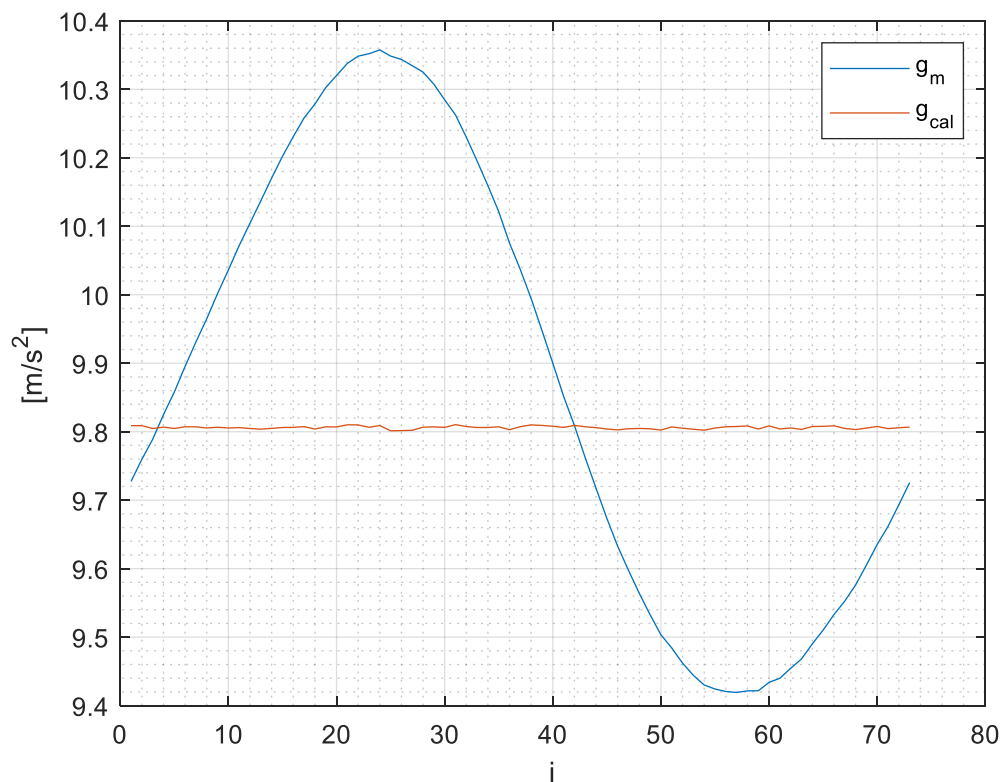
$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0.9979 & 0 & 0 \\ -0.0001 & 0.9965 & 0 \\ 0.0001 & 0.0003 & 0.9897 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0.2180 \\ 0.0261 \\ 0.4193 \end{bmatrix} m/s^2.$$

Srednji standardni odklon meritev znaša  $\hat{\sigma}_0 = 0.0025 m/s^2$ . Standardni odklon končnih ocenjenih kalibracijskih parametrov pa je:

$$\sigma_{k_{11}} = 0.0001, \sigma_{k_{22}} = 0.0004, \sigma_{k_{33}} = 0.0001, \sigma_{k_{21}} = 0.0003, \sigma_{k_{31}} = 0.0002, \sigma_{k_{32}} = 0.0002,$$

$$\sigma_{b_x} = 0.0007 m/s^2, \sigma_{b_y} = 0.0014 m/s^2, \sigma_{b_z} = 0.0008 m/s^2.$$

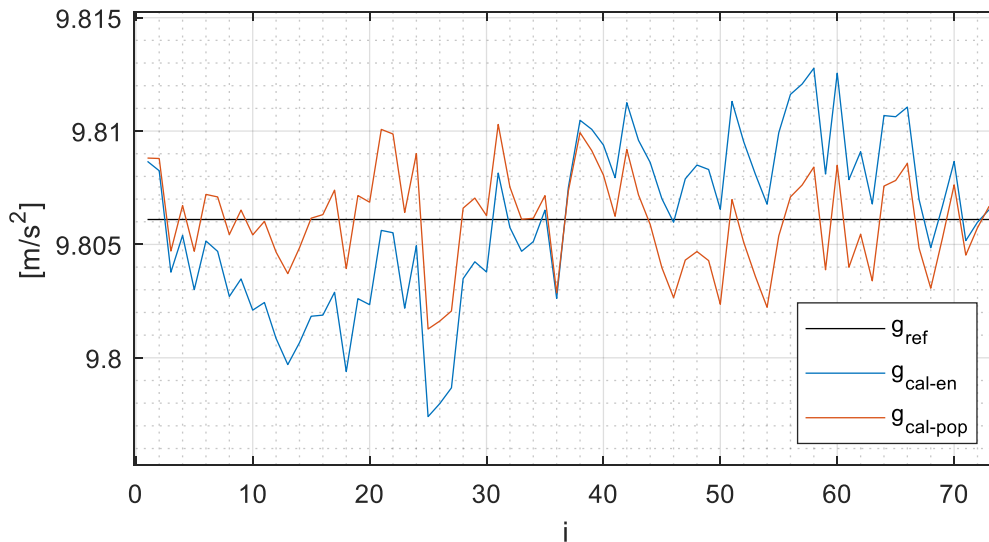
Na sliki 5.8 je prikazan težnostni pospešek, ki smo ga izmerili na podlagi surovih meritev ( $g_m$ ), in težnostni pospešek, ki smo ga določili na podlagi upoštevanih kalibracijskih parametrov ( $g_{cal}$ ).



**Slika 5.8: Težnostni pospešek pred kalibracijo pospeškometra po popolnem testu in po njej**  
*Figure 5.8: Gravitational acceleration before and after calibration of the accelerometer after a complete test*

### 5.2.3.3 Primerjava poenostavljenega in popolnega testa kalibracije

Na sliki 5.9 je predstavljen izmerjen težnostni pospešek na podlagi kalibracijskih parametrov, ki smo jih pridobili enkrat po opravljenem poenostavljenem postopku kalibracije ( $g_{cal-en}$ ) in drugič po opravljenem popolnem postopku kalibracije ( $g_{cal-pop}$ ).



**Slika 5.9: Primerjava rezultatov enostavnega in popolnega postopka kalibracije**

*Figure 5.9: Comparison of the results of a simple and complete calibration procedure*

Na sliki 5.9 vidimo, da izmerjen težnostni pospešek, ki je izračunan z uporabo kalibracijskih parametrov popolnega testa, sovpada z referenčnim težnostnim pospeškom bolj kot težnostni pospešek, ki je izračunan z uporabo kalibracijskih parametrov enostavnega testa. Razlog za boljši rezultat je v upoštevanju več kalibracijskih parametrov. Poleg pogreška odmika ničelne vrednosti in pogreška spremembe merila smo pri popolnem testu določili tudi pogreške neortogonalnosti in neuskklajenosti osi.

Za cenilko kakovosti obeh rezultatov smo uporabili razlike RMSE med izmerjeno in referenčno vrednostjo težnostnega pospeška. RMSE popolnega testa ( $RMSE_{POP}$ ) je za 41 % manjši od RMSE poenostavljenega testa ( $RMSE_{EN}$ ):

$$RMSE_{EN}(g_{ref} - g_{cal-en}) = 0.0036 \text{ m/s}^2,$$

$$RMSE_{POP}(g_{ref} - g_{cal-pop}) = 0.0021 \text{ m/s}^2.$$



## 5.3 Kalibracija žiroskopa

Žiroskop lahko kalibriramo na različne načine. Pogrešek začetne vrednosti nizkocenovnega žiroskopa lahko enostavno določimo s povprečenjem meritev mirujočega senzorja, za določitev ostalih kalibracijskih parametrov pa se moramo poslužiti drugačnih načinov. Nekatere metode določijo kalibracijske parametre s pomočjo vrtljive mize, ki omogočajo vrtenje v eni ali več oseh z izbrano kotno hitrostjo (Avrutov idr., 2017), druge metode pri kalibraciji žiroskopa kombinirajo še ostale senzorce senzorja IMU (pospeškometer in magnetometer), vendar ne zagotavljajo tako visoke natančnosti (Fong idr., 2008; Yadav idr., 2016; Wu idr., 2018). V našem primeru bomo za kalibracijo žiroskopa v kotni domeni, tako kot v primeru kalibracije pospeškometra, uporabili robotski tahimeter Leica Nova MS50.

### 5.3.1 Kalibracijski model žiroskopa

Kalibracijski model žiroskopa lahko opišemo z enačbo:

$$\mathbf{a}_b = \mathbf{T}\mathbf{u} - \mathbf{b}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 \\ k_{21} & k_{22} & 0 \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix}, \quad (5.58)$$

kjer so:

$\mathbf{a}_b$  ... vektor kalibriranih kotnih hitrosti žiroskopa:  $[\omega_x, \omega_y, \omega_z]^T$ ,

$\mathbf{T}$  ... transformacijska matrika, ki vključuje faktorje merila ( $k_{11}, k_{22}, k_{33}$ ) in pogreške neortogonalnosti osi ter neusklajenosti osi ( $k_{21}, k_{31}, k_{33}$ ),

$\mathbf{u}$  ... vektor surovih merjenih kotnih hitrosti žiroskopa:  $[\omega_{ux}, \omega_{uy}, \omega_{uz}]^T$ ,

$\mathbf{b}$  ... vektor pogreškov začetnih vrednosti:  $[b_x, b_y, b_z]^T$ .

Rešitev kalibracijskega modela (5.58) dobimo s postopkom splošnega modela izravnave po metodi najmanjših kvadratov. V kolikor je os med vrtenjem žiroskopa konstantna, lahko kot zasuk okoli posamezne osi žiroskopa izračunamo:

$$\alpha_x = \sum_{j=1}^M \omega_{x_j} \Delta t_j, \quad (5.59)$$

$$\alpha_y = \sum_{j=1}^M \omega_{y_j} \Delta t_j, \quad (5.60)$$

$$\alpha_z = \sum_{j=1}^M \omega_{z_j} \Delta t_j, \quad (5.61)$$

kjer  $M$  predstavlja število odčitkov žiroskopa rotacije. Kot zasuka žiroskopa okoli konstantne osi je v tem primeru enaka (Stančin idr., 2018):

$$\alpha_i^2 = \alpha_{x_i}^2 + \alpha_{y_i}^2 + \alpha_{z_i}^2, \quad (5.62)$$

kjer  $i$  predstavlja  $i$ -to rotacijo okoli konstantne osi.

Kalibracijske parametre žiroskopa lahko ocenimo z minimizacijo izraza:

$$F(\hat{T}, \hat{b}) = \operatorname{argmin} \sum_{i=1}^N (\alpha_i^2 - (\alpha_{x_i}^2 + \alpha_{y_i}^2 + \alpha_{z_i}^2)), \quad (5.63)$$

kjer  $N$  predstavlja število rotacij žiroskopa. Za  $i$ -to rotacijo lahko na podlagi (5.58) in (5.63) zapišemo:

$$F_i = \alpha_i^2 - (k_{11}\alpha_{ux_i} - b_x\Delta t_i)^2 - (k_{21}\alpha_{ux_i} + k_{22}\alpha_{uy_i} - b_y\Delta t_i)^2 - (k_{31}\alpha_{ux_i} + k_{32}\alpha_{uy_i} + k_{33}\alpha_{uz_i} - b_z\Delta t_i)^2, \quad (5.64)$$

kjer  $\alpha_{ux_i}$ ,  $\alpha_{uy_i}$ , in  $\alpha_{uz_i}$  predstavljajo zasuk vseh treh osi v  $i$ -ti rotaciji žiroskopa okoli konstantne osi.

Splošni model izravnave po metodi najmanjših kvadratov lahko zapišemo:

$$\mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{B}\mathbf{\Delta} = \mathbf{f}. \quad (5.65)$$

Matrika  $\mathbf{A}$  je blokovna diagonalna matrika, kjer je  $i$ -ti blok definiran kot:

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_i}{\partial \alpha_{ux}} & \frac{\partial F_i}{\partial \alpha_{uy}} & \frac{\partial F_i}{\partial \alpha_{uz}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \mathbf{A}_N \end{bmatrix}, \quad (5.66)$$

kjer so:

$$\frac{\partial F_i}{\partial \alpha_{ux}} = -2k_{11}(-b_x\Delta t_i + \alpha_x k_{11}) - 2k_{21}(-b_y\Delta t_i + \alpha_x k_{21} + \alpha_y k_{22}) - 2k_{31}(-b_z\Delta t_i + \alpha_x k_{31} + \alpha_y k_{32} + \alpha_z k_{33}), \quad (5.67)$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial \alpha_{uy}} = -2k_{12}(-b_x\Delta t_i + \alpha_x k_{11}) - 2k_{22}(-b_y\Delta t_i + \alpha_x k_{21} + \alpha_y k_{22}) - 2k_{32}(-b_z\Delta t_i + \alpha_x k_{31} + \alpha_y k_{32} + \alpha_z k_{33}), \quad (5.68)$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial \alpha_{uz}} = -2k_{12}(-b_x\Delta t_i + \alpha_x k_{11}) - 2k_{22}(-b_y\Delta t_i + \alpha_x k_{21} + \alpha_y k_{22}) - 2k_{32}(-b_z\Delta t_i + \alpha_x k_{31} + \alpha_y k_{32} + \alpha_z k_{33}). \quad (5.69)$$

Matrika  $\mathbf{B}$  je definirana:

$$\mathbf{B}_i = \left[ \frac{\partial F_i}{\partial b_x} \quad \frac{\partial F_i}{\partial b_y} \quad \frac{\partial F_i}{\partial b_z} \quad \frac{\partial F_i}{\partial k_{11}} \quad \frac{\partial F_i}{\partial k_{22}} \quad \frac{\partial F_i}{\partial k_{33}} \quad \frac{\partial F_i}{\partial k_{21}} \quad \frac{\partial F_i}{\partial k_{31}} \quad \frac{\partial F_i}{\partial k_{32}} \right], \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{B}_N \end{bmatrix}, \quad (5.70)$$

kjer so:

$$\frac{\partial F_i}{\partial b_x} = 2\Delta t_i(-b_x\Delta t_i + \alpha_x k_{11}), \quad (5.71)$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial b_y} = 2\Delta t_i(-b_y\Delta t_i + \alpha_x k_{21} + \alpha_y k_{22}), \quad (5.72)$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial b_z} = 2\Delta t_i(-b_z\Delta t_i + \alpha_x k_{31} + \alpha_y k_{32} + \alpha_z k_{33}), \quad (5.73)$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial k_{11}} = -2\alpha_x(-b_x\Delta t_i + \alpha_x k_{11}), \quad (5.74)$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial k_{12}} = -2\alpha_y(-b_x\Delta t_i + \alpha_x k_{11}), \quad (5.75)$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial k_{13}} = -2\alpha_z(-b_x\Delta t_i + \alpha_x k_{11}), \quad (5.76)$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial k_{21}} = -2\alpha_x(-b_y\Delta t_i + \alpha_x k_{21} + \alpha_y k_{22}), \quad (5.77)$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial k_{22}} = -2\alpha_y(-b_y\Delta t_i + \alpha_x k_{21} + \alpha_y k_{22}), \quad (5.78)$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial k_{23}} = -2\alpha_z(-b_y\Delta t_i + \alpha_x k_{21} + \alpha_y k_{22}), \quad (5.79)$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial k_{31}} = -2\alpha_x(-b_z\Delta t_i + \alpha_x k_{31} + \alpha_y k_{32} + \alpha_z k_{33}), \quad (5.80)$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial k_{32}} = -2\alpha_y(-b_z\Delta t_i + \alpha_x k_{31} + \alpha_y k_{32} + \alpha_z k_{33}), \quad (5.81)$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial k_{33}} = -2\alpha_z(-b_z\Delta t_i + \alpha_x k_{31} + \alpha_y k_{32} + \alpha_z k_{33}). \quad (5.82)$$

Vektor odstopanj  $\mathbf{f}$  je definiran:

$$\mathbf{f}_i = (k_{11}\alpha_{ux_i} - b_x\Delta t_i)^2 + (k_{21}\alpha_{ux_i} + k_{22}\alpha_{uy_i} - b_y\Delta t_i)^2 + (k_{31}\alpha_{ux_i} + k_{32}\alpha_{uy_i} + k_{33}\alpha_{uz_i} - b_z\Delta t_i)^2 - \alpha_i^2,$$

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_i \\ \vdots \\ \mathbf{f}_N \end{bmatrix}. \quad (5.83)$$

Vektor popravkov neznank  $\Delta$  je definiran kot:

$$\Delta = [\delta b_x \quad \delta b_y \quad \delta b_z \quad \delta k_{11} \quad \delta k_{22} \quad \delta k_{33} \quad \delta k_{21} \quad \delta k_{31} \quad \delta k_{32}]^T. \quad (5.84)$$

Vektor popravkov neznank  $\Delta$  izračunamo (Mikhail idr., 1978):

$$\Delta = (\mathbf{B}^T(\mathbf{AQA}^T)^{-1}\mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T(\mathbf{AQA}^T)^{-1} \mathbf{f}, \quad (5.85)$$

kjer je  $\mathbf{Q}$  matrika kofaktorjev opazovanj.

Natančnost neznank ocenimo s kovariančno matriko  $\Sigma_{\mathbf{dd}}$ :

$$\Sigma_{\mathbf{dd}} = \hat{\sigma}_0^2 (\mathbf{B}^T(\mathbf{AQA}^T)^{-1}\mathbf{B})^{-1}, \quad (5.86)$$

kjer je  $\hat{\sigma}_0^2$  referenčna varianca aposteriori, ki jo izračunamo:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{r}, \quad (5.87)$$

kjer je  $r$  število prostostnih stopenj. Referenčna varianca aposteriori nam poda oceno uteženega povprečja natančnosti opazovanj. V vektorju  $\mathbf{v}$  so zbrani popravki meritev:

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}^T(\mathbf{AQA}^T)^{-1}(\mathbf{f} - \mathbf{B}\Delta). \quad (5.88)$$

V prvi iteraciji izravnave za približne vrednosti neznank lahko izberemo:

$$\mathbf{T}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_0 = [0 \quad 0 \quad 0]^T. \quad (5.89)$$

Iteracije izravnave nato tečejo, vse dokler je  $|\Delta| > \varepsilon$ , kjer je  $\varepsilon$  izbrano poljubno majhno število.

### 5.3.1.1 Poenostavljen test kalibracije žiroskopa

Pri poenostavljenem testu senzor IMU namestimo na daljnogled robotskega tahimetra v eni orientaciji in ga vrtimo za izbrani poljuben kot. Na tak način zagotovimo meritve, na podlagi katerih lahko določimo tri kalibracijske parametre. Ker pa ob tem izkoristimo dejstvo, da pogrešek odmika ničelne vrednosti določimo že pri statičnem senzorju, lahko s postopkom vrtenja senzorja za izbrani kot določimo tudi pogrešek merila. Na tak način lahko določimo šest kalibracijskih parametrov. Glede na kalibracijski model žiroskopa (5.58) lahko torej določimo naslednje kalibracijske parametre: faktorje merila ( $k_{11}, k_{22}, k_{33}$ ) in pogreške začetnih vrednosti ( $b_x, b_y, b_z$ ).

Matrika  $\mathbf{B}$  v tem primeru definirana:

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_i}{\partial k_{11}} & \frac{\partial F_i}{\partial k_{22}} & \frac{\partial F_i}{\partial k_{33}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{B}_N \end{bmatrix}, \quad (5.90)$$

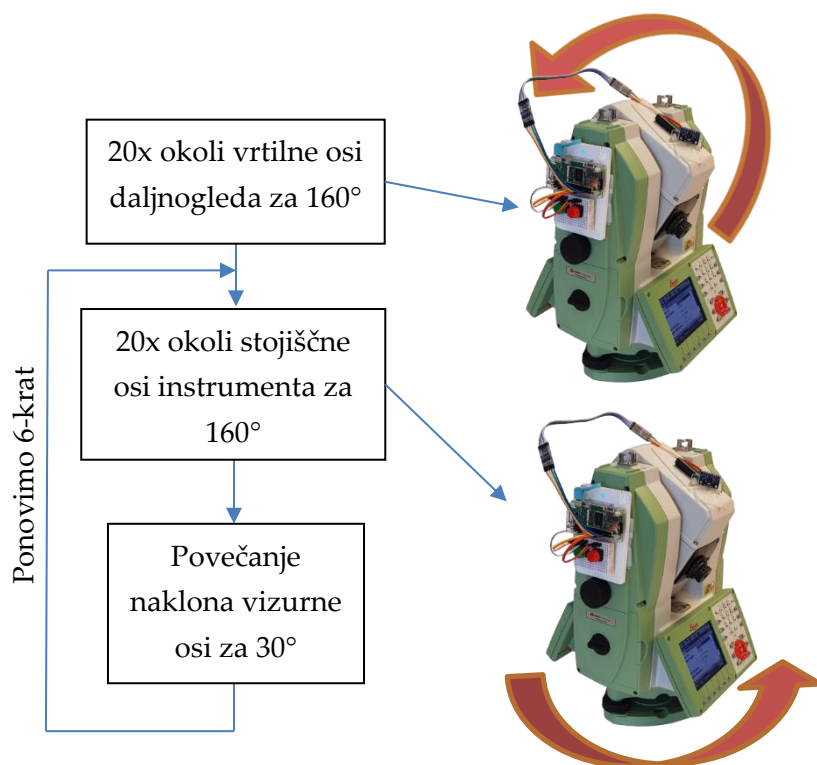
Vektor odstopanj  $\mathbf{f}$  je definiran:

$$\mathbf{f}_i = (k_{11}\alpha_{ux_i} - b_x)^2 + (k_{22}\alpha_{uy_i} - b_y)^2 + (k_{33}\alpha_{uz_i} - b_z)^2 - \alpha_i^2, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{f}_N \end{bmatrix}. \quad (5.91)$$

Vektor popravkov neznank  $\Delta$  je definiran kot:

$$\Delta = [\delta k_{11} \quad \delta k_{22} \quad \delta k_{33}]^T. \quad (5.92)$$

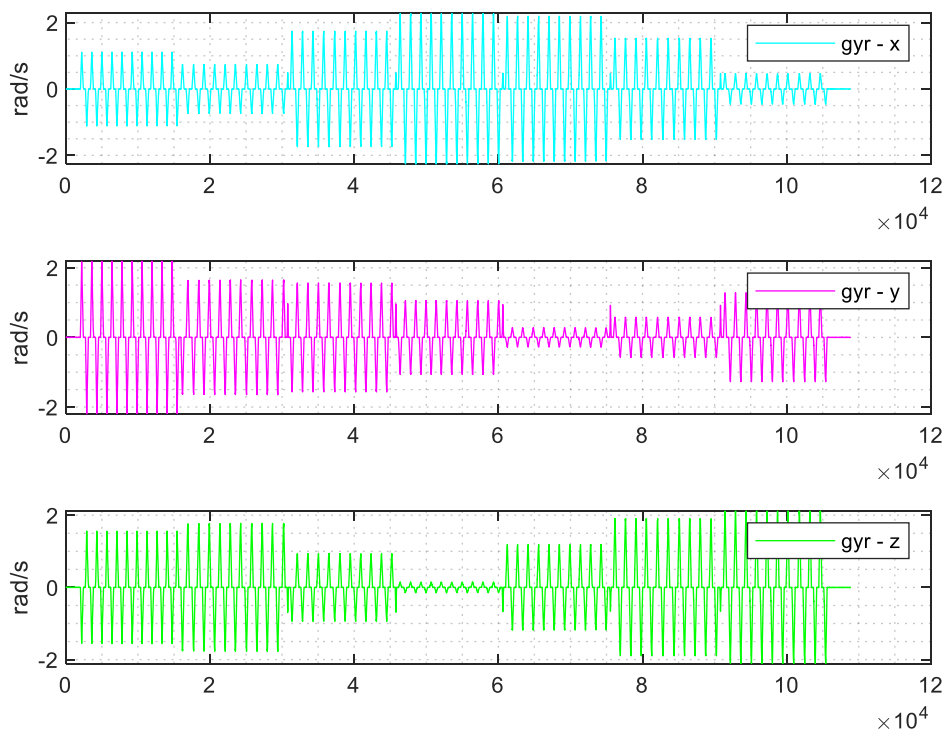
Postopek testiranja je sestavljen iz vrtenja robotskega tahimetra okoli njegove stojiščne osi pri različnih zenitnih razdaljah daljnogleda. V prvem koraku smo daljnogled 10-krat zavrteli okoli vrtilne osi daljnogleda za  $160^\circ$  navzgor in navzdol (skupaj 20-krat). V naslednjih šestih korakih smo instrument vrteli okoli njegove stojiščne osi 10-krat v eno in drugo smer za izbrani kot  $160^\circ$  (skupaj 20-krat). Med posameznimi koraki smo naklon daljnogleda povečali za  $30^\circ$ . Postopek testiranja je shematično prikazan na sliki 5.10.



Slika 5.10: Postopek enostavnega testa kalibracije žiroskopa

Figure 5.10: A simple test procedure of gyroscope calibration

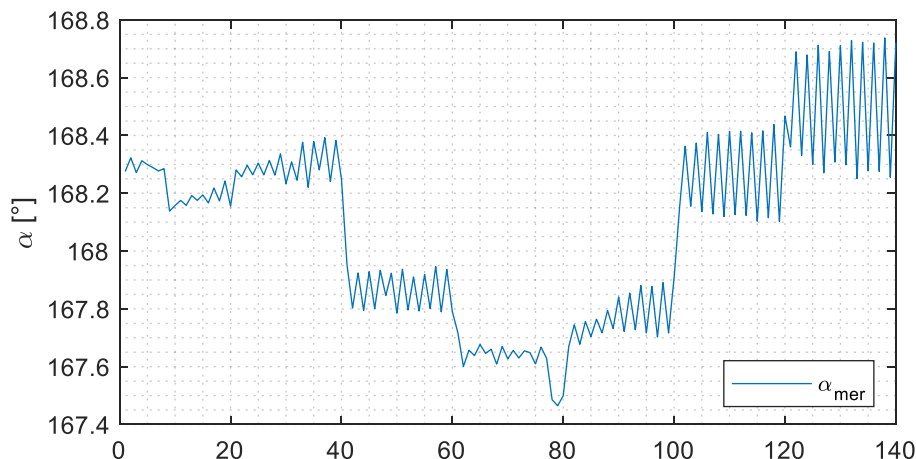
Na sliki 5.11 so prikazane meritve žiroskopa pri enostavnem testu kalibracije.



Slika 5.11: Meritve žiroskopa pri enostavnem testu kalibracije

Figure 5.11: Gyroscope measurements in a simple calibration test

Na podlagi izmerjenih kotnih hitrosti v vseh treh oseh sensorja ob zasuku instrumenta smo izračunali skupni kot zasuka ob posamezni rotaciji (enačbe (5.59)–(5.62)). Na sliki 5.12 so prikazani izmerjeni koti zasuka pri izbranem referenčnem kotu vrtenja  $160^\circ$ .



**Slika 5.12: Izmerjeni koti zasuka pri enostavnem testu kalibracije žiroskopa**

*Figure 5.12: Measured rotation angles in a simple gyroscope calibration test*

Na podlagi izmerjenih kotov zasuka pri enostavnem testu kalibracije smo določili naslednje kalibracijske parametre:

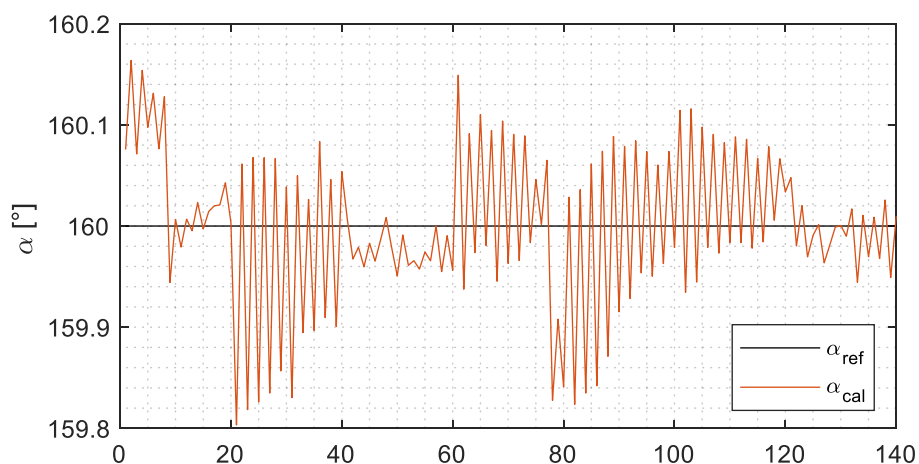
$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0.9552 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9520 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9484 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -0.0006 \\ -0.0005 \\ -0.0015 \end{bmatrix} \text{ rad/s.}$$

Srednji standardni odklon meritev znaša  $\hat{\sigma}_0 = 0.0007 \text{ rad/s}$ . Standardni odklon končnih ocenjenih kalibracijskih parametrov pa je:

$$\sigma_{k_{11}} = 0.0001, \sigma_{k_{22}} = 0.0001, \sigma_{k_{33}} = 0.0001,$$

$$\sigma_{b_x} = 0.0008 \text{ rad/s}, \sigma_{b_y} = 0.0008 \text{ rad/s}, \sigma_{b_z} = 0.0009 \text{ rad/s}.$$

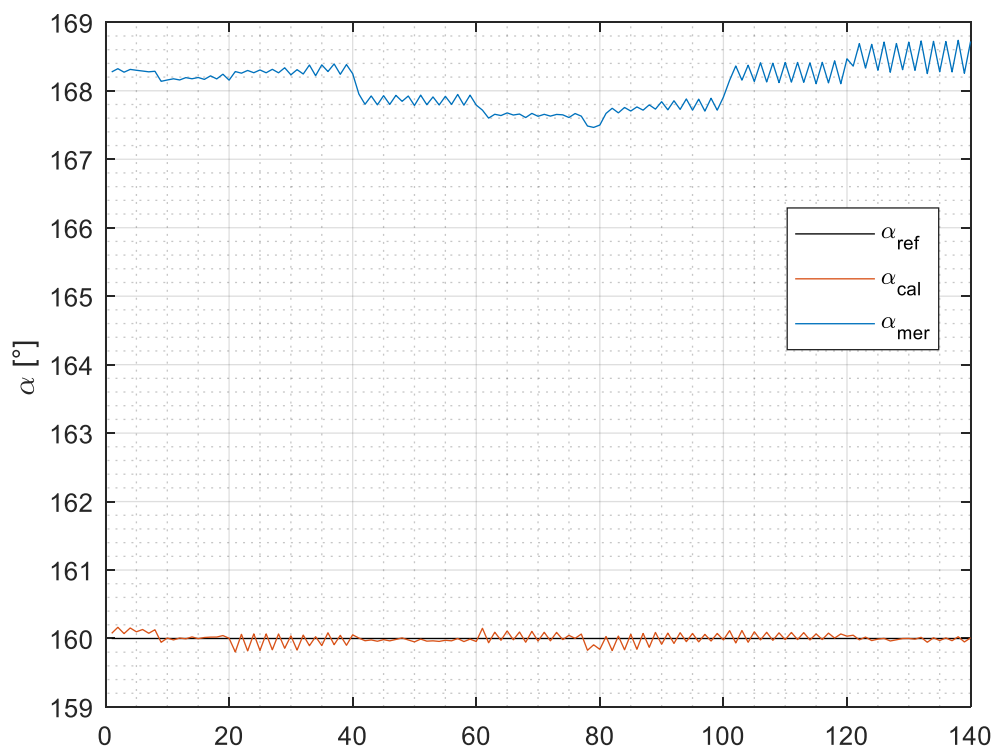
Na sliki 5.13 so prikazani izmerjeni koti zasuka izračunani z upoštevanimi kalibracijskimi parametri žiroskopa in referenčna vrednost kota zasuka ( $160^\circ$ ). Na sliki 5.14 pa je prikazana primerjava izmerjenih kotov pred kalibracijo in po njej.



**Slika 5.13: Izmerjeni koti zasuka z upoštevanimi kalibracijskimi parametri žiroskopa**

*Figure 5.13: Measured rotation angles with considered gyroscope calibration parameters*

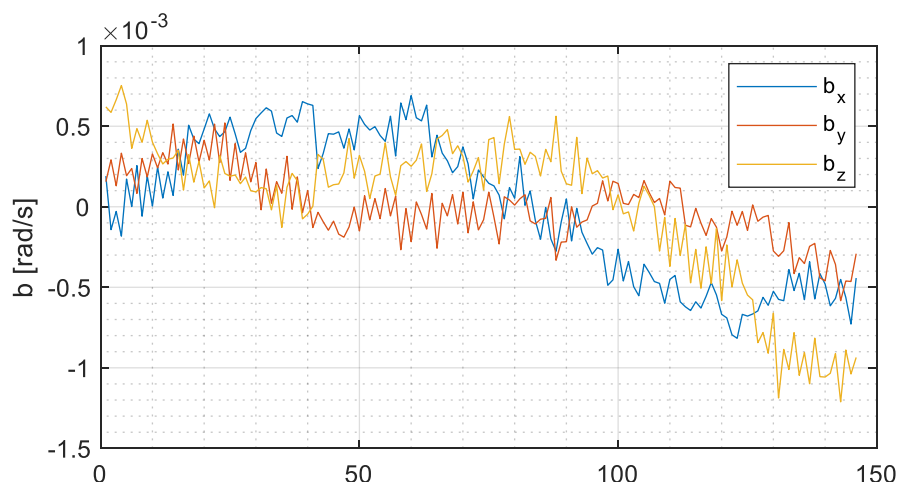
Na slikah 5.12, 5.13 in 5.14 opazimo nihanja vrednosti izmerjenega kota zasuka. Razlog je nestabilnost pogreška začetne vrednosti v času izvedbe enostavnega testa kalibracije žiroskopa. Na sliki 5.15 so prikazane vrednosti pogreška začetne vrednosti v mirujočih intervalih med posameznimi rotacijami. Vidimo, da se je začetna vrednost žiroskopa med postopkom kalibracije spreminjala za okoli 1 mrad/s.



**Slika 5.14: Primerjava izmerjenih kotov z upoštevanjem in brez upoštevanja kalibracijskih parametrov**

*Figure 5.14: Comparison of measured angles with and without consideration of calibration parameters*

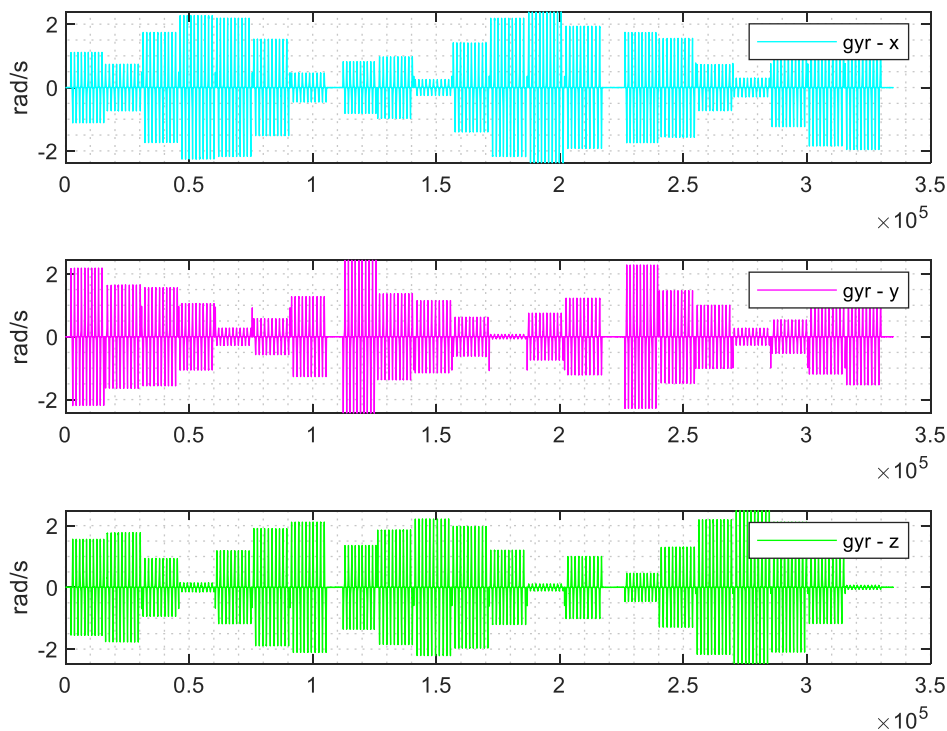




Slika 5.15: Vrednost pogreška začetne vrednosti v mirujočem intervalu med rotacijami  
Figure 5.15: Bias offset in the stationary interval between rotations

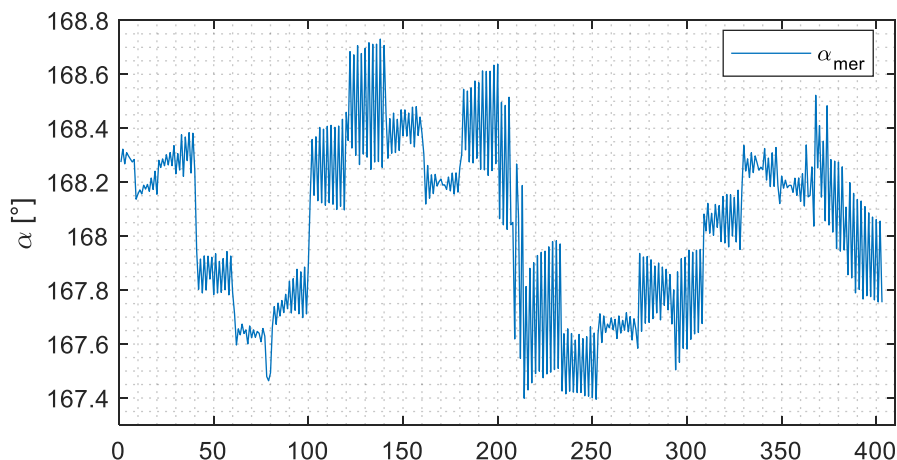
### 5.3.1.2 Popolni test kalibracije žiroskopa

Pri popolnem testu senzor IMU namestimo na daljnogled robotskega tahimetra pri vsaj treh različnih orientacijah. Pri posamezni namestitvi senzorja IMU je postopek testiranja enak kot v primeru enostavnega testa (slika 5.10). Za določitev kalibracijskih parametrov uporabimo popolni kalibracijski model žiroskopa, opisan v poglavju 5.3.1 Kalibracijski model žiroskopa. Na sliki 5.16 so prikazane surove meritve žiroskopa pri popolnem testu.



Slika 5.16: Meritve žiroskopa pri popolnem testu  
Figure 5.16: Gyroscope measurements in a complete test

Na sliki 5.17 so prikazani izmerjeni koti zasuka brez upoštevanja kalibracijskih parametrov, na sliki 5.18 pa izmerjeni koti zasuka z upoštevanimi kalibracijskimi parametri.



**Slika 5.17: Izmerjeni koti zasuka pri popolnem testu**

*Figure 5.17: Measured rotation angles in a complete test*

Na podlagi izmerjenih kotov zasuka pri popolnem testu kalibracije smo določili naslednje kalibracijske parametre:

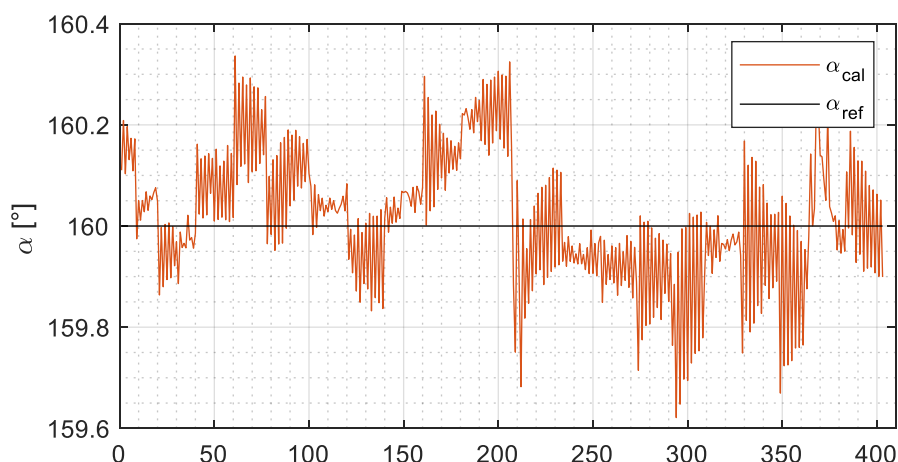
$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0.9556 & 0 & 0 \\ -0.0020 & 0.9500 & 0 \\ -0.0016 & -0.0022 & 0.9505 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -0.0006 \\ -0.0015 \\ -0.0008 \end{bmatrix} \text{ rad/s.}$$

Srednji standardni odklon meritev znaša  $\hat{\sigma}_0 = 0.0005 \text{ rad/s}$ . Standardni odklon končnih ocenjenih kalibracijskih parametrov pa je:

$$\sigma_{k_{11}} = 0.0066, \sigma_{k_{22}} = 0.0013, \sigma_{k_{33}} = 0.0035, \sigma_{k_{21}} = 0.0013, \sigma_{k_{31}} = 0.0057, \sigma_{k_{32}} = 0.0031,$$

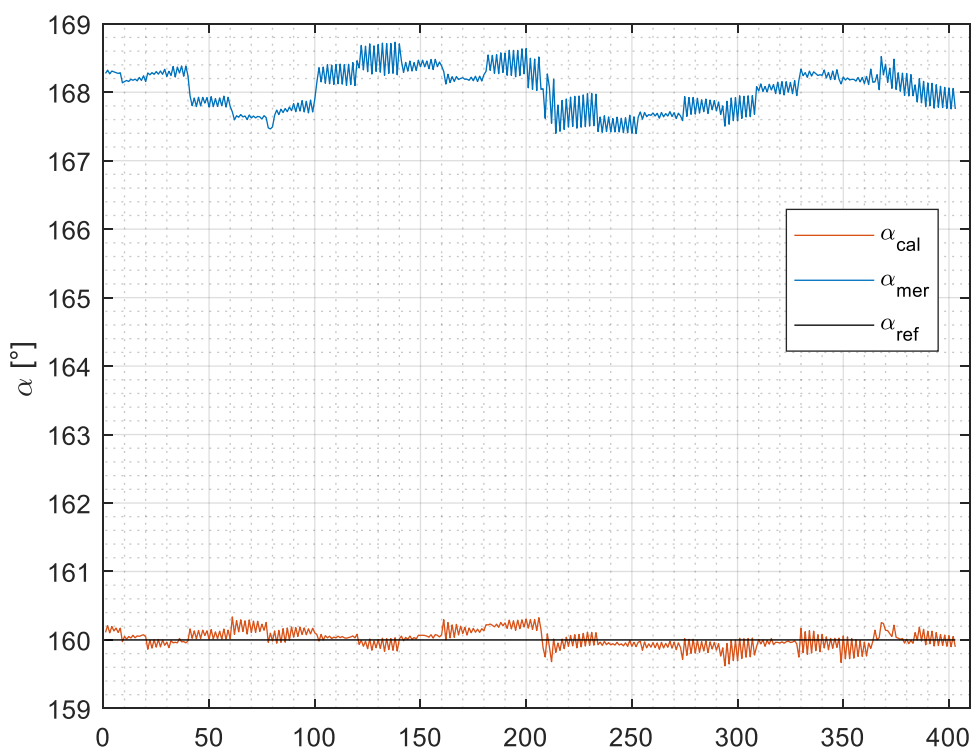
$$\sigma_{b_x} = 0.0003 \text{ rad/s}, \sigma_{b_y} = 0.0005 \text{ rad/s}, \sigma_{b_z} = 0.0001 \text{ rad/s}.$$

Na sliki 5.18 so prikazani izmerjeni koti zasuka, izračunani z upoštevanimi kalibracijskimi parametri žiroskopa, in referenčna vrednost kota zasuka ( $\alpha_{ref} = 160^\circ$ ).



**Slika 5.18: Izmerjeni koti zasuka z upoštevanimi kalibracijskimi parametri žiroskopa**  
*Figure 5.18: Measured rotation angles with considered gyroscope calibration parameters*

Na sliki 5.19 so prikazani koti zasuka, izračunani na podlagi surovih meritev ( $\alpha_{mer}$ ) in na podlagi meritve z upoštevanimi kalibracijskimi parametri ( $\alpha_{cal}$ ).



**Slika 5.19: Izmerjeni koti zasuka brez upoštevanja kalibracijskih parametrov in z upoštevanimi kalibracijskimi parametri**  
*Figure 5.19: Measured rotation angles without considering the calibration parameters and with the calibration parameters taken into account*

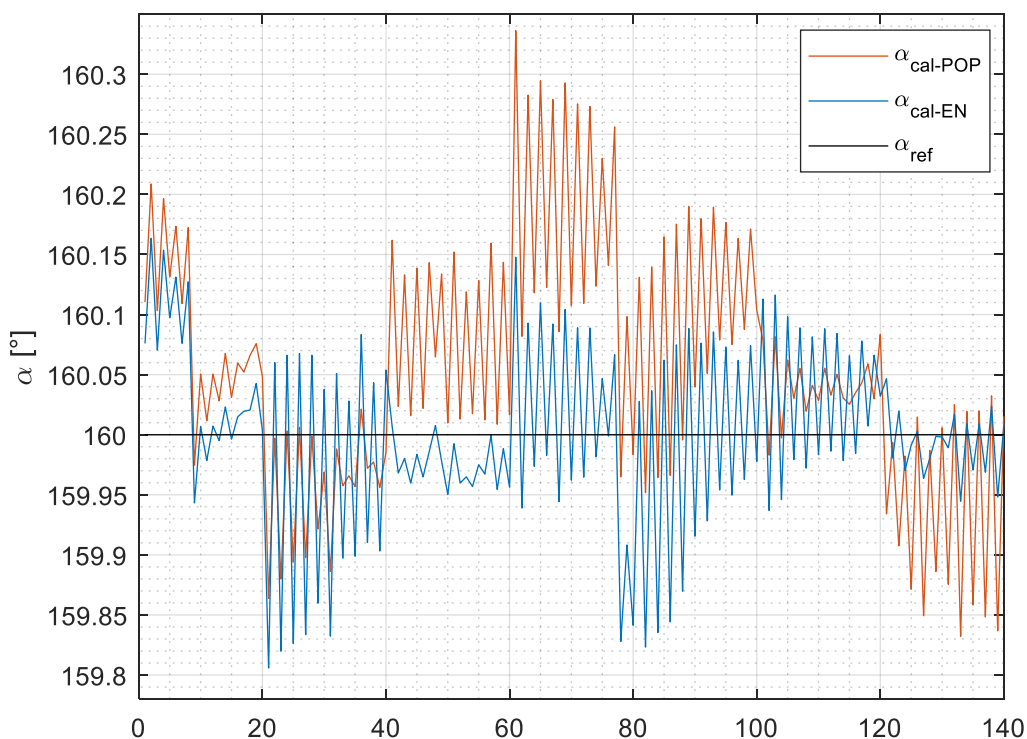
### 5.3.1.3 Primerjava enostavnega in popolnega testa kalibracije

Na sliki 5.20 je prikazana primerjava izmerjenih kotov zasuka z upoštevanimi kalibracijskimi parametri enostavnega testa ( $\alpha_{cal-EN}$ ) in kalibracijskimi parametri popolnega testa ( $\alpha_{cal-POP}$ ).

Za cenilko kakovosti obeh rezultatov smo uporabili razlike RMSE med izmerjeno in referenčno vrednostjo kota zasuka. RMSE popolnega testa ( $RMSE_{POP}$ ) je za 53 % večji od RMSE enostavnega testa ( $RMSE_{EN}$ ):

$$RMSE_{EN}(\alpha_{ref} - \alpha_{cal-EN}) = 0.076^\circ,$$

$$RMSE_{POP}(\alpha_{ref} - \alpha_{cal-POP}) = 0.116^\circ.$$



**Slika 5.20: Primerjava izmerjenih kotov zasuka pri enostavnem in popolnem testu**

*Figure 5.20: Comparison of measured rotation angles in a simple and complete test*

Na sliki 5.20 vidimo, da izmerjeni koti zasuka, ki so izračunani z uporabo kalibracijskih parametrov enostavnega testa ( $\alpha_{cal-EN}$ ), sovpadajo z referenčnim kotom zasuka ( $\alpha_{ref}$ ) bolje kakor kot zasuka, ki je izračunan z uporabo kalibracijskih parametrov popolnega testa ( $\alpha_{cal-POP}$ ). Največji vpliv na kakovost rezultatov ima nestabilnost pogreška začetne vrednosti. Pri popolnem testu se je izračunani pogrešek začetne vrednosti nanašal na vse tri serije meritev in nekoliko bolj odstopa od dejanskega pogreška, ki je bil prisoten samo v prvi seriji meritev. Neodpravljeni pogrešek začetne vrednosti pa ima očitno precej večji vpliv na končne rezultate kot pogreški neortogonalnosti in neusklajenosti osi.

## 5.4 Vpliv napak IMU na določitev položaja

Vsak neodpravljeni pogrešek pospeškmera ali žiroskopa vodi v napako pri izračunu orientacije, hitrosti in položaja objekta. Izvor napak je v šumu meritev, napakah merila in začetne vrednosti. Največji vpliv ima pogrešek odmika začetne vrednosti, ki je sestavljen iz dveh delov: kratko-časovni deterministični odmik in dolgo-časovno naključno lezenje, kar se odraža v nestabilnosti pogreška odmika začetne vrednosti (Chow, 2011; Noureldin idr., 2013).

Napaka določitve pogreška odmika začetne vrednosti pospeškmera  $b_a$  povzroči napako prve stopnje v izračunu hitrosti  $\delta v$  in napako druge stopnje v izračunu položaja objekta  $\delta r$ :

$$\delta v = \int_0^T b_a dT, \quad \delta r = \int_0^T v dT = \iint_0^T b_a T dT = \frac{1}{2} b_a T^2, \quad (5.93)$$

kjer je  $T$  čas delovanja IMU.

Neodpravljen pogrešek odmika začetne vrednosti žiroskopa  $b_g$  povzroči napako pri določitvi kotov orientacije (kot nagiba in vrtenja) objekta v prostoru  $\delta\theta$ :

$$\delta\theta = \int_0^T b_g dT = b_g T, \quad (5.94)$$

kar vodi v napačno definirano transformacijsko matriko  $\mathbf{R}_b^1$  (enačba (3.13)), s katero transformiramo izmerjene pospeške iz objektnega koordinatnega sistema v lokalni navigacijski koordinatni sistem. Velikost napake v pospešku  $\delta a$  je:

$$\delta a = g \sin(\delta\theta) \approx g\delta\theta = g b_g T. \quad (5.95)$$

Po prvi integraciji pospeška dobimo napako v izračunani hitrosti objekta  $\delta v$ :

$$\delta v = \int_0^T g b_g T dT = \frac{1}{2} g b_g T^2. \quad (5.96)$$

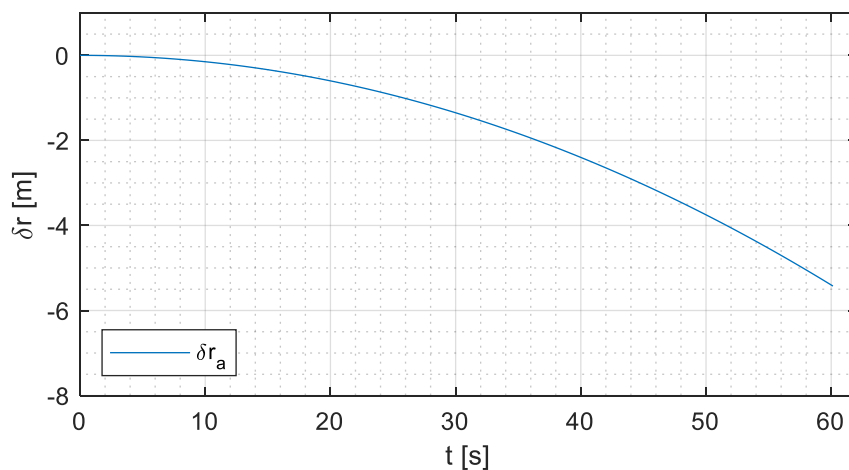
Po drugi integraciji pospeška, oz. prvi integraciji hitrosti objekta, dobimo napako v izračunanem položaju objekta  $\delta r$ :

$$\delta r = \int_0^T \delta v dT = \iint_0^T \frac{1}{2} g b_g T^2 dT = \frac{1}{6} g b_g T^3. \quad (5.97)$$

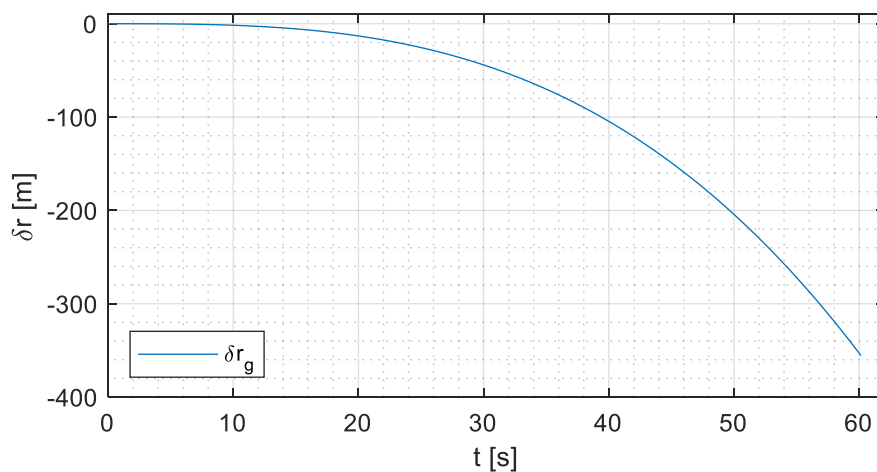
Vidimo, da napaka v določitvi pogreška odmika začetne vrednosti žiroskopa povzroči napako druge stopnje v določitvi hitrosti objekta in napako tretje stopnje v določitvi položaja objekta.

Kakovost žiroskopa tako definira kvaliteto senzorja IMU in predstavlja glavno omejitev določitve kakovostnih navigacijskih parametrov.

Preverili bomo, kakšen vpliv imata neodstranjena pogreška odmika začetne vrednosti pospeškmera in žiroskopa na določitev položaja senzorja IMU. Za pogrešek odmika začetne vrednosti pospeškmera smo izbrali vrednost  $b_a = 0.003 \text{ m/s}^2$ , za pogrešek odmika začetne vrednosti žiroskopa pa  $b_g = 0.001 \text{ rad/s}$ . Na podlagi enačbe (5.93) in enačbe (5.97) smo izračunali vrednost napake v položaju senzorja IMU. Na sliki 5.21 je grafično prikazan vpliv neodstranjenega pogreška odmika začetne vrednosti pospeškmera za  $b_a = 0.003 \text{ m/s}^2$ . Vidimo, da pogrešek po 1 minuti delovanja senzorja povzroči lezenje v položaju nekaj metrov. Na sliki 5.22 pa je grafično prikazan vpliv neodstranjenega pogreška odmika začetne vrednosti žiroskopa za  $b_g = 0.001 \text{ rad/s}$ . Vidimo, da pogrešek po 1 minuti delovanja senzorja povzroči lezenje v položaju nekaj sto metrov. Tak velikostni red lezenja položaja lahko pričakujemo pri uporabi nizkocenovnih senzorjev MEMS-IMU.



Slika 5.21: Vpliv neodpravljenega pogreška odmika začetne vrednosti pospeškmera ( $b_a = 0.003 \text{ m/s}^2$ )  
Figure 5.21: Impact of uncorrected accelerometer bias error ( $b_a = 0.003 \text{ m/s}^2$ )

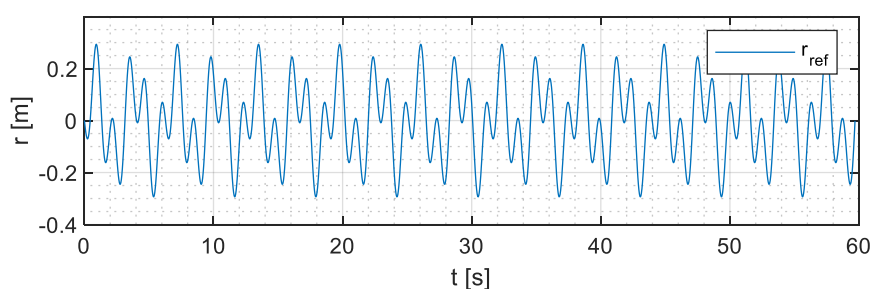


Slika 5.22: Vpliv neodpravljenega pogreška odmika začetne vrednosti žiroskopa ( $b_g = 0.001 \text{ rad/s}$ )  
Figure 5.22: Impact of uncorrected gyroscope bias error ( $b_g = 0.001 \text{ rad/s}$ )

## 6 Določitev položaja s samostojno uporabo senzorja IMU

V tem poglavju bomo opisali in analizirali možnost samostojne uporabe nizkocenovnega senzorja IMU pri določitvi položaja objekta v prostoru. V prvem koraku bomo s simuliranimi podatki senzorja IMU in upoštevanjem napak, ki so opisane v poglavju 5.4 *Vpliv napak IMU na določitev položaja* ocenili kakovost določitve položaja oscilirajočega objekta. Najprej simuliramo referenčno trajektorijo objekta (6.1), ki je izbrana poljubno in jo opiše enačba:

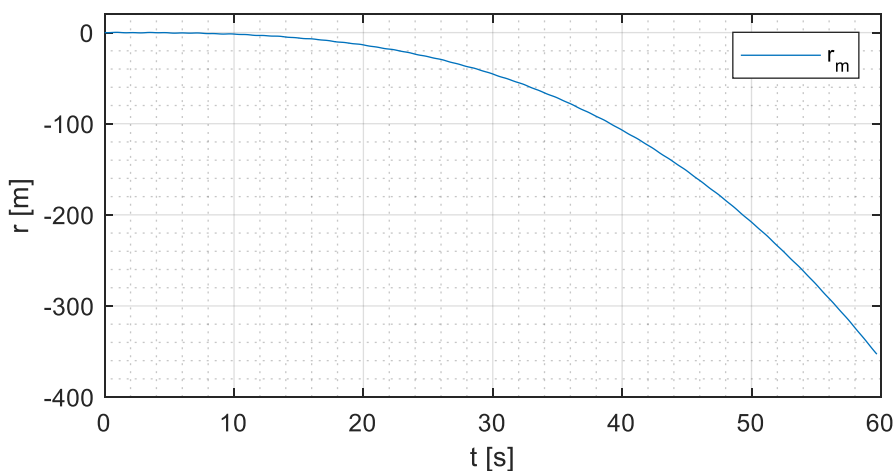
$$r_{ref}(t) = 0.15 * \sin\left(\frac{t}{50}\right) + 0.15 * \cos\left(\frac{t}{20} + \frac{\pi}{2}\right). \quad (6.1)$$



Slika 6.1: Simulirana referenčna trajektorija

Figure 6.1: Simulated reference trajectory

Simulirani referenčni trajektoriji prištejemo napake, ki nastanejo zaradi neodstranjenih glavnih pogreškov senzorja IMU. Upoštevamo napaki zaradi neodstranjenega pogreška odmika začetne vrednosti pospeškoma in žiroskopa (prikazana na sliki 5.21 in sliki 5.22). Na sliki 6.2 je prikazana simulirana trajektorija objekta, ki je obremenjena z neodpravljenimi pogreški odmika začetne vrednosti pospeškoma in žiroskopa.



Slika 6.2: Simulacija izmerjene trajektorije

Figure 6.2: Simulation of measured trajectory

V nadaljevanju bomo uporabili metode, s katerimi lahko v različni meri odstranimo nizkofrekvenčni trend lezenja položaja objekta. Obravnavali bomo metodi aproksimacije trenda s polinomom višje stopnje in visokoprepustnega Zero Phase filtra.

## 6.1 Aproksimacija trenda lezenja položaja s polinomom višje stopnje

Napake pri določitvi položaja z nizkocenovnim IMU senzorjem imajo naravo nizkofrekvenčnega lezenja, kar lahko vidimo na sliki 5.21 in sliki 5.22. Veliko lezenje položaja objekta, ki jih povzročijo napake senzorja IMU, lahko v prvem koraku aproksimiramo s polinomom višje stopnje in ga v drugem koraku odštejemo od osnovnega gibanja objekta. Na tak način lahko pridobimo oceno gibanja objekta višje stopnje od aproksimiranega polinoma.

V literaturi (Yang idr., 2006; Millor idr., 2014) za aproksimacijo trajektorije objekta, ki je obremenjena z napakami senzorja IMU, svetujejo uporabo polinoma 4. stopnje. Izmerjeno trajektorijo z metodo najmanjših kvadratov aproksimiramo s polinomom:

$$p_{pol}(t) = k_1 t^4 + k_2 t^3 + k_3 t^2 + k_4 t. \quad (6.2)$$

Za trajektorijo prikazano na sliki 6.2 pridobimo naslednje koeficiente polinoma:

$$k_1 = -0.00164,$$

$$k_2 = -0.00136,$$

$$k_3 = -0.00327,$$

$$k_4 = 0.01902,$$

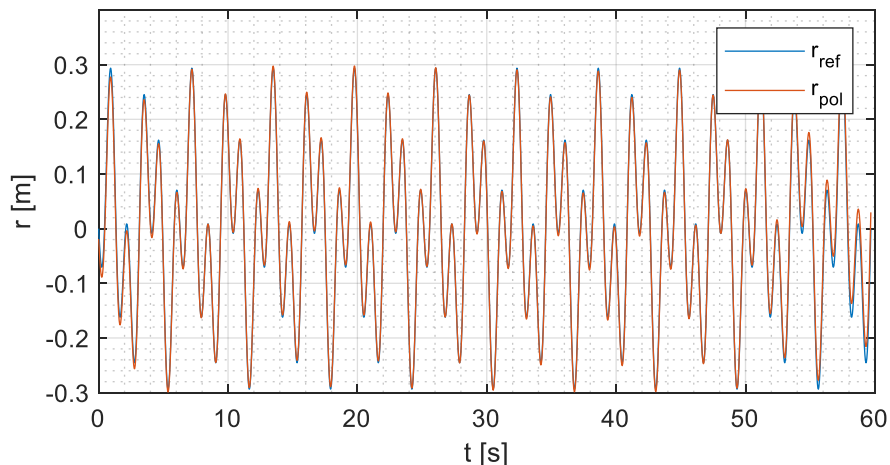
Trajektorija  $r_m$  (slika 6.2) predstavlja simulirano trajektorijo, ki bi jo določili na podlagi meritev IMU, kjer so prisotni neodpravljeni pogreški IMU. Izmerjena trajektorija je tako seštevek pravega gibanja objekta in gibanja objekta, ki je posledica pogreškov meritev IMU, pri čemer le-ta močno prevladuje. Trajektorija  $p_{pol}$  je aproksimacija izmerjene trajektorije  $r_m$  in predstavlja oceno napake v položaju, ki nastane zaradi napak senzorja IMU.

Če trajektorijo  $p_{pol}$  odštejemo od izmerjene trajektorije  $r_m$ , dobimo trajektorijo  $r_{pol}$ , ki predstavlja oceno pravega gibanja objekta:

$$r_{pol} = r_m - p_{pol}. \quad (6.3)$$



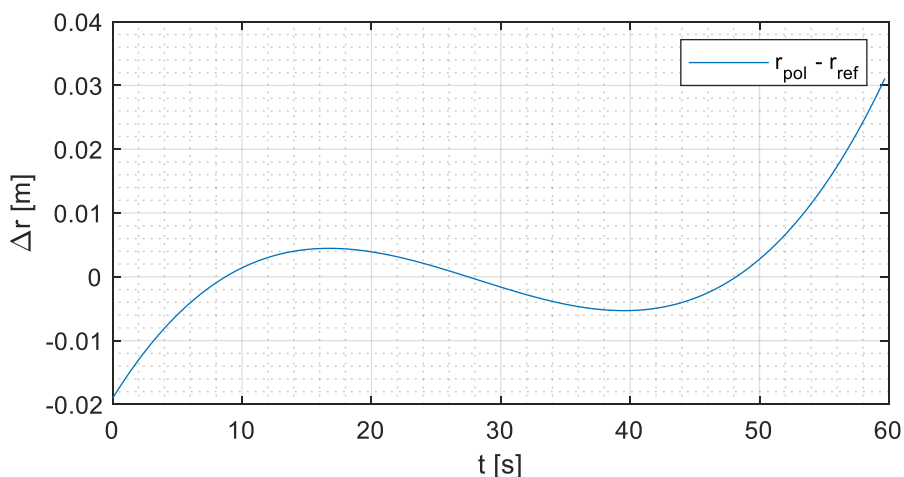
Na sliki 6.3 sta prikazani referenčna trajektorija  $r_{ref}$  in ocenjena trajektorija pravega gibanja objekta  $r_{pol}$ .



**Slika 6.3: Referenčna trajektorija in trajektorija z odštetim trendom določenim s aproksimacijo polinoma**

*Figure 6.3: Reference trajectory and trajectory with subtracted trend determined by polynomial approximation*

Na sliki 6.3 vidimo, da obe trajektoriji precej dobro sovpadata. To je pričakovano, saj smo pri izračunu simulirane izmerjene trajektorije upoštevali konstantne napake IMU. Razlike med obema trajektorijama so prikazane na sliki 6.4.



**Slika 6.4: Razlika med  $r_{ref}$  in  $r_{pol}$**

*Figure 6.4: Difference between  $r_{ref}$  in  $r_{pol}$*

Kakovost ocenjene trajektorija pravega gibanja objekta  $r_{pol}$  smo ocenili na podlagi treh cenilk kakovosti: RMSE, SNR (angl. signal-to-noise-ratio) in korelacijo z referenčno trajektorijo.

Razlike RMSE med obema trajektorijama izračunamo po enačbi:

$$RMSE_r = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (r_{pol_i} - r_{ref_i})^2}{n}}. \quad (6.4)$$

SNR je definiran kot:

$$SNR = \left( \frac{A_{signal}}{A_{sum}} \right)^2, \quad (6.5)$$

kjer  $A_{signal}$  predstavlja RMSE signala (v našem primeru izračunane trajektorije),  $A_{sum}$  pa predstavlja RMSE šuma signala, ki je definiran kot razlika med referenčno in izračunano trajektorijo. Večja kot je vrednost cenilke SNR manjši delež šuma je prisotnega v signalu.

Korelacijo med dvema trajektorijama  $r_{ref}$  in  $r_{pol}$  izračunamo:

$$corr = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left[ \left( \frac{r_{pol_i} - \bar{r}_{pol}}{std(r_{pol})} \right) \left( \frac{r_{ref_i} - \bar{r}_{ref}}{std(r_{ref})} \right) \right], \quad (6.6)$$

kjer  $n$  predstavlja velikost vzorca,  $std(r_{pol})$  in  $std(r_{ref})$  pa standardni odklon posamezne trajektorije. Vrednost cenilke kakovosti  $corr$  se lahko giba od -1 do 1. Izračunana korelacija dveh identičnih trajektorij (ali signalov) ima vrednost 1.

V preglednici 6.1 so predstavljene vrednosti cenilk kakovosti ocenjene trajektorija pravega gibanja objekta  $r_{pol}$ .

**Preglednica 6.1: Vrednosti cenilk kakovosti trajektorije  $r_{pol}$**

*Table 6.1:  $r_{pol}$  trajectory quality estimators*

cenilka	vrednost
SNR	325.8
$corr$	0.998
$RMSE_r$	0.008 m

Trend lezenja smo v tem primeru odstranili na podlagi aproksimacije gibanja s polinomom 4. stopnje. Metoda se dobro obnese v primeru konstante napake IMU, vendar se v realnih dinamičnih pogojih spreminjajo tudi slučajne komponente pogreškov IMU, zato lahko pri obdelavi dejanskih meritev IMU pričakujemo večja odstopanja med ocenjeno in referenčno trajektorijo.

## 6.2 Odstranitev trenda lezenja položaja z Zero Phase filtrom

Izmerjena simulirana trajektorija (slika 6.2) vsebuje trend, ki ga povzročajo napake senzorja IMU. Trend je nizkofrekvenčne narave in ga lahko izločimo z uporabo visokoprepustnih filtrov. V aplikacijah, ki jih izvajamo v realnem času moramo uporabljati kavzalne filtre, kjer je izhodni argument funkcija predhodnih vhodnih signalov. V teh primerih prihaja pri izhodnem signalu do faznega zamika. V našem primeru imamo za obdelavo na voljo že celoten, zaključen signal in lahko uporabimo Zero Phase filter (ZPF), ki je poseben primer linearnega filtra in je nekavzalni filter. Najprej filtrira signal naprej v času, nato še v obratni smeri (Toivonen, 2004). Osnova Zero Phase filtra je uporaba lastnosti časovne reverzibilnosti diskretne Fouriereve transformacije (Cohen Tenoudji, 2016):

$$x[n] \xrightarrow{DTFT} X(e^{j\omega T}) \Leftrightarrow x[-n] \xrightarrow{DTFT} X^*(e^{j\omega T}). \quad (6.7)$$

Postopek Zero Phase filtra opišemo v naslednjih korakih:

1. nad signalom  $x[n]$  uporabimo funkcijo  $H(e^{j\omega T})$  :

$$Z(e^{j\omega T}) = H(e^{j\omega T})X(e^{j\omega T}), \quad (6.8)$$

2. nato uporabimo lastnost časovne obrnljivosti (10) in dobimo konjugirano vrednost:

$$W(e^{j\omega T}) = Z^*(e^{j\omega T}) = H^*(e^{j\omega T})X^*(e^{j\omega T}), \quad (6.9)$$

3. ponovno uporabimo funkcijo  $H(e^{j\omega T})$ :

$$V(e^{j\omega T}) = H(e^{j\omega T})W(e^{j\omega T}) = |H(e^{j\omega T})|^2 X^*(e^{j\omega T}), \quad (6.10)$$

4. podobno kot v drugem koraku, ponovno časovno obrnemo signal:

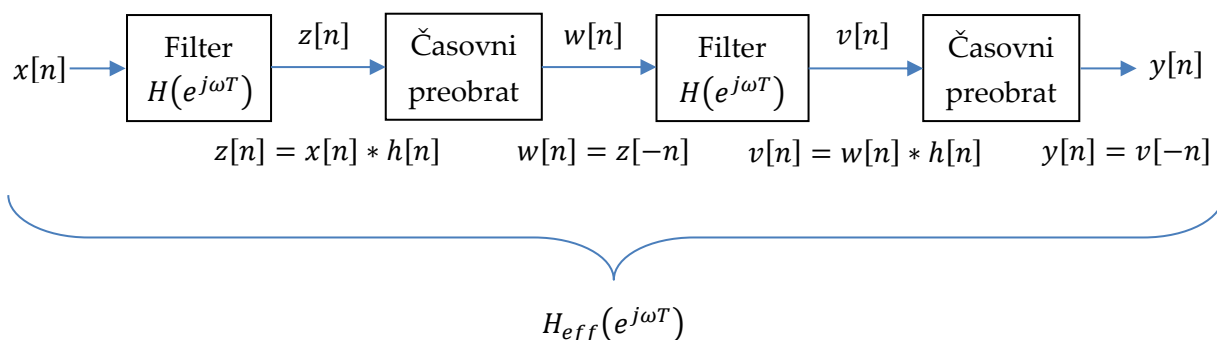
$$Y(e^{j\omega T}) = V^*(e^{j\omega T}) = |H(e^{j\omega T})|^2 X(e^{j\omega T}). \quad (6.11)$$

Vidimo, da je funkcija celotnega filtra enaka :

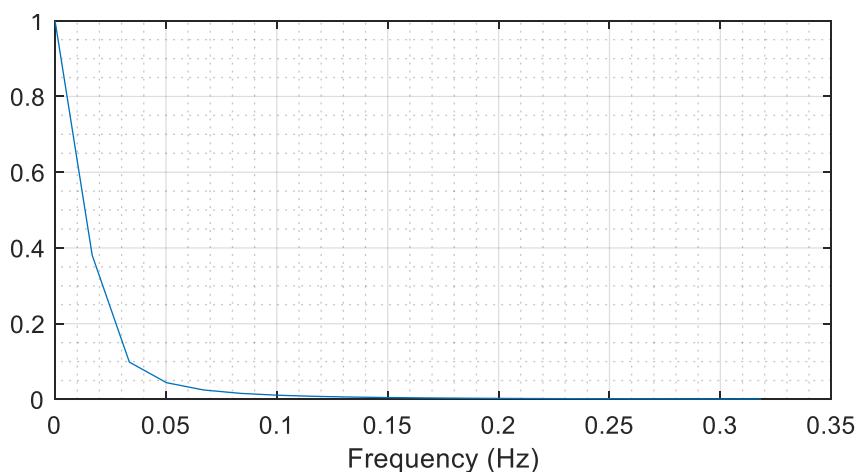
$$H_{eff}(e^{j\omega T}) = |H(e^{j\omega T})|^2, \quad (6.12)$$

kjer  $H_{eff}(e^{j\omega T})$  predstavlja realno, pozitivno, sodo funkcijo (Toivonen, 2004).

Postopek Zero Phase filtra  $H_{eff}(e^{j\omega T})$  lahko prikažemo shematično v diagramu (Mitra, 1997):



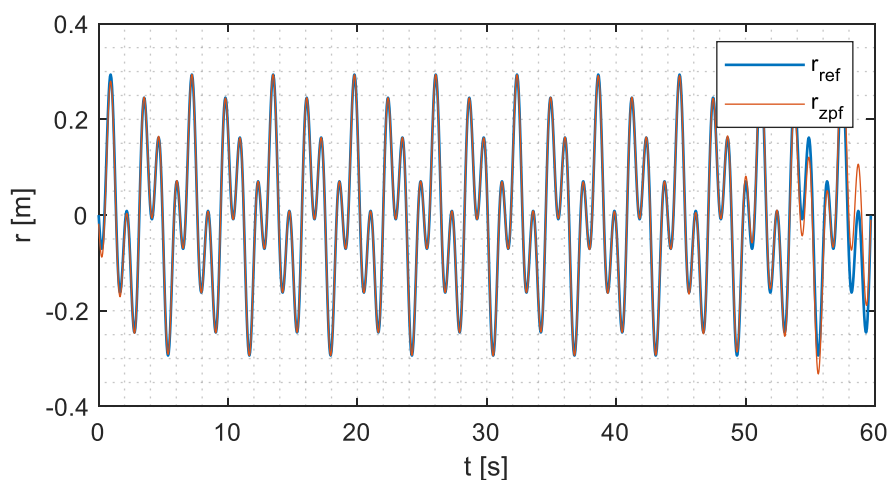
Trajektoriji, prikazani na sliki 6.2, bomo nizkofrekvenčni trend tokrat odstranili z uporabo Zero Phase filtra. Za Butterworthov filter moramo izbrati stopnjo filtra in mejo frekvenčne prepustnosti, kar lahko naredimo z analizo Fourierjeve transformacije (Butterworth, 1930; Bianchi idr., 2007). Na sliki 6.5 je prikazana normalizirana frekvenčna spektralna gostota vhodnega signala (v našem primeru je to trajektorija objekta).



**Slika 6.5: Normalizirana frekvenčna spektralna gostota**

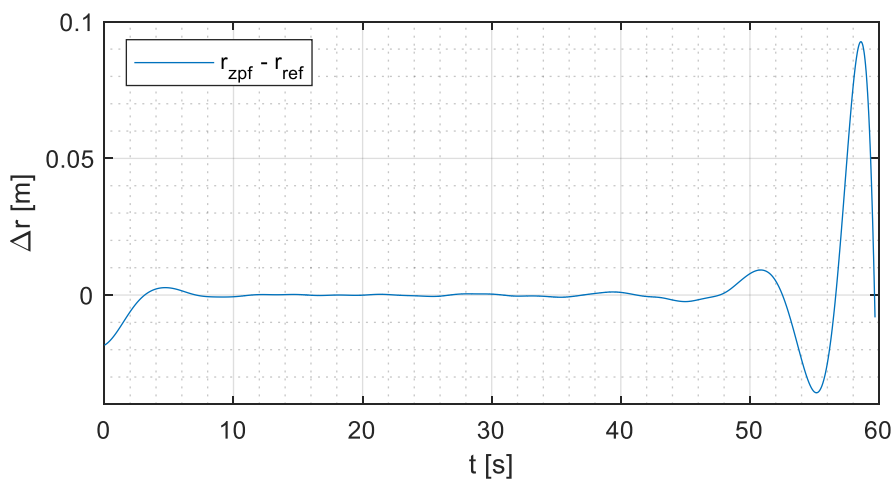
*Figure 6.5: Normalized power spectral density*

Na sliki 6.5 vidimo, kako je povprečna moč signala porazdeljena po frekvenčnem spektru. Največja moč signala se nahaja na frekvencah, manjših od 0,15 Hz. Za mejo frekvenčne prepustnosti smo tako izbrali 0,125 Hz. Za izračun smo uporabili Zero Phase filter, ki je implementiran v MATLAB® kot funkcija *filtfilt*. Na sliki 6.6 sta predstavljeni referenčna trajektorija ( $r_{ref}$ ) in trajektorija, ki jo pridobimo po postopku filtriranja z Zero Phase filtrom ( $r_{zpf}$ ).



**Slika 6.6: Referenčna trajektorija in trajektorija filtrirana z Zero Phase filtrom**  
*Figure 6.6: Reference trajectory and trajectory filtered by Zero Phase filter*

Na sliki 6.7 so prikazane razlike med filtrirano in referenčno trajektorijo. Vrednosti cenilk kakovosti  $SNR$ ,  $corr$  in  $RMSE$  so predstavljene v preglednici 6.2.



**Slika 6.7: Razlika med filtrirano in referenčno trajektorijo**  
*Figure 6.7: Difference between filtered and reference trajectory*

**Preglednica 6.2: Vrednosti cenilk kakovosti trajektorije  $r_{zpf}$**   
*Table 6.2:  $r_{zpf}$  trajectory quality estimators*

cenilka	vrednost
$SNR$	87.5
$corr$	0.994
$RMSE_r$	0.016 m

### 6.3 Komentar k rezultatom simuliranih napak IMU

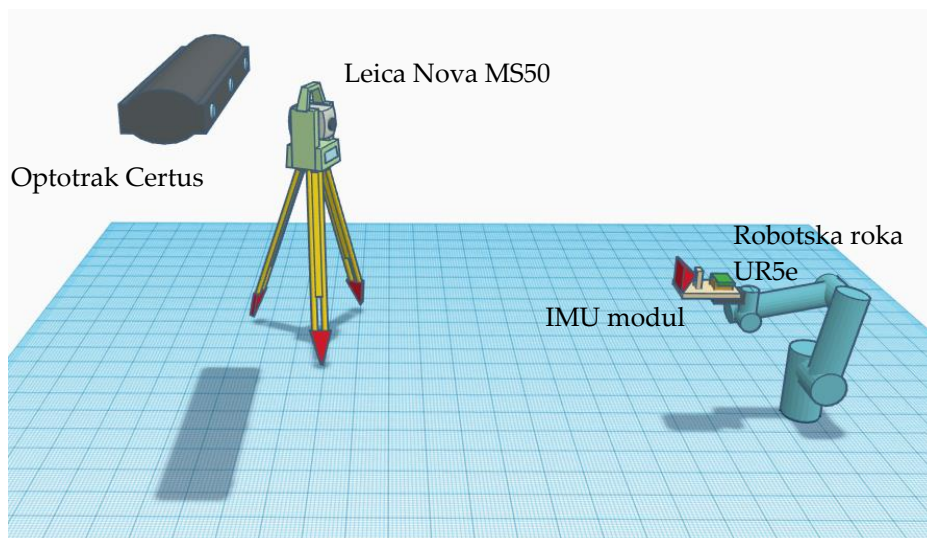
Na podlagi simulirane referenčne trajektorije in napak IMU smo pridobili simulirano trajektorijo (slika 6.2), ki je obremenjena z velikim lezenjem po položaju. Trend lezenja smo odstranili na dva načina: z aproksimacijo trenda s polinomsko funkcijo 4. stopnje in z visoko propustnim Zero Phase filtrom. Na podlagi izračunanih cenilk kakovosti (preglednici 6.1 in 6.2) vidimo, da smo boljšo oceno trajektorije dobili z uporabo prve metode (aproksimacija trenda s polinomsko funkcijo). Pri tem je treba poudariti, da smo uporabili simulirane meritve. Trend lezenja položaja je bil referenčni trajektoriji dodan na podlagi skupne vsote napak neodpravljenega pogreška odmika začetne vrednosti pospeškomera in žiroskopa, ki je matematično predstavljen s funkcijo 2. stopnje (enačba (5.93)) in 3. stopnje (enačba (5.97)). Zaradi upoštevanja konstantne napake IMU so rezultati končnih obdelanih trajektorij pričakovano zelo dobri (izredno visoka vrednost cenilke kakovosti *SNR*). Pri meritvah IMU v realnih pogojih lahko pričakujemo, da pogreška odmika začetne vrednosti pospeškomera in žiroskopa ne bosta konstantna, ampak se bosta pri dinamičnih pogojih slučajno spreminjala. V nadaljevanju bomo preverili, kako se obe metodi obneseta pri dejanskih meritvah IMU. Z uporabo obeh metod skupaj z odstranitvijo napake v položaju, ki je nizkofrekvenčne narave, odstranimo tudi dejanska nizkofrekvenčna nihanja in permanentne premike objekta. Tak pristop obdelave je torej primeren za obravnavo oscilirajočih gibanj objekta.

## 7 Eksperiment: Visokofrekvenčno sledenje trajektorije oscilirajočega objekta z nizkocenovnim senzorjem IMU

S praktičnim poskusom želimo ugotoviti, kako natančno lahko določimo položaj objekta v prostoru s samostojno uporabo nizkocenovnega senzorja IMU. V poglavju 6 *Določitev položaja s samostojno uporabo senzorja IMU* smo na osnovi simulacije videli, da lahko napake IMU povzročijo lezenje v položaju objekta v velikosti 500 m po eni minuti delovanja. Surovi rezultati meritev IMU brez kakršnekoli obdelave zato niso primerni za nadaljnjo uporabo. V poglavju 6.1 *Aproksimacija trenda lezenja položaja s polinomom višje stopnje* in 6.2 *Odstranitev trenda lezenja položaja z Zero Phase filtrom* smo predstavili postopka, s katerima smo uspešno odstranili oz. zmanjšali izjemno veliko lezenje položaja simulirani trajektoriji objekta. Poleg lezenja, ki ima vzrok v napakah IMU, z opisanimi metodami odstranimo tudi dejansko počasno lezenje objekta in premike objekta. Z uporabo metod za odstranitev trenda lahko torej izluščimo oceno gibanja, ki predstavlja nihanje opazovanega objekta okoli začetne točke. Če želimo neposredno preveriti kakovost rezultatov nizkocenovnega senzorja IMU v kombinaciji z metodami za odstranjevanje trenda lezenja položaja, moramo zagotoviti nihanje senzorja IMU točno okoli začetne točke. Kakovost meritev nizkocenovnega senzorja IMU in postopkov obdelave pa nato lahko ocenimo s primerjavo izmerjene trajektorije objekta z znano referenčno trajektorijo objekta.

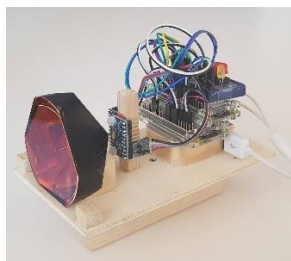
Eksperimentalne meritve smo izvedli v Laboratoriju za robotiko, Fakultete za elektrotehniko, Univerze v Ljubljani. Postavitev in zasnova eksperimenta sta prikazana na sliki 7.1. Zasnovali smo modul IMU, ki je prikazan na sliki 7.2. Modul IMU združuje senzor IMU MPU-9250, mikro računalnik Raspberry Pi Zero in odbojno prizmo. Modul IMU smo namestili na robotsko roko UR5e, kar je prikazano na sliki 7.3. Referenčno trajektorijo smo določili z instrumentom Optotrak Certus (slika 7.4) s specificirano nominalno natančnostjo 0,1 mm. Robotski tahimeter Leica Nova Multistation MS50 smo uporabili za izmero kontrolnih točk, za transformacijo med objektnim koordinatnim sistemom IMU modula in lokalnim koordinatnim sistemom sistema Optotrak.

Z robotsko roko smo inducirali prostorsko gibanje objekta točno okoli začetne točke v treh smereh. Gibanje je trajalo približno 1 minuto. Referenčna trajektorija modula IMU je določena na podlagi meritev z Optotrakom s frekvenco 400 Hz, meritve IMU senzorja smo zajeli s frekvenco 200 Hz. V nadaljevanju so predstavljeni rezultati referenčne trajektorije in končne izmerjene trajektorije, kjer smo trend lezenja odpravili enkrat s postopkom aproksimacije trenda s polinomom višje stopnje in drugič na podlagi Zero Phase filtra.



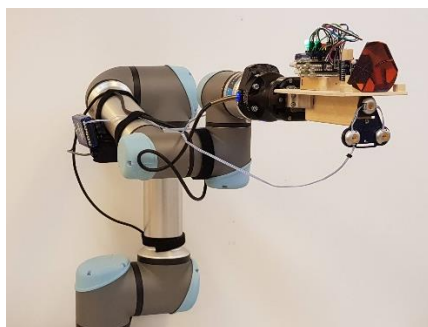
**Slika 7.1: Postavitev eksperimenta**

*Figure 7.1: Experiment setup*



**Slika 7.2: Modul IMU**

*Figure 7.2: IMU Module*



**Slika 7.3: Robotska roka UR5e z modulom IMU**

*Figure 7.3: Robotic arm UR5e with IMU module*



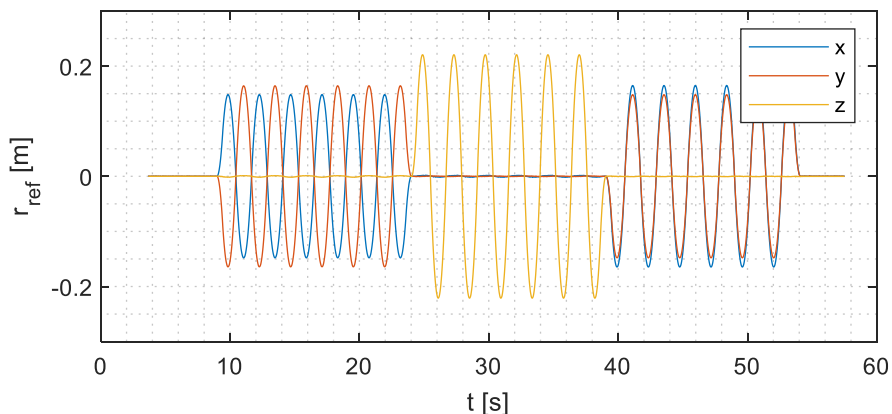
**Slika 7.4: Optotrak Certus in Leica MS50**

*Figure 7.4: Optotrak Certus and Leica MS50*

## 7.1 Referenčna trajektorija

Referenčno trajektorijo modula IMU smo določili z meritvami Optotraka in bo v nadaljevanju predstavljala referenco, na podlagi katere bomo ocenjevali kakovost trajektorije, izmerjene z nizkocenovnim senzorjem IMU. Referenčna trajektorija je predstavljena na sliki 7.5. Vsi rezultati so predstavljeni v lokalnem koordinatnem sistemu z izhodiščem v začetni točki, kjer  $z$ -os kaže navpično navzgor,  $x$ -os in  $y$ -os koordinatnega sistema pa sta v horizontalni ravnini orientirani naključno.

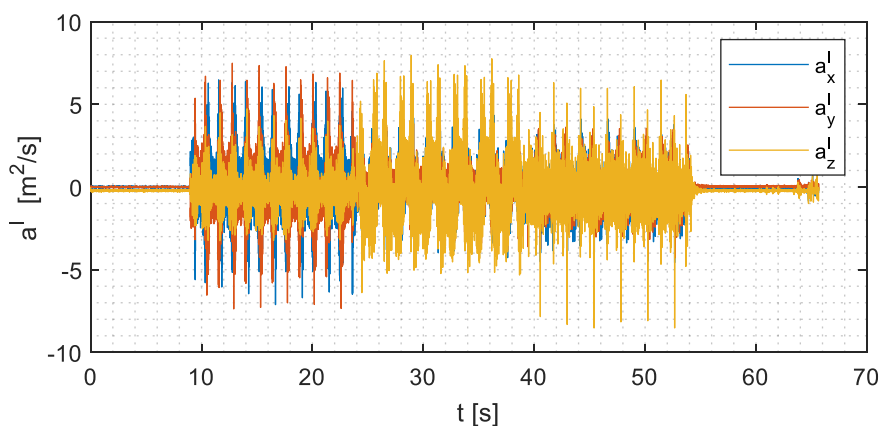




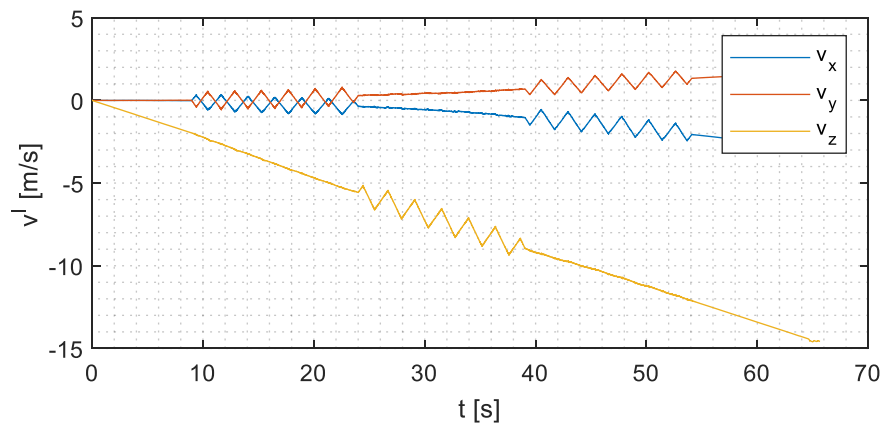
**Slika 7.5: Referenčna trajektorija izmerjena z Optotrakom**  
*Figure 7.5: Reference trajectory measured with Optotrak*

## 7.2 Trajektorija IMU

Za izračun trajektorije IMU smo uporabili meritve senzorja IMU MPU-9250 z upoštevanimi kalibracijskimi parametri. Izračunali smo lokalni pospešek ( $a^l$ ), hitrost ( $v^l$ ) in položaj ( $r_{IMU}$ ) objekta v lokalnem navigacijskem koordinatnem sistemu na podlagi postopka, predstavljenega v poglavju 3.1 *Izračun navigacijskih parametrov*. Pospešek v lokalnem koordinatnem sistemu  $a^l$  je prikazan na sliki 7.6, hitrost v lokalnem koordinatnem sistemu  $v^l$  je prikazana na sliki 7.7, trajektorija objekta izračunana na podlagi meritev IMU  $r_{IMU}$  pa je prikazana na sliki 7.8.

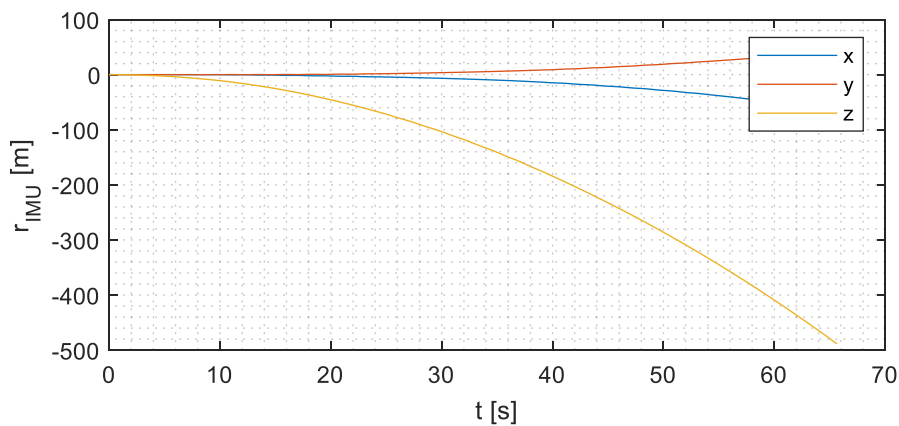


**Slika 7.6: Pospešek v lokalnem navigacijskem koordinatnem sistem**  
*Figure 7.6: Acceleration in the local navigation coordinate frame*



**Slika 7.7: Hitrost v lokalnem navigacijskem koordinatnem sistemu**

*Figure 7.7: Velocity in the local navigation coordinate frame*



**Slika 7.8: Trajektorija v lokalnem navigacijskem koordinatnem sistemu**

*Figure 7.8: Trajectory in the local navigation coordinate frame*

Na sliki 7.7 vidimo lezenje hitrosti v lokalnem koordinatnem sistemu; po z-osi je po minuti delovanja hitrost dosegla že 15 m/s. Razlog za to je v napaki sensorja IMU in posledično nepopolno odpravljene težnostni pospešek. Posledično odmik v položaju trajektorije IMU po minuti delovanja doseže skoraj 500 m in končni rezultat brez odstranitve lezenja položaja nima uporabne vrednosti. V nadaljevanju bomo na tem praktičnem primeru preverili uporabnost metod za odstranjevanje trenda, ki sta opisana v poglavjih 6.1 *Aproksimacija trenda lezenja položaja s polinomom višje stopnje* in 6.2 *Odstranitev trenda lezenja položaja z Zero Phase filtrom*.

## 7.2.1 Aproksimacije trenda lezenja položaja s polinomom višje stopnje

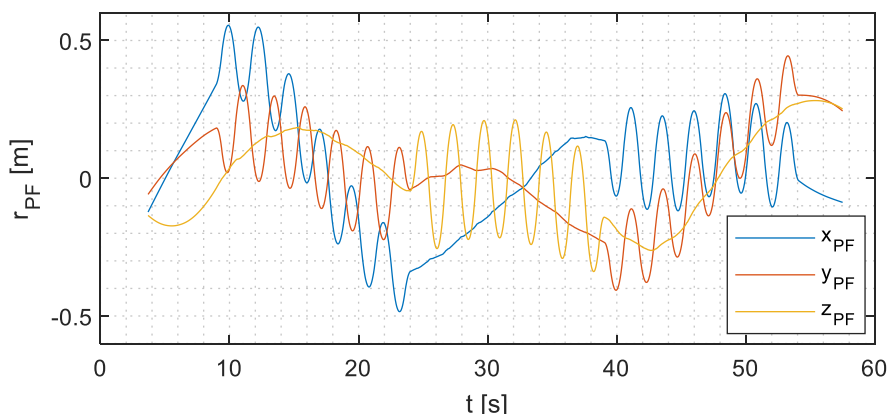
Trajektoriji IMU, prikazani na sliki 7.8, bomo trend lezenja najprej odstranili z aproksimacijo s polinomom. Trajektorijo obravnavamo ločeno po vsaki osi koordinatnega sistema. V preglednici 7.1 so zapisani koeficienti aproksimiranih polinomov.

**Preglednica 7.1: Koeficienti polinomov**

*Table 7.1: Polynomials coefficients*

koeficient	os-x	os-y	os-z
$k_1$	-0.00027	0.00013	0.00012
$k_2$	0.00385	0.00296	-0.12310
$k_3$	-0.11045	-0.09607	0.13574
$k_4$	0.48907	0.36248	-0.19045

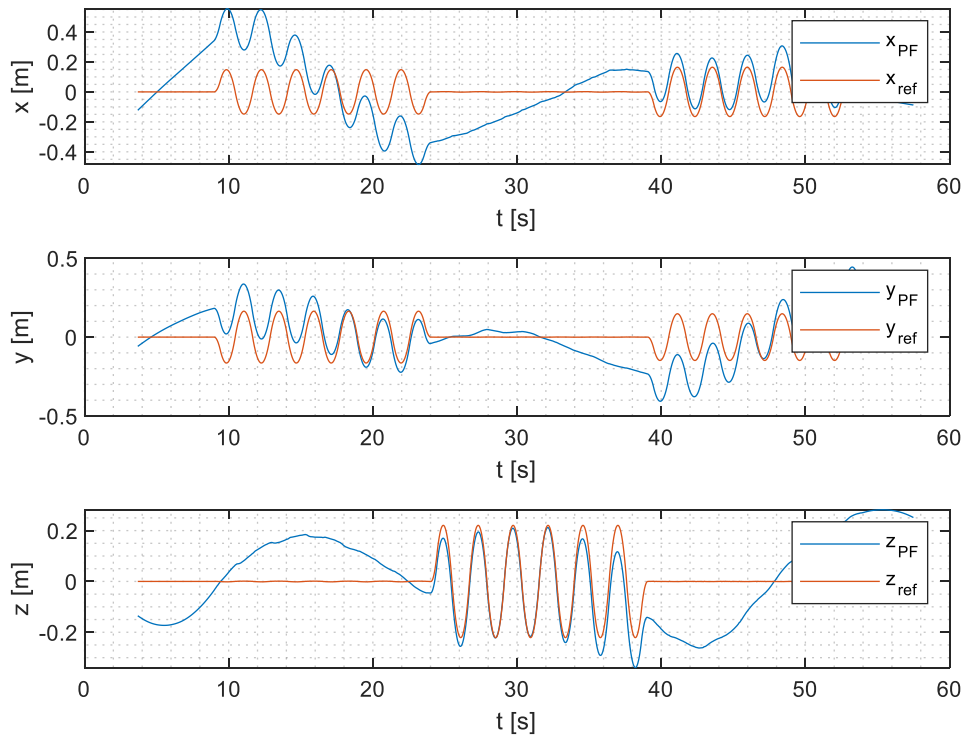
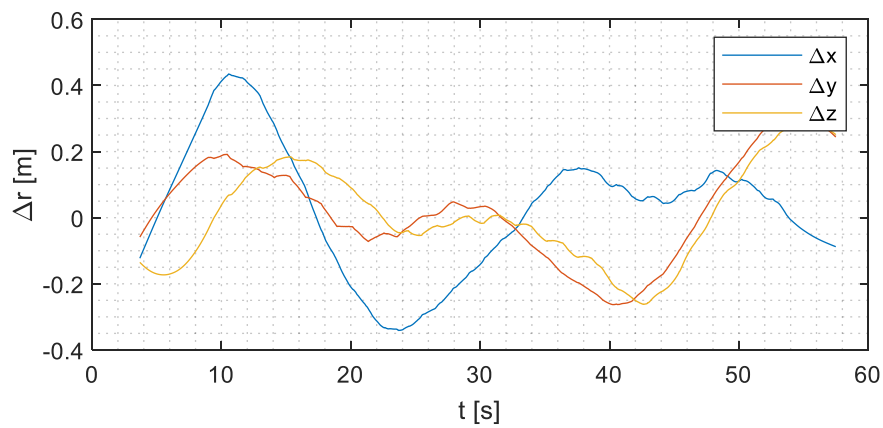
Na sliki 7.9 je prikazana trajektorija po tem, ko smo trajektoriji IMU (slika 7.8) odšteli trend lezenja, ki smo ga aproksimirali s polinomom 4. stopnje (preglednica 7.1). Rezultat predstavlja ocenjena trajektorija pravega gibanja  $r_{PF}$ .



**Slika 7.9: Trajektorija  $r_{PF}$**

*Figure 7.9: Trajectory  $r_{PF}$*

Na sliki 7.10 sta prikazani trajektorija  $r_{PF}$  in referenčna trajektorija  $r_{ref}$  za vsako os koordinatnega sistema posebej, na sliki 7.11 pa so prikazane razlike med obema trajektorijama. Kljub temu, da smo s pomočjo aproksimacije s polinomom izločili velik del lezenja položaja, ki je posledica napak IMU, pa odstopanja v položaju trajektorije  $r_{PF}$ , glede na referenčno  $r_{ref}$ , dosegajo 40 cm, kar je približno enako kot velikostni red oscilacij. Razlog za slabši rezultat je v meritvah IMU in predvsem v spreminjajočih se vrednostih pogreškov odmika začetne vrednosti žiroskopa in pospeškometra.

Slika 7.10: Referenčna trajektorija  $r_{ref}$  in trajektorija  $r_{PF}$ Figure 7.10: Reference trajectory  $r_{ref}$  and trajectory  $r_{PF}$ Slika 7.11: Razlike med referenčno trajektorijo  $r_{ref}$  in trajektorijo  $r_{PF}$ Figure 7.11: Difference between reference trajectory  $r_{ref}$  and trajectory  $r_{PF}$

Cenilke kakovosti trajektorije  $r_{PF}$  so predstavljene v preglednici 7.2.

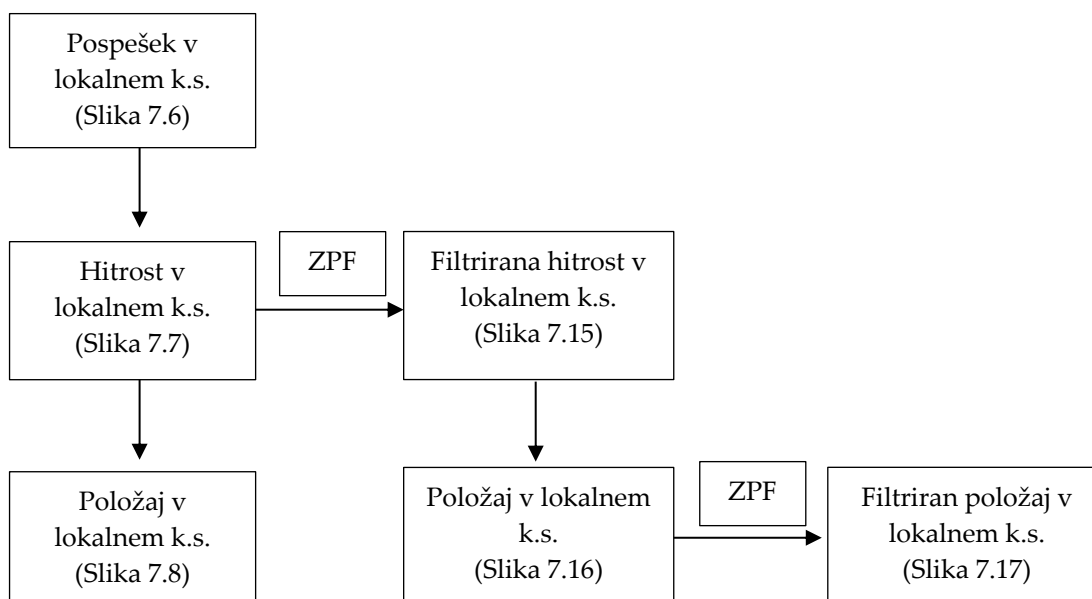
**Preglednica 7.2: Cenilke kakovosti trajektorije  $r_{PF}$**

*Table 7.2: Quality estimators of the  $r_{PF}$  trajectory*

cenilka	vrednost
SNR	1.3
corr	0.470
$RMSE_r$	0.289 m

## 7.2.2 Odstranitev trenda lezenja položaja z Zero Phase filtrom

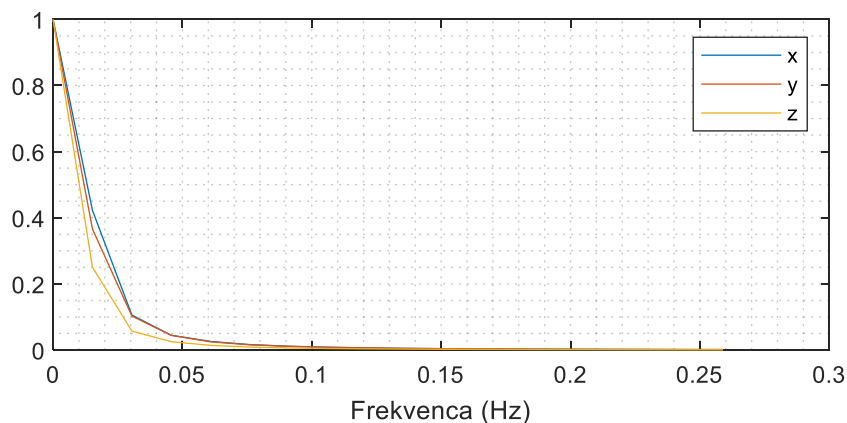
Trajektoriji IMU, prikazani na sliki 7.8, bomo trend lezenja tokrat odstranili z uporabo Zero Phase filtra. Trajektorijo obravnavamo ločeno za vsako os koordinatnega sistema. V dinamičnih pogojih meritev je pričakovano, da velikosti napak IMU, ki nastanejo zaradi neopravljenega pogreška odmika začetne vrednosti pospeškometra in žiroskopa niso konstantne, ampak se znotraj intervala naključno spreminjajo. Zaradi tega smo postopek filtriranja z Zero Phase filtrom glede na postopek, opisan v poglavju 6.2 *Odstranitev trenda lezenja položaja z Zero Phase filtrom* prilagodili. Zasnovali smo metodo, kjer nizkofrekvenčno lezenje najprej odstranimo iz izračunane hitrosti v lokalnem koordinatnem sistemu, na podlagi filtrirane lokalne hitrosti izračunamo položaj objekta v lokalnem koordinatnem sistemu in nato ponovno odstranimo nizkofrekvenčno lezenje v položaju objekta z enakim postopkom filtriranja. Zasnovan postopek z dvema korakoma filtriranja z Zero Phase filtrom je prikazan na sliki 7.12.



**Slika 7.12: Postopek filtriranja z Zero Phase filtrom**

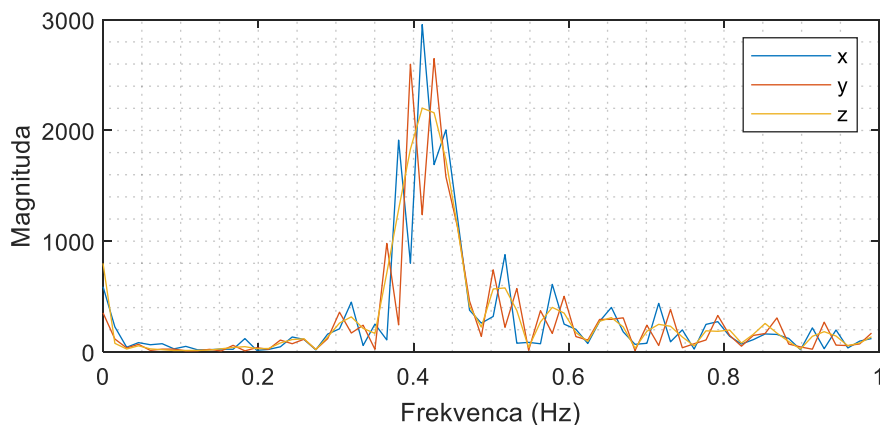
*Figure 7.12: Diagram of calculation steps of filtering with the Zero Phase Filter*

Pri uporabi Zero Phase je v prvem koraku treba izbrati stopnjo filtra in mejo frekvenčne prepustnosti. Na sliki 7.13 je prikazana normalizirana frekvenčna spektralna gostota signala, kar je v našem primeru trajektorija objekta, ki je predstavljena na sliki 7.8. S to analizo dobimo informacijo, kako je povprečna moč signala porazdeljena po frekvenčnem spektru. Ker je lezenje položaja, ki je posledica napak IMU, nizkofrekvenčne narave, moramo izbrati mejo frekvenčne prepustnosti, ki je manjša od dejanske frekvence gibanja objekta. Na sliki 7.13 vidimo, da je največja moč signala pri frekvencah manjših od 0,1 Hz. Pri izbiri meje frekvenčne prepustnosti si lahko pomagamo tudi z analizo Fourierjeve transformacije pospeška objekta v lokalnem koordinatnem sistemu, ki je prikazan na sliki 7.6. Rezultat analize je prikazan na sliki 7.14, kjer vidimo, da lahko gibanje objekta v večini predstavimo z valovanjem, ki vsebuje nihanja s frekvencami, višjimi od 0,4 Hz. Na podlagi normalizirane frekvenčne spektralne gostote izmerjene trajektorije in analize Fourierjeve transformacije pospeška v lokalnem navigacijskem koordinatnem sistemu smo izbrali mejo frekvenčne prepustnosti pri 0,2 Hz. S to mejo bomo izločili nizkofrekvenčno lezenje objekta in ohranili oscilacije, ki so višjih frekvenc.



**Slika 7.13: Normalizirana frekvenčna spektralna gostota**

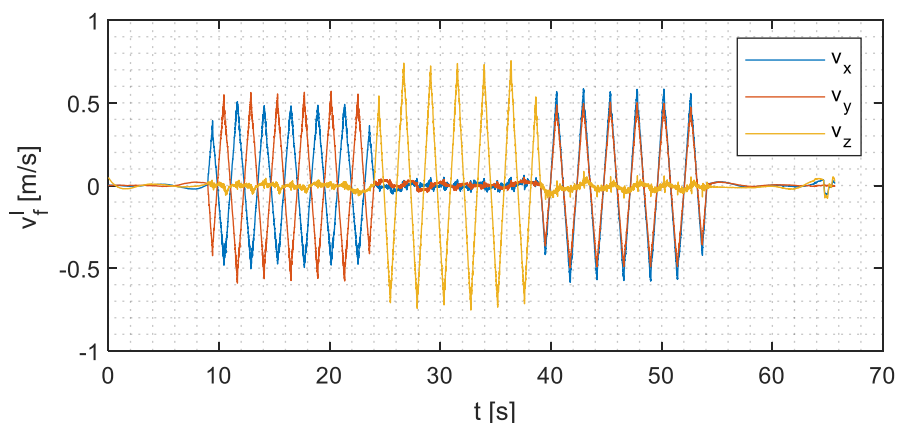
*Figure 7.13: Normalized power spectral density*



**Slika 7.14: Analiza Fourierjeve transformacije pospeška v lokalnem navigacijskem koordinatnem sistemu**

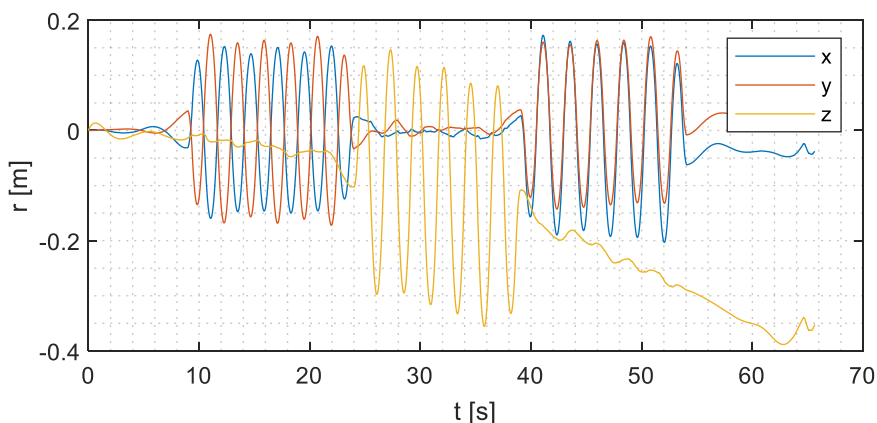
*Figure 7.14: Fourier transformation analysis of the acceleration in the local navigation frame*

Kot je prikazano na shemi postopka odstranitve trenda lezenja položaja z Zero Phase filtrom (slika 7.12), v prvem koraku Zero Phase filter uporabimo nad hitrostjo objekta v lokalnem navigacijskem koordinatnem sistemu, ki je prikazan na sliki 7.7. Rezultat filtriranja je prikazan na sliki 7.15, kjer vidimo, da smo odstranili lezenje hitrosti. Na podlagi filtrirane hitrosti v lokalnem koordinatnem sistemu smo ponovno izračunali trajektorijo objekta, ki je prikazana na sliki 7.16, kjer vidimo, da je prisotno še nekaj lezenja položaja – po z-osi lezenje doseže približno 0,4 m. Trajektorija, prikazana na sliki 7.16, predstavlja vhodni signal v zadnji korak filtriranja, s čimer dobimo končno trajektorijo v lokalnem koordinatnem sistemu, ki je prikazana na sliki 7.17.



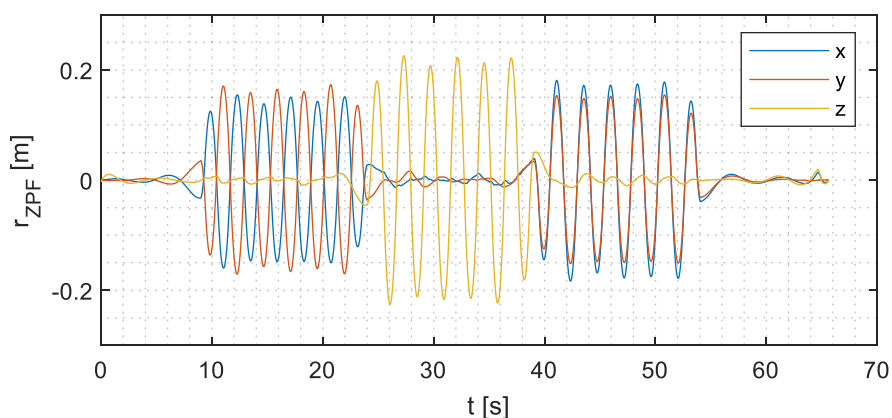
**Slika 7.15: Filtrirana hitrost v lokalnem koordinatnem sistemu**

*Figure 7.15: Filtered velocity in the local navigation frame*



**Slika 7.16: Trajektorija objekta v lokalnem koordinatnem sistemu (izračunana na podlagi filtrirane hitrosti v lokalnem koordinatnem sistemu)**

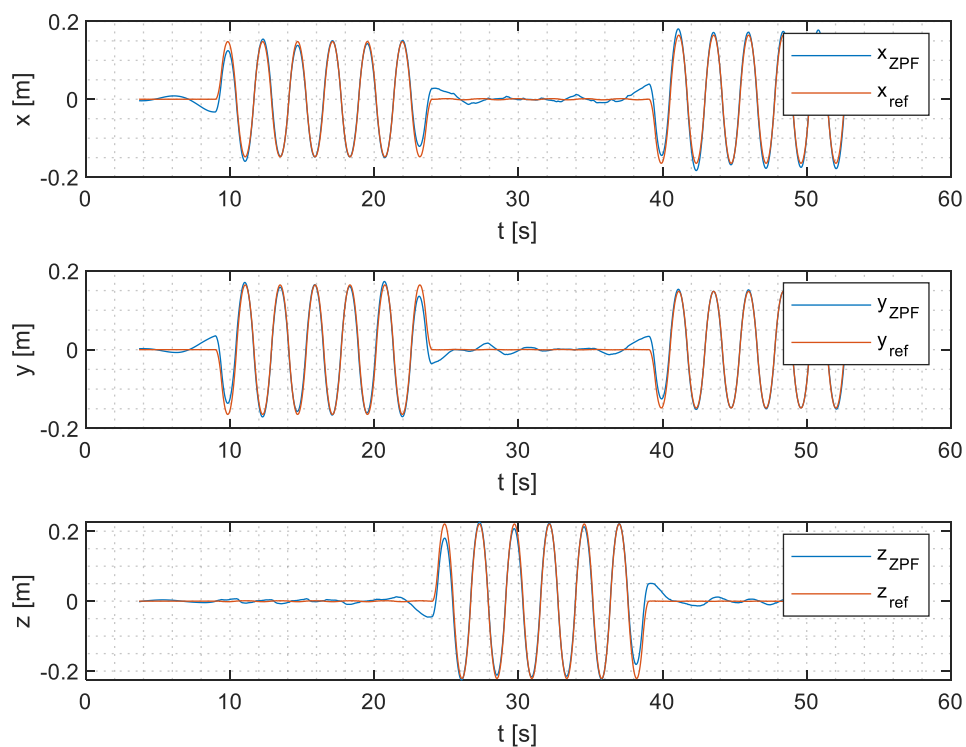
*Figure 7.16: Object trajectory in the local coordinate system (calculated based on the filtered velocity in the local coordinate system)*



**Slika 7.17: Končna trajektorija objekta v lokalnem koordinatnem sistemu**

*Figure 7.17: The final trajectory of the object in the local coordinate system*

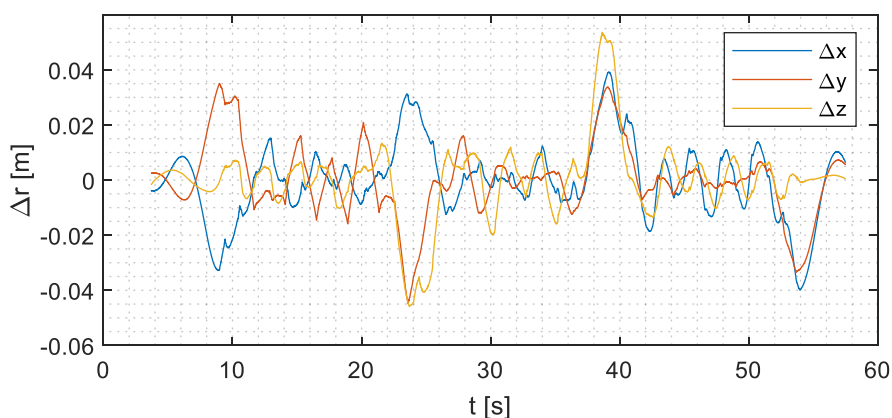
Na sliki 7.18 je prikazana primerjava referenčne trajektorije in končne filtrirane trajektorije, na sliki 7.19 pa so prikazane razlike med obema trajektorijama. Vidimo, da so odstopanja med obema trajektorijama na nivoju nekaj centimetrov.



**Slika 7.18: Primerjava referenčne trajektorije in končne filtrirane trajektorije**

*Figure 7.18: Comparison of the reference trajectory and the final filtered trajectory*





**Slika 7.19: Razlike med referenčno trajektorijo in končno filtrirano trajektorijo**  
*Figure 7.19: Differences between the reference trajectory and the final filtered trajectory*

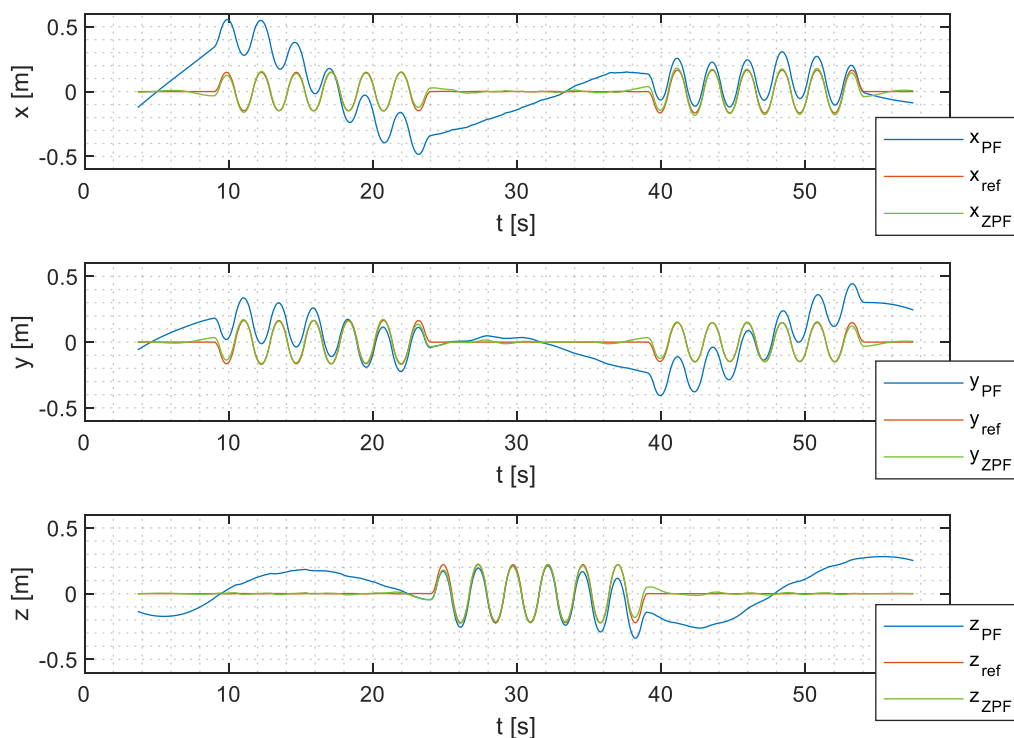
Cenilke kakovosti trajektorije  $r_{ZPF}$  so predstavljene v preglednici 7.3.

**Preglednica 7.3: Cenilke kakovosti trajektorije  $r_{ZPF}$**   
*Table 7.3: Quality estimators of the  $r_{ZPF}$  trajectory*

cenilka	vrednost
SNR	36.7
corr	0.987
$RMSE_r$	0.024 m

### 7.2.3 Komentar k rezultatom uporabe metod za odstranjevanje trenda

Trend lezenja položaja smo odstranili na dva načina. Prvič z aproksimacijo lezenja s polinomom višje stopnje, drugič s postopkom filtriranja z Zero Phase filtrom. Na sliki 7.20 je prikazana primerjava referenčne trajektorije  $r_{ref}$ , trajektorije  $r_{PF}$  in trajektorije  $r_{ZPF}$ . Vidimo, da smo z uporabo aproksimacije s polinomom dobili slabše rezultate kot s postopkom filtriranja z Zero Phase filtrom, to potrjujejo tudi cenilke kakovosti SNR, corr in  $RMSE_r$ . V preglednici 7.4 je prikazana primerjava cenilk kakovosti obeh trajektorij. S postopkom filtriranja z Zero Phase filtrom smo pridobili precej boljše rezultate z visoko stopnjo ujemanja z referenčno trajektorijo.



Slika 7.20: Primerjava referenčne trajektorije, trajektorije PF in trajektorije ZPF

Figure 7.20: Comparison of reference, PF and ZPF trajectories

Preglednica 7.4: Primerjava cenilk kakovosti trajektorij  $r_{PF}$  in  $r_{ZPF}$ Table 7.4: Comparison of the  $r_{PF}$  and  $r_{ZPF}$  trajectory quality estimators

cenilka	$r_{PF}$	$r_{ZPF}$
SNR	1.3	36.7
corr	0.470	0.987
$RMSE_r$	0.289 m	0.024 m

Z zasnovanim eksperimentom smo analizirali kakovost meritev IMU in postopkov obdelave surovih meritev. Ugotovili smo, da lahko tudi z nizkocenovnimi senzorji IMU s primernim postopkom obdelave, kjer sta zajeti tako kalibracija senzorja IMU kot izbrana metoda odstranjevanja lezenja položaja, pridobimo kakovostne rezultate. V primeru uporabe postopka z Zero Phase filtrom je stopnja ujemanja referenčne trajektorije  $r_{ref}$  in obdelane trajektorije  $r_{ZPF}$  zelo visoka. Razmerje med signalom in šumom (SNR) znaša 36,7, korelacija obeh trajektorij (corr) znaša 0,987, koren srednje kvadratne napake ( $RMSE_r$ ) pa znaša 2,4 cm.

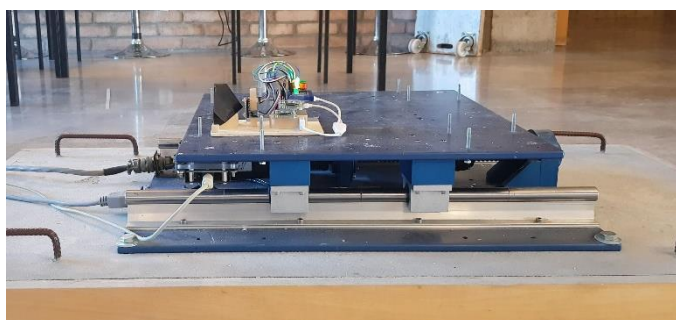
## 8 Eksperiment: Spremljanje potresne mize med simulacijo potresa s kombinacijo meritev robotskega tahimetra in nizkocenovnega senzorja IMU

S praktičnim poskusom želimo ugotoviti, kako lahko kinematične meritve robotskega tahimetra izboljšamo s kombinacijo visokofrekvenčnih meritev senzorja IMU. Sodobni robotski tahimetri omogočajo sledenje in kinematično merjenje s frekvencami okoli 10 Hz, medtem ko s senzorji IMU lahko zajemamo meritve s frekvencami v velikostnem razredu 1000 Hz. Z združevanjem kinematičnih meritev RTS in meritev senzorja IMU bi tako lahko točneje opisali trajektorijo gibajočega se objekta.

Pri samostojni uporabi IMU z uporabo metod za odstranitev trenda lezenja skupaj z odstranitvijo napake v položaju, ki je nizkofrekvenčne narave, odstranimo tudi dejanska nizkofrekvenčna nihanja in premike objekta. Zaradi omejene natančnosti torej ne moremo določiti počasnih in trajnih odmikov opazovanega objekta od njegove začetne lege. Ta problem lahko presežemo z dodatno informacijo o nizkofrekvenčnem gibanju objekta v prostoru, ki jo lahko pridobimo s kinematičnimi meritvami RTS.

Cilj eksperimenta je izmeriti in določiti točno trajektorijo potresne mize med simulacijo potresa. Za to smo uporabili potresno mizo Quanser Shake Table II (STII), ki so jo razvili za združenje UCIST (University Consortium on Instructional Shake Tables) in jo uporabljajo za preiskave dinamike gradbenih konstrukcij med potresi. Prikazana je na sliki 8.1. Potresna miza ob obremenitvi 7,5kg omogoča doseganje pospeškov do 2,5 g in največji odmik od središčne lege 7,62 cm. Omogoča tudi določitev položaja zgornje plošče na 3,10  $\mu\text{m}$  natančno (Brozovič, 2009).

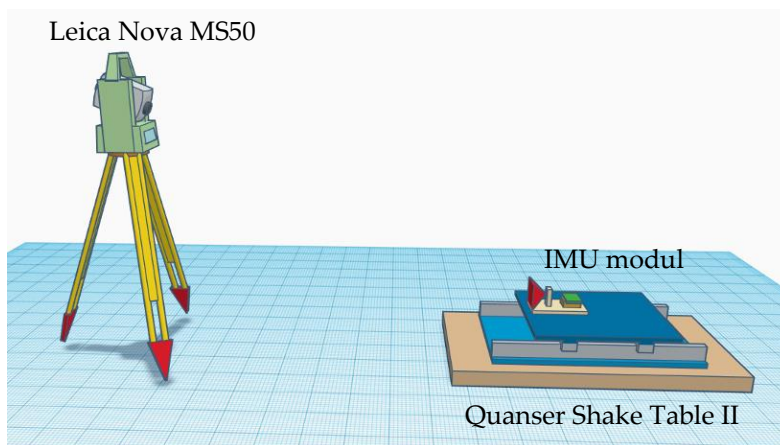
Na potresno mizo smo pritrdili modul IMU (prikazan na sliki 7.2), ki združuje senzor IMU MPU-9250, mikro računalnik Raspberry Pi Zero in odbojno prizmo. Namestitev modula IMU na potresno mizo je prikazana na sliki 8.1.



Slika 8.1: Potresna miza Quanser Shake Table II

Figure 8.1: Quanser Shake Table II

Za izvedbo kinematičnih meritev smo uporabili robotski tahimeter Leica Nova MS50. S tahimetrom določimo položaj modula IMU, ki se nanaša na isto točko kot meritve senzorja IMU. Postavitev eksperimenta pri spremljanju potresne mize med simulacijo potresa je prikazana na sliki 8.2.



Slika 8.2: Postavitev eksperimenta pri spremljanju potresne mize med simulacijo potresa

Figure 8.2: Setting up a monitoring experiment during an earthquake simulation

Med simulacijo potresa smo torej izvajali dvoje meritev, s katerimi lahko določimo trajektorijo modula IMU v prostoru – kinematične meritve z robotskim tahimetrom (meritve RTS) in meritve senzorja IMU (meritve IMU). Na podlagi meritev dveh ločenih merilnih sistemov bomo določili in analizirali natančnost več različnih trajektorij, pri čemer osnovo za določitev kakovosti različnih trajektorij predstavlja referenčna trajektorija. Shematičen prikaz vseh obravnavanih trajektorij je prikazan na sliki 8.3.

Na podlagi samostojnih meritev RTS smo določili in analizirali dve trajektoriji:

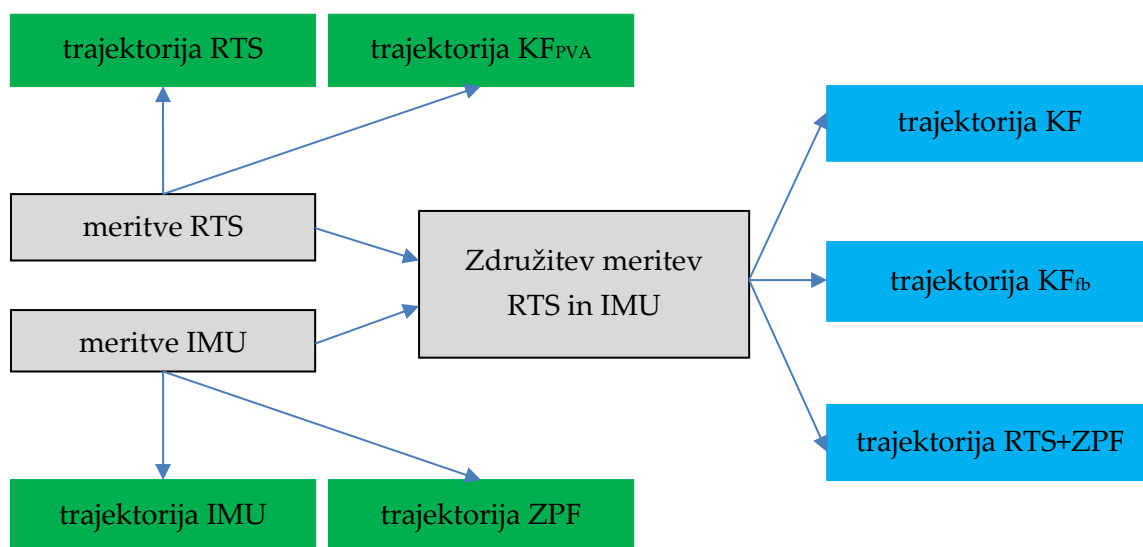
- **trajektorija RTS:** določena z meritvami RTS brez nadaljnje obdelave,
- **trajektorija  $KF_{PVA}$ :** določena z meritvami RTS in obdelavo trajektorije s Kalmanovim filtrom PVA.

Na podlagi samostojnih meritev IMU smo določili in analizirali dve trajektoriji:

- **trajektorija IMU:** določena z meritvami IMU brez nadaljnje obdelave,
- **trajektorija ZPF:** določena z meritvami IMU in obdelavo trajektorije s postopkom odstranitve trenda lezenja položaja z Zero Phase filtrom.

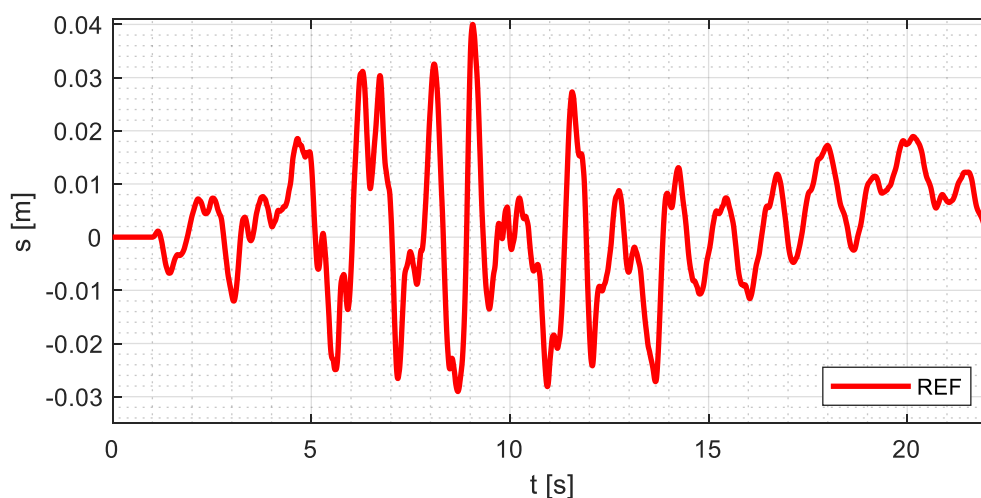
Na podlagi kombinacije meritev RTS in meritev IMU smo določili in analizirali tri trajektorije:

- **trajektorija KF**: trajektorija je določena za razširjenim modelom meritev Kalmanovega filtra, ki združuje meritve RTS in IMU,
- **trajektorija KF<sub>fb</sub>**: določena na podlagi Kalmanovega filtra in s postopkom glajenja,
- **trajektorija RTS+ZPS**: določena z združitvijo trajektorije RTS in trajektorije ZPF.



Slika 8.3: Shematičen prikaz obravnavanih trajektorij  
Figure 8.3: Schematic representation of the considered trajectories

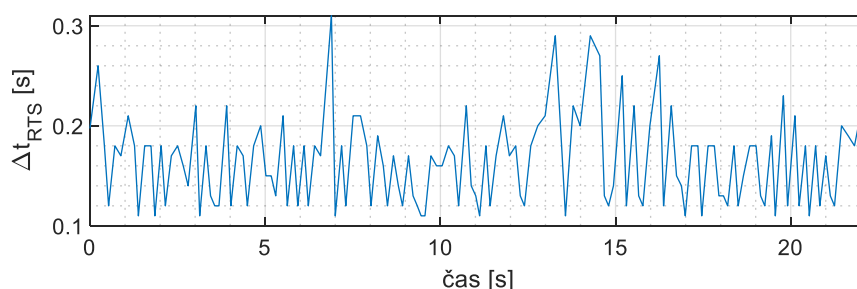
Referenčna trajektorija potresne mize je prikazana na sliki 8.4. Na podlagi referenčne trajektorije smo v nadaljevanju ocenili kakovost vseh ostalih trajektorij, ki smo jih določili na podlagi kinematičnih meritev RTS in meritev senzorja IMU.



Slika 8.4: Referenčna trajektorija potresne mize  
Figure 8.4: Reference trajectory of the Shake table

## 8.1 Ocena trajektorije na podlagi meritev RTS

S kinematičnimi meritvami robotskega tahimetra Leica Nova MS50 smo določili trajektorijo RTS. Kinematične meritve smo izvedli v načinu avtomatskega sledenja tarči z najvišjo frekvenco zajema meritev, kot jo omogoča instrument, kar je v primeru instrumenta Leica Nova MS50 v nadzorovanih pogojih 20 Hz, v realnih pogojih pa je najvišja frekvenca zajema manjša. V našem primeru smo dosegli povprečno frekvenco zajema merskih vrednosti okoli 7 Hz. Na sliki 8.5 je prikazan čas vzorčenja med zaporednimi meritvami. Zaradi spremljanja izredno dinamičnega gibanja objekta je prihajalo do krajših prekinitev. Čas vzorčenja se je gibal od 0,1 s do 0,3 s, povprečni čas vzorčenja pa je bil 0,15 s.

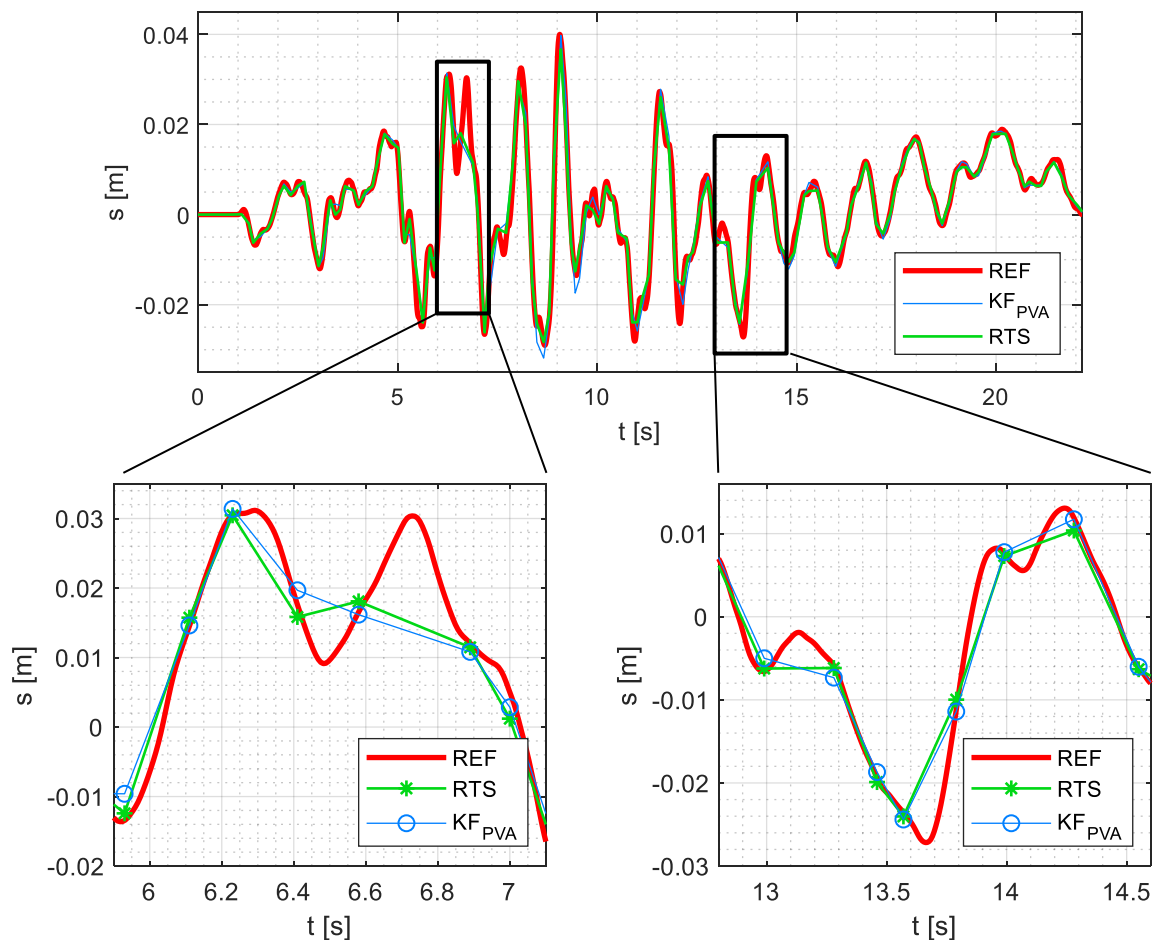


**Slika 8.5:** Čas vzorčenja kinematičnih meritev Leica Nova MS50

*Figure 8.5: Sampling time of the Leica Nova MS50 kinematic measurements*

Trajektorija RTS je torej določena z izmerjenimi točkami, med izmerjenimi točkami pa je trajektorija definirana z linearno interpolacijo. Prikazana je na sliki 8.6 z zeleno barvo.

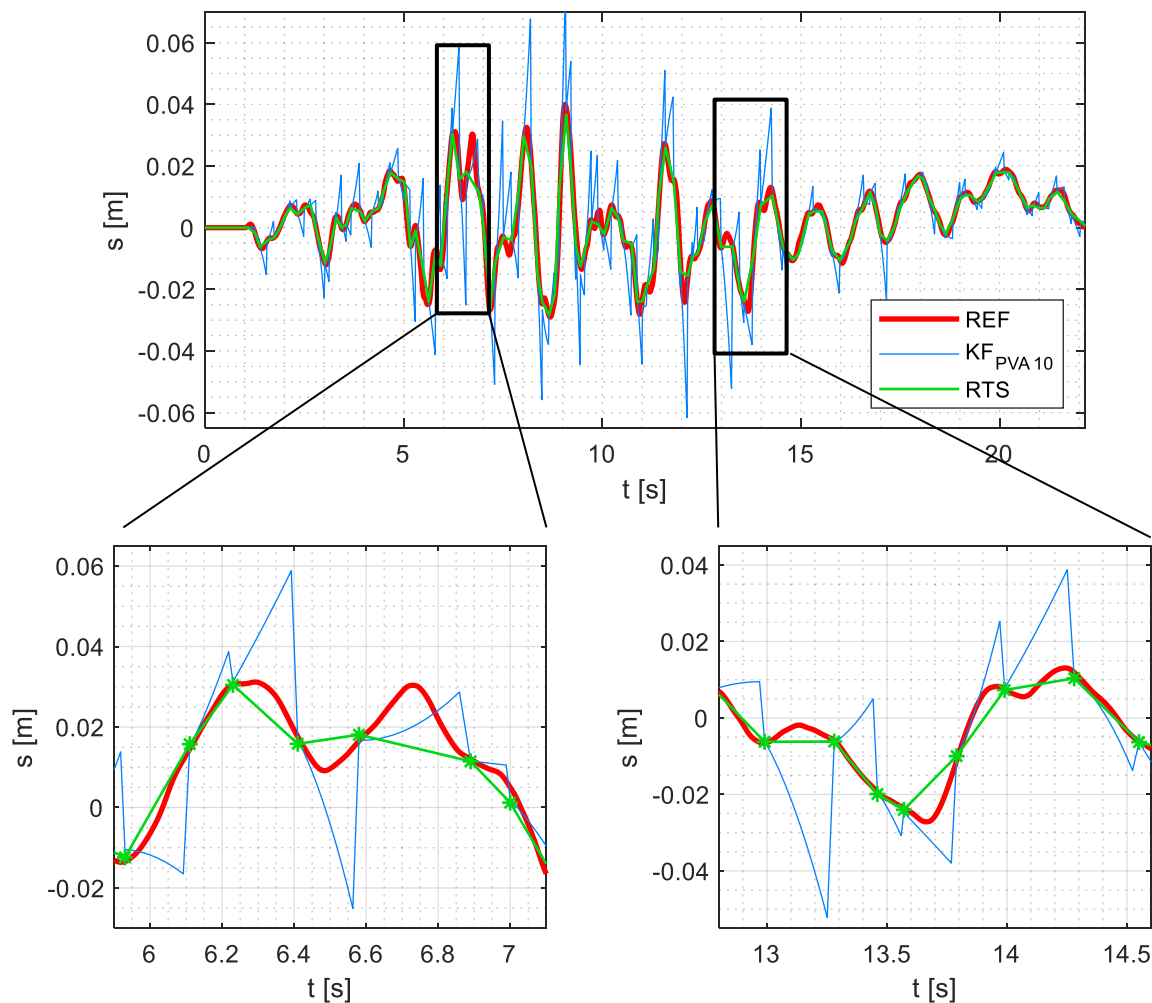
Trajektorija  $KF_{PVA}$  predstavlja rezultat PVA Kalmanovega filtra, ki je predstavljen v poglavju 2.3 *Model PVA Kalmanovega filtra*. Za velikost procesnega šuma  $\sqrt{W}$  smo izbrali sredino intervala  $\left[\frac{1}{2}\Delta a, \Delta a\right]$ , kar v našem primeru znaša  $0,03 \text{ m/s}^2$ . Trajektorija  $KF_{PVA}$  je prikazana na sliki 8.6 z modro barvo.



Slika 8.6: Trajektorije REF, RTS in  $KF_{PVA}$   
Figure 8.6: REF, RTS in  $KF_{PVA}$  trajectories

Na sliki 8.6 vidimo, da izmerjene RTS točke sicer dobro sovpadajo z referenčno trajektorijo, vendar zaradi premajhne frekvence zajema meritev ne opišejo dobro dejanskega gibanja objekta. V dveh intervalih, ki sta na sliki 8.6 predstavljena bolj detajlno, lahko vidimo, da trajektorija RTS ne zajame lokalnih minimumov in maksimumov referenčne trajektorije.

V intervalu med zajetimi RTS točkami teoretično lahko trajektorijo objekta ocenimo na podlagi napovedi stanja sistema Kalmanovega filtra. Pri tem smo frekvenco Kalmanovega filtra povečali za 10-krat. Trajektorijo v intervalu med meritvami RTS izračunamo na podlagi ocenjenega položaja, hitrosti in pospeška. Rezultat PVA Kalmanovega filtra s povečano frekvenco napovedi je prikazan na sliki 8.7. Pričakovano tudi na tak način ne pridobimo točnejše trajektorije, saj v našem primeru ni izpolnjena osrednja predpostavka PVA Kalmanovega filtra, da je pospešek znotraj intervala meritev konstanten.



**Slika 8.7: Rezultat PVA Kalmanovega filtra s povečano frekvenco napovedi**

*Figure 8.7: The result of a PVA Kalman filter with increased prediction frequency*

V preglednici 8.1 so zbrane cenilke kakovosti naslednjih trajektorij:

- **RTS\***: cenilke kakovosti se nanašajo samo na izmerjene točke z RTS, brez interpolacije med izmerjenimi točkami. Upoštevana so samo odstopanja med referenčno trajektorijo in izmerjenimi točkami RTS,
- **RTS**: cenilke kakovosti se nanašajo na trajektorijo, ki je ocenjena na podlagi izmerjenih točk RTS in linearno interpolacijo med izmerjenimi točkami,
- **KF<sub>PVA</sub>**: cenilke kakovosti se nanašajo na trajektorijo, ki je ocenjena po koraku korekcije s Kalmanovim filtrom PVA,
- **KF<sub>PVA10</sub>**: cenilke kakovosti se nanašajo na trajektorijo, ki je ocenjena s Kalmanovim filtrom PVA. Med točkami, ocenjenimi po koraku korekcije stanja sistema, je trajektorija določena na osnovi napovedi stanja sistema.



**Preglednica 8.1: Cenilke kakovosti trajektorij**

*Table 8.1: Quality estimators of trajectories*

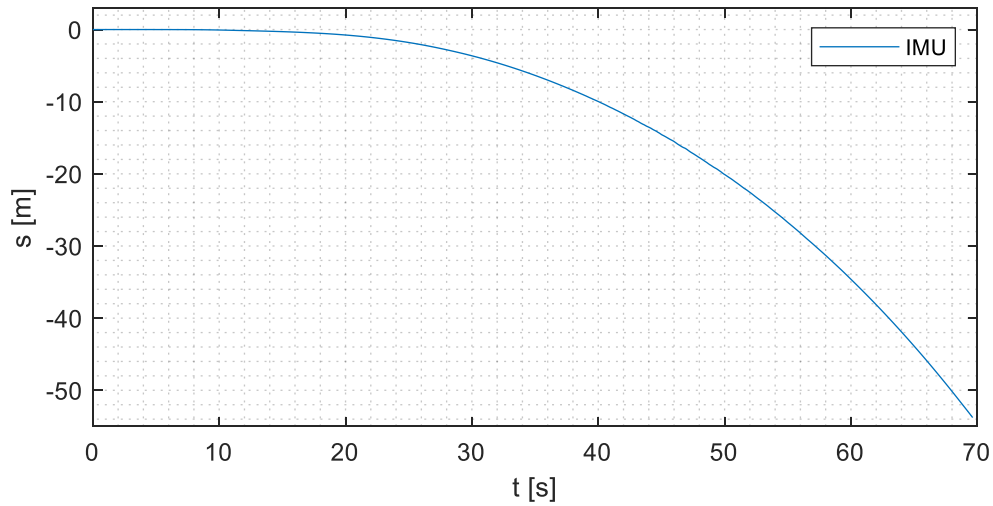
	<b>RTS*</b>	<b>RTS</b>	<b>KF<sub>PVA</sub></b>	<b>KF<sub>PVA10</sub></b>
<i>RMSE<sub>r</sub></i>	1.6 mm	2.5 mm	2.6 mm	8.9 mm
<i>SNR</i>	61.4	19.5	19.5	3.6
<i>corr</i>	0.992	0.980	0.976	0.854

V preglednici 8.1 vidimo, da imajo izmerjene točke z RTS visoko stopnjo ujemanja z referenčno trajektorijo. Cenilka kakovosti RMSE znaša 1,6 mm. V tej vrednosti je zajeta natančnost instrumenta, metode izmere in točnost izmerjenih točk v dinamičnih pogojih. Z uporabo PVA Kalmanovega filtra nismo izboljšali rezultatov, saj je frekvenca zajema meritev RTS prenizka za karakterističen opis trajektorije visoko dinamičnega gibanja.

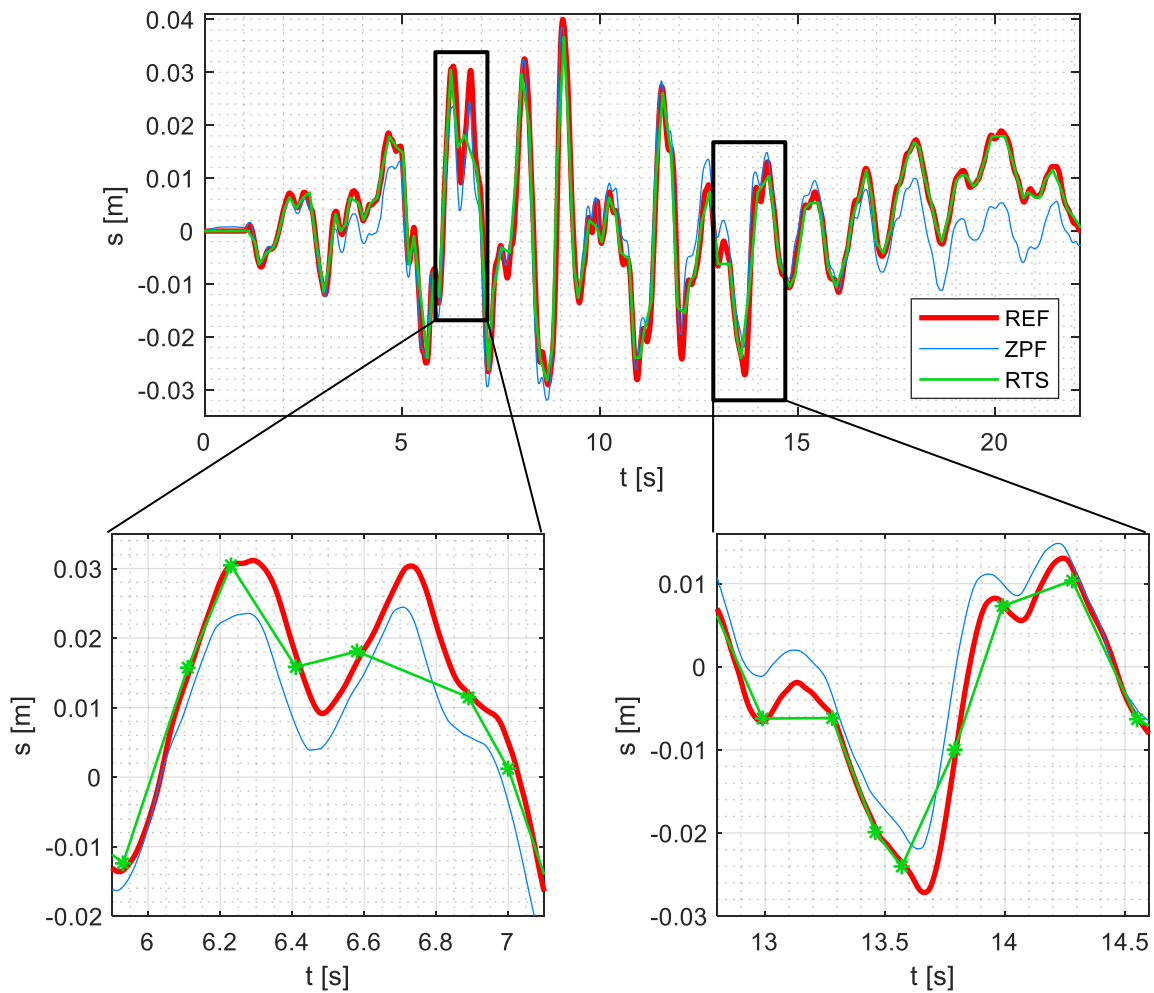
## 8.2 Ocena trajektorije na podlagi meritev IMU

Obravnavamo dve trajektoriji, pridobljeni na osnovi meritev IMU, in sicer trajektorijo IMU in trajektorijo ZPF. Za izračun trajektorije IMU smo upoštevali kalibracijske parametre sensorja IMU. Trajektorijo smo izračunali na podlagi postopka, opisanega v poglavju 3.1 *Izračun navigacijskih parametrov*, prikazana je na sliki 8.8. Vidimo, da je lezenje v položaju po minuti delovanja preseglo 50 m. Brez dodatnih postopkov obdelave, samo na podlagi meritev nizkocenovnega sensorja IMU, torej ne dobimo uporabnih rezultatov za nadaljnje analize.

Za izračun trajektorije ZPF smo uporabili postopek, opisan v poglavju 6.2 *Odstranitev trenda lezenja položaja z Zero Phase filtrom*. Rezultat je predstavljen na sliki 8.9, kjer je prikazana referenčna trajektorija REF, trajektorija RTS in trajektorija ZPF. Vidimo, da trajektorija ZPF dobro opiše dinamično gibanje objekta, vendar se pojavijo odstopanja od referenčne trajektorije REF na mestih, kjer so bili prisotni nizkofrekvenčni in permanentni odmiki objekta od začetnega položaja.



**Slika 8.8: Trajektorija IMU**  
 Figure 8.8: IMU trajectory



**Slika 8.9: Trajektorija ZPF**  
 Figure 8.9: ZPF trajectory

V preglednici 8.2 so predstavljene cenilke kakovosti trajektorije ZPF. Kljub temu, da trajektorija ZPF dobro opiše karakteristike dinamičnega gibanja, so odstopanja od referenčne trajektorije večja kot v primeru trajektorije RTS. S postopkom filtriranja z Zero Phase filtrom poleg lezenja položaja namreč odstranimo tudi permanentne premike in nizkofrekvenčne oscilacije objekta.

**Preglednica 8.2: Cenilke kakovosti trajektorije ZPF**

*Table 8.2: Quality estimators of ZPF trajectory*

	<b>ZPF</b>	<b>RTS</b>
$RMSE_r$	5.2 mm	2.5 mm
$SNR$	3.8	19.5
$corr$	0.904	0.980

### 8.3 Ocena trajektorije na podlagi združenih meritev RTS in IMU

V poglavjih 8.1 *Ocena trajektorije na podlagi meritev RTS* in 8.2 *Ocena trajektorije na podlagi meritev IMU* smo obravnavali ločen izračun trajektorije na podlagi meritev RTS in IMU, v tem poglavju pa bomo opisali in analizirali načine združevanja kinematičnih meritev RTS in meritev IMU. Trajektorijo bomo najprej določili na podlagi združenih meritev z uporabo Kalmanovega filtra z razširjenim modelom meritev, ki je opisan v poglavju 2.2.2 *Model meritev* in nato za izboljšano oceno trajektorije uporabili še postopek glajenja, ki temelji na algoritmu Rauch-Tung-Striebel (Bishop, 2006). V nadaljevanju bomo analizirali tudi združevanje meritev IMU in RTS na podlagi rezultatov Zero Phase filtra.

#### 8.3.1 PVA Kalmanov filter z razširjenim modelom meritev

Visokofrekvenčne meritve IMU in nizkofrekvenčne kinematične meritve RTS lahko združimo z uporabo večstopenjskega Kalmanovega filtra (Bishop, 2006; Omidalizarandi idr., 2019), ki predstavlja optimalni rekurzivni filter. Zahteva diskretnega Kalmanovega filtra je, da morata biti model sistema in model meritev linearna. Tako kot je zapisano v poglavju 2.3 *Model PVA Kalmanovega filtra* lahko diskretni linearni model sistema opišemo z enačbo:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \boldsymbol{\Phi}_{k+1}\mathbf{x}_k + \mathbf{G}_k\mathbf{w}_k, \quad (8.1)$$

kjer je  $\mathbf{x}_k$  vektor stanj,  $\boldsymbol{\Phi}_k$  matrika prehoda stanj,  $\mathbf{G}_k$  matrika porazdelitve šuma in  $\mathbf{w}_k$  vektor šuma sistema. V našem primeru je vektor stanj  $\mathbf{x}_k$  v koraku  $k$  definiran kot:

$$\mathbf{x}_k = [x^k \ v_x^k \ a_x^k]^T, \quad (8.2)$$

kjer so:

$x^k$  ... položaj v koraku  $k$ ,

$v_x^k$  ... hitrost v koraku  $k$ ,

$a_x^k$  ... pospešek v koraku  $k$ .

Matrika prehoda stanj  $\Phi_k$ , izpeljana iz dinamičnega modela sistema, je definirana kot:

$$\Phi_k = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t & \frac{\Delta t^2}{2} \\ 0 & 1 & \Delta t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (8.3)$$

kjer  $\Delta t$  predstavlja interval vzorčenja.

Model meritev opisuje zvezo med modelom sistema in meritvami. Časovno diskretni linearni model meritev sistema je definiran z enačbo:

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \boldsymbol{\eta}_k, \quad (8.4)$$

kjer so:

$\mathbf{z}_k$  ... vektor meritev,

$\mathbf{x}_k$  ... vektor stanj,

$\mathbf{H}_k$  ... merska matrika,

$\boldsymbol{\eta}_k$  ... šum meritev.

Na podlagi meritev IMU lahko izračunamo pospešek objekta v lokalnem koordinatnem sistemu, kar je opisano v poglavju 3.1 *Izračun navigacijskih parametrov*. Poleg izmerjenega položaja objekta z RTS lahko v model meritev vključimo tudi izmerjeni pospešek objekta z IMU. Ker pa so meritve IMU in RTS zajete z različnim časom vzorčenja, se matrika  $\mathbf{H}_k$  spreminja glede na razpoložljivost meritev. Ko imamo na voljo tako položaj  $x^k$ , izmerjen z RTS, kot tudi pospešek  $a_x^k$ , izmerjen z IMU, enačbo (8.4) zapišemo:

$$\begin{bmatrix} x^k \\ a_x^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [x^k \ v_x^k \ a_x^k]^T + \boldsymbol{\eta}_k. \quad (8.5)$$

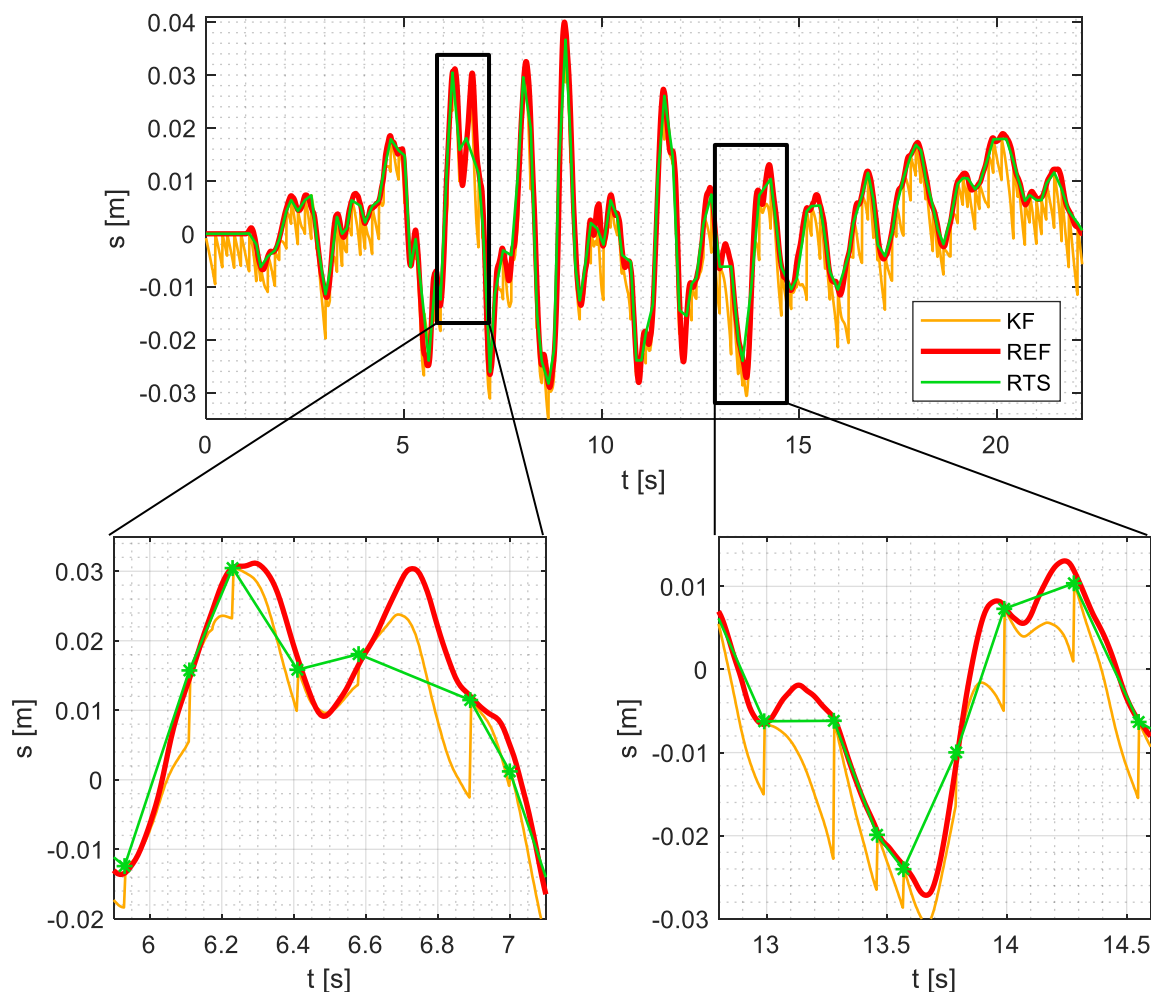
V primeru, ko imamo na voljo samo meritve IMU, enačbo (8.4) zapišemo:

$$a_x^k = [0 \ 0 \ 1][x^k \ v_x^k \ a_x^k]^T + \boldsymbol{\eta}_{a,k}. \quad (8.6)$$

Postopek Kalmanovega filtra teče v dveh korakih: napoved stanja sistema in popravek stanja sistema, kar je predstavljeno na sliki 2.1, kjer je prikazan algoritem Kalmanovega filtra.

Na sliki 8.10 so predstavljene naslednje trajektorije:

- referenčna trajektorija (REF),
- trajektorija, določena na podlagi meritev RTS (RTS),
- trajektorija, določena s Kalmanovim filtrom z razširjenim modelom meritev (KF).



Slika 8.10: Trajektorije REF, RTS in KF  
 Figure 8.10: REF, RTS and KF trajectories

Na sliki 8.10 vidimo, da je v primeru trajektorije KF opazno lezenje v položaju, ki je posledica napak IMU. Kljub temu, da je oblika trajektorije KF v intervalu med meritvami RTS podobna referenčni trajektoriji REF, je lezenje v položaju dominantnejše, zaradi česar ne moremo izboljšati kakovosti ocene trajektorije. V preglednici 8.3 je predstavljena primerjava cenilk kakovosti trajektorij RTS in KF. Cenilka kakovosti  $RMSE_r$  trajektorije KF (4,9 mm) je v primerjavi s trajektorijo RTS (2,5 mm) skoraj še enkrat večja.

Preglednica 8.3: Cenilke kakovosti trajektorij KF in RTS  
 Table 8.3: Quality estimators of KF and RTS trajectories

	KF	RTS
$RMSE_r$	4.9 mm	2.5 mm
$SNR$	5.9	19.5
$corr$	0.964	0.980

### 8.3.2 Glajenje rezultatov PVA Kalmanovega filtra z razširjenim modelom meritev

Rezultate Kalmanovega filtra, ki je predstavljen v poglavju 8.3.1 *PVA Kalmanov filter z razširjenim modelom meritev*, lahko dodatno izboljšamo s postopkom glajenja, ki temelji na algoritmu Rauch-Tung-Striebel (Bishop, 2006). Algoritem uporabi meritve na celotnem zaključenem intervalu, saj s stališča časovne komponente glajenje teče v obeh smereh signala, naprej (angl. forward) in nazaj (angl. backward). Od tu izhaja tudi angleško poimenovanje algoritma: *Rauch-Tung-Striebel forward-backward smoothing algorithm*.

V osnovi je diskretni Kalmanov filter definiran v koraku  $k$ , ki teče naprej: od začetka proti koncu. Postopek Kalmanovega filtra, ki je opisan v poglavju 3.1 *Osnovni model Kalmanovega filtra*, lahko povzamemo v dveh fazah – napoved stanja in popravek stanja sistema. Ponovno zapišimo postopek Kalmanovega filtra (slika 2.1).

**Napoved** stanja sistema:

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \Phi_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+, \quad (8.7)$$

$$\mathbf{P}_k^- = \Phi_k \mathbf{P}_{k-1} \Phi_k^T + \mathbf{Q}_k. \quad (8.8)$$

**Popravek** stanja sistema:

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1}, \quad (8.9)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k^+ = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k^-), \quad (8.10)$$

$$\mathbf{P}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_k^- (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k)^T + \mathbf{K}_k \mathbf{R}_k \mathbf{K}_k^T, \quad (8.11)$$

kjer je  $k$  teče:  $k = 1 \dots n$ .

Pri postopku glajenja, ki temelji na algoritmu Rauch-Tung-Striebel, pa obrnemo smer diskretnega signala in  $k$  teče v obratni smeri. Postopek je definiran:

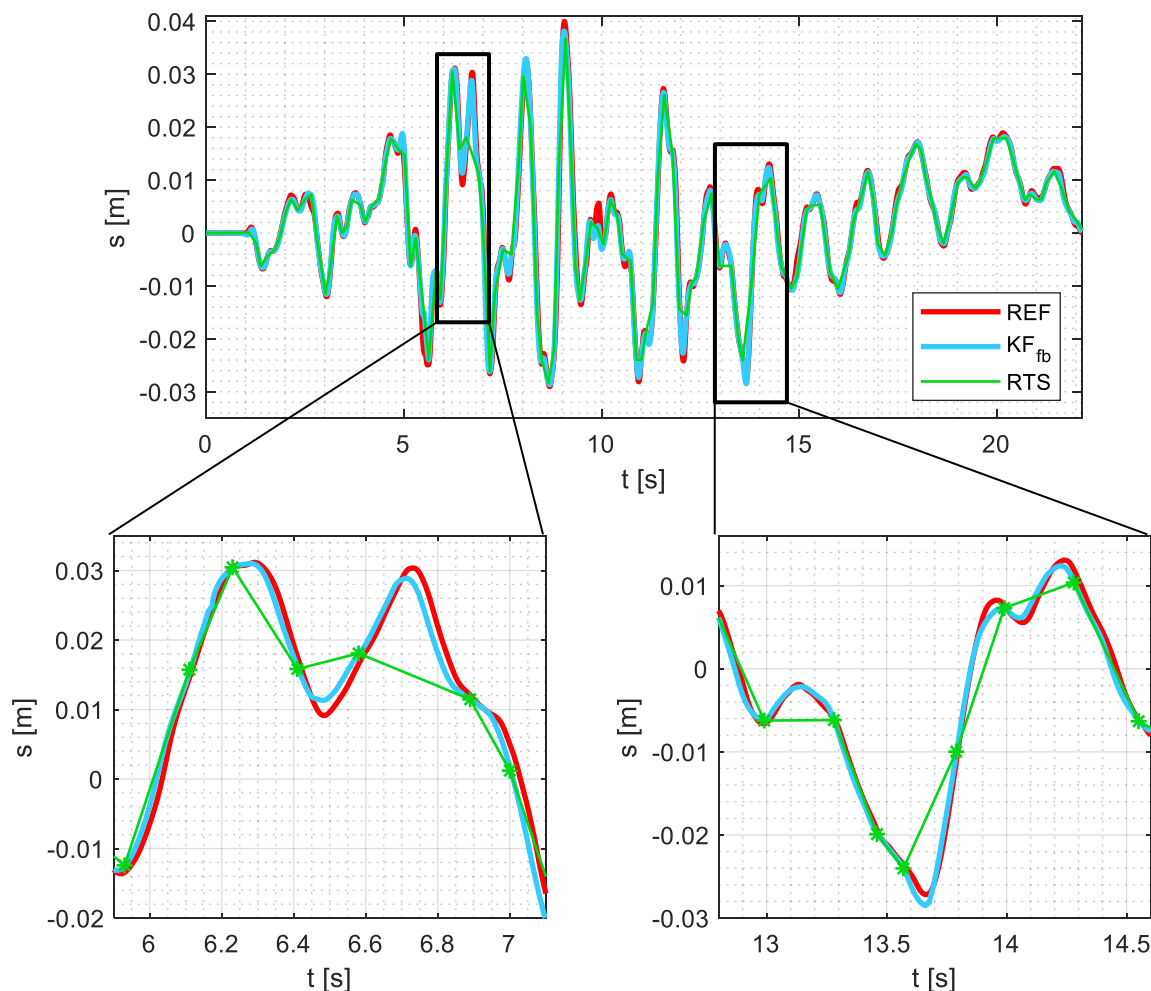
$$\mathbf{J}_k = \mathbf{P}_k \Phi_k^T \mathbf{P}_k^{-1}, \quad (8.12)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^+ + \mathbf{J}_k (\hat{\mathbf{x}}_{k+1} - \Phi_k \hat{\mathbf{x}}_k^+), \quad (8.13)$$

$$\hat{\mathbf{P}}_k = \mathbf{P}_k + \mathbf{J}_k (\hat{\mathbf{P}}_{k+1} - \mathbf{P}_k) \mathbf{J}_k^T, \quad (8.14)$$

kjer je  $k$  teče:  $k = n \dots 1$ .

Rezultat obdelave meritev RTS in IMU s Kalmanovim filtrom in postopkom glajenja z algoritmom Rauch-Tung-Striebel je trajektorija  $KF_{fb}$ , ki je prikazana na sliki 8.11 z modro barvo.



Slika 8.11: Trajektorije REF, RTS in  $KF_{fb}$   
 Figure 8.11: REF, RTS and  $KF_{fb}$  trajectories

Na sliki 8.11 vidimo, da smo s postopkom glajenja dobili trajektorijo  $KF_{fb}$ , ki ima zelo visoko stopnjo ujemanja z referenčno trajektorijo REF. V preglednici 8.4 je predstavljena primerjava cenilk kakovosti trajektorij RTS in  $KF_{fb}$ . Vidimo, da vse cenilke kakovosti potrjujejo, da je trajektorija  $KF_{fb}$  določena z višjo kakovostjo. Cenilka kakovosti  $RMSE_r$  trajektorije  $KF_{fb}$  (1.3 mm) je v primerjavi s trajektorijo RTS (2,5 mm) manjša za 48 %. S kombinacijo meritev nizkocenovnega senzorja IMU torej lahko izboljšamo kakovost kinematičnih meritev RTS.

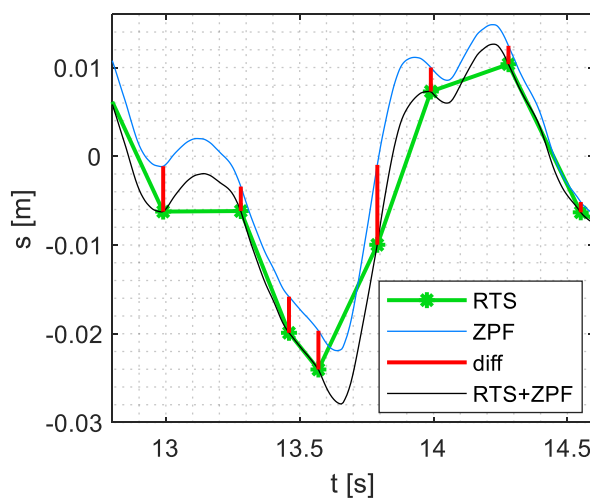
Preglednica 8.4: Cenilke kakovosti trajektorij  $KF_{fb}$  in RTS  
 Table 8.4: Quality estimators of  $KF_{fb}$  and RTS trajectories

	RTS	$KF_{fb}$
$RMSE_r$	2.5 mm	1.3 mm
SNR	19.5	83.5
corr	0.980	0.994

### 8.3.3 Linearna interpolacija odstopanj (RTS+ZPF)

Z uporabo Zero Phase filtra smo poleg napake v lezenju položaja senzorja IMU odstranili tudi nizkofrekvenčna nihanja in permanentne premike objekta. Z RTS lahko zelo kakovostno določimo položaj objekta z nižjo frekvenco. S tem lahko spremljamo nizkofrekvenčna nihanja objekta, zaradi omejene frekvence zajema merskih vrednosti pa ne moremo opisati trajektorije objekta na mestih, kjer so prisotna nihanja z višjo frekvenco. Izkoristimo lahko prednosti obeh metod določitve trajektorije (RTS in ZPF) in končni rezultat določimo na osnovi obeh trajektorij.

V časovnih trenutkih, ko imamo na voljo izmerjen položaj trajektorije z RTS, določimo odstopanja med trajektorijo RTS in trajektorijo ZPF, kot je to prikazano na sliki 8.12. Odstopanja med trajektorijama so na sliki prikazana z rdečo barvo (diff). Odstopanja v intervalu med izmerjenimi RTS točkami določimo z linearno interpolacijo in v naslednjem koraku trajektorijo ZPF popravimo za vrednost teh odstopanj. Na tak način pridobimo trajektorijo RTS+ZPF, ki je na sliki 8.12 prikazana s črno barvo.

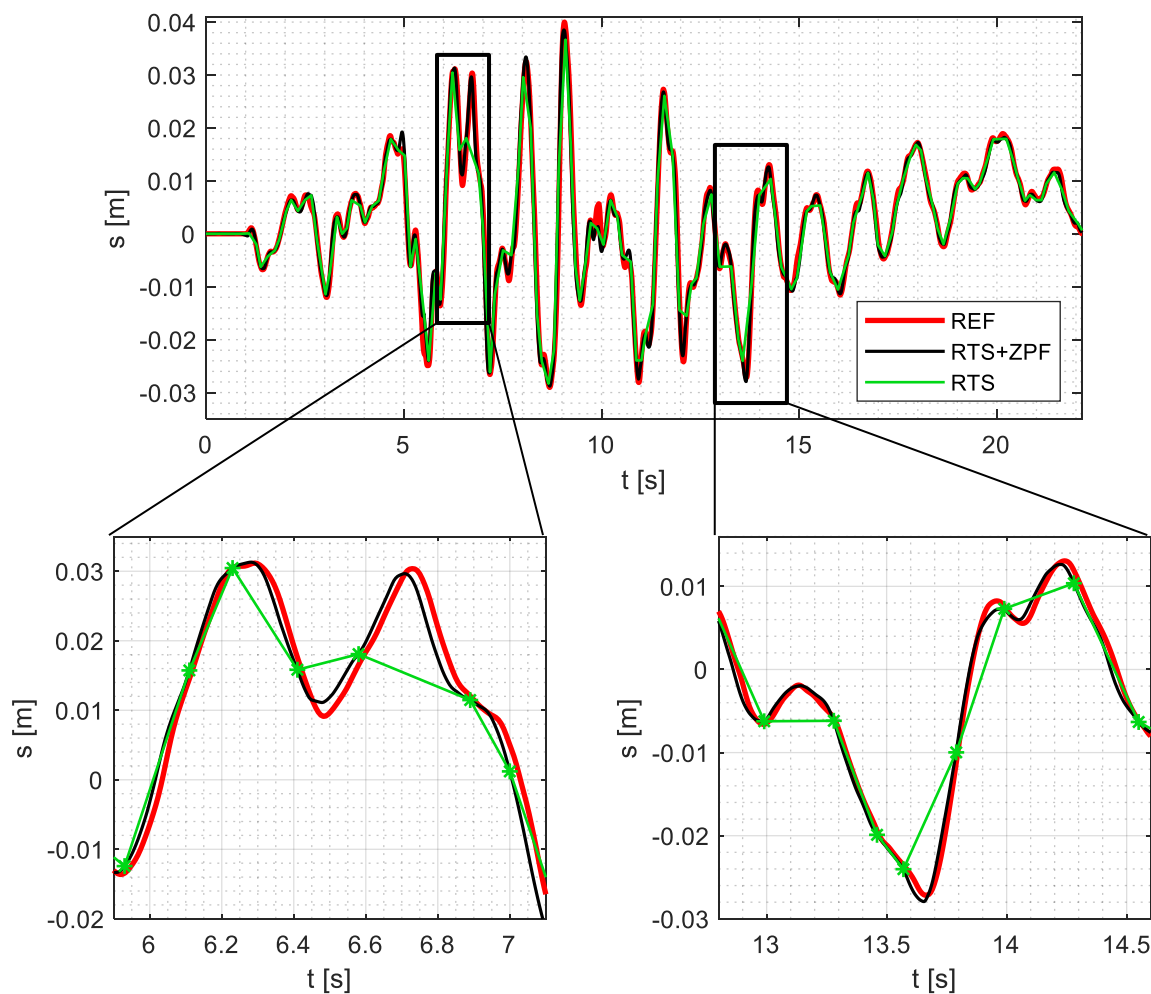


**Slika 8.12: Združevanje trajektorij RTS in ZPF z linearno interpolacijo odstopanj med trajektorijama**

*Figure 8.12: Combining RTS and ZPF trajectories by linear interpolation of deviations between trajectories*



Na sliki 8.13 je s črno barvo prikazan rezultat združene trajektorije RTS+ZPF za celotni interval meritev. Prikazani sta tudi referenčna trajektorija REF in trajektorija RTS. Vidimo, da ima združena trajektorija RTS+ZPF visoko stopnjo ujemanja z referenčno trajektorijo REF na celotnem intervalu meritev.



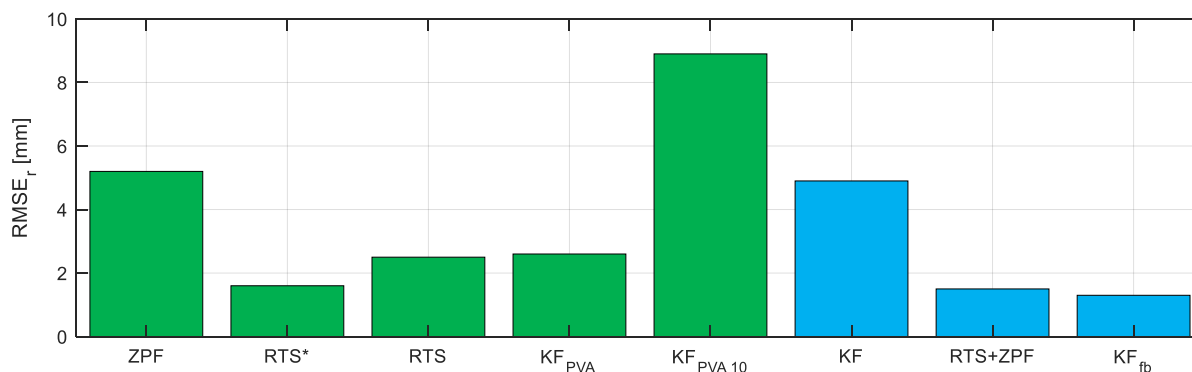
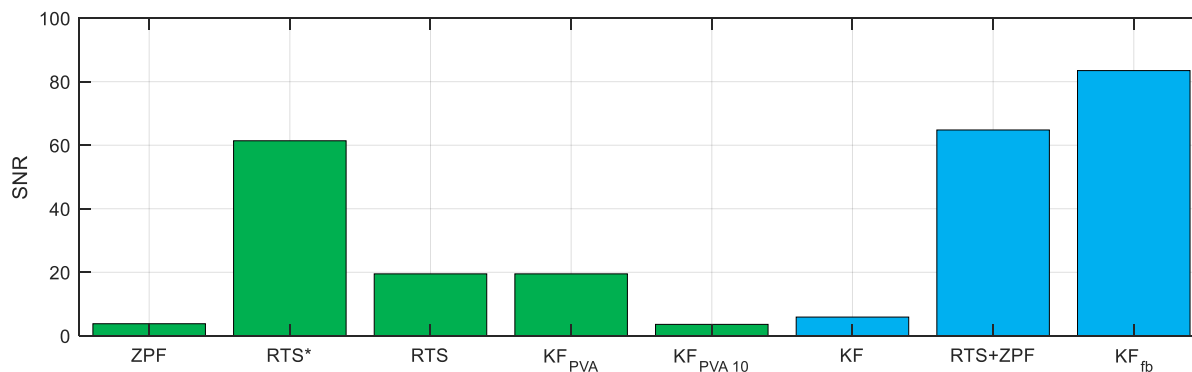
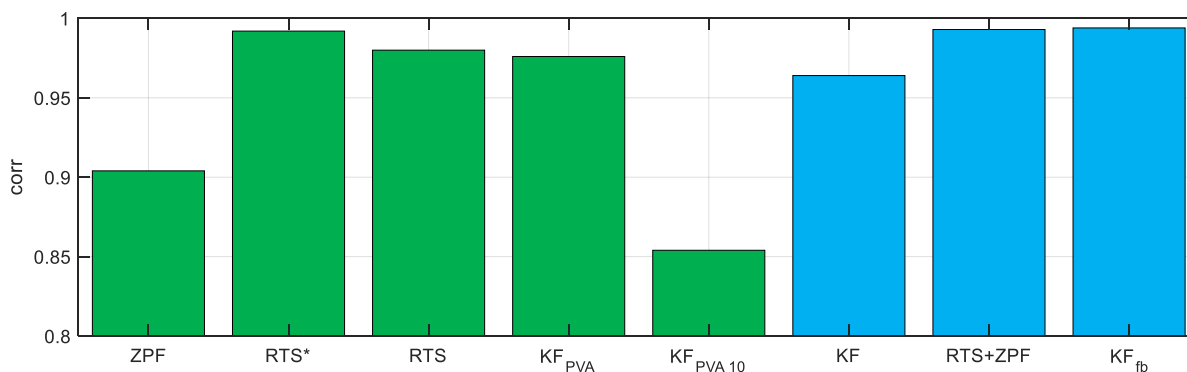
Slika 8.13: Trajektorije REF, RTS+ZPF, RTS

Figure 8.13: REF, RTS+ZPF, RTS trajectories

V preglednici 8.5 so predstavljene cenilke kakovosti vseh obravnavanih trajektorij. Na sliki 8.14 je na grafu prikazana vrednost cenilke kakovosti  $RMSE_r$ , na sliki 8.15 vrednost cenilke kakovosti  $SNR$  in na sliki 8.16 vrednost cenilke kakovosti  $corr$ . Z zeleno barvo so predstavljeni rezultati, ki se nanašajo na trajektorije, ki so določene na podlagi ločene obravnave meritev RTS in IMU – to so trajektorije ZPF, RTS\*, RTS,  $KF_{PVA}$  in  $KF_{PVA10}$ . Z modro barvo so predstavljeni rezultati, ki se nanašajo na trajektorije, določene na podlagi združenih rezultatov meritev RTS in IMU – to so trajektorije KF,  $KF_{fb}$ , in RTS+ZPF. Vidimo lahko, da sta najbolj kakovostno določeni trajektoriji  $KF_{fb}$ , in RTS+ZPF. Trajektorija RTS+ZPF je v primerjavi s trajektorijo RTS glede na  $RMSE_r$  določena za 40 %, trajektorija  $KF_{fb}$  pa za 48 % bolj točno.

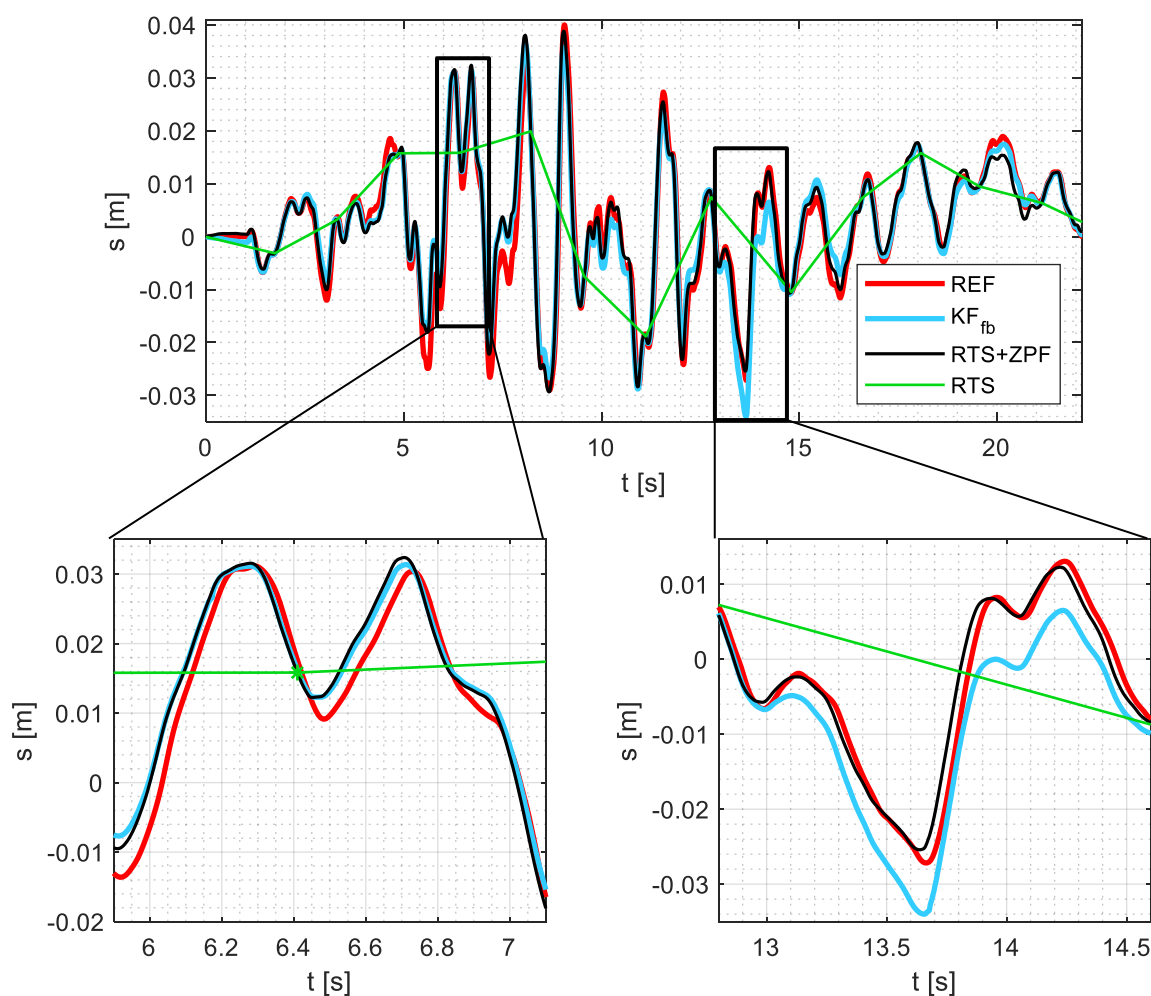
**Preglednica 8.5: Cenilke kakovosti trajektorij ZPF, RTS\*, RTS, KF<sub>PVA</sub>, KF<sub>PVA10</sub>, KF, RTS+ZPF in KF<sub>fb</sub>***Table 8.5: ZPF, RTS\*, RTS, KFPVA, KFPVA10, KF, RTS+ZPF and KF<sub>fb</sub> trajectory quality estimators*

	ZPF	RTS*	RTS	KF <sub>PVA</sub>	KF <sub>PVA10</sub>	KF	RTS+ZPF	KF <sub>fb</sub>
$RMSE_r$	5.2 mm	1.6 mm	2.5 mm	2.6 mm	8.9 mm	4.9 mm	1.5 mm	1.3 mm
SNR	3.8	61.4	19.5	19.5	3.6	5.9	64.8	83.5
corr	0.904	0.992	0.980	0.976	0.854	0.964	0.993	0.994

**Slika 8.14: Velikost cenilke kakovosti  $RMSE$  za vse obravnavane trajektorije***Figure 8.14: The size of the RMSE quality estimator for all considered trajectories***Slika 8.15: Velikost cenilke kakovosti  $SNR$  za vse obravnavane trajektorije***Figure 8.15: The size of the SNR quality estimator for all considered trajectories***Slika 8.16: Velikost cenilke kakovosti  $corr$  za vse obravnavane trajektorije***Figure 8.16: The size of the corr quality estimator for all considered trajectories*

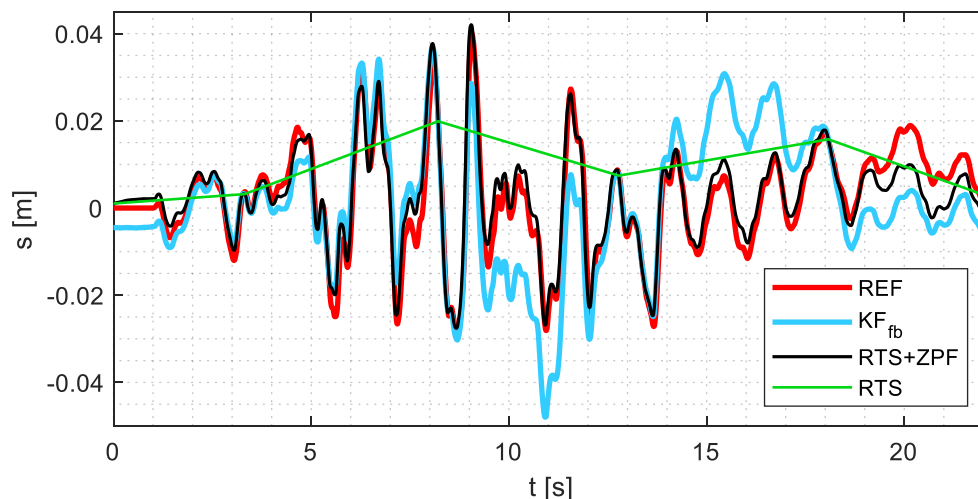
Na podlagi rezultatov, predstavljenih v preglednici 8.5 in na slikah 8.14, 8.15 in 8.16 vidimo, da dobimo najkvalitetnejšo oceno trajektorije v primeru združenih rezultatov meritev RTS in IMU. Trajektorija  $KF_{fb}$ , ki je rezultat uporabe kombinacije Kalmanovega filtra in postopka glajenja z algoritmom Rauch-Tung-Striebel, je nekoliko boljša od trajektorije RTS+ZPF. Pri testiranju potresne mize smo v nadzorovanih pogojih pridobili zelo zanesljive rezultate meritev RTS brez večjih izpadov signala s frekvenco zajema podatkov od 2,2 Hz do 10 Hz, kar pomeni, da je najdaljši interval med zajemom RTS meritev znašal 0,46 sekunde. V primeru, ko bi kinematične meritve z RTS izvajali v nenadzorovanem okolju na večji oddaljenosti od opazovanega objekta, pa se lahko zgodi tudi daljši izpad signala v velikostnem razredu tudi nekaj sekund. Na primeru potresne mize bomo preverili kakšno kakovost ocenjene trajektorije dobimo z združevanjem meritev RTS in IMU pri čemer bomo zmanjšali frekvenco zajema kinematičnih meritev RTS. Pobljže si bomo pogledali primera, kjer smo za čas vzorčenja meritev RTS izbrali 1,5 sekunde in 5,0 sekund.

Na sliki 8.17 je prikazan primer trajektorij  $KF_{fb}$ , in RTS+ZPF pri povprečnem času vzorčenja kinematičnih meritev RTS 1,5 sekunde, na sliki 8.18 pa pri povprečnem času vzorčenja 5 sekund.



Slika 8.17: Rezultat združenih meritev RTS in IMU pri času vzorčenja meritev RTS 1,5 s

Figure 8.17: The result of the combined RTS and IMU measurements at the sampling time of the RTS measurements at 1.5 s



**Slika 8.18: Rezultat združenih meritev RTS in IMU pri času vzorčenja meritev RTS 5 s**

Figure 8.18: The result of the combined RTS and IMU measurements at the sampling time of the RTS measurements at 5 s

V preglednici 8.6 so zbrane cenilke kakovosti trajektorij  $KF_{fb}$ , in RTS+ZPF pri povprečnem času vzorčenja kinematičnih meritev RTS 1,5 sekunde, v preglednici 8.7 pa pri povprečnem času vzorčenja 5 sekund. Na sliki 8.17 in v preglednici 8.6 vidimo, da smo pri času vzorčenja 1,5 sekunde dobili boljše rezultate pri trajektoriji RTS+ZPF. Pri času vzorčenja 5 sekund (slika 8.18 in preglednica 8.7) so razlike med trajektorijama RTS+ZPF in  $KF_{fb}$  večje.

Ob daljšem časovnem intervalu med meritvami RTS povzročijo napake sensorja IMU večje lezenje v položaju, ki se v postopku Kalmanovega filtra ne odstrani, medtem ko z uporabo Zero Phase filtra kakršnokoli lezenje v položaju odstranimo. Na podlagi rezultatov lahko zaključimo, da ob manjši frekvenci zajema kinematičnih meritev RTS gibanje objekta bolje opišemo z združeno trajektorijo RTS+ZPF. To je še posebej primerno ob morebitnih izpadih signala med kinematičnimi meritvami RTS.

**Preglednica 8.6: Cenilke kakovosti trajektorij ZPF, RTS, RTS+ZPF in  $KF_{fb}$  pri povprečnem času vzorčenja kinematičnih RTS meritev 1,5 sekunde**

Table 8.6: ZPF, RTS, RTS + ZPF and  $KF_{fb}$  trajectory quality estimators at an average sampling time of kinematic RTS measurements at 1.5 seconds

	ZPF	RTS	RTS+ZPF	$KF_{fb}$
$RMSE_r$	5.2 mm	13.5 mm	2.9 mm	3.2 mm
SNR	3.8	0.6	17.7	14.1
corr	0.904	0.249	0.973	0.965

**Preglednica 8.7: Cenilke kakovosti trajektorij ZPF, RTS, RTS+ZPF in  $KF_{fb}$  pri povprečnem času vzorčenja kinematičnih RTS meritev 5 sekund**

Table 8.7: ZPF, RTS, RTS + ZPF and  $KF_{fb}$  trajectory quality estimators at an average sampling time of kinematic RTS measurements at 5 seconds

	ZPF	RTS	RTS+ZPF	$KF_{fb}$
$RMSE_r$	5.2 mm	15.3 mm	3.8 mm	11.3 mm
SNR	3.8	0.5	9.2	1.8
corr	0.904	0.021	0.950	0.681

## 9 Eksperiment: Spremljanje nihanja stolpa na Rašici

Rašica je zakraseli osamelec na severu Ljubljanskega polja oz. na zahodu Kamniško-Bistriškega polja. Z atraktivnimi kolesarskimi in sprehajalnimi gozdnimi potmi je ena najbolj priljubljenih izletniških točk v neposredni bližini Ljubljane. Najvišja točka je Vrh Staneta Kosca, kjer se nahaja tudi geodetska točka 1. reda. V njeni neposredni bližini stoji 17 metrov visok razgledni stolp (prikazan na sliki 9.1), ki ponuja lepe razglede po Ljubljanski kotlini in Kamniško-Savinjskih Alpah. Razgledni stolp je sestavljen iz čvrste kovinske konstrukcije, kljub temu pa vrh stolpa ob večjih obremenitvah (veter, ljudje) niha, kar lahko občuti tudi opazovalec na vrhu stolpa.

Zanimalo nas je, kakšna je trajektorija nihanja stolpa ob večjem številu ljudi na zgornji ploščadi. Za izmero smo preizkusili tehnologijo in metodologijo, ki smo jo razvili in s katero združimo meritve RTS in IMU. V poglavjih 7 *Eksperiment: Visokofrekvenčno sledenje trajektorije oscilirajočega objekta z nizkocenovnim senzorjem IMU* in 8 *Eksperiment: Spremljanje potresne mize med simulacijo potresa s kombinacijo meritev robotskega tahimetra in nizkocenovnega sensorja IMU* smo metodologijo uporabili v nadzorovanih pogojih, tokrat pa smo jo preizkusili v dejanskih pogojih na terenu.

Terenske meritve smo izvedli na Silvestrovo, 31. 12. 2019, pred polnočjo, ko je bil stolp še posebej obiskan. Na sliki 9.1 je prikazan stolp, na sliki 9.2 pa robotski tahimeter Leica MS50, ki smo ga uporabili za meritve. Modul IMU, ki združuje odbojno prizmo in senzor IMU, smo pritrdili nad zgornjo pohodno ploščadjo stolpa, kot je to prikazano na sliki 9.3. Meritve smo izvajali v daljšem časovnem obdobju. Prikazali bomo enega izmed bolj zanimivih časovnih intervalov, ko je na stolp odšla družba fantov ob glasbeni spremljavi. Ob tem dogodku smo zaznali tudi največje amplitude nihanja stolpa.



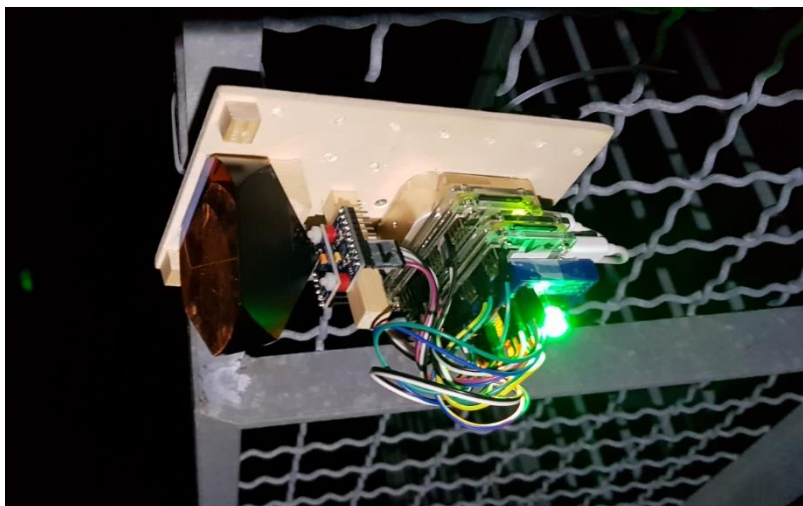
**Slika 9.1: Razgledni stolp na Rašici**

*Figure 9.1: Rašica tower*



**Slika 9.2: Leica Nova MS50 med meritvami**

*Figure 9.2: Leica Nova MS50 during measurements*

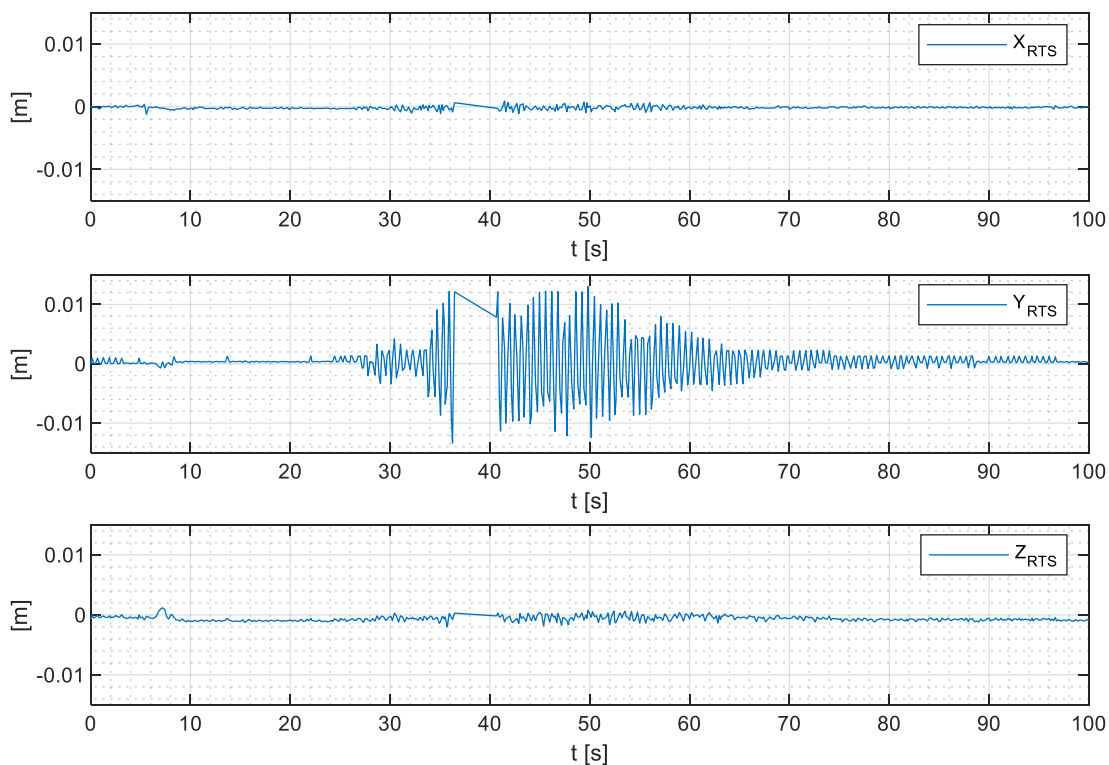


**Slika 9.3: Modul IMU, pritrjen nad zgornjo pohodno ploščadjo stolpa na Rašici**

*Figure 9.3: IMU module attached above the upper walking platform of the Rašica tower*

Rezultat kinematičnih meritev RTS je predstavljen na sliki 9.4. RTS je bil od modula IMU oddaljen 35 metrov. Orientacijo lokalnega koordinatnega sistema smo izbrali tako, da je  $y$ -os usmerjena v smeri izrazito največje amplitude nihanja stolpa. Na sliki 9.4 vidimo, da so premiki stolpa v smeri  $x$ -osi in  $z$ -osi minimalni, saj dosežejo le 1 milimeter. V nadaljevanju prikažemo le rezultate v smeri  $y$ -osi. Amplituda nihanja je v tej smeri večja kot 1 centimeter.

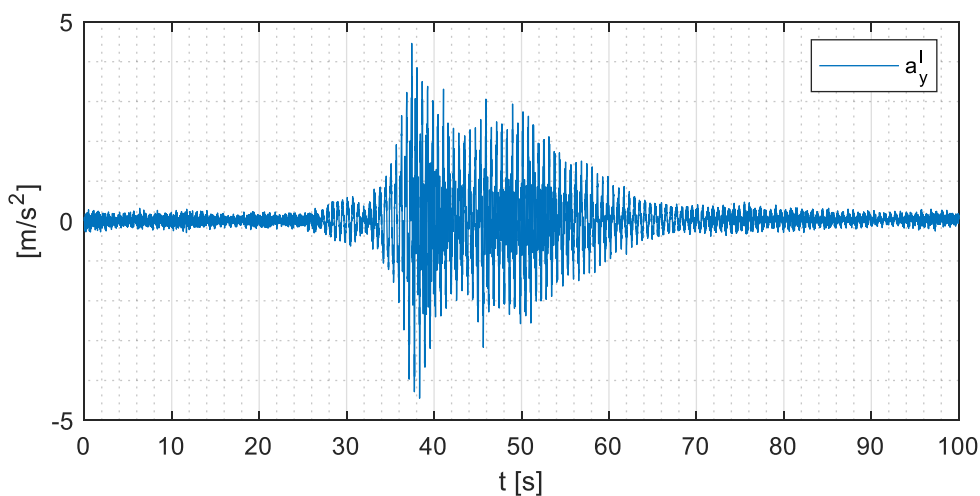
Na sliki 9.4 vidimo, da je med 36. in 40. sekundo meritev prišlo do prekinitve signala. V tem intervalu torej nimamo rezultatov kinematičnih meritev RTS.



**Slika 9.4: Rezultat kinematičnih meritev RTS**

*Figure 9.4: The result of the RTS kinematic measurements*

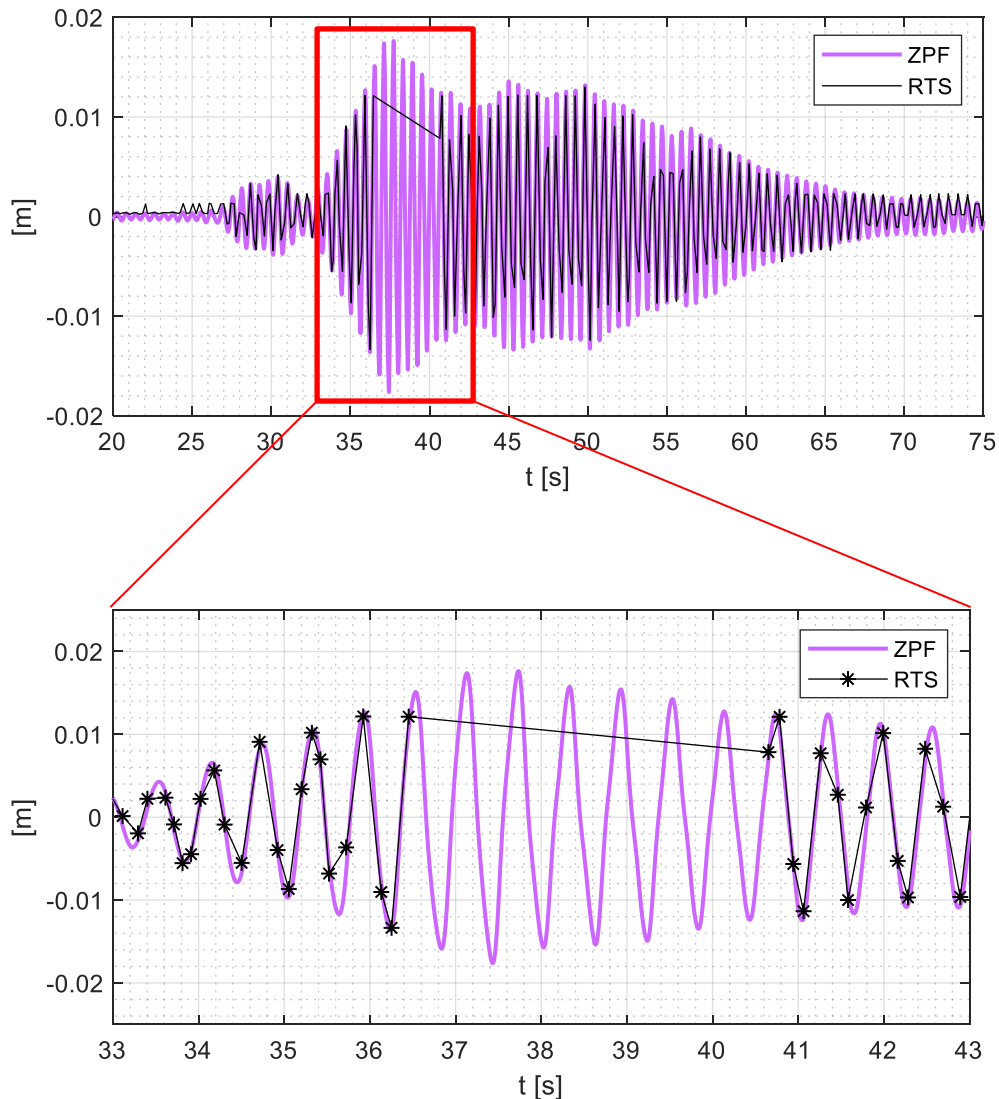
Na sliki 9.5 je prikazan pospešek objekta v smeri  $y$ -osi, ki smo ga izračunali na podlagi meritev IMU. Uporabili smo postopek izračuna, ki je opisan v poglavju 3.1 *Izračun navigacijskih parametrov*.



**Slika 9.5: Pospešek objekta v lokalnem koordinatnem sistemu**

*Figure 9.5: Acceleration of an object in the local coordinate system*

Na podlagi meritev IMU smo izračunali trajektorijo IMU, ki smo jo obdelali s postopkom Zero Phase filtra, kot je to predstavljeno v poglavju 7.2.2 *Odstranitev trenda lezenja položaja z Zero Phase filtrom*. Rezultat je predstavljen na sliki 9.6, kjer je trajektorija ZPF prikazana z vijolično barvo. Na sliki 9.6 je bolj podrobno prikazan interval, v katerem zaradi prekinjenega signala ni meritev RTS.

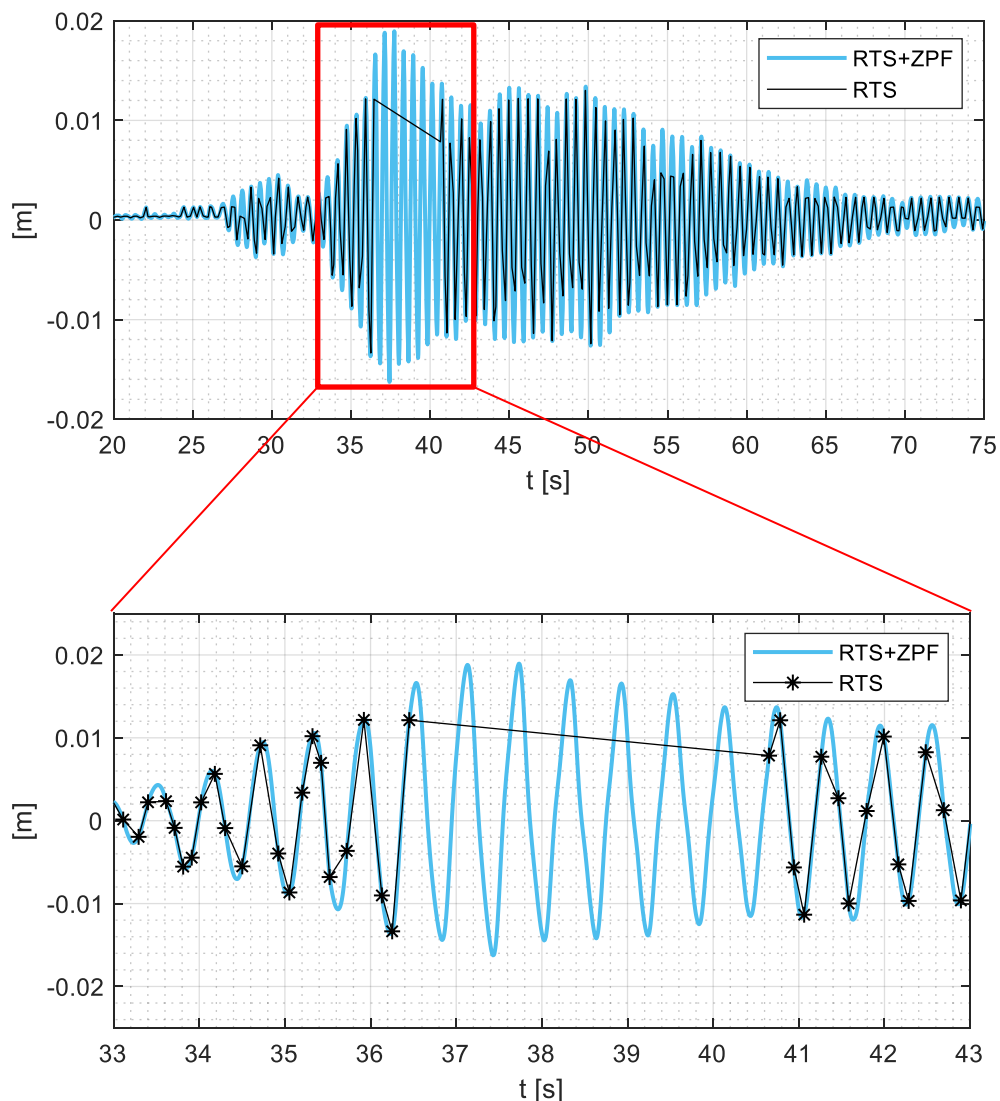


**Slika 9.6: Prikaz trajektorije ZPF in trajektorije RTS**

*Figure 9.6: ZPF trajectory and RTS trajectory*

Na sliki 9.6 sta prikazani trajektoriji, ki ju dobimo z ločeno obravnavo meritev IMU in RTS. V nadaljevanju bomo določili trajektorijo z združenimi meritvami RTS in IMU. V prvem koraku bomo združili trajektoriji RTS in ZPF, kot je to opisano v poglavju 8.3.3 *Linearna interpolacija odstopanj (RTS+ZPF)*. Rezultat združene trajektorije RTS+ZPF je prikazan na sliki 9.7.

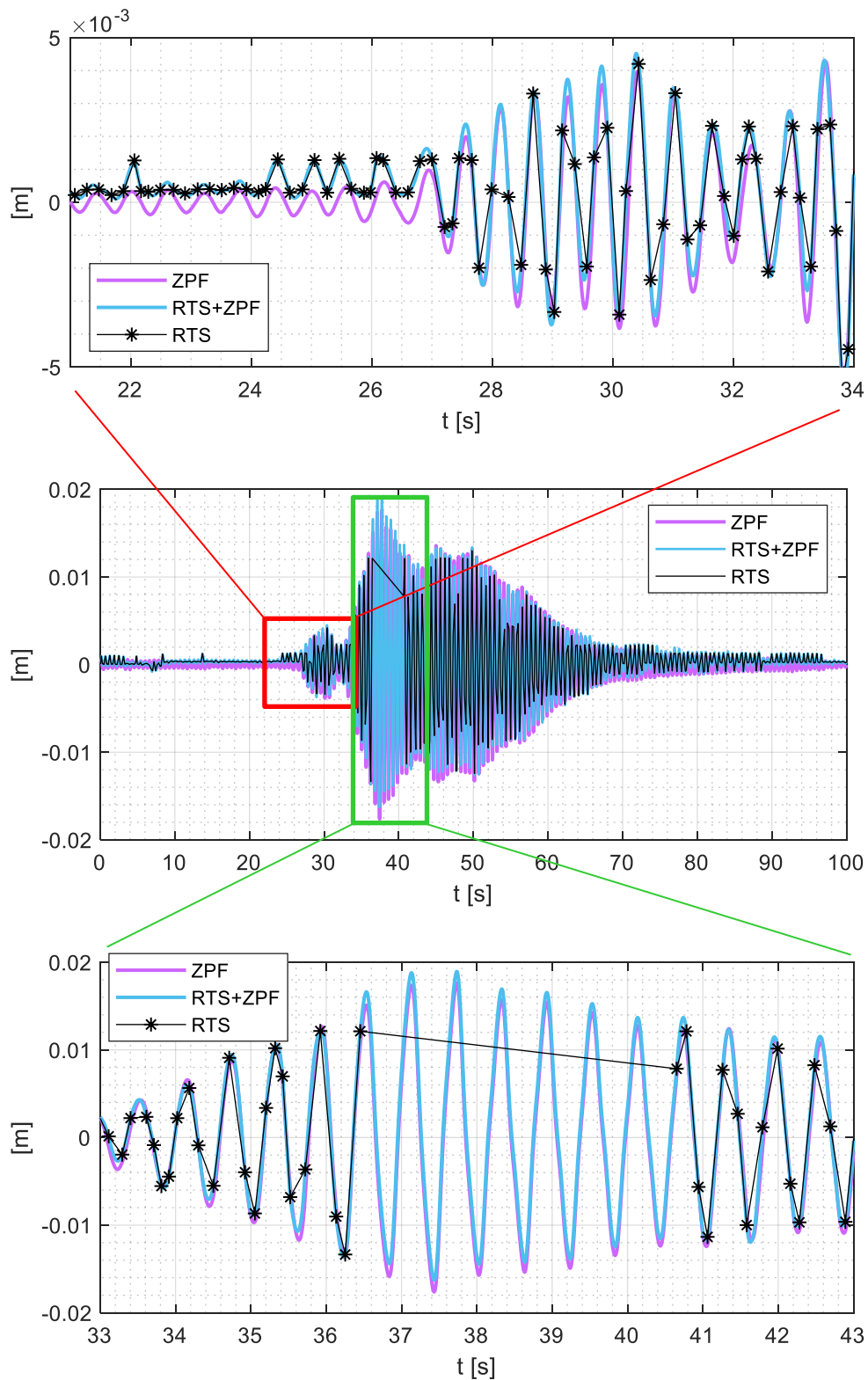




Slika 9.7: Prikaz trajektorije RTS+ZPF

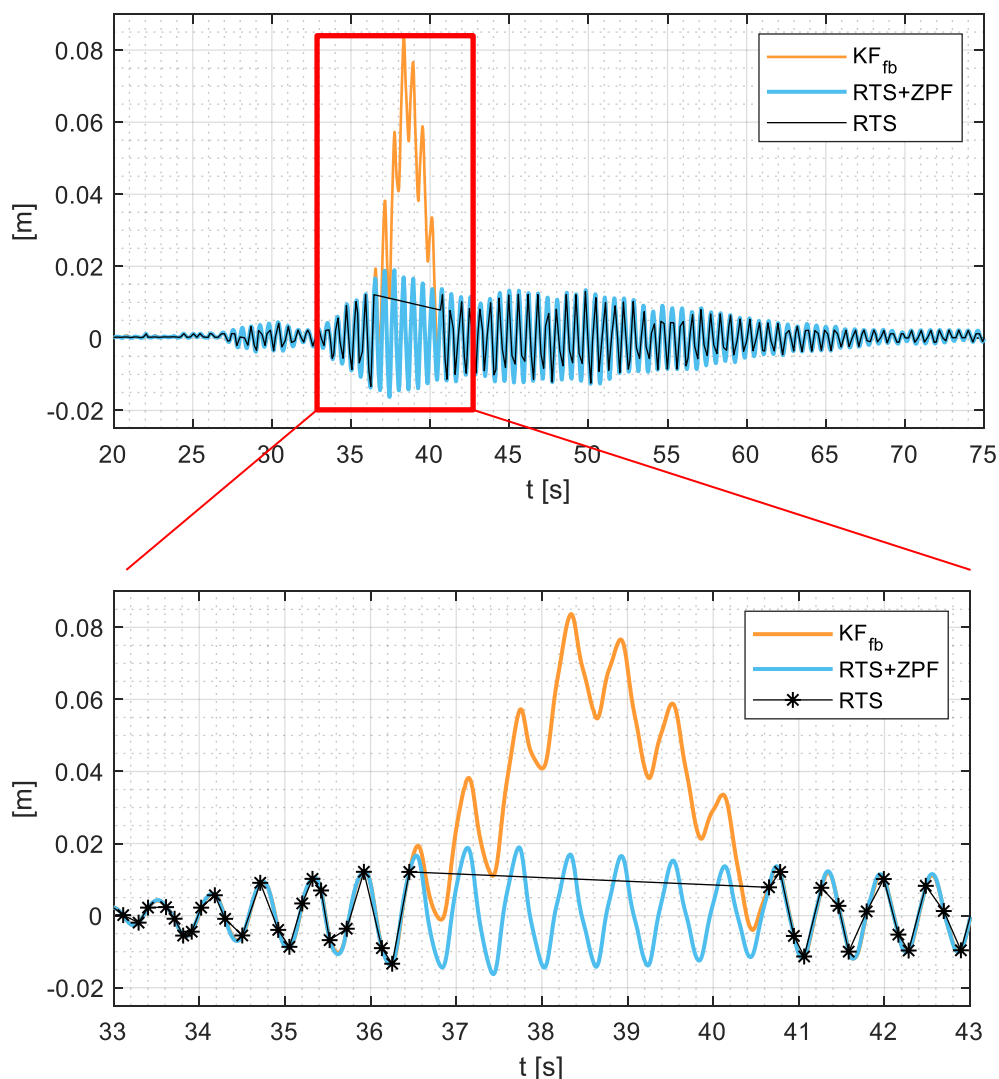
Figure 9.7: RTS+ZPF trajectory

Na sliki 9.8 je prikazana primerjava trajektorij RTS, ZPF in RTS+ZPF. Vidimo, da trajektoriji ZPF in RTS+ZPF dobro sovpadata, razlike med njima so največ nekaj milimetrov. Stolp je nihal približno okoli začetne, ničelne točke. Kljub majhnim razlikam so le te opazne. Rezultat izboljšamo z upoštevanjem združenih meritev IMU in kinematičnih meritev RTS. Na sliki 9.8 opazimo tudi, da so bile amplitude nihanja stolpa največje ravno v intervalu, ko je bil signal med kinematičnimi meritvami RTS prekinjen. Največji odmik od ravnovesne lege stolpa je znašal 19 mm.



**Slika 9.8: Primerjava trajektorij ZPF, RTS in RTS+ZPF**  
*Figure 9.8: Comparison of ZPF, RTS and RTS+ZPF trajectories*

V drugem koraku smo kinematične meritve RTS in meritve IMU združili s postopkom Kalmanovega filtra in glajenja z algoritmom Rauch-Tung-Striebel, kot je to opisano v poglavjih 8.3.1 *PVA Kalmanov filter z razširjenim modelom meritev* in 8.3.2 *Glajenje rezultatov PVA Kalmanovega filtra z razširjenim modelom meritev*. Rezultati trajektorije  $KF_{fb}$  so prikazani na sliki 9.9. Trajektorija  $KF_{fb}$  na mestih, kjer so na voljo kinematične meritve RTS, popolnoma sovпада s trajektorijo RTS+ZPF. V intervalu med 36. sekundo in 40. sekundo, ko ni meritev RTS, pa prihaja do večjih odstopanj. Kot je vidno na sliki 9.9, trajektorija odstopi za 8 centimetrov, kar je posledica vpliva neodpravljenih napak IMU. Kot smo ugotovili v poglavju 8.3 *Ocena trajektorije na podlagi združenih meritev RTS in IMU*, postopek Kalmanovega filtra in glajenja zagotavlja dobre rezultate ob dovolj visoki frekvenci meritev RTS. V kolikor je frekvenca zajema kinematičnih meritev prenizka ali pa pride do izgube signala, pa se za precej boljše izkaže metoda, kjer združimo rezultate ZPF in RTS v trajektorijo RTS+ZPF.



Slika 9.9: Primerjava trajektorij  $KF_{fb}$ , RTS+ZPF in RTS  
Figure 9.9: Comparison of  $KF_{fb}$ , RTS+ZPF and RTS trajectories

## 10 Zaključek

V doktorski disertaciji analiziramo možnost izboljšanja kinematičnih meritev RTS s kombiniranjem visokofrekvenčnih meritev senzorja IMU. Disertacijo vsebinsko razdelimo v več sklopov. V prvem sklopu opišemo kinematične meritve RTS in izpeljemo model Kalmanovega filtra, ki ga uporabimo za obdelavo kinematičnih meritev. V drugem sklopu predstavimo inercialni navigacijski sistem in metode, ki jih uporabimo pri obdelavi meritev nizkocenovnega senzorja IMU in nam omogočajo samostojno uporabo senzorja IMU pri določanju položaja objekta v prostoru. V tretjem sklopu z eksperimenti empirično ovrednotimo kakovost določanja trajektorije oscilirajočega objekta v prostoru. Pri prvem eksperimentu analiziramo samostojno uporabo nizkocenovnega senzorja IMU pri ocenjevanju trajektorije oscilirajočega objekta in analiziramo uspešnost metod za odstranjevanje trenda lezenja položaja objekta. Pri drugem eksperimentu določamo trajektorijo potresne mize med simulacijo potresa, pri čemer kinematične meritve RTS in meritve nizkocenovnega senzorja IMU najprej obravnavamo ločeno, nato pa predstavimo metode za združevanje obeh tipov meritev in analiziramo kakovost trajektorij, ocenjenih z vsemi predstavljenimi metodami. V tretjem eksperimentu v realnih pogojih preizkusimo razvite metode kombiniranih kinematičnih geodetskih meritev z visokofrekvenčnim zajemom podatkov na primeru spremljanja nihanja stolpa na Rašici.

V nadaljevanju podajamo najpomembnejše ugotovitve, zaključke in ovrednotimo uspešnost zastavljenih ciljev ter stanje postavljenih hipotez.

### 10.1 Kinematične meritve z RTS

V disertaciji smo predstavili razvoj robotskih tahimetrov, ki omogočajo kinematično merjenje. V preteklosti je imela pri tem velik vpliv na kakovost rezultatov sinhronizacija meritev smeri in dolžin, pri sodobnih RTS pa je ta vpliv zanemarljiv. Zato smo se osredotočili na rezultate kinematičnih meritev RTS in na možnosti povečanja kakovosti kinematične določitve trajektorije objekta v prostoru. Kinematične meritve RTS so učinkovite, kadar merimo objekt, ki se giblje približno enakomerno, brez hitrih pospeškov ali pojemkov. Sledenje takemu gibanju z RTS torej predstavlja trivialen problem. Uporaba Kalmanovega filtra pri odstranjevanju šuma in glajenju izmerjene trajektorije v tem primeru daje dobre rezultate. Pri obravnavi gibanja, kjer so prisotna nihanja višjih frekvenc od frekvence zajema meritev RTS, pa prihaja do težav. Pospešek objekta v časovnem intervalu med zaporednima meritvama v tem primeru ni več konstanten, kar je eden izmed glavnih pogojev osnovnega PVA modela Kalmanovega filtra. V poglavju 8 *Eksperiment: Spremljanje potresne mize med simulacijo potresa s kombinacijo meritev robotskega tahimetra in nizkocenovnega senzorja IMU* tako ugotovimo, da

splošni model PVA Kalmanovega filtra, kjer kot meritve nastopajo le z RTS kinematično izmerjeni položaji objekta, ni primeren za opis trajektorije objekta, ki oscilira z višjo frekvenco od zajema meritev RTS. Pospešek objekta v tem času namreč ni konstanten. Trajektorijo RTS objekta med meritvama zato ocenimo z linearno interpolacijo med izmerjenimi položaji objekta. Na osnovi rezultatov eksperimenta lahko zaključimo, da je točnost zajema merskih vrednosti kinematičnih meritev RTS pri spremljanju gibanja objekta izredno visoka. Za instrument Leica Nova MS50, ki smo ga uporabili,  $RMSE_r$  znaša 1,6 mm. To je v okviru natančnosti, ki jo zagotavlja proizvajalec pri kinematičnem načinu merjenja z uporabo sistema avtomatskega sledenja in viziranja tarče (Leica ATRplus). Večji problem kot natančnost instrumenta pri kinematičnih meritvah je omejena prenizka frekvenca zajema merskih vrednosti. To oviro pa smo v disertaciji premostili s kombiniranjem kinematičnih meritev RTS in visokofrekvenčnih meritev nizkocenovnega sensorja IMU.

## 10.2 Samostojna uporaba nizkocenovnega IMU

IMU senzor združuje triosni pospeškometer, žiroskop in magnetometer. Z njim lahko določimo pospešek, hitrost in položaj objekta v izbranem koordinatnem sistemu, kar smo opisali v poglavju 3.1 *Izračun navigacijskih parametrov*.

V merilnih sistemih so prisotni sistematični in slučajni pogreški, ki so občutno večji pri senzorjih nizkocenovne izdelave. Preden lahko meritve sensorja IMU uporabimo za izračun navigacijskih parametrov, moramo torej določiti kalibracijske parametre vseh treh senzorjev, ki združeno sestavljajo IMU senzor. V poglavju 5 *Kalibracija sensorja IMU* smo na podlagi postavljenega modela kalibracije razvili postopek kalibracije za vse tri senzorje. Posebno pozornost smo namenili kalibraciji pospeškometra in žiroskopa, kjer smo uspešno razvili postopek kalibracije z uporabo robotskega tahimetra. Zasnovo smo poenostavljali in popolni test kalibracije pospeškometra in žiroskopa, ki sta opisana v poglavju 5.2 *Kalibracija pospeškometra* in 5.3 *Kalibracija žiroskopa*. S poenostavljenim testom lahko določimo 6 kalibracijskih parametrov (odmik začetne vrednosti in faktorje merila v vseh treh oseh), s popolnim testom pa 9 kalibracijskih parametrov (odmik začetne vrednosti in faktorje merila v vseh treh oseh ter pogreške neortogonalnosti in neusklajenosti osi). Pri kalibraciji pospeškometra smo boljše rezultate dobili z uporabo popolnega testa, kjer smo določili vseh 9 kalibracijskih parametrov, pri kalibraciji žiroskopa pa se je izkazalo, da dobimo boljše rezultate z uporabo poenostavljenega testa. Razlog za to je v nestabilnosti pogreška začetne vrednosti, ki ima večji vpliv na rezultate kot pogrešek neortogonalnosti in neusklajenosti osi, zato je odmik začetne vrednosti žiroskopa smiselno določiti pred vsako uporabo sensorja IMU. Na podlagi rezultatov eksperimentalnega dela lahko zaključimo, da so predlagane metode kalibracije sensorja IMU primerne in zagotavljajo kakovostne kalibracijske parametre.

Kljub temu, da kalibracijske parametre sensorja IMU zdaj poznamo, pa že majhne vrednosti neodpravljenih pogreškov vodijo do ogromnega lezenja v izračunanem položaju. Rezultati meritev nizkocenovnega sensorja IMU zato brez nadaljnje obdelave niso primerni za neposredno določitev položaja objekta. V poglavju 6 *Določitev položaja s samostojno uporabo sensorja IMU* smo analizirali in predlagali metode za odstranitev lezenja položaja najprej na podatkih simulirane trajektorije, nato pa še na realnih podatkih v eksperimentalnem delu. V primeru simulirane trajektorije sta se tako metoda *aproksimacije lezenja položaja s polinomom višje stopnje* kot *odstranitev trenda lezenja položaja z Zero Phase filtrom* izkazali za uspešni. Pri uporabi obeh metod z realnimi podatki v eksperimentalnem delu pa se je v disertaciji razvit in predlagan *postopek odstranitve trenda lezenja položaja z Zero Phase filtrom* izkazal za bolj učinkovitega in primernega. V poglavju 7 *Eksperiment: Visokofrekvenčno sledenje trajektorije oscilirajočega objekta z nizkocenovnim sensorjem IMU* smo v laboratorijskem preizkusu potrdili, da tudi s samostojno uporabo nizkocenovnega sensorja IMU lahko uspešno določimo trajektorijo oscilirajočega objekta.

### 10.3 Eksperimentalno delo

V doktorski disertaciji smo zasnovali tri eksperimente, ki so podrobno predstavljeni v poglavjih:

- a. 7 *Eksperiment: Visokofrekvenčno sledenje trajektorije oscilirajočega objekta z nizkocenovnim sensorjem IMU*,
- b. 8 *Eksperiment: Spremljanje potresne mize med simulacijo potresa s kombinacijo meritev robotskega tahimetra in nizkocenovnega sensorja IMU*,
- c. 9 *Eksperiment: Spremljanje nihanja stolpa na Rašici*.

V prvem eksperimentu (a) smo analizirali možnost visokofrekvenčnega sledenja trajektorije oscilirajočega objekta z nizkocenovnim sensorjem IMU. Predstavili smo metode kalibracije sensorja IMU. Kalibracijo pospeškometra in žiroskopa smo uspešno izvedli s pomočjo robotskega tahimetra, za kalibracijo magnetometra pa ne potrebujemo nobene dodatne opreme. Z eksperimentom smo želeli preveriti kakovost izbranega sensorja IMU in kakovost metod za odstranjevanje trenda lezenja položaja. Poleg lezenja položaja, ki je posledica napak IMU, z uporabo metod za odstranjevanje trenda lezenja položaja odstranimo tudi kakršnokoli dejansko lezenje objekta in permanentne premike objekta. Zato smo eksperiment zasnovali tako, da je opazovani objekt nihal točno okoli začetne lege. S primerjavo referenčne trajektorije, določene z Optotrakom, in trajektorij, določenih na podlagi meritev IMU in obdelanih z metodami za odstranjevanje trenda lezenja, smo tako lahko ocenili skupno kakovost meritev sensorja IMU ob uporabi omenjenih metod obdelave izmerjene trajektorije. Ugotovili smo, da najboljše rezultate dobimo z uporabo razvitega postopka *odstranitve trenda lezenja položaja z*

*Zero Phase filtrom*. Vrednost korelacije med referenčno trajektorijo in izmerjeno trajektorijo je v tem primeru znašala 0,987.

Z eksperimentom (a) smo potrdili pravilnost postopka kalibracije sensorja IMU in primernost samostojne uporabe nizkocenovnega sensorja IMU za spremljanje oscilirajočega gibanja objekta.

Pri eksperimentu (b) smo analizirali možnosti izboljšanja rezultatov kinematičnih meritev robotskega tahimetra s kombinacijo visokofrekvenčnih meritev nizkocenovnega sensorja IMU. Zasnovali smo prototipni modul IMU, ki združuje sensor IMU in mersko prizmo ter omogoča, da lahko hkrati zajemamo kinematične meritve z robotskim tahimetrom RTS in sensorjem IMU. Merili smo trajektorijo modula IMU, ki je bil med simulacijo potresa pritrjen na potresno mizo. Na podlagi referenčne trajektorije smo analizirali kakovost trajektorij, ki smo jih na osnovi meritev določili na različne načine.

Trajektorijo smo najprej določili na osnovi samostojnih meritev IMU in ločeno na osnovi kinematičnih meritev z robotskim tahimetrom Leica Nova MS50. Točke, izmerjene z RTS, imajo visoko stopnjo ujemanja z referenčno trajektorijo, cenilka kakovosti znaša  $RMSE$  v tem primeru znaša 1,6 mm. V intervalu med izmerjenimi točkami smo v nadaljevanju trajektorijo aproksimirali z linearno interpolacijo. Tako določena trajektorija se je z referenčno trajektorijo dobro ujemala v izmerjenih točkah. V vmesnem intervalu pa je prišlo do večjih odstopanj, saj je frekvenca zajema kinematičnih meritev prenizka za dober opis dinamičnega gibanja potresne mize.  $RMSE$  v tem primeru znaša 2,5 mm. Rezultatov nismo izboljšali niti z uporabo PVA Kalmanovega filtra.

Trajektorija, določena s samostojnimi meritvami IMU in obdelana s postopkom *odstranitve trenda lezenja položaja z Zero Phase filtrom* dobro opiše dinamično gibanje objekta, vendar se večja odstopanja pojavijo na mestih, kjer so prisotni nizkofrekvenčni in permanentni odmiki opazovanega objekta od začetnega položaja. Cenilka kakovosti  $RMSE$  je v tem primeru znašala 5,2 mm.

Cilj eksperimenta je bila optimalna določitev trajektorije s kombinacijo kinematičnih meritev RTS in visokofrekvenčnih meritev IMU. V poglavjih 8.3.1 *PVA Kalmanov filter z razširjenim modelom meritev* in 8.3.2 *Glajenje rezultatov PVA Kalmanovega filtra z razširjenim modelom meritev* smo razširili model meritev PVA Kalmanovega filtra in uporabili postopek glajenja z algoritmom Rauch-Tung-Striebel. Rezultat je trajektorija  $KF_{fb}$  z visoko stopnjo ujemanja, cenilka kakovosti  $RMSE$  je v primerjavi s trajektorijo, določeno le s kinematičnimi meritvami RTS, manjša za kar 48 % in znaša 1,3 mm. Primerljive rezultate smo dobili tudi pri trajektoriji RTS+ZPF, ki smo jo določili na podlagi združenih rezultatov meritev RTS in IMU, kar je opisano v poglavju 8.3.3 *Linearna interpolacija odstopanj (RTS+ZPF)*.  $RMSE$  v tem primeru znaša 1,5 mm. Metoda se je izkazala za zelo primerno takrat, ko je časovni interval med meritvami večji, predvsem v situaciji, ko pride do izpada signala oz. do prekinitve vizure med instrumentom in tarčo. To smo potrdili tudi pri eksperimentu (c).

Z eksperimentom (b) smo torej ovrednotili uporabnost metod za združevanje kinematičnih meritev RTS in meritev IMU. Z združitvijo smo izboljšali kakovost rezultatov kinematičnega merjenja z robotskim tahimetrom za skoraj 50 %.

Eksperimenta (a) in (b) smo izvedli v zavetju laboratorijskega okolja. Pri eksperimentu (c) pa smo razvito metodologijo kombiniranih kinematičnih geodetskih meritev z visokofrekvenčnim zajemom podatkov preizkusili v realnih pogojih na terenu. Merili smo nihanja razglednega stolpa na Rašici. Uporabili smo isto merilno opremo, meritve smo izvedli z instrumentom Leica Nova MS50 v kombinaciji z modulom IMU, ki združuje odbojno prizmo in senzor IMU MPU-9250. Meritve smo izvajali dlje časa, v disertaciji pa smo predstavili najbolj zanimiv primer, ko smo zaznali največje nihanje stolpa. Med meritvami je prišlo tudi do prekinitve signala med instrumentom in tarčo. Trajektorijo nihanja stolpa smo določili na več načinov: sprva smo rezultate kinematičnih meritev RTS in meritev IMU obravnavali ločeno (trajektoriji RTS in IMU), v nadaljevanju pa smo meritve RTS in meritve IMU združili (trajektoriji  $KF_{fb}$  in RTS+ZPF). V intervalu neprekinjenih kinematičnih meritev RTS rezultati trajektorij  $KF_{fb}$  in RTS+ZPF sovpadajo, v intervalu meritev med 36. in 40. sekundo, kjer je prišlo do izpada signala, pa trajektoriji precej odstopata. Izkazalo se je, da je v primeru daljšega časovnega intervala (nekaj sekund) med meritvami RTS v rezultatih Kalmanovega filtra prisotno opazno lezenje v položaju, kar je posledica napak senzorja IMU. Z uporabo postopka Zero Phase filtra, ki smo ga predlagali in predstavili v poglavju 7.2.2 *Odstranitev trenda lezenja položaja z Zero Phase filtrom*, pa uspešno odstranimo kakršnokoli lezenje v položaju. Z uporabo te metode pridobimo smiselne rezultate, ki sledijo trendu kinematičnih meritev RTS v intervalu pred prekinitvijo signala in po njej.

## 10.4 Razprava o ciljih in hipotezah

Glavni namen doktorske disertacije je bil predlagati in razviti postopek, s katerim bomo razširili uveljavljene metode geodetskega kinematičnega merjenja in izboljšali kakovost določitve trajektorije objekta v prostoru tudi v primeru gibanja objekta z oscilacijami visokih frekvenc. To nam je uspelo s kombiniranjem nizkofrekvenčnih kinematičnih meritev robotskega tahimetra RTS in meritev visokofrekvenčnega nizkocenovnega senzorja MEMS-IMU. Razvili smo nizkocenovno rešitev, ki do sedaj še ni bila predstavljena. Z njo smo v našem primeru značilno izboljšali rezultate kinematičnega merjenja za skoraj 50 %.

Pomemben korak pri izpolnitvi glavnega namena doktorske disertacije je bil tudi predlagati postopek kalibracije nizkocenovnega senzorja IMU. Za kalibracijo pospeškometra in žiroskopa smo uporabili prednosti sodobnih robotskih tahimetrov, ki omogočajo zelo natančno vrtenje in usmerjanje daljnogleda. Definirali smo model in postopek kalibracije nizkocenovnega senzorja IMU, ki do sedaj še ni bil predstavljen. Uspešnost kalibracije senzorja smo potrdili tudi pri eksperimentalnem delu.



Predstavili smo možnost in uspešno ovrednotili kakovost samostojne uporabe nizkocenovnega senzorja IMU pri določitvi trajektorije nihajočega objekta. Za to smo razvili postopek obdelave rezultatov meritev IMU z Zero Phase filtrom in zasnovali eksperiment, s katerim smo ocenili kakovost meritev senzorja IMU in predlagane metode obdelave rezultatov meritev.

Vsi opisani izpolnjeni cilji predstavljajo izviren prispevek k znanosti in so predstavljeni tudi v znanstvenem članku (Štebe idr., 2021).

V temi doktorske disertacije smo postavili tri hipoteze, ki jih lahko na podlagi izvedenega dela tudi potrdimo:

***Hipoteza 1: Kalibracijo senzorja IMU lahko uspešno izvedemo s pomočjo robotskega tahimetra.***

Hipotezo potrdimo. Model kalibracije senzorja IMU je predstavljen v poglavju 5 *Kalibracija senzorja*. Podrobneje smo kalibracijo pospeškometra in žiroskopa s pomočjo robotskega tahimetra predstavili v poglavjih 5.2.3 *Kalibracijski model pospeškometra* in 5.3.1 *Kalibracijski model žiroskopa*. Uspešnost kalibracije smo potrdili tudi v eksperimentalnem delu s kakovostnimi končnimi rezultati.

***Hipoteza 2: Nizkocenovne senzorne IMU lahko uporabimo za samostojno določitev položaja nihajočega objekta v prostoru.***

Hipotezo potrdimo. V poglavju 6 *Določitev položaja s samostojno uporabo senzorja IMU* smo analizirali možnosti samostojne uporabe nizkocenovnega senzorja IMU pri določitvi položaja objekta na podlagi simuliranih podatkov. Uporabnost razvitih metod smo potrdili z eksperimentalnim delom v poglavju 7 *Eksperiment: Visokofrekvenčno sledenje trajektorije oscilirajočega objekta z nizkocenovnim senzorjem IMU*.

***Hipoteza 3: Z integracijo klasičnih postopkov kinematičnih geodetskih meritev in nizkocenovnega senzorja IMU lahko izboljšamo določitev trajektorije objekta v prostoru.***

Hipotezo potrdimo. Predlagane metode kombiniranja klasičnih postopkov kinematičnih geodetskih meritev in nizkocenovnega senzorja IMU smo predstavili v poglavju 8.3 *Ocena trajektorije na podlagi združenih meritev RTS in IMU*. S kombinacijo meritev obeh merilnih sistemov pridobimo izboljšano določitev trajektorije, kot v primeru ločene obravnave. To smo pokazali z analizo eksperimentalnega dela, predstavljenega v poglavjih 8 *Eksperiment: Spremljanje potresne mize med simulacijo potresa s kombinacijo meritev robotskega tahimetra in nizkocenovnega senzorja IMU* in 9 *Eksperiment: Spremljanje nihanja stolpa na Rašici*.

## 11 Povzetek

Za ugotavljanje premikov objektov uporabljamo fizikalne in geodetske metode. S fizikalnimi metodami merimo relativne spremembe na objektu. Premike lahko spremljamo zvezno in z visoko absolutno točnostjo, vendar pa nam ne podajo informacij o stanju objekta glede na njegovo okolico. Za slednje uporabljamo geodetske metode, ki nam omogočajo obravnavo zaznanih premikov glede na stabilno okolje. Na objektih, ki so zgrajeni na skrbno izbranem stabilnem okolju in ni predvidenih večjih premikov, stabilnost objekta kontroliramo s terminskimi izmerami z geodetskimi metodami. Pri kontroli stabilnosti objektov, pri katerih lahko pričakujemo nenadne premike in deformacije, pa uporabimo metode, ki omogočajo zvezno spremljanje v realnem času. Princip izmere temelji na kinematičnih geodetskih merjenjih, določitev statistično značilnih premikov objekta pa na posebnem načinu obdelave rezultatov kinematičnih merjenj. Uveljavljene geodetske metode, kot so uporaba globalnih navigacijskih satelitskih sistemov (GNSS) in tahimetrične meritve, omogočajo določitev položaja s frekvencami v velikostnem razredu 10 Hz. Objektu, ki se premika s hitrostjo nekaj m/s, lahko določimo položaj le na vsakih nekaj 10 cm. V primeru nihanja objekta z višjimi frekvencami so take meritve praktično neuporabne, saj je nemogoče določiti točno trajektorijo in s tem pravo naravo nihanja objekta. Obstoječe geodetske kinematične merske postopke lahko dopolnimo z uporabo inercialnih senzorjev IMU (angl. inertial measurement unit). Senzorji IMU združujejo triosni magnetometer, žiroskop in pospeškometer in omogočajo frekvenco zajema podatkov v velikostnem razredu 1000 Hz. S tehnološkim razvojem mikroelektromehanskih senzorjev (MEMS) se je pojavila možnost uporabe nizkocenovnih senzorjev IMU v širokem naboru aplikacij. Njihova uporaba je danes najbolj razširjena v navigacijskih aplikacijah nižje natančnosti.

Glavni namen doktorske disertacije je predlagati postopek visokofrekvenčnega določevanja trajektorije objekta v prostoru, s katerim bomo razširili obstoječe uveljavljene metode geodetskega kinematičnega merjenja. Predstavili bomo uporabnost nizkocenovnega MEMS-IMU senzorja kot nadgradnjo obstoječih geodetskih merskih postopkov. Pri uporabi nizkocenovnih MEMS-IMU senzorjev je treba posebno pozornost nameniti kalibraciji senzorja, ki je osnova za nadaljnje pridobivanje uporabnih rezultatov. Za kalibracijo senzorja se v splošnem uporablja posebna strojna oprema, ki je temu namenjena. Mi bomo preizkusili, ali si pri kalibraciji senzorja IMU lahko pomagamo s sodobnim robotskim tahimetrom. Ovrednotili bomo tudi samostojno uporabo nizkocenovnega senzorja MEMS-IMU pri določitvi trajektorije nihajočega objekta. S kombinacijo nizkofrekvenčnih kinematičnih meritev robotskega tahimetra in meritev visokofrekvenčnega nizkocenovnega senzorja MEMS-IMU bomo izboljšali postopek določitve trajektorije objekta v prostoru.

## 11.1 Obdelava kinematičnih meritev RTS

V primeru samostojne uporabe kinematičnih meritev RTS je trajektorija objekta določena enolično. Poleg izmerjenih točk objekta lahko v sistem dodamo še fizikalni model gibanja objekta in združimo predpostavko o gibanju objekta z meritvami položaja objekta. Fizikalni model in meritve lahko združimo s pomočjo Kalmanovega filtra. Na tak način lahko zmanjšamo šum signala, ki nastane zaradi napake v meritvah in posledično napačno določenih koordinat točk trajektorije objekta. Z ocenjenim stanjem sistema pa določimo tudi hitrost in pospešek v trenutku meritev RTS, kar lahko uporabimo za oceno položaja objekta znotraj intervala med zajemom meritev.

Kalmanov filter združuje dva osnovna modela: model procesa in model meritev, med katerima obstaja funkcijska zveza. V primeru, ko imamo opravka z meritvami, ki jih pridobivamo v časovnih intervalih, uporabimo diskretno obliko diferencialne enačbe (2.1) in model procesa zapišemo v obliki enačbe (2.2). Model meritev je podan z enačbo (2.6). Algoritem Kalmanovega filtra lahko zapišemo shematično in je prikazan na sliki 2.1. Orisana sta procesa napovedi in popravka stanja sistema in korak vstopa novih meritev v model meritev. Postopek Kalmanovega filtra se po začetni inicializaciji parametrov ponavlja, kar je na sliki 2.1 prikazano z rdečo zanko. Pri filtriranju kinematičnih meritev uporabimo model Kalmanovega filtra PVA, ki združuje model enakomernega pospešenega gibanja s kinematičnimi meritvami gibajočega objekta. Izraz PVA se nanaša na angleški izraz za položaj, hitrost in pospešek (**P**osition, **V**elocity, **A**cceleration) obravnavanega objekta, kar predstavlja tudi količine stanja sistema. V Kalmanovem filtru bomo tako definirali devet stanj sistema: položaj, hitrost in pospešek objekta v vseh treh koordinatnih oseh. Blokovni diagram procesa sistema PVA (Position, Velocity, Acceleration), ki opisuje naš problem, je prikazan na sliki 2.2. Model meritev pri PVA Kalmanovem filtru je definiran z enačbami od (2.23) do (2.26), model procesa pa z enačbami od (2.27) do (2.31).

## 11.2 Obdelava meritev senzorja IMU

Inercialne merske enote (IMU) predstavljajo skupek senzorjev, na podlagi katerih inercialni navigacijski sistem (INS) lahko določi navigacijske parametre. V osnovi so to združeni triosni pospeškomer, žiroskop in magnetometer. Osnovna meritev pospeškomera je trenutni pospešek v posameznih oseh ( $m/s^2$ ), žiroskop pa nam poda trenutno kotno hitrost zasuka posameznih osi ( $rad/s$ ). Na podlagi obdelanih signalov senzorjev lahko izračunamo položaj, trenutno hitrost in orientacijo objekta v prostoru. Meritve senzorja IMU se nanašajo na objektni koordinatni sistem (prikazan na sliki 3.2). Orientacija, hitrost in položaj objekta so definirani glede na lokalni geodetski koordinatni sistem (prikazan na sliki 3.1.). Izračun kotov orientacije

(kot nagiba, vrtenja in azimut) je predstavljen z enačbami od (3.3) do (3.6), izračun hitrosti z enačbo (3.17), položaj objekta pa z enačbo (3.18).

Pri uporabi vseh vrst merilnih sistemov je treba posebno pozornost nameniti identifikaciji pogreškov, ki so prisotni v meritvah. Le na tak način lahko zagotovimo optimalne končne rezultate. Pri nizkocenovnih senzorjih MEMS-IMU mora biti poudarek pri določitvi in odpravi pogreškov še toliko večji, saj brez tega ne bi dobili uporabnih merskih vrednosti. V splošnem so meritve senzorjev MEMS-IMU obremenjene s pogreški, ki jih lahko razdelimo v dva razreda: sistematični pogreški in slučajni pogreški. Izhodni signal senzorja IMU (signal triosnega žiroskopa, pospeškometra in magnetometra) je obremenjen z naključnim šumom, ki ga v časovni domeni lahko analiziramo z Allanovo varianco. Metoda Allanove variance je bila najprej razvita za analizo fazne in frekvenčne stabilnosti oscilatorjev, lahko pa se jo uporabi pri analizi šumov katerihkoli senzorjev. Allanovo varianco lahko izračunamo na podlagi enačbe (4.3), vrednosti Allanove deviacije  $\sigma(\tau)$  se običajno analizira na grafu z logaritemsko skalo, ki je prikazan na sliki 4.1. Na sliki 4.2 je prikazana Allanova deviacija  $\sigma(\tau)$  triosnega pospeškometra in žiroskopa, ki smo ga v nadaljevanju uporabili pri praktičnih preizkusih. Določiti moramo, kolikšna je dolžina niza povprečenja signala, pri katerem meritve pospeškometra in žiroskopa statičnega senzorja IMU konvergirajo. Na podlagi grafikona (slika 4.2) je razvidno, da je pri vseh šestih senzorjih potreben čas povprečenja okoli 20 sekund. Takrat je Allanova deviacija  $\sigma(\tau)$  najnižja. To je podatek, ki ga bomo potrebovali v nadaljevanju za določitev kalibracijskih parametrov senzorjev, saj bodo v kalibracijskem modelu nastopali meritve, ki predstavljajo povprečje odčitkov v 20 sekundnem intervalu.

Pri kalibraciji nizkocenovnega senzorja MEMS-IMU smo ločeno obravnavali magnetometer, pospeškometer in žiroskop. S kalibracijo senzorjev smo določili kalibracijske parametre, ki imajo največji vpliv na končne rezultate: odmik od ničelne vrednosti, pogrešek merila, neortogonalnost in neuskklajenost osi. Problem določitve kalibracijskih parametrov magnetometra je analogen transformaciji poljubnega 3D elipsoida v sfero. Izračun kalibracijskih parametrov magnetometra je opisan v enačbah od (5.1) do (5.19). Rezultati kalibracije senzorja IMU MPU-9250 so prikazani na sliki 5.1.

Kalibracijo pospeškometra smo izvedli s pomočjo robotskega tahimetra Leica Nova MS50, ki omogoča vrtenje in natančno usmerjanje daljnogleda. Tahimeter omogoča dvosmerno komunikacijo na podlagi protokola GeoCOM, ki deluje na principu standarda client/server, kjer client predstavlja zunanjo napravo (računalnik), server pa instrument, ki ga upravljamo. Senzor IMU smo na tahimeter namestili tako, kot je prikazano na sliki 5.3. Na tak način, lahko vrtimo senzor IMU okoli konstantne osi za izbrani poljuben kot z visoko natančnostjo. Kalibracijski model triosnega pospeškometra je predstavljen z enačbo (5.24). Splošen izračun kalibracijskih parametrov s postopkom splošnega modela izravnave po metodi najmanjših kvadratov je predstavljen z enačbami od (5.25) do (5.49).

Razvili smo dva postopka kalibracije pospeškometra s pomočjo robotskega tahimetra: poenostavljeni test kalibracije in popolni test kalibracije. Pri poenostavljenem testu senzor IMU namestimo na daljnogled robotskega tahimetra v eni orientaciji in ga vrtimo okoli osi daljnogleda za izbrani poljuben kot. Začetna vrednost pospeškometra je konstantna ne glede na orientacijo senzorja. V primeru, da senzor obrnemo za  $180^\circ$ , bo vsota izmerjenih pospeškov v posameznih oseh obremenjena za dvojni pogrešek odmika začetne vrednosti. Na tak način lahko ločeno določimo šest kalibracijskih parametrov: odmik začetne vrednosti in faktorje merila v vseh treh oseh pospeškometra. Postopek izračuna kalibracijskih parametrov pri poenostavljenem testu je predstavljen z enačbami od (5.54) do (5.57). Na sliki 5.6 je prikazan izmerjen težnostni pospešek v vseh 73 položajih daljnogleda pred kalibracijo prikazan z modro barvo ( $g_m$ ). Z upoštevanjem kalibracijskih parametrov pospeškometra smo izračunali popravljen težnostni pospešek, ki je na sliki 5.6 prikazan z rdečo barvo ( $g_{cal}$ ). Pri popolnem testu je postopek testiranja podoben kot pri poenostavljenem testu, le da je v tem primeru pospeškometer na daljnogled tahimetra treba namestiti v vsaj treh različnih orientacijah. S tem zagotovimo dovolj neodvisnih meritev, da lahko določimo 9 kalibracijskih parametrov. Na sliki 5.7 so predstavljene meritve pospeškometra pri popolnem testu. Pospeškometer smo na daljnogled namestili pri šestih različnih orientacijah. Postopek testiranja je ekvivalenten šestim poenostavljenim testom, pri čemer smo IMU pred vsakim postopkom testiranja namestili na robotski tahimeter Leica MS50 pri različni orientaciji. Izmerjen težnostni pospešek, ki je izračunan z uporabo kalibracijskih parametrov popolnega testa, sovpada z referenčnim težnostnim pospeškom bolje kot težnostni pospešek, ki je izračunan z uporabo kalibracijskih parametrov enostavnega testa. Razlog za boljši rezultat je v upoštevanju več kalibracijskih parametrov. Poleg pogreška odmika ničelne vrednosti in pogreška spremembe merila smo pri popolnem testu določili tudi pogreške neortogonalnosti in neuskkljenosti osi. Primerjava rezultatov obeh načinov kalibracije je prikazana na sliki 5.9.

Za kalibracijo žiroskopa v kotni domeni smo, tako kot v primeru kalibracije pospeškometra, uporabili robotski tahimeter Leica Nova MS50. Kalibracijski model žiroskopa je predstavljen z enačbo (5.58). Splošen izračun kalibracijskih parametrov s postopkom splošnega modela izravnave po metodi najmanjših kvadratov je predstavljen z enačbami od (5.63) do (5.89). Tudi tu smo razvili dva postopka kalibracije senzorja: poenostavljeni test in popolni test kalibracije. Pri poenostavljenem testu senzor IMU namestimo na daljnogled robotskega tahimetra v eni orientaciji in ga vrtimo za izbrani poljuben kot. Na tak način zagotovimo meritve, na podlagi katerih lahko določimo tri kalibracijske parametre. Ker pa ob tem izkoristimo dejstvo, da pogrešek odmika ničelne vrednosti določimo že pri statičnem senzorju, lahko s postopkom vrtenja senzorja za izbrani kot določimo tudi pogrešek merila. Na tak način lahko določimo šest kalibracijskih parametrov. Glede na kalibracijski model žiroskopa (5.58) lahko torej določimo naslednje kalibracijske parametre: faktorje merila ( $k_{11}, k_{22}, k_{33}$ ) in pogreške začetnih vrednosti ( $b_x, b_y, b_z$ ). Shematičen prikaz postopka enostavnega testa kalibracije žiroskopa je prikazan na sliki 5.10. Na sliki 5.14 je prikazana primerjava izmerjenih kotov pred kalibracijo žiroskopa in po njej. Pri popolnem testu IMU senzor namestimo na daljnogled robotskega

tahimetra vsaj pri treh različnih orientacijah. Pri posamezni namestitvi IMU senzorja je postopek testiranja enak kot v primeru enostavnega testa (slika 5.10). Za določitev kalibracijskih parametrov uporabimo popolni kalibracijski model žiroskopa. Na sliki 5.19 so prikazani koti zasuka, izračunani na podlagi surovih meritev in na podlagi meritve z upoštevanimi kalibracijskimi parametri. Na sliki 5.20 vidimo, da izmerjeni koti zasuka, ki so izračunani z uporabo kalibracijskih parametrov enostavnega testa, sovpadajo z referenčnim kotom zasuka bolj kakor kot zasuka, ki je izračunan z uporabo kalibracijskih parametrov popolnega testa. Največji vpliv na kakovost rezultatov ima nestabilnost pogreška začetne vrednosti. Pri popolnem testu se je izračunani pogrešek začetne vrednosti nanašal na vse tri serije meritev in nekoliko bolj odstopa od dejanskega pogreška, ki je bil prisoten samo v prvi seriji meritev. Neodpravljeni pogrešek začetne vrednosti pa ima očitno precej večji vpliv na končne rezultate kot pogreški neortogonalnosti in neusklajenosti osi.

Vsak neodpravljeni pogrešek pospeškometra ali žiroskopa vodi v napako pri izračunu orientacije, hitrosti in položaja objekta. Izvor napak je v šumu meritev, napakah merila in začetne vrednosti. Največji vpliv ima pogrešek odmika začetne vrednosti, ki je sestavljen iz dveh delov: kratko-časovni deterministični odmik in dolgo-časovno naključno lezenje, kar se odraža v nestabilnosti pogreška odmika začetne vrednosti. Na podlagi enačb od (5.93) in (5.97) lahko vidimo, da napaka v določitvi pogreška odmika začetne vrednosti žiroskopa povzroči napako druge stopnje v določitvi hitrosti objekta in napako tretje stopnje v določitvi položaja objekta. Kakovost žiroskopa tako definira kvaliteto senzorja IMU in predstavlja glavno omejitev določitve kakovostnih navigacijskih parametrov. Na sliki 5.21 je grafično prikazan vpliv neodstranjenega pogreška odmika začetne vrednosti pospeškometra za  $b_a = 0.003 \text{ m/s}^2$ . Pogrešek po 1 minuti delovanja senzorja povzroči lezenje v položaju nekaj metrov. Na sliki 5.22 pa je grafično prikazan vpliv neodstranjenega pogreška odmika začetne vrednosti žiroskopa za  $b_g = 0.001 \text{ rad/s}$ . Vidimo da pogrešek po 1 minuti delovanja senzorja povzroči lezenje v položaju nekaj sto metrov. Tak velikostni red lezenja položaja lahko pričakujemo pri uporabi nizkocenovnih senzorjev MEMS-IMU.

Napake pri določitvi položaja z nizkocenovnim senzorjem IMU imajo naravo nizkofrekvenčnega lezenja, kar lahko vidimo na sliki 5.21 in sliki 5.22. Na podlagi simulirane trajektorije (slika 6.2), ki je obremenjena z neodpravljenimi pogreški odmika začetne vrednosti pospeškometra in žiroskopa, smo preizkusili metode, s katerimi lahko v različni meri odstranimo nizkofrekvenčni trend lezenja položaja objekta. Obravnavali smo metodi aproksimacije trenda s polinomom višje stopnje in visokoprepustnega Zero Phase filtra.

Pri metodi aproksimacije trenda s polinomom višje stopnje lezenje položaja objekta, ki ga povzročijo napake senzorja IMU, lahko v prvem koraku aproksimiramo s polinomom višje stopnje in ga v drugem koraku odštejemo od osnovnega gibanja objekta. Na tak način lahko pridobimo oceno gibanja objekta višje stopnje od aproksimiranega polinoma. Rezultat je predstavljen na sliki 6.3. Trend lezenja je nizkofrekvenčne narave in ga lahko izločimo tudi z uporabo visokoprepustnih filtrov. V doktorski disertaciji smo predlagali postopek Zero Phase

filtra, ki je opisan z enačbami od (6.7) do (6.12). Rezultati filtriranja simulirane trajektorije so prikazani na sliki 6.6. Na podlagi izračunanih cenilk kakovosti (preglednici 6.1 in 6.2) vidimo, da smo boljšo oceno trajektorije dobili z uporabo prve metode (aproksimacija trenda s polinomsko funkcijo). Zaradi upoštevanja konstantne napake IMU so rezultati končnih obdelanih trajektorij pričakovano zelo dobri (izredno visoka vrednost cenilke kakovosti  $SNR$ ). Pri meritvah IMU v realnih pogojih lahko pričakujemo, da pogreška odmika začetne vrednosti pospeškomera in žiroskopa ne bosta konstantna, ampak se bosta pri dinamičnih pogojih slučajno spreminjala. V nadaljevanju smo primernost metod preizkusili na praktičnih preizkusih.

### 11.3 Praktični preizkusi

V sklopu doktorske disertacije smo zasnovali in izvedli tri preizkuse:

- *Eksperiment: Visokofrekvenčno sledenje trajektorije oscilirajočega objekta z nizkocenovnim senzorjem IMU*
- *Eksperiment: Spremljanje potresne mize med simulacijo potresa s kombinacijo meritev robotskega tahimetra in nizkocenovnega senzorja IMU,*
- *Eksperiment: Spremljanje nihanja stolpa na Rašici.*

#### 11.3.1 Eksperiment: Visokofrekvenčno sledenje trajektorije oscilirajočega objekta z nizkocenovnim IMU senzorjem

S praktičnim poskusom smo želeli ugotoviti, kako natančno lahko določimo položaj objekta v prostoru s samostojno uporabo nizkocenovnega senzorja IMU. Z robotsko roko smo inducirali prostorsko gibanje objekta točno okoli začetne točke v treh smereh. Gibanje je trajalo približno 1 minuto. Referenčna trajektorija modula IMU je določena na podlagi meritev z Optotrakom s frekvenco 400 Hz, meritve senzorja IMU smo zajeli s frekvenco 200 Hz.

Postavitev in zasnova eksperimenta je prikazana na sliki 7.1. Modul IMU združuje senzor IMU MPU-9250, mikro računalnik Raspberry Pi Zero in odbojno prizmo, prikazan je na sliki 7.2. Modul IMU omogoča zajem meritev robotskega tahimetra in senzorja IMU, ki se nanašajo na isto točko. Referenčno trajektorijo modula IMU (slika 7.5) smo določili z meritvami Optotraka in nam je predstavljala referenco, na podlagi katere smo ocenjevali kakovost trajektorije izmerjene z nizkocenovnim senzorjem IMU.

Na podlagi meritev IMU smo določili pospešek objekta v lokalnem navigacijskem koordinatnem sistemu (slika 7.6). Na podlagi pospeška smo določili tudi hitrost in položaj objekta v lokalnem koordinatnem sistemu. Trajektoriji IMU, prikazani na sliki 7.8, smo trend

lezenja najprej odstranili z aproksimacijo s polinomom. Rezultat je prikazan na slikah 7.9 in 7.10.

Trajektoriji IMU, prikazani na sliki 7.8, smo trend lezenja odstranili tudi z uporabo Zero Phase filtra. Zasnovali smo metodo, kjer nizkofrekvenčno lezenje najprej odstranimo iz izračunane hitrosti v lokalnem koordinatnem sistemu, na podlagi filtrirane lokalne hitrosti izračunamo položaj objekta v lokalnem koordinatnem sistemu in nato ponovno odstranimo nizkofrekvenčno lezenje v položaju objekta z enakim postopkom filtriranja. Zasnovan postopek z dvema korakoma filtriranja z Zero Phase filtrom je prikazan na sliki 7.12. Na sliki 7.18 je prikazana primerjava referenčne trajektorije in končne filtrirane trajektorije. Z uporabo aproksimacije s polinomom smo dobili slabše rezultate, kot s postopkom filtriranja z Zero Phase filtrom. To potrjujejo tudi cenilke kakovosti  $SNR$ ,  $corr$  in  $RMSE_r$ , ki so predstavljene v preglednici 7.4. Primerjava trajektorij, pridobljenih z obema opisanimi metodama z referenčno trajektorijo, je prikazana na sliki 7.20.

Z zasnovanim eksperimentom smo analizirali kakovost meritev IMU in postopkov obdelave rezultatov meritev. Ugotovili smo, da lahko tudi z nizkocenovnimi senzorji IMU s primernim postopkom obdelave, kjer sta zajeti tako kalibracija senzorja IMU kot izbrana metoda odstranjevanja lezenja položaja, pridobimo kakovostne rezultate. V primeru uporabe postopka z Zero Phase filtrom je stopnja ujemanja referenčne trajektorije  $r_{ref}$  in obdelane trajektorije  $r_{ZPF}$  zelo visoka. Razmerje med signalom in šumom ( $SNR$ ) znaša 36,7, korelacija obeh trajektorij ( $corr$ ) znaša 0,987, koren srednje kvadratne napake ( $RMSE_r$ ) pa znaša 2,4 cm.

### 11.3.2 Eksperiment: Spremljanje potresne mize med simulacijo potresa s kombinacijo meritev robotskega tahimetra in nizkocenovnega senzorja IMU

S praktičnim poskusom smo želeli ugotoviti, kako lahko kinematične meritve robotskega tahimetra izboljšamo s kombinacijo visokofrekvenčnih meritev senzorja IMU. Sodobni robotski tahimetri omogočajo sledenje in kinematično merjenje s frekvencami okoli 10 Hz, medtem ko s senzorji IMU lahko zajemamo meritve s frekvencami v velikostnem razredu 1000 Hz. Z združevanjem kinematičnih meritev RTS in meritev senzorja IMU bi tako lahko točneje opisali trajektorijo gibajočega se objekta. Cilj eksperimenta je izmeriti in določiti točno trajektorijo potresne mize med simulacijo potresa. Za to smo uporabili potresno mizo Quanser Shake Table II (STII), ki so jo razvili za združenje UCIST (University Consortium on Instructional Shake Tables) in jo uporabljajo za preiskave dinamike gradbenih konstrukcij med potresi. Prikazana je na sliki 8.1. Na potresno mizo smo namestili modul IMU. Postavitev eksperimenta je prikazana na sliki 8.2.

Med simulacijo potresa smo torej izvajali dvoje meritev, s katerimi lahko določimo trajektorijo modula IMU v prostoru – kinematične meritve z robotskim tahimetrom (RTS meritve) in



meritve senzorja IMU (meritve IMU). Na podlagi meritev dveh ločenih merilnih sistemov smo določili in analizirali natančnost več različnih trajektorij, pri čemer osnovo za določitev kakovosti različnih trajektorij predstavlja referenčna trajektorija. Shematičen prikaz vseh obravnavanih trajektorij je prikazan na sliki 8.3.

Na podlagi samostojnih meritev RTS smo določili in analizirali dve trajektoriji. **Trajektorija RTS** je določena z meritvami RTS brez nadaljnje obdelave, **trajektorija  $KF_{PVA}$**  pa je določena z meritvami RTS in obdelavo trajektorije s PVA Kalmanovim filtrom. Rezultat obeh trajektorij je prikazan na sliki 8.6, kjer vidimo, da izmerjene točke RTS sicer dobro sovpadajo z referenčno trajektorijo, vendar zaradi premajhne frekvence zajema meritev ne opišejo dobro dejanskega gibanja objekta. Rezultata nismo izboljšali niti v primeru trajektorije  $KF_{PVA}$  in trajektorije  $KF_{PVA10}$ , ki je določena na osnovi povečane frekvence napovedi stanja sistema PVA Kalmanovega filtra. Cenilke kakovosti obravnavanih trajektorij so zbrane v preglednici 8.1.

Na podlagi samostojnih meritev IMU smo določili in analizirali dve trajektoriji. **Trajektorija IMU** je določena z meritvami IMU brez nadaljnje obdelave, **trajektorija ZPF** pa je določena z meritvami IMU in obdelavo trajektorije s postopkom odstranitve trenda lezenja položaja z Zero Phase filtrom. Na sliki 8.8 je prikazana trajektorija IMU in vidimo, da je lezenje položaja po minuti delovanja preseglo 50 metrov. Na sliki 8.9 vidimo, da trajektorija ZPF dobro opiše dinamično gibanje objekta, vendar se pojavijo odstopanja od referenčne trajektorije na mestih, kjer so bili prisotni nizkofrekvenčni in permanentni odmiki objekta od začetnega položaja.

Na podlagi kombinacije meritev RTS in meritev IMU smo določili in analizirali tri trajektorije. **Trajektorija KF** je določena za razširjenim modelom meritev Kalmanovega filtra, ki združuje meritve RTS in IMU. Razširjeni model meritev Kalmanovega filtra je predstavljen z enačbami od (8.1) do (8.6). Rezultati so predstavljeni na sliki 8.10, kjer vidimo, da je v primeru trajektorije KF opazno lezenje v položaju, ki je posledica napak IMU. Kljub temu, da je oblika trajektorije KF v intervalu med meritvami RTS podobna referenčni trajektoriji REF, je lezenje v položaju dominantnejše, zaradi česar ne moremo izboljšati kakovosti ocene trajektorije.

**Trajektorija  $KF_{fb}$**  je določena na podlagi Kalmanovega filtra in s postopkom glajenja, ki temelji na algoritmu Rauch-Tung-Striebel. Algoritem uporabi meritve na celotnem zaključenem intervalu, saj s stališča časovne komponente glajenje teče v obeh smereh signala. Postopek je predstavljen z enačbami od (8.7) do (8.14). Rezultat obdelave meritev RTS in IMU s Kalmanovim filtrom in postopkom glajenja z algoritmom Rauch-Tung-Striebel je prikazan na sliki 8.11. Cenilke kakovosti, predstavljene v preglednici 8.4 potrjujejo, da smo s tem postopkom izboljšali rezultat. Cenilka kakovosti  $RMSE_r$  trajektorije  $KF_{fb}$  (1,3 mm) je v primerjavi s trajektorijo RTS (2,5 mm) manjša za 48 %. S kombinacijo meritev nizkocenovnega senzorja IMU smo torej izboljšali kakovost kinematičnih meritev RTS.

**Trajektorija RTS+ZPS** je določena z združitvijo trajektorije RTS in trajektorije ZPF. V časovnih trenutkih, ko imamo na voljo izmerjen položaj trajektorije z RTS, določimo odstopanja med trajektorijo RTS in trajektorijo ZPF, kot je to prikazano na sliki 8.12. Odstopanja v intervalu

med izmerjenimi točkami RTS določimo z linearno interpolacijo in v naslednjem koraku trajektorijo ZPF popravimo za vrednost teh odstopanj. Na tak način pridobimo trajektorijo RTS+ZPF, ki je na sliki 8.12 prikazana s črno barvo. Trajektorija RTS+ZPF je v primerjavi s trajektorijo RTS glede na  $RMSE_r$  določena za 40 % bolj točno.

Primerjava cenilk kakovosti vseh obravnavanih trajektorij je predstavljena v preglednici 8.5 in na slikah 8.14, 8.15 in 8.16. Vidimo lahko, da dobimo najkvalitetnejšo oceno trajektorije v primeru združenih rezultatov meritev RTS in IMU. Trajektorija  $KF_{fb}$ , ki je rezultat uporabe kombinacije Kalmanovega filtra in postopka glajenja z algoritmom Rauch-Tung-Striebel, je nekoliko boljša od trajektorije RTS+ZPF. Rezultati se nanašajo na preizkus v nadzorovanih pogojih, kjer ni prihajalo do prekinitve signala. V primeru, ko bi kinematične meritve z RTS izvajali v nenadzorovanem okolju na večji oddaljenosti od opazovanega objekta pa se lahko zgodi tudi daljši izpad signala v velikostnem razredu tudi nekaj sekund. V nadaljevanju smo tako preverili, kako se metode za združevanje meritev RTS in meritev IMU obnesejo pri daljšem času vzorčenja kinematičnih meritev RTS. V preglednici 8.6 so zbrane cenilke kakovosti trajektorij  $KF_{fb}$ , in RTS+ZPF pri povprečnem času vzorčenja kinematičnih meritev RTS 1,5 sekunde, v preglednici 8.7 pa pri povprečnem času vzorčenja 5 sekund. Na sliki 8.17 in v preglednici 8.6 vidimo, da smo pri času vzorčenja 1,5 sekunde dobili boljše rezultate pri trajektoriji RTS+ZPF. Pri času vzorčenja 5 sekund (slika 8.18 in preglednica 8.7), so razlike med trajektorijama RTS+ZPF in  $KF_{fb}$  večje. Ob daljšem časovnem intervalu med meritvami napake sensorja IMU RTS povzročijo večje lezenje v položaju, ki se v postopku Kalmanovega filtra ne odstrani, medtem ko z uporabo filtra Zero Phase kakršnokoli lezenje v položaju odstranimo. Na podlagi rezultatov lahko zaključimo, da ob manjši frekvenci zajema kinematičnih meritev RTS gibanje objekta bolje opišemo z združeno trajektorijo RTS+ZPF. To je še posebej primerno ob morebitnih izpadih signala med kinematičnimi meritvami RTS.

### 11.3.3 Eksperiment: Spremljanje nihanja stolpa na Rašici

Z zadnjim praktičnim preizkusom smo želeli preveriti učinkovitost razvite metodologije kombiniranih kinematičnih geodetskih meritev z visokofrekvenčnim zajemom podatkov v realnih pogojih na terenu. Izmeriti smo želeli trajektorijo nihajočega razglednega stolpa na Rašici. Terenske meritve smo izvedli na Silvestrovo, 31. 12. 2019, pred polnočjo, ko je bil stolp še posebej obiskan. Na sliki 9.1 je prikazan stolp, na sliki 9.2 pa robotski tahimeter Leica MS50, ki smo ga uporabili za meritve. Modul IMU, ki združuje odbojno prizmo in IMU senzor, smo pritrdili nad zgornjo pohodno ploščadjo stolpa, kot je to prikazano na sliki 9.3.

Rezultat kinematičnih meritev RTS je predstavljen na sliki 9.4, kjer se vidimo, da je med 36. in 40. sekundo meritev prišlo do prekinitve signala. V tem intervalu torej nimamo rezultatov kinematičnih meritev RTS. Na sliki 9.5 je prikazan pospešek objekta v smeri  $y$ -osi, ki smo ga izračunali na podlagi meritev IMU. Na podlagi meritev IMU smo izračunali trajektorijo ZPF, ki smo jo obdelali s postopkom Zero Phase filtra, rezultat je predstavljen na sliki 9.6.

Kinematične meritve RTS in meritve sensorja IMU smo združili na dva načina. Rezultat združene trajektorije RTS+ZPF je prikazan na sliki 9.7. V tem primeru dobimo v intervalu brez kinematičnih meritev RTS (med 36. in 40. sekundo) konsistentno nihanje, ki je v skladu s trendom nihanja pred prekinitvijo signala in po njej. V drugem koraku smo kinematične meritve RTS in meritve IMU združili s postopkom Kalmanovega filtra in glajenja z algoritmom Rauch-Tung-Striebel. Rezultati trajektorije  $KF_{fb}$  so prikazani na sliki 9.9. Trajektorija  $KF_{fb}$  na mestih, kjer so na voljo kinematične meritve RTS, popolnoma sovпада s trajektorijo RTS+ZPF. V intervalu med 36. sekundo in 40. sekundo, ko ni meritev RTS, pa prihaja do večjih odstopanj. Kot je vidno na sliki 9.9, trajektorija odstopi za 8 centimetrov, kar je posledica predvsem vpliva neodpravljenih napak IMU.

## 11.4 Zaključek

V doktorski disertaciji analiziramo možnost izboljšanja kinematičnih meritev RTS s kombiniranjem visokofrekvenčnih meritev sensorja IMU. V prvem sklopu opišemo kinematične meritve RTS in izpeljemo model Kalmanovega filtra, ki ga uporabimo za obdelavo kinematičnih meritev. V drugem sklopu predstavimo inercialni navigacijski sistem in metode, ki jih uporabimo pri obdelavi meritev nizkocenovnega IMU sensorja in nam omogočajo samostojno uporabo sensorja IMU pri določanju položaja objekta v prostoru. V tretjem sklopu z eksperimenti empirično ovrednotimo kakovost določanja trajektorije oscilirajočega objekta v prostoru.

V disertaciji smo predstavili razvoj robotskih tahimetrov, ki omogočajo kinematično merjenje. V preteklosti je imela pri tem velik vpliv na kakovost rezultatov sinhronizacija meritev smeri in dolžin, pri sodobnih RTS pa je ta vpliv zanemarljiv. Kinematične meritve RTS so učinkovite, kadar merimo objekt, ki se giblje približno enakomerno, brez hitrih pospeškov ali pojemkov. Sledenje takemu gibanju z RTS torej predstavlja trivialen problem. Uporaba Kalmanovega filtra pri odstranjevanju šuma in glajenju izmerjene trajektorije v tem primeru daje dobre rezultate. Pri obravnavi gibanja, kjer so prisotna nihanja višjih frekvenc od frekvence zajema meritev RTS pa prihaja do težav. Pospešek objekta v časovnem intervalu med zaporednima meritvama v tem primeru ni več konstanten, kar je eden izmed glavnih pogojev osnovnega PVA modela Kalmanovega filtra. To oviro pa smo v disertaciji premostili s kombiniranjem kinematičnih meritev RTS in visokofrekvenčnih meritev nizkocenovnega sensorja IMU.

Senzor IMU združuje triosni pospeškometer, žiroskop in magnetometer. Z njim lahko določimo pospešek, hitrost in položaj objekta v izbranem koordinatnem sistemu. Preden lahko meritve sensorja IMU uporabimo za izračun navigacijskih parametrov, moramo določiti kalibracijske parametre vseh treh sensorjev, ki združeno sestavljajo senzor IMU. V doktorski disertaciji smo razvili in predstavili postopek kalibracije sensorja IMU. Za kalibracijo pospeškometra in žiroskopa smo predlagali uporabo robotskega tahimetra, ki omogoča kontrolirano precizno

vrtenje in usmerjanje daljnogleda. Kljub določenim kalibracijskim parametrom pa je vpliv neodpravljenih napak IMU signifikanten in povzroči ogromno lezenje v izračunanem položaju objekta. Odstranitev oz. zmanjšanje trenda lezenja smo analizirali z uporabo dveh metod. Aproksimacija trenda lezenja položaja s polinomom višje stopnje je vrnila dobre rezultate v primeru simuliranih podatkov. V primeru dejanskih meritev IMU, kjer velikosti napak IMU niso konstantne, pa so bila odstopanja od referenčnih trajektorij precej večja. Odstranitev trenda lezenja položaja z uporabo Zero Phase filtra se je izkazala za zelo uporabno, saj vrne kakovostne rezultate tudi v primeru dejanskih meritev IMU, kar smo v nadaljevanju potrdili tudi z eksperimentalnim delom.

V doktorski disertaciji smo zasnovali tri eksperimente. S prvim eksperimentom smo analizirali možnost visokofrekvenčnega sledenja trajektorije oscilirajočega objekta z nizkocenovnim senzorjem IMU. Analizirali smo kakovost izbranega senzorja IMU in kakovost metod za odstranjevanje trenda lezenja položaja. Ugotovili smo, da najboljše rezultate dobimo z uporabo razvitega postopka odstranitve trenda lezenja položaja z Zero Phase filtrom. Vrednost korelacije med referenčno trajektorijo in izmerjeno trajektorijo je v tem primeru znašala 0,987. Z eksperimentom smo potrdili pravilnost postopka kalibracije senzorja IMU in primernost samostojne uporabe nizkocenovnega senzorja IMU za spremljanje oscilirajočega gibanja objekta.

Pri drugem eksperimentu smo analizirali možnosti izboljšanja rezultatov kinematičnih meritev robotskega tahimetra s kombinacijo visokofrekvenčnih meritev nizkocenovnega senzorja IMU. Zasnovali smo prototipni modul IMU, ki združuje senzor IMU in mersko prizmo ter omogoča, da lahko hkrati zajemamo kinematične meritve z robotskim tahimetrom RTS in senzorjem IMU. Merili smo trajektorijo modula IMU, ki je bil med simulacijo potresa pritrjen na potresno mizo. Na podlagi referenčne trajektorije smo analizirali kakovost trajektorij, ki smo jih na osnovi meritev določili na različne načine. Najboljše rezultate smo dobili s kombinacijo kinematičnih meritev RTS in visokofrekvenčnih meritev IMU. Najprej smo razširili model meritev PVA Kalmanovega filtra in uporabili postopek glajenja z algoritmom Rauch-Tung-Striebel. Rezultat je trajektorija  $KF_{fb}$  z visoko stopnjo ujemanja z referenčno trajektorijo. Primerljive rezultate smo dobili tudi pri trajektoriji, ki smo jo določili na podlagi združenih rezultatov kinematičnih meritev RTS in rezultatov Zero Phase filtra (RTS+ZPF). Z drugim eksperimentom smo tako ovrednotili uporabnost metod za združevanje kinematičnih meritev RTS in meritev IMU. Z združitvijo smo izboljšali kakovost rezultatov kinematičnega merjenja z robotskim tahimetrom za skoraj 50 %.

Pri tretjem eksperimentu smo razvito metodologijo kombiniranih kinematičnih geodetskih meritev z visokofrekvenčnim zajemom podatkov preizkusili v realnih pogojih na terenu. Merili smo nihanja razglednega stolpa na Rašici. Kinematične meritve RTS in meritve IMU smo združili z uporabo PVA Kalmanovega filtra in postopka glajenja z algoritmom Rauch-Tung-Striebel ter združenih rezultatov kinematičnih meritev RTS in rezultatov Zero Phase filtra. Tu smo ugotovili, da se v primeru krajših prekinitev signala v kinematičnih meritvah

RTS najbolj obnese metoda RTS+ZPF, saj uspešno odstrani trend lezenja položaja tudi v primeru daljših intervalov samostojnih meritev IMU.

Glavni namen doktorske disertacije je bil predlagati in razviti postopek, s katerim bomo razširili uveljavljene metode geodetskega kinematičnega merjenja in izboljšali kakovost določitve trajektorije objekta v prostoru tudi v primeru gibanja objekta z oscilacijami visokih frekvenc. To nam je uspelo s kombiniranjem nizkofrekvenčnih kinematičnih meritev robotskega tahimetra RTS in meritev visokofrekvenčnega nizkocenovnega senzorja MEMS-IMU. Razvili smo nizkocenovno rešitev, ki do sedaj še ni bila predstavljena. Z njo smo našem primeru značilno izboljšali rezultate kinematičnega merjenja za skoraj 50 %.

V temi doktorske disertacije smo postavili tri hipoteze in jih na podlagi izvedenega dela tudi potrdili:

- *Kalibracijo senzorja IMU lahko uspešno izvedemo s pomočjo robotskega tahimetra.*
- *Nizkocenovne senzorje IMU lahko uporabimo za samostojno določitev položaja nihajočega objekta v prostoru.*
- *Z integracijo klasičnih postopkov kinematičnih geodetskih meritev in nizkocenovnega senzorja IMU lahko izboljšamo določitev trajektorije objekta v prostoru.*

## 12 Summary

We use physical and geodetic methods to determine the movements of buildings. We use physical methods to measure relative changes of an object. We can monitor the movements continuously and with high absolute accuracy, but they do not give us information about the state of the building relative to its surroundings. For the latter, we use geodetic methods that allow us to record the perceived movements in relation to a stable environment. In the case of buildings erected in a carefully selected stable environment and where no major displacements are planned, the stability of the building is controlled by measurements using geodetic methods. In controlling the stability of objects where sudden movements and deformations are expected, we use methods that allow continuous monitoring in real time. The measurement principle is based on kinematic geodetic measurements and the determination of statistically significant movements of the object is based on a special method of processing the results of kinematic measurements.

Established geodetic methods, such as the use of global navigation satellite systems (GNSS) and tachymetric measurements, allow position determination with frequencies in the 10 Hz magnitude class. The position of an object moving at a speed of a few m/s can be determined only every few 10 cm. In the case of oscillations of a building with higher frequencies, such measurements are practically useless, because it is impossible to determine the exact trajectory and, therefore, the true nature of the oscillation of the building.

Existing geodetic kinematic measurement methods can be complemented using inertial sensors IMU (Inertial Measurement Unit). IMU sensors combine a triaxial magnetometer, a gyroscope, and an accelerometer and provide a data acquisition frequency in the 1000 Hz magnitude range. The technological development of microelectromechanical sensors (MEMS) has created the opportunity to use low-cost IMU sensors in a wide variety of applications. Their most widespread use today is in lower accuracy navigation applications.

The main goal of the dissertation is to propose a method for high-frequency determination of the trajectory of an object in space, with which we will extend the existing established methods of geodetic kinematic measurement. We will present the usefulness of a low-cost sensor MEMS-IMU as an upgrade of existing geodetic measurement methods. When using low-cost MEMS-IMU sensors, special attention should be paid to the calibration of the sensor, as it is the basis for further obtaining useful results. Special calibration hardware is usually used to calibrate the sensor. We will test whether we can use a modern robotic total station to calibrate the IMU sensor. We will also evaluate the standalone use of a low-cost MEMS-IMU sensor to determine the trajectory of an oscillating object. By combining low-frequency kinematic measurements from a robotic total station and measurements from a high-frequency low-cost sensor MEMS-IMU, we will improve the method for determining the trajectory of an object in space.

## 12.1 Processing of RTS kinematic measurements

When standalone kinematic RTS measurements are used, the trajectory of the object is determined uniformly. In addition to the measured points of the object, we can add a physical model of the object's motion to the system and combine the assumption of the object's motion with measurements of the object's position. The physical model and measurements can be combined with a Kalman filter. In this way, we can reduce the signal noise caused by an error in the measurements and, consequently, by incorrectly determined coordinates of the points of the trajectory of the object. The estimated state of the system also determines the velocity and acceleration at the time of the RTS measurements, which can be used to estimate the position of the object within the interval between measurements.

The Kalman filter combines two basic models. Process model and measurement model, between which there is a functional relationship. In the case of dealing with measurements obtained in time intervals, we use the discrete form of differential equation (2.1) and write the process model in the form of equation (2.2). The model of the measurements is given by equation (2.6). The algorithm of the Kalman filter can be represented schematically and is shown in Figure 2.1. The processes of prediction and correction of the system state as well as the step of entering new measurements into the measurement model are outlined. The Kalman filter process is repeated after the initial initialization of the parameters, which is represented by the red loop in Figure 2.1. When filtering kinematic measurements, we use the PVA Kalman filter model, which combines the uniformly accelerated motion model with kinematic measurements of a moving object. The term PVA refers to term for Position, Velocity, Acceleration of the object under consideration, which also represents the state variables of the system. In the Kalman filter we will define nine states of the system: position, velocity and acceleration of the object in all three coordinate axes. A block diagram of the PVA system process (Position, Velocity, Acceleration) describing our problem is shown in Figure 2.2. The measurement model for the PVA Kalman filter is defined by equations (2.23) through (2.26), and the process model is defined by equations (2.27) through (2.31).

## 12.2 Processing of IMU sensor measurements

Inertial Units of Measurement (IMU) are a set of sensors based on which the Inertial Navigation System (INS) can determine navigation parameters. Basically, it is a combined trio of accelerometer, gyroscope and magnetometer. The basic measurement of the accelerometer is the current acceleration in individual axes ( $m/s^2$ ), and the gyroscope provides us with the current angular velocity of rotation of individual axes ( $rad/s$ ). From the processed sensor signals we can calculate the position, current velocity and orientation of the object in space. IMU Sensor measurements refer to the object coordinate frame (see Figure 3.2). The

orientation, velocity and position of the object are defined according to the local geodetic coordinate frame (see Figure 3.1). The calculation of the orientation angles (inclination, rotation and azimuth angles) is represented by equations (3.3) to (3.6), the calculation of the velocity by equation (3.17) and the position of the object by equation (3.18).

When using all types of measurement systems, special attention should be paid to the determination of measurement errors. This is the only way to ensure optimal final results. In the case of low-cost MEMS-IMU sensors, even more emphasis must be placed on the determination and correction of errors, otherwise no useful measured values can be obtained. In general, the measurements of MEMS-IMU sensors are subject to errors, which can be divided into two classes: systematic errors and random errors. The output signal of the IMU sensor (trio gyroscope, accelerometer, and magnetometer signal) is subject to random noise, which can be analyzed in the time domain using the Allan variance. The Allan variance method was originally developed to analyze the phase and frequency stability of oscillators but can also be used to analyze the noise of any sensor. The Allan variance can be calculated based on equation (4.3), and the values of the Allan deviation  $\sigma(\tau)$  are usually analyzed in a graph with a logarithmic scale, which is shown in Figure 4.1. Figure 4.2 shows the Allan deviation  $\sigma(\tau)$  of the triaxial accelerometer and gyroscope used later in the practical tests. We need to determine the length of the signal averaging set at which the accelerometer and gyroscope measurements of the static sensor IMU converge. From the plot (Figure 4.2), we can see that an average averaging time of about 20 seconds is required for all six sensors. Then the Allan deviation  $\sigma(\tau)$  is the smallest. This is the information we will need below to determine the calibration parameters of the sensors, since the calibration model will include measurements that represent the average of the readings in a 20-second interval.

In the calibration of the low-cost sensor MEMS-IMU, the magnetometer, accelerometer, and gyroscope were considered separately. When calibrating the sensors, the calibration parameters that had the greatest impact on the final results were identified: bias offset, scale error, non-orthogonality, and axis misalignment. The problem of determining the calibration parameters of a magnetometer is similar to transforming any 3D ellipsoid into a sphere. The calculation of the magnetometer calibration parameters is described in equations (5.1) to (5.19). The results of the IMU sensor calibration of the MPU-9250 are shown in Figure 5.1.

Calibration of the accelerometer was performed using the Leica Nova MS50 robotic station, which allows rotation and precise alignment of the binoculars. The robotic station allows two-way communication based on the GeoCOM protocol, which works on the principle of client/server standard, where the client is an external device (computer) and the server is an instrument managed by us. The IMU sensor was mounted on the robotic station as shown in Figure 5.3. In this way, we can rotate the IMU sensor around a constant axis for any angle with high precision. The calibration model of the accelerometer is represented by equation (5.24). The general calculation of the calibration parameters using the least squares method is shown in equations (5.25) to (5.49).



We have developed two procedures for calibrating an accelerometer with a robotic total station: the simplified calibration test and the full calibration test. In the simplified IMU test, the sensor is placed on the binoculars of the robotic total station in a specific orientation and rotated about the axis by an arbitrary angle. The bias error of the accelerometer is constant regardless of the orientation of the sensor. If the sensor is rotated for  $180^\circ$ , the sum of the measured accelerations in the individual axes is cumulated by twice the bias error. In this way, six calibration parameters can be determined separately: bias error and scale factor error in all three axes of the accelerometer. The procedure for calculating the calibration parameters in the simplified test is shown in equations (5.54) to (5.57). In Figure 5.6, the measured gravitational acceleration in all 73 positions of the binoculars before calibration is shown in blue ( $g_m$ ). Considering the accelerometer calibration parameters, the corrected gravitational acceleration was calculated and is shown in red in Figure 5.6 ( $g_{cal}$ ). For the full test, the testing procedure is similar to the simplified test, except that in this case the accelerometer must be attached to the robotic station in at least three different orientations. This provides enough independent measurements to be able to determine 9 calibration parameters. Figure 5.7 shows the accelerometer measurements in a full test. The accelerometer was attached to the binoculars in six different orientations. The test procedure corresponds to six simplified tests where the IMU was mounted on a Leica MS50 robotic total station in different orientations prior to each test procedure. The measured gravitational acceleration calculated with the calibration parameters of the full test agrees better with the reference gravitational acceleration than the gravitational acceleration calculated with the calibration parameters of the simple test. The reason for a better result is the consideration of several calibration parameters. In addition to the bias error and the scale factor error, the errors of non-orthogonality and axis inconsistency were also determined in the full test. A comparison of the results of the two calibration methods is shown in Figure 5.9.

To calibrate the gyroscope in the angular domain, we used the Leica Nova MS50 robotic total station. The calibration model of the gyroscope is represented by equation (5.58). The general calculation of the calibration parameters by the general least squares adjustment model is shown by equations (5.63) to (5.89). Again, we have developed two methods for sensor calibration: the simplified test and the full calibration test. In the simplified test, the sensor is mounted on the binocular of the robotic total station in one orientation and rotated for an arbitrary angle. In this way, we obtain measurements based on which we can determine three calibration parameters. However, since we take advantage of the fact that the bias error is already determined for a static sensor, we can also determine the scale error by rotating the sensor for the selected angle. In this way, six calibration parameters can be determined. Thus, according to the calibration model of the gyroscope (5.58), the following calibration parameters can be determined: scale factors ( $k_{11}$ ,  $k_{22}$ ,  $k_{33}$ ) and the bias error ( $b_x$ ,  $b_y$ ,  $b_z$ ). A schematic representation the simple test procedure of gyroscope calibration is shown in Figure 5.10. Figure 5.14 shows a comparison of the measured angles before and after calibration of the gyroscope. In a full test procedure, the sensor is mounted on the robotic station in at least

three different orientations. For each installation of the IMU sensor, the testing procedure is the same as for the simple test (Figure 5.10). A full gyroscope calibration model is used to determine the calibration parameters. Figure 5.19 shows the rotation angles calculated based on raw measurements and based on measurements with the calibration parameters considered. Figure 5.20 shows that the measured rotation angles calculated with the calibration parameters of the simple test coincide with the reference rotation angle better than the rotation angles calculated with the calibration parameters of the full test. The instability of the bias error has the greatest influence on the quality of the results. In the full test, the calculated error of the bias error applies to all three series of measurements and deviates slightly more from the actual error that occurred only in the first series of measurements. However, the unresolved bias error obviously has a much larger effect on the final results than the non-orthogonality and misalignment errors.

Any unresolved error in the accelerometer or gyroscope measurements will result in an error in the calculation of the orientation, velocity, and position of the object. The sources of error are measurement noise, scale errors, and bias error. The biggest impact has the bias drift error, which consists of two parts: short-term deterministic error and long-term random drift, which is reflected in the instability bias error. From equations (5.93) and (5.97), it can be seen that an error in determining bias error of the gyroscope causes a second degree error in determining the velocity of the object and a third degree error in determining the position of the object. Thus, the quality of the gyroscope defines the quality of the sensor IMU and is the main limitation of determining the quality navigation parameters. Figure 5.21 graphically shows the effect of the unresolved bias error of the accelerometer for  $b_a = 0.003 \text{ m/s}^2$ . Error after 1 minute of sensor operation leads to drift in a position of several meters. Figure 5.22 shows graphically the effect of the unresolved bias error of the gyroscope for  $b_g = 0.001 \text{ rad/s}$ . We see that an error after 1 minute of sensor operation causes a drift in a position of several hundred meters. Such an order of magnitude can be expected when using low-cost MEMS-IMU sensors.

Errors in positioning with a low-cost sensor IMU have the character of low-frequency drift, as can be seen in Figure 5.21 and Figure 5.22. Based on the simulated trajectory (Figure 6.2), which is loaded with unresolved bias error of the accelerometer and gyroscope, we tested methods that can eliminate the low-frequency drift of the object position. We considered the method of approximating the trend with a higher degree polynomial and a high pass Zero Phase filter.

In the method of approximating the trend with a higher degree polynomial, the drift of an object position caused by IMU sensor error can be approximated with a higher degree polynomial in the first step and subtracted from the basic object motion in the second step. In this way, an estimate of the motion of an object of higher degree than the approximated polynomial is obtained. The result is shown in figure 6.3. The drift trend is low frequency and can also be eliminated by using high pass filter. In the dissertation, we proposed the zero-Phase filtering method described by equations (6.7) to (6.12). The results of filtering the

simulated trajectory are shown in Figure 6.6. From the calculated quality estimates (Tables 6.1 and 6.2), it can be seen that the first method (approximation of the trend with a polynomial function) obtained a better estimate of the trajectory. Due to the constant IMU error, it can be assumed that the results of the final processed trajectories will be very good (extremely high value of the SNR quality estimator). In IMU measurements under real conditions, it is expected that the bias error of the accelerometer and gyroscope will not be constant but will change randomly under dynamic conditions.

## 12.3 Practical tests

We designed and conducted three experiments as part of our dissertation:

- *Experiment: High frequency tracking of the trajectory of an oscillating object with a low-cost sensor IMU.*
- *Experiment: Earthquake tracking during an earthquake simulation using a combination of robotic total stations and low-cost IMU sensor measurements.*
- *Experiment: Monitoring the oscillations of the Rašica tower.*

### 12.3.1 Experiment: High frequency tracking of the trajectory of an oscillating object with a low-cost sensor IMU.

In a practical experiment, we wanted to find out how accurately we could determine the position of an object in space using a low-cost IMU sensor. Using a robotic arm, we induced the spatial motion of the object exactly around the starting point. The movement took about 1 minute. The reference trajectory of the IMU module is determined based on measurements with Optotrak at a frequency of 400 Hz, and the measurements of the IMU sensor were acquired at a frequency of 200 Hz.

The setup and design of the experiment are shown in Figure 7.1. The IMU module combines an IMU sensor MPU-9250, a Raspberry Pi Zero microcomputer, and a reflective prism, as shown in Figure 7.2. The IMU module can be used to acquire measurements from the robotic total station and the IMU sensor that are referenced to the same point. The reference trajectory of the IMU module (Figure 7.5) was determined by Optotrak measurements and provided us with a reference on the basis of which we assessed the quality of the trajectory measured with a low-cost IMU sensor.

Based on the measurements from IMU, we determined the acceleration of the object in the local navigation coordinate frame (Figure 7.6). Based on the acceleration, the velocity and position of the object in the local coordinate frame were also determined. We removed the drift

from the IMU trajectory (shown in Figure 7.8) with the approximation of a higher degree polynomial. The result is shown in Figure 7.9 and Figure 7.10.

For the IMU trajectory shown in Figure 7.8, the drift was also removed with a Zero Phase filter. We have developed a procedure that first removes the low-frequency drift from the computed velocity in the local coordinate frame, computes the position of the object in the local coordinate frame based on the filtered local velocity, and then removes the low-frequency drift in the object position using the same filtering procedure. The designed two-step filtering method with the Zero Phase filter is shown in Figure 7.12. Figure 7.18 shows a comparison between the reference trajectory and the final filtered trajectory. Using the polynomial approximation gives worse results than filtering with the Zero Phase filter. This is also confirmed by the quality estimators  $SNR$ ,  $corr$  in  $RMSE_r$ , presented in Table 7.4. A comparison of the trajectories obtained with the two methods described with the reference trajectory is shown in Figure 7.20.

With the designed experiment, we analyzed combined quality of the IMU measurements and the procedures for processing the results of the IMU measurements. We found that we can obtain high quality results even with low-cost IMU sensors with an appropriate processing procedure that includes both calibration of the IMU sensor and the method chosen to remove the position drift. When using the Zero Phase filtering method, the agreement rate between the reference trajectory  $r_{ref}$  and the processed trajectory  $r_{ZPF}$  is very high. The signal-to-noise ratio ( $SNR$ ) is 36.7, the correlation of the two trajectories ( $corr$ ) is 0.987, and the root mean square error ( $RMSE_r$ ) is 2.4 cm.

### **12.3.2 Experiment: Earthquake tracking during an earthquake simulation using a combination of robotic total stations and low-cost IMU sensor measurements**

With a practical experiment we wanted to find out how the kinematic measurements of the robotic total station can be improved by a combination of high frequency IMU sensor measurements. Modern robotic tachymeters allow tracking and kinematic measurements with frequencies around 10 Hz, while the IMU sensors can acquire measurements with frequencies in the 1000 Hz magnitude class. The combination of kinematic RTS measurements and IMU sensor measurements could therefore more accurately describe the trajectory of a moving object. The goal of the experiment is to measure and determine the exact trajectory of the seismic table during the earthquake simulation. For this purpose, we used the earthquake table Quanser Shake Table II (STII), which was developed for UCIST (University Consortium on Instructional Shake Tables) and is used to study the dynamics of building structures during earthquakes. It is shown in Figure 8.1. We installed the IMU module on the shake table. The setup of the experiment is shown in Figure 8.2.

During the earthquake simulation, we made two measurements that allow us to determine the trajectory of the IMU module in space - kinematic measurements with a robotic total station (RTS measurements) and IMU sensor measurements (IMU measurements). Based on the measurements from two separate measurement systems, the accuracy of several different trajectories was determined and analyzed, with the reference trajectory being the basis for determining the quality of different trajectories. A schematic representation of all trajectories considered can be seen in Figure 8.3.

Based on standalone RTS measurements, we determined and analyzed two trajectories. The **RTS trajectory** is determined by RTS measurements without further processing, and the **KF<sub>PVA</sub> trajectory** is determined by RTS measurements and processed with a PVA Kalman filter. The result of the two trajectories is shown in Figure 8.6, where we see that the measured RTS points coincide well with the reference trajectory, but do not describe well the actual motion of the object due to the low frequency of the RTS kinematic measurement. Also, in the case of the **KF<sub>PVA</sub>** trajectory and the **KF<sub>PVA10</sub>** trajectory, which is determined based on an increased frequency of the prediction step of the PVA Kalman filter system, we could not improve the result. The estimates of the quality of the considered trajectories are summarized in Table 8.1.

Based on standalone IMU measurements, we determined and analyzed two trajectories. The IMU trajectory is determined by IMU measurements without further processing, and the **ZPF trajectory** is determined by IMU measurements and trajectory processing using the procedure of removing the drift with the Zero Phase filter. Figure 8.8 shows the IMU trajectory and we can see that the drift is more than 50 meters after one minute of operation. Figure 8.9 shows that the **ZPF trajectory** describes the dynamic motion of the object well, but deviations from the reference trajectory occur in places where low frequency and permanent deviations of the object from the initial position were present.

Based on a combination of RTS and IMU measurements, we determined and analyzed three trajectories. The **KF trajectory** is determined with the extended Kalman filter measurement model combining RTS and IMU measurements. The extended model of Kalman filter measurements model is represented by equations (8.1) to (8.6). The results are shown in Figure 8.10, where we see that in the case of the **KF trajectory**, position drift due to IMU errors is observed. Even though the shape of the **KF trajectory** in the interval between the RTS measurements is similar to the reference trajectory **REF**, the drift of the position is more dominant, which means that we cannot improve the quality of the trajectory estimation.

The **KF<sub>fb</sub> trajectory** is determined based on the Kalman filtering and by a smoothing procedure based on the Rauch-Tung-Striebel algorithm. The algorithm uses measurements over the entire completed interval as the smoothing proceeds in both directions of the signal (forward-backward). The procedure is represented by equations (8.7) to (8.14). The result of processing the RTS and IMU measurements with the Kalman filter and the smoothing procedure with the Rauch-Tung-Striebel algorithm is shown in Figure 8.11. The quality estimators presented in

Table 8.4 confirm that we have improved the result using this method. The quality estimate  $RMSE_r$  of the  $KF_{fb}$  trajectory (1.3 mm) is 48% lower than the RTS trajectory (2.5 mm). Therefore, with the combination of low-cost IMU sensor measurements, we could improve the quality of the kinematic RTS measurements.

The **RTS+ZPS trajectory** is determined by combining the RTS trajectory and the ZPF trajectory. At the times when the measured position of the RTS trajectory is available, the differences between the RTS trajectory and the ZPF trajectory are determined, as shown in Figure 8.12. The differences in the interval between the measured RTS points are determined by linear interpolation, and in the next step the ZPF trajectory is corrected by the value of these differences. In this way, the RTS+ZPF trajectory is obtained, which is shown in Figure 8.12. The RTS+ZPF trajectory is 40% more accurate than the RTS trajectory with respect to the  $RMSE_r$ .

The comparison of the quality estimators of all considered trajectories is presented in Table 8.5 and in Figures 8.14, 8.15 and 8.16. It can be seen that the best estimation of the trajectory is obtained in the case of the combined results of RTS and IMU measurements. The  $KF_{fb}$  trajectory, which is the result of a combination of a Kalman filtering and a smoothing procedure using the Rauch-Tung-Striebel algorithm, is slightly better than the RTS+ZPF trajectory. The results refer to a test under controlled conditions where no signal interruptions occurred. However, when kinematic measurements were made with RTS in an uncontrolled environment at a greater distance from the observed object, there may be a prolonged loss of signal for several seconds. In the following, we examined how the methods for combining RTS measurements and IMU measurements perform when the kinematic RTS measurements have a longer sampling time. Table 8.6 summarizes the quality estimators of  $KF_{fb}$  and RTS + ZPF trajectories with an average sampling time of kinematic RTS measurements of 1.5 seconds and Table 8.7 with an average sampling time of 5 seconds. Figure 8.17 and Table 8.6 show that we obtained better results for the RTS+ZPF trajectory with a sampling time of 1.5 seconds. At a sampling time of 5 seconds (Figure 8.18 and Table 8.7), the differences between the RTS+ZPF and  $KF_{fb}$  trajectories are larger. At a longer time interval between RTS measurements, the sensor errors of IMU result in a larger position drift that is not eliminated in the Kalman filter process, while position drift is eliminated by using a Zero Phase filter. From the results, it can be concluded that with a lower frequency of kinematic RTS measurements, the motion of the object is better described by the combined RTS+ZPF trajectory. This is especially beneficial in the case of signal loss during kinematic RTS measurements.

### 12.3.3 Experiment: Monitoring the oscillations of the Rašica tower

With the last field test, we wanted to test the effectiveness of the developed methodology of combined kinematic geodetic measurements with high-frequency data acquisition under real field conditions. We wanted to measure the trajectory of the oscillating Rašica tower. The field

measurements were carried out on New Year's Eve, December 31, 2019, before midnight, when the tower was particularly busy. Figure 9.1 shows the tower and Figure 9.2 shows the Leica MS50 total station robot used for the measurements. The IMU module, which combines a reflective prism and an IMU sensor, was mounted above the upper walking platform of the tower, as shown in Figure 9.3.

The result of the kinematic RTS measurements is shown in Figure 9.4, where we can see that the signal was interrupted between the 36th and 40th second of the measurements. Therefore, we do not have the results of the kinematic RTS measurements in this interval. Figure 9.5 shows the acceleration of the object in the direction of the y-axis calculated on the basis of the measurements from IMU. Based on the measurements from IMU, we calculated the ZPF trajectory processed with the Zero Phase filter method, the result is shown in Figure 9.6. Kinematic RTS measurements and IMU sensor measurements were combined in two ways. The result of the combined RTS+ZPF trajectory is shown in Figure 9.7. In this case, there is a consistent oscillation in the interval without kinematic RTS measurements (between 36 and 40 seconds), which is consistent with the trend of oscillations before and after the signal interruption. In the second step, the kinematic RTS measurements and the measurements from IMU were combined with the Kalman filter and the smoothing process using the Rauch-Tung-Striebel algorithm. The results of the  $KF_{fb}$  trajectory are shown in Figure 9.9. The  $KF_{fb}$  trajectory perfectly matches the RTS+ZPF trajectory at the points where kinematic RTS measurements are available. In the interval between the 36th and the 40th second, when no RTS measurements are available, there are larger deviations. As can be seen in Figure 9.9, the trajectory deviates by 8 centimeters, which is due to the effects of the unresolved IMU errors.

## 12.4 Conclusion

In the dissertation we analyze the possibility of improving the kinematic measurements of RTS by combining high frequency measurements of the IMU sensor. In the first part, we describe the kinematic measurements of RTS and derive a model of the Kalman filter used to process the kinematic measurements. In the second part, we present the inertial navigation system and methods used in processing the measurements of the low-cost sensor IMU, allowing us to use the sensor IMU to determine the position of the object in space independently. In the third part, the quality of determining the trajectory of an oscillating object in space is empirically evaluated using experiments.

The dissertation presented the development of robotic total stations that enable kinematic measurements. In the past, synchronization of direction and length measurements had a great influence on the quality of the results, but in modern RTS this influence is negligible. Kinematic RTS measurements are effective when measuring an object that is moving approximately uniformly, without rapid accelerations or decelerations. Tracking such motion with RTS is

therefore a trivial problem. Using the Kalman filter to reduce noise and smooth the measured trajectory produces good results in this case. However, there are problems with motions where fluctuations with higher frequencies than the frequency covered by the RTS measurement occur. In this case, the acceleration of the object in the time interval between successive measurements is no longer constant, which is one of the main conditions of the basic PVA model of the Kalman filter. In the dissertation, we overcame this obstacle by combining kinematic RTS measurements and high-frequency measurements of a low-cost IMU sensor.

The IMU sensor combines a triaxial accelerometer, gyroscope and magnetometer. It allows us to determine the acceleration, velocity and position of the object in the selected coordinate system. Before the measurements of the IMU sensor can be used to calculate the navigation parameters, we need to determine the calibration parameters of all three sensors, which together form the IMU sensor. In our dissertation, we developed and presented the procedure for calibrating the IMU sensors. For the calibration of the accelerometer and the gyroscope, we proposed the use of a robotic tachymeter that allows controlled precise rotation and orientation of the binoculars. Despite certain calibration parameters, the effects of unresolved IMU errors are significant and cause tremendous drift in the calculated position of the object. Elimination or reduction of the drift was analyzed using two methods. Approximating the drift with a higher degree polynomial gave good results in the case of the simulated data. However, in the case of actual measurements from IMU, where the IMU errors are not constant, the deviations from the reference trajectories were much larger. Eliminating the drift using the Zero Phase filter proved to be very useful, as it also gave good results in the case of actual IMU measurements, which was later confirmed by experimental work.

In the dissertation we designed three experiments. With the first experiment we analyzed the possibility of high-frequency tracking of the trajectory of an oscillating object with a low-cost IMU sensor. We analyzed the quality of the selected IMU sensor and methods to eliminate the drift. We found that the best results were obtained by using the developed method to remove the drift with a Zero Phase filter. The correlation value between the reference trajectory and the measured trajectory in this case was 0.987. The experiment confirmed the correctness of the calibration procedure of the IMU sensor and the suitability of the standalone use of a low-cost IMU sensor to monitor the oscillatory motion of the object.

In the second experiment, we analyzed the possibilities of improving the results of kinematic measurements of the robotic tachymeter by combining high-frequency measurements of the low-cost sensor IMU. We designed a prototype of an IMU module that combines an IMU sensor and a measurement prism and enables simultaneous acquisition of kinematic measurements with the RTS robotic tachymeter and the IMU sensor. We measured the trajectory of the IMU module attached to the shake table during the earthquake simulation. Using the reference trajectory, we analyzed the quality of the trajectories, which were determined based on measurements taken in different ways. The best results were obtained with a combination of kinematic RTS measurements and high-frequency IMU measurements.



First, we extended the PVA Kalman filter measurement model and used a smoothing procedure with the Rauch-Tung-Striebel algorithm. The result is a  $KF_{fb}$  trajectory with a high degree of agreement with the reference trajectory. Comparable results were also obtained for the trajectory determined based on the combined results of the kinematic RTS measurements and the results of the Zero Phase filter (RTS+ZPF). With the second experiment, we evaluated the applicability of methods for combining kinematic RTS measurements and IMU measurements. The combination allowed us to improve the quality of the results of kinematic measurements with a robotic total station by almost 50%.

In the third experiment, we tested the developed methodology of combined kinematic geodetic measurements with high-frequency data acquisition under real field conditions. We measured the oscillations of the Rašica tower. Kinematic RTS measurements and IMU measurements were combined using a PVA Kalman filter and a smoothing process with the Rauch-Tung-Striebel algorithm, and the combined results of the kinematic RTS measurements and Zero Phase filter were combined. It was found that for short signal interruptions in kinematic RTS measurements, the RTS+ZPF method worked best, successfully eliminating the drift even for longer intervals of standalone IMU measurements.

The main goal of the dissertation was to propose and develop a method that extends the established methods of geodetic kinematic measurement and improves the quality of determining the trajectory of the object in space even in the case of movements with high-frequency oscillations. We achieved this by combining low-frequency kinematic measurements of the RTS robotic total station and measurements of a high-frequency low-cost sensor MEMS-IMU. We developed a low-cost solution that has not been presented before. With it, we were able to significantly improve the results of kinematic measurements by almost 50% in our case.

As part of the dissertation, we made three hypotheses and confirmed them based on the work performed:

- *Calibration of the IMU sensor can be successfully performed with a use of a robotic total station.*
- *The trajectory of an oscillating object can be determined with a standalone use of an IMU.*
- *By integrating classical methods of kinematic geodetic measurements and the measurements of the low-cost IMU sensor, the determination of the trajectory of the object can be improved.*

## Literatura in viri

- Abyarjoo, F., Barreto, A., Cofino, J., Ortega, F. R. 2015. Implementing a sensor fusion algorithm for 3D orientation detection with inertial/magnetic sensors. *Lecture Notes in Electrical Engineering* 313, 305–310. doi:10.1007/978-3-319-06773-5\_41 .
- Angrisano, A. 2010. GNSS/INS Integration Methods. Doktorska disertacija. Napoli. "Parthenope" University of Napoli: 168 str.
- Avrutov, V. V., Aksonenko, P. M., Henaff, P., Ciarletta, L. 2017. 3D-calibration of the IMU. *IEEE 37th International Conference on Electronics and Nanotechnology, ELNANO 2017*. 374–379. doi:10.1109/ELNANO.2017.7939782 .
- Bar-Shalom, Y., Li, X.-R., Kirubarajan, T. 2001. Estimation with Applications to Tracking and Navigation. John Wiley & Sons, Inc.: 547 str.
- Bektas, S. 2014. Orthogonal distance from an ellipsoid. *Boletim de Ciências Geodésicas* 20, 4: 970–983. doi:10.1590/S1982-21702014000400053 .
- Bianchi, G., Sorrentino, R. 2007. *Electronic Filter Simulation & Design*. McGraw-Hill Companies: 606 str.
- Bishop, C. M. 2006. Pattern recognition and machine learning *Information Science and Statistics*. Springer Science+Business Media: doi:10.1109/TIT.1963.1057854
- Botero Valencia, J.-S., Rico Garcia, M., Villegas Ceballos, J.-P. 2016. A simple method to estimate the trajectory of a low cost mobile robotic platform using an IMU. *International Journal on Interactive Design and Manufacturing* 11, : 823–828. doi:10.1007/s12008-016-0340-5
- Brozovič, M. 2009. Uporaba šolske potresne mize za simulacijo obnašanja konstrukcij med potresi. *Diplomska naloga*. Ljubljana, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, Konstrukcijska smer: 115 str.
- Butterworth, S. 1930. On the Theory of Filter Amplifiers. *Experimental Wireless & The Wireless Engineer* .
- Chatzi, E. N., Fuggini, C. 2015. Online correction of drift in structural identification using artificial white noise observations and an unscented Kalman Filter. *Smart Structures and Systems* 16, 2: 295–328. doi:10.12989/sss.2015.16.2.295 .
- Cheuk, C. M., Lau, T. K., Lin, K. W., Liu, Y. 2012. Automatic Calibration for Inertial Measurement Unit. *12th International Conference on Control, Automation, Robotics & Vision*. 1341–1346 doi:http://dx.doi.org/10.1109/ICARCV.2012.6485340

- Chow, J. C. K. 2017. Statistical Sensor Fusion of a 9-Dof Mems Imu for Indoor Navigation. The International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences, Volume XLII-2/W7, 2017 ISPRS Geospatial Week 2017, 18–22 september 2017, Wuhan, China. 18–22.
- Chow, R. 2011. Evaluating inertial measurement units. *Test & Measurement World* 34–37.
- Cohen Tenoudji, F. 2016. *Analog and Digital Signal Analysis From Basics to Applications*. Springer International Publishing Switzerland 2016. doi:10.1007/978-3-319-42382-1
- Ehrhart, M., Lienhart, W. 2017. Object tracking with robotic total stations: Current technologies and improvements based on image data. *Journal of Applied Geodesy* 11, 3: 131–142. doi:10.1515/jag-2016-0043 .
- Eldesoky, A. 2017. Performance Enhancement of Low-Cost MEMS Inertial Sensors Using Extensive Calibration Technique. 34th National Radio Science Conference Arab Academy for Science , Technology & Maritime Transport. 415–424.
- Falco, G., Einicke, G. A., Malos, J. T., DAVIS, F. 2012. Performance analysis of constrained loosely coupled GPS/INS integration solutions. *Sensors (Switzerland)* 12, 11: 15983–16007. doi:10.3390/s121115983 .
- Faragher, R. 2012. Understanding the basis of the kalman filter via a simple and intuitive derivation. *IEEE Signal Processing Magazine* 29, 5: 128–132. doi:10.1109/MSP.2012.2203621 .
- Farrell, J. A. 2008. *Aided Navigation: GPS with High Rate Sensors*. The McGraw-Hill Companies: 530 str. doi:10.1036/0071493298 .
- Fong, W. T., Ong, S. K., Nee, a Y. C. 2008. Methods for in-field user calibration of an inertial measurement unit without external equipment. *Measurement Science and Technology* 19, 85202: 11. doi:10.1088/0957-0233/19/8/085202 .
- Gamse, S. 2010. *Uporaba Kalmanovega filtra pri kinematičnih geodetskih meritvah*. Doktorska disertacija. Ljubljana, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo Univerza v Ljubljani: 130 str.
- Gikas, V., Daskalakis, S. 2006. Full Scale Validation of Tracking Total Stations Using a Long Stroke Electrodynamic Shaker. XXIII International FIG Congress 1–11.
- Gindy, M., Vaccaro, R., Nassif, H., Velde, J. 2008. A state-space approach for deriving bridge displacement from acceleration. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering* 23, 4: 281–290. doi:10.1111/j.1467-8667.2007.00536.x

- Gomez, F., Park, J. W., Spencer, B. F. 2018. Reference-free structural dynamic displacement estimation method. *Structural Control and Health Monitoring* 25, 8: 1–14. doi:10.1002/stc.2209 .
- Gou, Y., Shi, X., Huo, X., Zhou, J., Yu, Z., Qiu, X. 2019. Motion parameter estimation and measured data correction derived from blast-induced vibration: New insights. *Measurement* 135, : 213–230. doi:10.1016/j.measurement.2018.11.050 .
- Groves, P. D. 2008. *Principles of GNSS, Inertial, and Multisensor Integrated Navigation Systems*. GNSS Technology and Applications Series. Artech House: 523 str.
- Hasan, G., Hasan, K., Ahsan, R., Sultana, T., Bhowmik, R. C. 2013. Evaluation of a Low-Cost MEMS IMU for Indoor Positioning System. *International Journal of Emerging Science and Engineering* 1, 11: 70–77.
- Hieu, L. N., Nguyen, V. H. 2012. Loosely coupled GPS/INS integration with Kalman filtering for land vehicle applications. *International Conference on Control, Automation and Information Sciences, ICCAIS 2012*. 90–95. doi:10.1109/ICCAIS.2012.6466637 .
- Hu, Y., Tao, L. 2013. Real-time zero phase filtering for heave measurement. *The 11th IEEE International Conference on Electronic Measurement & Instruments*. 321–326. doi:10.1109/ICEMI.2013.6743049 .
- Hwang, P. Y. C., Grover Brown, R. 2012. *Introduction to Random signals and Applied Kalman Filtering with MATLAB exercises*. John Wiley & Sons, Inc.: 397 str.
- Ibrahim, M., Moselhi, O. 2016. Inertial measurement unit based indoor localization for construction applications. *Automation in Construction* 71, : 13–20. doi:10.1016/j.autcon.2016.05.006
- IEEE Std 647-2006. 2006. *IEEE Standard Specification Format Guide and Test Procedure for Single-Axis Laser Gyros*: 85 str.
- Jekeli, C. 2001. *Inertial Navigation Systems with Geodetic Applications*. New York. Walter de Gruyter: 364 str.
- Kerekes, G., Schwieger, V. 2018. Kinematic Positioning in a Real Time Robotic Total Station Network System. *Proceedings of 6th International Conference on Machine Control & Guidance* 35–43.
- Kim, J., Kim, K., Sohn, H. 2014. Autonomous dynamic displacement estimation from data fusion of acceleration and intermittent displacement measurements. *Mechanical Systems and Signal Processing* 42, 1–2: 194–205. doi:10.1016/j.ymssp.2013.09.014 .
- Kok, M., Schön, T. B. 2016. Magnetometer calibration using inertial sensors. 1-31 str. doi:10.1109/JSEN.2016.2569160 <http://arxiv.org/abs/1601.05257>.

- Kovačič, B., Motoh, T. 2019. The possibility of measuring the dynamic response of structures using non-contact geodetic method. *Geodetski vestnik* 63, 1: 57–72. doi:10.15292/geodetski-vestnik.2019.01.57-72 .
- Kregar, K., Lakner, M., Kogoj, D. 2014. Rotacija z enotskim kvaternionom. *Geodetski vestnik* 58, 2: 231–242. doi:10.15292/geodetski-vestnik.2014.02.231-242 .
- Krevh, B. 2015. Določitev vertikalnega gradienta težnosti v stavbi FGG. Diplomaska naloga. Ljubljana, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo.
- Leccadito, M. T. 2013. An Attitude Heading Reference System using a Low Cost Inertial Measurement Unit. Virginia Commonwealth University.
- Lee, J. K., Park, E. J., Robinovitch, S. N. 2012. Estimation of attitude and external acceleration using inertial sensor measurement during various dynamic conditions. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement* 61, 8: 2262–2273. doi:10.1109/TIM.2012.2187245 .
- Leica Geosystems. 2015. Leica Nova MS60 Data sheet. Leica Geosystems: 8 str.
- Leica Geosystems 2010. GeoCOM Reference Manual - Version 1.50. Leica Geosystems: 207 str.
- Lenda, G., Uznański, A., Strach, M. 2019. Influence of Time Delays of Robotic Total Stations With High Sampling Frequency on Accuracy of Measurements to Moving Prisms. *Archives of Civil Engineering* 65, 1: 31–48. doi:10.2478/ace-2019-0003 .
- Lerke, O., Schwieger, V. 2021. Analysis of a kinematic real-time robotic total station network for robot control. *Journal of Applied Geodesy* 15, 3: 169–188. doi:10.1515/jag-2021-0016 .
- Lienhart, W., Ehrhart, M., Grick, M. 2017. High frequent total station measurements for the monitoring of bridge vibrations. *Journal of Applied Geodesy* 11, 1: 1–8. doi:10.1515/jag-2016-0028 .
- Logan, J. D. 2011. A First Course in Differential Equations. Springer: 386 str. doi:10.1007/978-1-4419-7592-8 .
- Lotfi, B., Huang, L. 2016. An approach for velocity and position estimation through acceleration measurements. *Measurement* 90, 242–249. doi:10.1016/j.measurement.2016.04.011
- Ma, L., Chen, W., Li, B., You, Z., Chen, Z. 2014. Fast field calibration of MIMU based on the powell algorithm. *Sensors* 14, : 16062–16081. doi:10.3390/s140916062 .
- Madgwick, S. O. H. 2010a. Automated calibration of an accelerometers , magnetometers and gyroscopes - A feasibility study. 11 str.

- Madgwick, S. O. H. 2010b. An efficient orientation filter for inertial and inertial/magnetic sensor arrays doi:10.1109/ICORR.2011.5975346
- Marendić, A., Paar, R., Damjanović, D. 2017. Measurement of bridge dynamic displacements and natural frequencies by RTS. *Journal of the Croatian Association of Civil Engineers* 69, 4: 281–294. doi:10.14256/jce.1804.2016 .
- Matsuo, K., Miura, T., Tajima, K. 2020. Vibration reduction of a stepping motor using a pre-compensator to remove control delay. *IEEJ Journal of Industry Applications* 9, 2: 191–192. doi:10.1541/ieejia.9.191 .
- McLoughlin, B. J., Pointon, H. A. G., McLoughlin, J. P., Shaw, A., Bezombes, F. A. 2018. Uncertainty characterisation of mobile robot localisation techniques using optical surveying grade instruments. *Sensors (Switzerland)* 18, 7: doi:10.3390/s18072274 .
- Mikhail, E. M., Ackermann, F. 1978. *Observations and Least Squares*. 497 str. doi:10.1016/0031-8663(78)90007-8 .
- Millor, N., Lecumberri, P., Gómez, M., Martínez-Ramírez, A., Izquierdo, M. 2014. Drift-free position estimation for periodic movements using inertial units. *IEEE Journal of Biomedical and Health Informatics* 18, 4: 1131–1137. doi:10.1109/JBHI.2013.2286697 .
- Mitra, S. K. 1997. *Digital Signal processing - A Computer Based Approach*. McGraw-Hill: 225 str.
- Modic, Ž. 2016. *Postopki za umerjanje MEMS senzorjev*. Diplomaska naloga. Ljubljana, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za elektrotehniko.
- Nassar, S., El-Sheimy, N. 2006. A combined algorithm of improving INS error modeling and sensor measurements for accurate INS/GPS navigation. *GPS Solutions* 10, 1: 29–39. doi:10.1007/s10291-005-0149-3 .
- Noureldin, A., Karamat, T. B., Georgy, J. 2013. *Fundamentals of Inertial Navigation, Satellite-based Positioning and their Integration*. Springer: 313 str. doi:10.1007/978-3-642-30466-8 .
- Omidalzarandi, M., Neumann, I., Kemkes, E., Kargoll, B., Diener, D., Ruffer, J., Paffenholz, J.-A. 2019. Mems Based Bridge Monitoring Supported By Image-Assisted Total Station. *GeoSpatial Conference 2019 – Joint Conferences of SMPR and GI Research*. Karaj, Iran, 833–842.
- Paraforos, D. S., Griepentrog, H. W., Geipel, J., Stehle, T. 2015. Fused inertial measurement unit and real time kinematic-global navigation satellite system data assessment based on robotic total station information for in-field dynamic positioning. *Precision Agriculture 2015 - 10th European Conference on Precision Agriculture, ECPA 2015*. 275–282 doi:10.3920/978-90-8686-814-8\_33 .

- Paraforos, D. S., Reutemann, M., Sharipov, G., Werner, R., Griepentrog, H. W. 2017. Total station data assessment using an industrial robotic arm for dynamic 3D in-field positioning with sub-centimetre accuracy. *Computers and Electronics in Agriculture* 136, : 166–175. doi:10.1016/j.compag.2017.03.009 .
- Park, K. T., Kim, S. H., Park, H. S., Lee, K. W. 2005. The determination of bridge displacement using measured acceleration. *Engineering Structures* 27, 3: 371–378. doi:10.1016/j.engstruct.2004.10.013 .
- Pelzer, H. 1974: Zur Behandlung Singulärer Ausgleichungsaufgaben I, *Zeitschrift für Vermessungswesen* 99, Heft 5, pp. 181-194
- Psimoulis, P. A., Stiros, S. C. 2007. Measurement of deflections and of oscillation frequencies of engineering structures using Robotic Theodolites (RTS). *Engineering Structures* 29, 12: 3312–3324. doi:10.1016/j.engstruct.2007.09.006 .
- Renaudin, V., Afzal, M. H., Lachapelle, G. 2010. Complete triaxis magnetometer calibration in the magnetic domain. *Journal of Sensors* 2010, : 10. doi:10.1155/2010/967245 .
- Sabatelli, S., Galgani, M., Fanucci, L., Rocchi, A. 2012. A double stage Kalman filter for sensor fusion and orientation tracking in 9D IMU. 2012 IEEE Sensors Applications Symposium, SAS 2012 - Proceedings 244–248. doi:10.1109/SAS.2012.6166315 .
- Sabatini, A. M. 2006. Quaternion-based extended Kalman filter for determining orientation by inertial and magnetic sensing. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering* 53, 7: 1346–1356. doi:10.1109/TBME.2006.875664 .
- Sadi, F., Klukas, R. 2013. New jump trajectory determination method using low-cost MEMS sensor fusion and augmented observations for GPS/INS integration. *GPS Solutions* 17, 2: 139–152. doi:10.1007/s10291-012-0267-7 .
- Sánchez, A., Bravo, J. L., González, A. 2017. Estimating the Accuracy of Track-Surveying Trolley Measurements for Railway Maintenance Planning. *Journal of Surveying Engineering* 143, 1: 5016008. doi:10.1061/(asce)su.1943-5428.0000197 .
- Shin, E.-H. 2001. Accuracy Improvement of Low Cost INS / GPS for Land Applications. The University of Calgary.
- Smyth, A., Wu, M. 2007. Multi-rate Kalman filtering for the data fusion of displacement and acceleration response measurements in dynamic system monitoring. *Mechanical Systems and Signal Processing* 21, 2: 706–723. doi:10.1016/j.ymsp.2006.03.005 .
- Soloman, S. 2010. *Sensors Handbook*. The McGraw-Hill: 1424 str.
- Stančin, S., Tomažič, S. 2018. On the interpretation of 3D gyroscope measurements. *Journal of Sensors*. doi:10.1155/2018/9684326 .

- Štebe, G., Krapež, P., Podobnik, J., Kogoj, D. 2021. Trajectory tracking of an oscillating movement with a low-cost IMU in geodetic surveying applications. *Measurement* 176. doi:10.1016/j.measurement.2021.109207 .
- Toivonen, H. T. 2004. *Applied Signal Processing*. Åbo Akademi University: 20 str. Dostopno: [http://users.abo.fi/htoivone/courses/sbappl/asp\\_chapter1.pdf](http://users.abo.fi/htoivone/courses/sbappl/asp_chapter1.pdf).
- Toyozumi, N., Takahashi, J., Lopez, G. 2016. Trajectory reconstruction algorithm based on sensor fusion between IMU and strain gauge for stand-alone digital pen. 2016 IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics, ROBIO 2016 1906–1911. doi:10.1109/ROBIO.2016.7866607 .
- Tuno, N., Mulahusić, A., Savšek, S., Kogoj, D. 2019. Five generations of integrated electronic tachymeters. *Geodetski vestnik* 63, 1: 41–56. doi:10.15292/geodetski-vestnik.2019.01.41-56
- Van, T. P., Van, T. N., Nguyen, D. A., Duc, T. C., Duc, T. T. 2015. 15-State Extended Kalman Filter Design for INS/GPS Navigation System. *Journal of Automation and Control Engineering* 3, 2: 109–114. doi:10.12720/joace.3.2.109-114
- Wang, L., Zhang, Z., Sun, P. 2015. Quaternion-based Kalman Filter for AHRS Using an Adaptive-step Gradient Descent Algorithm. *International Journal of Advanced Robotic Systems* 1. doi:10.5772/61313
- Won, S. P., Melek, W. W., Golnaraghi, F. 2010. A Kalman/Particle Filter-Based Position and Orientation Estimation Method Using a Position Sensor/Inertial Measurement Unit Hybrid System. *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 57, 5: 1787–1798. doi:10.1109/TIE.2009.2032431
- Woodman, O. J. 2007. *An introduction to inertial navigation*. Cambridge Computer Laboratory: 37 str. Dostopno: <http://www.cl.cam.ac.uk/techreports/>.
- Wu, B., Huang, T., Jin, Y., Pan, J., Song, K. 2019. Fusion of high-dynamic and low-drift sensors using kalman filters. *Sensors (Switzerland)* 19, 1: doi:10.3390/s19010186 .
- Wu, Z., Wang, W. 2018. Magnetometer and gyroscope calibration method with level rotation. *Sensors* 18, 748: 18. doi:10.3390/s18030748 .
- Xu, C., Hu, Q. 2009. Dynamic structural monitoring using the kinematic positioning of a robotic total station. *ICEMI 2009 - Proceedings of 9th International Conference on Electronic Measurement and Instruments* 269–273. doi:10.1109/ICEMI.2009.5274485 .
- Yadav, N., Bleakley, C. 2016. Fast calibration of a 9-DOF IMU using a 3 DOF position tracker and a semi-random motion sequence. *Measurement* 90, : 192–198. doi:10.1016/j.measurement.2016.04.066



- Yang, J., Li, J. B., Lin, G. 2006. A simple approach to integration of acceleration data for dynamic soil-structure interaction analysis. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* 26, 8: 725–734. doi:10.1016/j.soildyn.2005.12.011
- Ye, L., Argha, A., Celler, B. G., Nguyen, H. T., Su, S. W. 2017. Online auto-calibration of triaxial accelerometer with time-variant model structures. *Sensors and Actuators, A: Physical A* 266, : 294–307. doi:10.1016/j.sna.2017.08.049
- Zhang, Y., Lyu, C., Xu, H., Xia, Y., Feng, F., Singh, G., Chiang, P. Y., Wang, X. S. 2016. Improved position estimation by fusing multiple inaccurate inertial measurement unit sensors. 2016 IEEE MTT-S International Wireless Symposium, IWS 2016 doi:10.1109/IEEE-IWS.2016.7585483 .
- Zhu, H., Zhou, Y., Hu, Y. 2020. Displacement reconstruction from measured accelerations and accuracy control of integration based on a low-frequency attenuation algorithm. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* 133: doi:10.1016/j.soildyn.2020.106122 .
- Zihajehzadeh, S., Loh, D., Lee, T. J., Hoskinson, R., Park, E. J. 2015. A cascaded Kalman filter-based GPS/MEMS-IMU integration for sports applications. *Measurement* 73, : 200–210. doi:10.1016/j.measurement.2015.05.023