UDK 528.181

IZRAVNAVA OPAZOVANJ Z ISTOČASNIM OCENJEVANJEM POPRAVKOV IN NEZNANK

dr. Nevio Rožić, prof.dr. Božidar Kanajet
Univerza v Zagrebu, Geodetska fakulteta, Rudarsko geološko naftna fakulteta, Zagreb, Hrvaška
Prispelo za objavo: 1995-12-18
Pripravljeno za objavo: 1996-04-18

Izvleček

V prispevku je prikazana možnost modificiranja standardnih algoritmov izravnave: neposrednih opazovanj, posrednih opazovanj, kombiniranih neposrednih in posrednih opazovanj ter posrednih opazovanj z vezmi med neznankami; popravki opazovanj in neznanke se določajo istočasno z reševanjem ustreznih sistemov linearnih enačb. Taka modifikacija standardnih algoritmov izravnave ustreza uporabi sodobnih namiznih in žepnih računalnikov, ker le-ti podpirajo neposredno izvajanje računskih operacij matrične algebre.

Ključne besede: *algoritmi izravnave, sistemi linearnih enačb, namizni računalnik*

1 UVOD

Sodobni osebni računalniki, opremljeni s programskimi sistemi za tabelarična računanja (Ingalsbe, 1988, Božić, 1994, Husnjak, 1994, Crnko et al., 1995), ter sodobni žepni računalniki (Sharp corporation, 1986) omogočajo neposredno izvajanje računskih operacij matrične algebre. Zaradi tega je danes uporaba algoritmov za izravnavo v geodetski praksi lažje uporabna kot prej. Vsi sodobni algoritmi izravnave so namreč teoretično definirani z uporabo matrične algebre, s pomočjo računalnikov pa se v tej obliki tudi praktično uporabljajo. Na ta način pospešimo in poenostavimo računski postopek, zato strokovnjaku ni treba poznati zahtevnejših postopkov programiranja v višjih programskih jezikih za reševanje geodetske naloge. Hkrati pa zmanjšamo možnost napak. Neposredno izvajanje matričnih računskih operacij zahteva tudi določene modifikacije algoritmov za izravnavo, ki so bolje prilagojeni možnostim računalnikov. Standardna oblika, ki jo uporabljajo v številnih publikacijah (Wolf, 1968, Bjerhammar, 1973, Mikhail, Ackermann, 1976), zaradi tradicije ni najbolje prilagojena tem možnostim.

Danes ima prednost pri reševanju različnih geodetskih nalog uporaba izravnave posrednih opazovanj (Caspary, 1988), ena od možnih modifikacij pa je tudi algoritem, s katerim ocenjujemo popravke opazovanj in neznanke hkrati. Te količine v standardnemu algoritmu izravnave posrednih opazovanj izračunamo postopoma, najprej neznanke (z reševanjem normalnih enačb), nato popravke opazovanj (z uvrščanjem neznank v pripadajoče enačbe popravkov, Feil, 1989). Modificirani algoritem izravnave posrednih opazovanj je prikazan v Hoepcke, 1980, vendar pa ga je možno na ustrezen način uporabiti tudi za izravnavo neposrednih opazovanj, skupno izravnavo neposrednih in posrednih opazovanj ter za izravnavo posrednih opazovanj z vezmi med neznankami.

2 NEPOSREDNA OPAZOVANJA

Funkcionalni model neposrednih opazovanj je določen s sistemom enačb popravkov (Feil, 1989):

$$\underset{n\times 1}{\mathbf{v}} = \underset{n\times 1}{\mathbf{e}}\ \underset{1\times 1}{x} - \underset{n\times 1}{\mathbf{l}}, \quad \underset{n\times n}{\mathbf{P}}, \tag{1}$$

kjer je:
n – število opazovanj
x – neznanka (popravek približne vrednosti neznanke)
e – enotski vektor
$\mathbf{l}$ – reducirani vektor opazovanj
v – vektor popravkov opazovanj
$\mathbf{P}$ – matrika uteži opazovanj.

Enolično rešitev tega sistema dobimo z uporabo metode najmanjših kvadratov:

$$\mathbf{v}^t\mathbf{P}\mathbf{v} = \text{minimum}, \tag{2}$$

s čimer je določena tudi pripadajoča normalna enačba:

$$(\mathbf{e}^t\mathbf{P}\mathbf{e})\ x - \mathbf{e}^t\mathbf{P}\mathbf{l} = 0. \tag{3}$$

Iz metode najmanjših kvadratov izhaja tudi kontrola pravilnosti ocene popravkov opazovanj:

$$\mathbf{e}^t\mathbf{P}\mathbf{v} = 0. \tag{4}$$

Z množenjem izraza (1) z matriko uteži $\mathbf{P}$ z leve strani in s preureditvijo tega izraza dobimo:

$$\mathbf{P}\,\mathbf{v} - \mathbf{P}\,\mathbf{e}\,x + \mathbf{P}\,\mathbf{l} = \mathbf{0}. \tag{5}$$

Izraza (4) in (5) določata sistem linearnih enačb

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{P}\mathbf{e} \\ \mathbf{e}^t\mathbf{P} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ -x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{P}\mathbf{l} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{6}$$

v katerem je matrika koeficientov simetrična matrika dimenzije (n+1) x (n+1). Poudariti je treba, da ta matrika ni pozitivno definitna, je pa regularna in jo lahko invertiramo s klasično inverzijo. Z inverzijo te matrike določimo tudi rešitev sistema enačb, podanega v izrazu (6):

$$\begin{bmatrix} v \\ -x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{P}e \\ e^t\mathbf{P} & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\mathbf{P}l \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathbf{P}l \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Na ta način istočasno ocenimo popravke opazovanj in neznanke. V izrazu (7) so z inverzijo definirani podmatriki in podvektor:

$$\underset{1x1}{q_{22}} = -(e^t\mathbf{P}e)^{-1} = -q_{xx}, \tag{8}$$

$$\underset{nx1}{q_{12}} = e\,q_{xx}, \tag{9}$$

$$\underset{nxn}{\mathbf{Q}_{11}} = \mathbf{P}^{-1} - e q_{xx} e^t, \tag{10}$$

kjer je q_{xx} kofaktor neznanke.

Teoretična oblika sistema enačb (6) je pomembna za praktično uporabo tega algoritma, zato ga je treba v analogiji s standardnim algoritmom izravnave neposrednih opazovanj razumeti kot sistem enačb popravkov. Razstavitev sistema (6) na podmatrike in podvektorje nima vpliva na učinkovitost računanja, ker se za inverzijo in množenje uporabljajo ustrezni ukazi na žepnem oziroma osebnem računalniku. Primerjava tega algoritma s standardnim algoritmom izravnave neposrednih opazovanj kaže, da se namesto ene normalne enačbe, izraz (3), za določanje neznanih količin rešuje sistem (n+1) linearnih enačb, izraz (6). Naloga ni težka, saj lahko neposredno uporabimo računske operacije matrične algebre.

S sistemom enačb (6) in (7) je zajet tudi najsplošnejši primer izravnave neposrednih opazovanj, to pa je izravnava neposrednih koreliranih opazovanj. Če izravnavamo neposredna, neodvisna opazovanja različne natančnosti in neposredna neodvisna opazovanja iste natančnosti, se algoritem poenostavi, kar je odvisno od oblike matrike uteži opazovanj $\mathbf{P}$.

3 POSREDNA OPAZOVANJA

Funkcionalni model izravnave posrednih opazovanj je prav tako določen s sistemom enačb popravkov, le da v nasprotju z neposrednimi opazovanji vsebuje večje število neznank:

$$\underset{nx1}{v} = \underset{nxu}{\mathbf{A}}\;\underset{ux1}{x} - \underset{nx1}{l}, \quad \underset{nxn}{\mathbf{P}}, \tag{11}$$

kjer je:

u – število neznank
$\mathbf{A}$ – matrika koeficientov enačb popravkov.

Postopek definiranja algoritma izravnave z istočasnim ocenjevanjem popravkov in neznank se ujema z neposrednimi opazovanji. Iz uporabe metode najmanjših kvadratov je sedaj temeljna kontrola pravilnosti popravkov opazovanj:

$$\mathbf{A}^t\mathbf{P}\,v = \mathbf{0}. \tag{12}$$

Z množenjem izraza (11) z matriko uteži $\mathbb{P}$ z leve strani in s preureditvijo tega izraza dobimo:

$$\mathbb{P}\ \mathbb{v} - \mathbb{P}\ \mathbb{A}\ \mathbb{x} + \mathbb{P}\ \mathbb{l} = \mathbb{0}. \tag{13}$$

Izraza (12) in (13) določata sistem linearnih enačb:

$$\begin{bmatrix} \mathbb{P} & \mathbb{PA} \\ \mathbb{A}^t\mathbb{P} & \mathbb{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{v} \\ -\mathbb{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbb{Pl} \\ \mathbb{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{0} \\ \mathbb{0} \end{bmatrix}. \tag{14}$$

Njegova rešitev je:

$$\begin{bmatrix} \mathbb{v} \\ -\mathbb{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{P} & \mathbb{PA} \\ \mathbb{A}^t\mathbb{P} & \mathbb{0} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\mathbb{Pl} \\ \mathbb{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{Q}_{11} & \mathbb{Q}_{12} \\ \mathbb{Q}_{21} & \mathbb{Q}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathbb{Pl} \\ \mathbb{0} \end{bmatrix}. \tag{15}$$

V tem izrazu so z inverzijo definirane podmatrike:

$$\underset{uxu}{\mathbb{Q}_{22}} = -(\mathbb{A}^t\mathbb{PA})^{-1} = -\mathbb{Q}_{xx}, \tag{16}$$

$$\underset{nxu}{\mathbb{Q}_{12}} = \mathbb{AQ}_{xx}, \tag{17}$$

$$\underset{nxn}{\mathbb{Q}_{11}} = \mathbb{P}^{-1} - \mathbb{AQ}_{xx}\mathbb{A}^t; \tag{18}$$

kjer je $\mathbb{Q}_{xx}$ matrika kofaktorjev neznank.

V izrazu (10) in v izrazu (18) se nahaja tudi matrika kofaktorjev izravnanih opazovanj $\overline{\mathbb{Q}}$, t.j. pri neposrednih opazovanjih:

$$\underset{nxn}{\overline{\mathbb{Q}}} = \mathbb{e}q_{xx}\mathbb{e}^t \tag{19}$$

ter pri izravnavi posrednih opazovanj:

$$\underset{nxn}{\overline{\mathbb{Q}}} = \mathbb{AQ}_{xx}\mathbb{A}^t. \tag{20}$$

Primerjava tega algoritma s standardnim algoritmom izravnave posrednih opazovanj kaže, da namesto (u) normalnih enačb za določanje neznanih količin (neznank) rešujemo sistem (n+u) linearnih enačb.

4 KOMBINIRANA NEPOSREDNA IN POSREDNA OPAZOVANJA

Pri kombinirani obliki izravnave neposrednih in posrednih opazovanj je funkcionalni model določen z enačbami popravkov neposrednih opazovanj:

$$\underset{n_1x1}{\mathbb{v}_1} = \underset{n_1xu}{\mathbb{A}_1}\ \underset{ux1}{\mathbb{x}} - \underset{n_1x1}{\mathbb{l}_1},\quad \underset{n_1xn_1}{\mathbb{P}_1} \tag{21}$$

in z enačbami popravkov posrednih opazovanj:

$$\underset{n_2x1}{\mathbb{v}_2} = \underset{n_2xu}{\mathbb{A}_2}\ \underset{ux1}{\mathbb{x}} - \underset{n_2x1}{\mathbb{l}_2},\quad \underset{n_2xn_2}{\mathbb{P}_2}. \tag{22}$$

Enolično rešitev funkcionalnega modela dobimo z uporabo metode najmanjših kvadratov v skladu z izrazom (2):

$$v^tPv = v_1^t P_1 v_1 + v_2^t P_2 v_2 = \text{minimum}, \tag{23}$$

tako da je temeljna kontrola pravilnosti popravkov opazovanj:

$$A^tPv = A_1^t P_1 v_1 + A_2^t P_2 v_2 = 0. \tag{24}$$

Če upoštevamo izraza (21) in (22) in ju pomnožimo s pripadajočimi matrikami uteži opazovanj z leve strani in izraz (24), dobimo naslednji sistem linearnih enačb:

$$\begin{bmatrix} P_1 & 0 & P_1A_1 \\ 0 & P_2 & P_2A_2 \\ A_1^t P_1 & A_2^t P_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ -x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_1 l_1 \\ P_2 l_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{25}$$

Z rešitvijo tega sistema določimo vektor neznanih količin, t.j. hkrati vektor popravkov neposrednih opazovanj v_1, vektor popravkov posrednih opazovanj v_2 in vektor popravkov približnih vrednosti neznank x:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ -x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 & 0 & P_1A_1 \\ 0 & P_2 & P_2A_2 \\ A_1^t P_1 & A_2^t P_2 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -P_1 l_1 \\ -P_2 l_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -P_1 l_1 \\ -P_2 l_2 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{26}$$

V tem izrazu so z inverzijo definirane podmatrike:

$$\underset{uxu}{Q_{33}} = -(A_1^t P_1 A_1 + A_2^t P_2 A_2)^{-1} = -N^{-1} = -Q_{xx}, \tag{27}$$

$$\underset{n_2xu}{Q_{23}} = A_2 Q_{xx}, \tag{28}$$

$$\underset{n_2xn_2}{Q_{22}} = P_2^{-1} - A_2 Q_{xx} A_2^t, \tag{29}$$

$$\underset{n_1xu}{Q_{13}} = A_1 Q_{xx}, \tag{30}$$

$$\underset{n_1xn_2}{Q_{12}} = -A_1 Q_{xx} A_2^t, \tag{31}$$

$$\underset{n_1xn_1}{Q_{11}} = P_1^{-1} - A_1 Q_{xx} A_1^t, \tag{32}$$

kjer je Q_{xx} matrika kofaktorjev neznank.

V tem primeru je treba v nasprotju s standardnim algoritmom nujno rešiti sistem linearnih enačb $(n_1 + n_2 + u)$.

5 POSREDNA OPAZOVANJA Z VEZMI MED NEZNANKAMI

Pri kombinirani obliki posrednih opazovanj z vezmi med neznankami je funkcionalni model določen z enačbami popravkov posrednih opazovanj:

$$\underset{nx1}{v} = \underset{nxu}{A}\,\underset{ux1}{x} - \underset{nx1}{l}, \quad \underset{nxn}{P} \tag{33}$$

ter z veznimi enačbami med neznankami:

$$\underset{rxu}{\mathbf{B}^t}\,\underset{ux1}{\mathbf{x}} + \underset{rx1}{\boldsymbol{\varpi}} = \underset{rx1}{\mathbf{0}}, \tag{34}$$

kjer je:

r – število vezi
ϖ – vektor odstopanj
$\mathbf{B}$ – matrika koeficientov veznih enačb.

Z uporabo metode najmanjših kvadratov je določena tudi temeljna kontrola računanja popravkov opazovanj:

$$\mathbf{A}^t\mathbf{P}\mathbf{v} + \mathbf{B}\mathbf{k} = \mathbf{0}, \tag{35}$$

kjer je $\mathbf{k}$ vektor korelat.

Izraza (33) in (34) ter izraz (32) po množenju z matriko uteži opazovanj P z leve strani določajo sistem linearnih enačb:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{PA} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}^t\mathbf{P} & \mathbf{0} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}^t & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ -\mathbf{x} \\ \mathbf{k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{Pl} \\ \mathbf{0} \\ -\boldsymbol{\varpi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \tag{36}$$

Z rešitvijo tega sistema ocenimo vektor neznanih količin, t.j. istočasno vektor popravkov posrednih opazovanj $\mathbf{v}$, vektor popravkov približnih vrednosti neznank $\mathbf{x}$ in vektor korelat $\mathbf{k}$:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ -\mathbf{x} \\ \mathbf{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{PA} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}^t\mathbf{P} & \mathbf{0} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}^t & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\mathbf{Pl} \\ \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\varpi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{11} & \mathbf{Q}_{12} & \mathbf{Q}_{13} \\ \mathbf{Q}_{21} & \mathbf{Q}_{22} & \mathbf{Q}_{23} \\ \mathbf{Q}_{31} & \mathbf{Q}_{32} & \mathbf{Q}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathbf{Pl} \\ \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\varpi} \end{bmatrix}. \tag{37}$$

V tem izrazu so z inverzijo definirane podmatrike:

$$\underset{rxr}{\mathbf{Q}_{33}} = (\mathbf{B}^t\mathbf{N}^{-1}\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{Q}_{kk}, \tag{38}$$

$$\underset{uxr}{\mathbf{Q}_{23}} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{Q}_{kk}, \tag{39}$$

$$\underset{uxu}{\mathbf{Q}_{22}} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{Q}_{kk}\,\mathbf{B}^t\mathbf{N}^{-1} - \mathbf{N}^{-1} = -\mathbf{Q}_{xx}, \tag{40}$$

$$\underset{nxr}{\mathbf{Q}_{13}} = -\mathbf{A}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{Q}_{kk}, \tag{41}$$

$$\underset{nxu}{\mathbf{Q}_{12}} = \mathbf{A}\mathbf{Q}_{xx}, \tag{42}$$

$$\underset{nxn}{\mathbf{Q}_{11}} = \mathbf{P}^{-1} - \mathbf{A}\mathbf{Q}_{xx}\mathbf{A}^t, \tag{43}$$

kjer je $\mathbf{N}$ matrika koeficientov normalnih enačb posrednih opazovanj:

$$N = A^t P A \tag{44}$$

in Q_{xx} matrika kofaktorjev neznank. Število linearnih enačb, ki jih moramo rešiti, se je povečalo z (u+r) na (n+u+r).

6 ZAKLJUČEK

Sodobni žepni in osebni računalniki povečujejo uporabnost algoritmov izravnave pri reševanju različnih geodetskih nalog. Ta uporabnost se kaže na elementarni ravni predvsem v možnosti neposrednega izvajanja matričnih računskih operacij, tako da ni več razkoraka med teoretičnim prikazom algoritmov izravnave na eni strani in praktičnim računanjem na drugi strani. Vsaka matrična računska operacija je v primerjavi s klasično algebro zahtevnejša in je na splošno sestavljena iz vrste elementarnih operacij. Z neposredno uporabo matričnih računskih operacij, ustrezno vgrajenih v računalnik, se pospeši postopek računanja in hkrati zmanjša možnost nastanka računskih napak.

Ravno tako je z uporabo inverzije, t.j. z uporabo v računalnik vgrajenega ukaza, rešen eden od problemov, ki je vplival na razvoj in uporabo postopkov izravnave; to je reševanje normalnih enačb. V praksi so iz tradicionalnih razlogov še vedno navzoče klasične metode (Burmistrov, 1963, Čubranić, 1980, Klak, 1982) ali njihove delno modernizirane inačice. Te metode so postale zaradi neposredne inverzije matrik koeficientov normalnih enačb in nedefiniranega načina njihovega reševanja neučinkovite. Danes reševanje sistema linearnih enačb modificiranega algoritma, katerega velikost presega število normalnih enačb standardnega algoritma, pri reševanju iste geodetske naloge ne predstavlja prav nobene težave. To je ugotovljeno tudi v tem prispevku, ker temeljijo prikazani algoritmi izravnave za istočasno ocenjevanje popravkov opazovanj in neznank na reševanju sistema linearnih enačb, ki je glede na pripadajoče normalne enačbe v standardnem algoritmu povečan za število meritev. Poudariti moramo, da neposredna uporaba računskih operacij matrične algebre na sodobnih računalnikih vpliva predvsem na povečanje učinkovitosti praktičnega računanja, potem ko je glede na problem definiran funkcionalni model. Funkcionalni model lahko določimo na klasičen način ali z izdelavo lastne programske opreme v enem od višjih programskih jezikov (Rožić, 1992).

Prikazani algoritmi izravnave z istočasnim ocenjevanjem popravkov opazovanj in neznank v razmerju do standardnih algoritmov izkoriščajo prednosti neposrednega izvajanja matričnih računskih operacij. Zato so primerni za praktično uporabo pri reševanju vseh standardnih geodetskih nalog, ki v praksi temeljijo na uporabi algoritmov izravnave. Opisani algoritmi minimalno izkoriščajo možnosti sodobnih računalnikov. Potrebno bi bilo težiti k večjemu izkoriščanju njihovih možnosti, vendar bi bilo zato treba izdelati ekspertne programske sisteme, napisane v višjih programskih jezikih. Po drugi strani pa so izdelava, standardizacija, verifikacija in licenciranje takih programskih sistemov poseben problem, ki v tem prispevku ni obravnavan.

Na podlagi navedenega lahko ugotovimo, da je najosnovnejši računski pripomoček geodetskega strokovnjaka pri uporabi algoritmov izravnave žepni računalnik z možnostjo izvajanja računskih operacij matrične algebre. Z njegovo uporabo lahko postane praktično računanje enostavnejše in učinkovitejše tudi brez poznavanja programiranja, seveda z uporabo modifikacij standardnih algoritmov, prikazanih v tem prispevku. Na podoben način lahko modificiramo tudi algoritem izravnave pogojnih opazovanj (Hoepcke, 1980) kot tudi algoritem izravnave pogojnih opazovanj z neznankami.

Primer:

Primerjava praktičnega računanja pri uporabi standardnega algoritma izravnave in algoritma izravnave z istočasnim računanjem popravkov opazovanj in neznank pri posrednih opazovanjih (računanje je bilo opravljeno z žepnim računalnikom Sharp PC-1403). Podane so koordinate točk T_1, T_2, T_3 in T_4 ter približne koordinate točke T (y_o = 145.00 m, x_o = 117.00 m), katere položaj ni znan. Na podlagi merjenih dolžin s_i (i = 1,2,...,4) je treba določiti izravnane koordinate točke T (ločni presek). Primer je vzet iz Rožić, 1993, naloga 3.1.12.

Merjene dolžine	Koordinate točk	
$TT_1 = s_1 =$ 105.60 m,	T_1, $y_1 =$ 54.80 m,	$x_1 =$ 172.94 m
$TT_2 = s_2 =$ 107.60 m,	T_2, $y_2 =$ 233.65 m,	$x_2 =$ 177.55 m
$TT_3 = s_3 =$ 109.30 m,	T_3, $y_3 =$ 237.50 m,	$x_3 =$ 59.76 m
$TT_4 = s_4 =$ 103.10 m,	T_4, $y_4 =$ 57.38 m,	$x_4 =$ 65.33 m

Enačbe popravkov: $\mathbf{v} = \mathbf{A}\ \mathbf{x} - \mathbf{l}$, $\quad \mathbf{P} = \mathbf{E}$

$$\begin{array}{cccc} \mathbf{A} & \mathbf{Ae} & -\mathbf{l} & \mathbf{s} \\ \begin{bmatrix} -0.53 & 0.85 \\ -0.56 & -0.83 \\ 0.53 & -0.85 \\ 0.51 & 0.86 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0.32 \\ -1.39 \\ -0.32 \\ 1.37 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0.54 \\ -0.24 \\ -0.52 \\ -1.38 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0.86 \\ -1.63 \\ -0.85 \\ -0.01 \end{bmatrix} \end{array}$$

A) Standardni algoritem

Normalne enačbe: $\mathbf{N}\ \mathbf{x} - \mathbf{n} = \mathbf{0}$

$$\begin{array}{cccc} \mathbf{N} & \mathbf{Ne} & -\mathbf{n} & \mathbf{A}^t\mathbf{s} \\ \begin{bmatrix} 1.1308 & 0.0079 \\ 0.0079 & 2.8692 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1.1387 \\ 2.8771 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1.1210 \\ -0.0849 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0.0178 \\ 2.7922 \end{bmatrix} \end{array}$$

Reševanje normalnih enačb z algoritmom Choleskega:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{C} & -(\mathbf{C}^t)^{-1}\mathbf{n} & (\mathbf{C}^t)^{-1} & (\mathbf{C}^t)^{-1}\mathbf{s} & \sigma \\ \begin{bmatrix} 1.06340 & 0.00745 \\ & 1.69385 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1.05413 \\ -0.04547 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0.94038 & \\ -0.00414 & 0.59037 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0.95710 \\ 2.23462 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0.95710 \\ 2.23462 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Q}_{xx} & \mathbf{Q}_{xx}\mathbf{e} & \mathbf{x} \\ \begin{bmatrix} 0.88434 & -0.00244 \\ -0.00244 & 0.34854 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0.88189 \\ 0.34610 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0.991 \\ 0.027 \end{bmatrix} \end{array}$$

Računanje popravkov opazovanj: $\mathbf{v} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} - \mathbf{l}$

$$
\begin{array}{cccc}
\mathbf{Ax} & -\mathbf{l} & & \mathbf{v} \\
\begin{bmatrix} -0.500 \\ -0.581 \\ 0.499 \\ 0.527 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} 0.54 \\ -0.24 \\ -0.52 \\ -1.38 \end{bmatrix} & = &
\begin{bmatrix} 0.039 \\ -0.826 \\ -0.023 \\ -0.853 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

B) Istočasno računanje popravkov opazovanj in neznank

Definiranje koeficientov sistema linearnih enačb po izrazu (14):

$$
\begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{A} \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} \end{bmatrix} =
\begin{bmatrix}
1.00 & & & & -0.53 & 0.85 \\
& 1.00 & & & -0.56 & -0.83 \\
& & 1.00 & & 0.53 & -085 \\
& & & 1.00 & 0.51 & 0.86 \\
-0.53 & -0.56 & 0.53 & 0.51 & 0.00 & 0.00 \\
0.85 & -0.83 & -0.85 & 0.86 & 0.00 & 0.00
\end{bmatrix}, \quad
\begin{bmatrix} -\mathbf{l} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} =
\begin{bmatrix} 0.54 \\ -0.24 \\ -0.52 \\ -1.38 \\ 0.00 \\ 0.00 \end{bmatrix}.
$$

Reševanje sistema enačb po izrazu (15):

$$
\begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^t & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} =
\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{11} & \mathbf{Q}_{12} \\ \mathbf{Q}_{21} & \mathbf{Q}_{22} \end{bmatrix}
\qquad
\begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ -\mathbf{x} \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix}
0.50044 & -0.01840 & 0.49932 & -0.01844 & -0.46816 & 0.29749 \\
-0.01840 & 0.48329 & 0.01783 & 0.49906 & -0.49676 & -0.28643 \\
0.49932 & 0.01783 & 0.50092 & 0.01897 & 0.46742 & -0.29767 \\
-0.01844 & 0.49906 & 0.01897 & 0.51535 & 0.44710 & 0.29898 \\
\\
-0.46816 & -0.49676 & 0.46742 & 0.44710 & -0.88434 & 0.00244 \\
0.29749 & -0.28643 & -0.29767 & 0.29898 & 0.00244 & -0.34854
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 0.039 \\ -0.826 \\ -0.023 \\ -0.853 \\ \\ -0.991 \\ -0.027 \end{bmatrix}
$$

Literatura:

Bjerhammar, A., Theory of Errors and Generalized Matrix Inverses. Amsterdam, Elsevier Scientific Publishing Company, 1973

Božić, D., Excel za Windows 5.0. Zagreb, Biblioteka Klik, 1994

Burmistrov, G.A., Osnovi sposova najmenjših kvadratov. Moskva, NEDR, 1963

Caspary, W.F., Concepts of Network and Deformation Analysis. Kensington, School of Surveying, The University of New South Wales, Monograph 11, 1988

Crnko, N. et al., PC-kompjutori i programi za PC korisnike. Zagreb, Sysprint, 1995

Čubranić, N. Teorija pogrešaka s računom izjednačenja. Zagreb, Tehnička knjiga, 1980

Feil, L., Teorija pogrešaka i račun izjednačenja - prvi dio. Zagreb, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, 1989

Husnjak, B., Quattro pro za Windows 5.0. Zagreb, Biblioteka Klik, 1994

Hoepcke, Fehlerlehre und Ausgleichsrechnung. Berlin - New York, Walter de Gruyter, 1980
Ingalsbe, L., Business Applications Software for the IBM PC. Columbus - Toronto - London - Melburne, Merill Publishing Company, 1980
Klak, S., Teorija pogrešaka i račun izjednačenja. Zagreb, Liber, 1982
Mikhail, E.M., Ackermann F., Observations and Least Squares. New York, Harper and Row Publishers, 1976
Rožić, N., Kompjutorski program za izjednačenje nivelmanskih mreža - NIVEL. Zagreb, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, 1992
Rožić, N., Repetitorij i zbirka zadataka iz teorije pogrešaka i računa izjednačenja. Zagreb, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, 1993
Sharp corporation, Pocket computer model PC-1403 operation manual. Osaka, 1986
Wolf, H., Ausgleichungsrechnung nach der Methode der Kleinsten Quadrate. Bonn, Ferd., Duemmlers Verlag, 1968

Recenzija: Tomaž Ambrožič
doc.dr. Bojan Stopar

Prevod iz hrvaščine in strokovna redakcija: Tomaž Ambrožič
doc.dr. Bojan Stopar