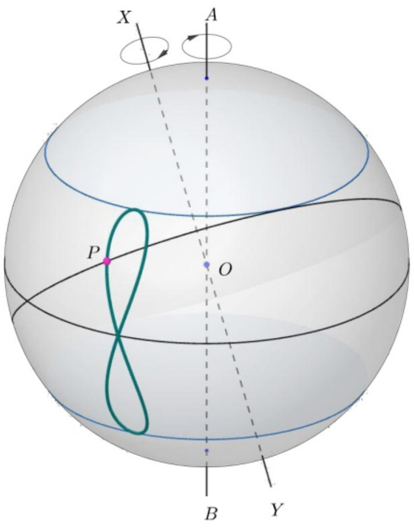
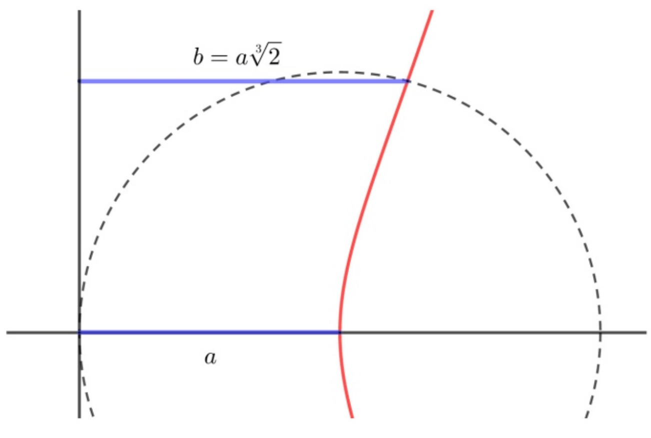
IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

ISSN 0473-7466

2021
Letnik 68
4

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO





OBZORNIK MAT. FIZ. • LJUBLJANA • LETNIK 68 • ŠT. 4 • STR 121-160 • DECEMBER 2021

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
Ljubljana, DECEMBER 2021, letnik 68, številka 4, strani 121–160

Naslov uredništva: DMFA–založništvo, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana **Telefon:** (01) 4766 633, 4232 460 **Telefaks:** (01) 4232 460, 2517 281 **Elektronska pošta:** zaloznistvo@dmfa.si **Internet:** http://www.obzornik.si/ **Transakcijski račun:** 03100–1000018787 **Mednarodna nakazila:** SKB banka d.d., Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana **SWIFT (BIC):** SKBASI2X **IBAN:** SI56 0310 0100 0018 787

Uredniški odbor: Peter Legiša (glavni urednik), Sašo Strle (urednik za matematiko in odgovorni urednik), Aleš Mohorič (urednik za fiziko), Mirko Dobovišek, Irena Drevenšek Olenik, Damjan Kobal, Petar Pavešić, Marko Petkovšek, Marko Razpet, Nada Razpet, Peter Šemrl, Matjaž Zaveršnik (tehnični urednik).

Jezikovno pregledal Grega Rihtar.
Računalniško stavila in oblikovala Tadeja Šekoranja.
Natisnila tiskarna COLLEGIUM GRAPHICUM v nakladi 1100 izvodov.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina znaša 24 EUR, za druge družinske člane in študente pa 12 EUR. Naročnina za ustanove je 30 EUR, za tujino 35 EUR. Posamezna številka za člane stane 6,00 EUR, stare številke 3,00 EUR.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

Revija izhaja praviloma vsak tretji mesec. Sofinancira jo Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih znanstvenih periodičnih publikacij.

© 2021 DMFA Slovenije – 2148

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

NAVODILA SODELAVCEM OBZORNIKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Revija Obzornik za matematiko in fiziko objavlja izvirne znanstvene in strokovne članke iz matematike, fizike in astronomije, včasih tudi kak prevod. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij, poročila o dejavnosti Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ter vesti o drugih pomembnih dogodkih v okviru omenjenih znanstvenih ved. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, diplomantov iz omenjenih strok.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev), sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo), izvleček v slovenskem jeziku, naslov in izvleček v angleškem jeziku, klasifikacijo (MSC oziroma PACS) in citirano literaturo. Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo tudi ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Prispevki so lahko oddani v računalniški datoteki PDF ali pa natisnjeni enostransko na belem papirju formata A4. Zaželena velikost črk je 12 pt, razmik med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku ali uredniku za matematiko oziroma fiziko na zgoraj napisani naslov uredništva. Vsak članek se praviloma pošlje dvema anonimnima recenzentoma, ki morata predvsem natančno oceniti, kako je obravnavana tema predstavljena, manj pomembna pa je originalnost (in pri matematičnih člankih splošnost) rezultatov. Če je prispevek sprejet v objavo, potem urednik prosi avtorja še za izvorne računalniške datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TEX oziroma LATEX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

EVDOKSOVA KAMPILA

MARKO RAZPET

Pedagoška fakulteta
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 14H45, 51M15

Evdoksova kampila je ena od ravninskih krivulj, ki nam pomaga rešiti antični problem podvojitve kocke. Pokazali bomo, kako se z neoznačenim ravnilom in šestilom konstruira posamezne točke kampile, dokazali bomo nekaj njenih lastnosti in utemeljili precej natančno približno metodo za podvojitev kocke.

KAMPYLE OF EUDOXUS

The kampyle of Eudoxus is one of the plane curves that helps us solve the ancient problem of doubling the cube. We will show how to construct the individual points of the kampyle using an unlabelled ruler and a pair of compasses, we will prove some of its properties, and we will justify a fairly accurate approximate method for doubling a cube.

Uvod

Evdoks iz Knida (408–355 pr. n. št.) je bil starogrški matematik in astronom. Bil je Arhitov učenec v Tarentu in Platonov na Akademiji v Atenah. Obiskal je tudi Sicilijo in Egipt. Kasneje je ustanovil svojo šolo v Kiziku ob Marmarskem morju. Pomemben je njegov prispevek v teoriji razmerij in nesoizmerljivih količin, kar je uporabil Evklid v svojih Elementih.

V astronomiji je Evdoks zagovarjal geocentrični svetovni sistem in za pojasnitev gibanja planetov in Lune uvedel sistem koncentričnih sfer, ki se vrtijo druga v drugi. S tem v zvezi je uvedel še eno krivuljo, ki jo poznamo pod imenom »Evdoksova hipopeda«.

Problem podvojitve kocke je na svojevrsten način, s torusom, valjem in stožcem, rešil pitagorejec in vojaški poveljnik Arhitas iz Tarenta v južni Italiji, rojen med letoma 435 in 410, umrl pa med letoma 360 in 350 pr. n. št. (o njegovi rešitvi več v [3, 5]). Če sledeč Arhitu uporabimo današnje metode in oznake, potem v prostorskem kartezičnem koordinatnem sistemu $Oxyz$ iščemo presečišča torusa $(x^2+y^2+z^2)^2 = 4a^2(x^2+y^2)$, ki ima polmer zunanjega ekvatorja $2a > 0$, polmer notranjega pa 0, valja $x^2+y^2 = 2ax$ in stožca $x^2 = y^2+z^2$. Če enačbo stožca zapišemo v obliki $2x^2 = x^2+y^2+z^2$ in to upoštevamo v enačbi torusa, pridemo do enačbe $a^2(x^2+y^2) = x^4$. Upoštevamo še enačbo valja in dobimo enačbo z eno neznanko: $x^4 = 2a^3x$. Njeni realni rešitvi sta $x_1 = 0$ in $x_2 = a\sqrt[3]{2}$. Pozitivna rešitev je rob kocke, ki ima dvakrat večjo prostornino kot kocka z robom a. S tem je problem podvojitve kocke rešen.

Platon s tako rešitvijo seveda ni bil zadovoljen: ni bila narejena po evklidsko, to je z neoznačenim ravnilom in šestilom, ni bila narejena v ravnini.

Morda je Evdoks Arhitovo prostorsko rešitev problema podvojitve kocke poenostavil na reševanje v ravnini, tako da je, če uporabimo spet naše oznake, poiskal presečišče krivulje $a^2(x^2+y^2)=x^4$ in krožnice $x^2+y^2=2ax$ v ravninskem kartezičnem koordinatnem sistemu Oxy. Krivulji se sekata v koordinatnem izhodišču O in še v dveh, glede na os x simetrično ležečih točkah, ki imata absciso enako $a\sqrt[3]{2}$. Do rešitve tokrat pridemo vsaj v ravnini, Platon pa seveda tudi s tem ni bil zadovoljen.

Krivuljo, ki ima implicitno enačbo $a^2(x^2+y^2)=x^4$, so poimenovali po Evdoksu »Evdoksova kampila«. Koordinatno izhodišče $O(0,0)$ je njena izolirana točka, ki je navadno ne upoštevamo. Krivulja je simetrična glede na obe koordinatni osi.

Pravzaprav ni nikjer dokazano, da jo je Evdoks dejansko uporabljal. Ve se le, da mu je podvojitev kocke uspelo najti z neko krivuljo. Beseda »kampila« izhaja iz grške »kampýle«, kar pomeni »kriva, zavita, upognjena«, namreč »črta« ali »poteza«.

Problem podvojitve kocke ali deloški problem, poimenovan po grškem otoku Delosu v Egejskem morju, je reševalo več grških geometrov, ki so celo skušali izdelati v ta namen posebno orodje. Platon je pograjal Evdoksove, Arhitove in Menajhmove učence, češ da njihovi napori kvarijo, kar je dobrega v geometriji. Nastal je celo epigram (puščica, zbadljivka) v zvezi s podvojitvijo kocke, ki je zapisan v Evtokijevih komentarjih k Arhimedovi razpravi »O krogli in valju«.

Navedimo omenjeni epigram v prevodu Sonje Weiss (vzeto iz obsežnega knjižnega dela v treh delih [1]):

Težkih Arhitovih del s cilindri nikar ne posnemaj;

stožnic Menajhmovih treh nikdar izsekal ne boš

niti ne boš spoznal, če božanskega črte Evdoksa

res zarišejo lik, tak iz zavitih kampil.

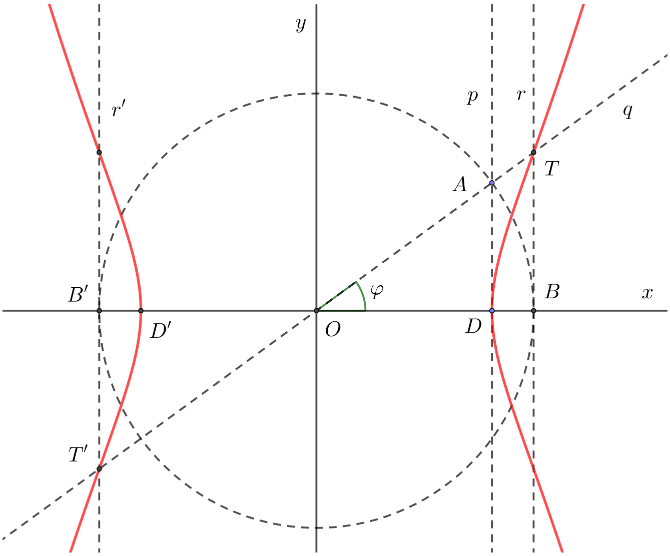
Matematik in neoplatonist Evtokij iz Aškalona v Palestini je bil poznoantični učenjak, rojen okoli leta 480, umrl pa je okoli leta 520. O njem se ve bore malo. Nekaj časa je deloval v Atenah, nazadnje pa v Aleksandriji. Več o tem na primer v [2].

Napisal je tudi komentarje k Apolonijevi razpravi »Stožnice«. Na stožnice se je v srednjem veku kar nekoliko pozabilo, zanimanje zanje je spet oživelo šele v času Keplerja in Newtona, ko je bil potreben opis gibanja planetov v heliocentričnem svetovnem sistemu.

Konstrukcija točk Evdoksove kampile

Oglejmo si naslednjo konstrukcijo točk krivulje. V točki $D(a,0)$, pri čemer je $a > 0$, postavimo pravokotnico p na abscisno os. Na p izberemo točko A, ki jo bomo kasneje premikali po tej premici. Skozi O in A načrtamo premico q in skozi A krožnico s središčem v koordinatnem izhodišču O. Krožnica preseka abscisno os v točkah B in B', ki sta simetrični glede na točko O. V B in B' konstruiramo pravokotnici r in r' na os x, ki presekata q v točkah T in T', ki sta tudi simetrični glede na točko O. Ko teče točka A po premici p, opišeta T in T' dvodelno krivuljo, za katero se izkaže, da je Evdoksova kampila. Točka T opiše njeno desno vejo, T' pa levo. Krivulja je očitno simetrična glede na obe koordinatni osi (slika 1).

V programih za dinamično geometrijo je Evdoksova kampila sled točke T, ko v opisani evklidski konstrukciji premikamo točko A po premici p.



Slika 1. Konstrukcija točk Evdoksove kampile.

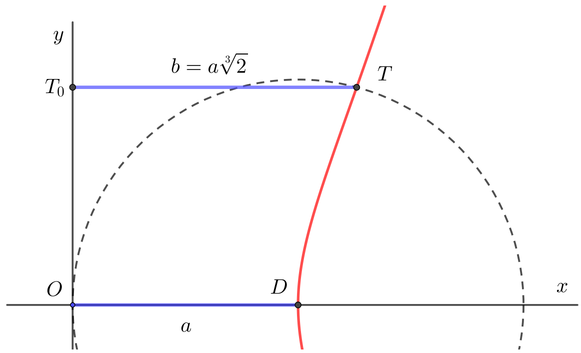
Enačbo desne veje dobljene krivulje je najlaže najprej izraziti v polarnih koordinatah, nato pa še v implicitni obliki v pravokotnih kartezičnih koordinatah. Za polarni kot φ vzamemo naklonski kot premice q, za polarni radij ϱ pa razdaljo $|OT|$ (slika 1). Najprej očitno veljata zvezi $|OA| = |OD|/\cos\varphi = a/\cos\varphi$ in $\varrho = |OT| = |OB|/\cos\varphi = |OA|/\cos\varphi$, iz katerih dobimo $\varrho = a/\cos^2\varphi$. Pri pogoju $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$ je torej polarna enačba desne veje krivulje

$$\varrho(\varphi) = \frac{a}{\cos^2 \varphi}. \tag{1}$$

Obe veji krivulje imata implicitno obliko

$$a^2(x^2 + y^2) = x^4, \tag{2}$$

ki jo dobimo iz polarne oblike z upoštevanjem zvez $\varrho^2 = x^2+y^2$ in $\cos\varphi = x/\varrho$. Krivulja v obliki (2) ima izolirano točko $O(0,0)$, ki je posledica deljenja z ϱ, ki je lahko tudi enak 0. Evdoksova kampila je algebrska krivulja četrte stopnje.



Slika 2. Podvojitev kocke z Evdoksovo kampilo.

Podvojitev kocke z Evdoksovo kampilo

Z Evdoksovo kampilo se da, kot smo že spoznali, podvojiti kocko. Načrtamo krožnico s središčem v točki D in polmerom a. Njena enačba je $x^2+y^2 = 2ax$. Sistem enačb

$$x^2 + y^2 = 2ax, \quad a^2(x^2 + y^2) = x^4$$

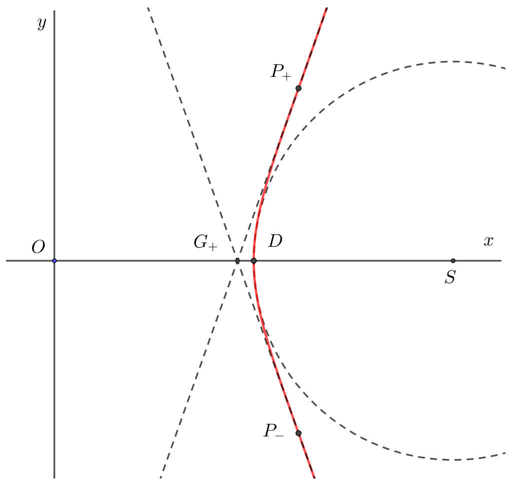
ima trivialno rešitev $(x, y) = (0, 0)$ in netrivialni rešitvi

$$(x, y) = (a\sqrt[3]{2}, \pm a\sqrt{2\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}}).$$

V prvem kvadrantu se krožnica in Evdoksova kampila sekata v točki T, ki ima absciso $|T_0T| = b = a\sqrt[3]{2}$ (slika 2). Kocka z robom b ima prostornino $b^3 = 2a^3$, torej dvakratnik prostornine kocke z robom a.

S tem je problem podvojitve kocke rešen, če priznamo Evdoksovo kampilo za konstrukcijski element. Rob podvojene kocke je določen z absciso presečišča krožnice, ki po Platonu je konstrukcijski element, in kampile kot sled točke v opisani konstrukciji. Kot je znano, pa z neoznačenim ravnilom in šestilom problem podvojitve kocke ni rešljiv. Zato pa tako kot v primeru konstrukcije pravilnega sedemkotnika ali obsega kroga poskušamo najti dovolj natančne približne metode, ki so izvedljive z neoznačenim ravnilom in šestilom.

Možnost približne konstrukcije daljice, ki ima dolžino zelo blizu $a\sqrt[3]{2}$, nudi majhna ukrivljenost Evdoksove kampile v okolici točke T, ki je presečišče kampile (2) in krožnice $x^2 + y^2 = 2ax$. Če izberemo na kampili točko T^*, ki je zelo blizu T, se tangenta na kampilo v T^* z njo zelo dobro ujema. Zato je presečišče P krožnice $x^2 + y^2 = 2ax$ s tangento tudi zelo blizu točke T in abscisi točk T in P se malo razlikujeta. Za približno konstrukcijo pa je treba T^* izbrati tako, da se jo da določiti z neoznačenim ravnilom in šestilom.



Slika 3. Desna veja Evdoksove kampile, prevoja in pritisnjena krožnica.

Evdoksovo kampilo parametriziramo kar s polarnim kotom:

$$x(\varphi) = \frac{a}{\cos\varphi}, \quad y(\varphi) = \frac{a\sin\varphi}{\cos^2\varphi}.$$

Za prva dva odvoda v točki, ki ustreza kotu φ, dobimo izraza

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+\sin^2\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3\sin^2\varphi - 1}{a\sin^3\varphi}.$$

Drugi odvod spremeni predznak pri kotih φ, za katere je $3\sin^2\varphi - 1 = 0$. V ustreznih točkah ima krivulja prevoje. To so točke $(\pm a\sqrt{6}/2, \pm a\sqrt{3}/2)$. Tangente v teh točkah imajo strmini $\pm 2\sqrt{2}$, kar dobimo iz zgoraj dobljenega izraza za odvod, in presekajo os x v točkah $G_\pm(\pm 3a\sqrt{6}/8{,}0)$. Izkaže se, da je polmer pritisnjenih krožnic, ki se v točkah D in D' kampili najbolj prilegajo, enak a. Središče take krožnice v točki D je $S(2a,0)$, v točki D' pa $S'(-2a,0)$. Približno ujemanje krivulje, tangent v prevojih $P_\pm$ in pritisnjene krožnice v temenu D kaže slika 3.

Sedaj pa pokažimo, da je za točko T^* zelo primerno izbrati prevoj P_+ kampile, v kateri se tangenta z njo dobro ujema. Če namesto Evdoksove kampile vzamemo kar njeno tangento

$$y = 2\sqrt{2}(x - a\sqrt{6}/2) + a\sqrt{3}/2$$

v prevoju P_+ in poiščemo absciso ξ presečišča s krožnico $x^2 + y^2 = 2ax$, dobimo

$$\frac{\xi}{a} = \frac{1}{18}\sqrt{24\sqrt{6} - 23} + \frac{\sqrt{6}}{3} + \frac{1}{9} \doteq 1{,}259956951,$$

kar je nekoliko več od točnejše vrednosti

$$\sqrt[3]{2} \doteq 1{,}259921049.$$

Zgoraj opisani približek lahko izkoristimo za precej natančno evklidsko konstrukcijo roba b podvojene kocke z robom a. Označimo z α polarni kot prevoja P_+ v prvem kvadrantu (slika 4). Veljajo relacije:

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \cos\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Polarni radij tega prevoja je

$$\varrho_P = \frac{a}{\cos^2\alpha} = \frac{3a}{2}.$$

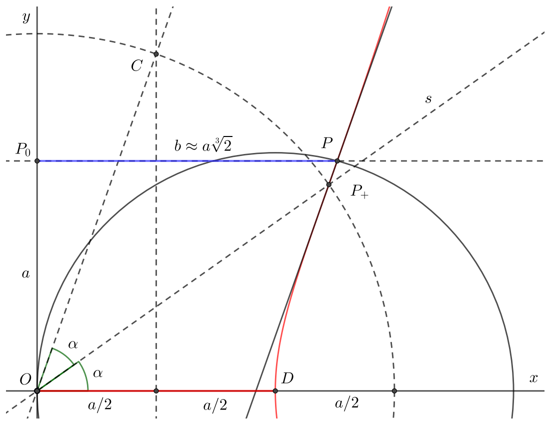
Za konstrukcijo je zanimiv naslednji rezultat:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} = 2\sqrt{2}.$$

To pomeni, da premica skozi O in P_+ razpolavlja naklonski kot premice $y = 2x\sqrt{2}$, ki je vzporedna tangenti kampile skozi P_+.

Ker krožnica s središčem v O in polmerom $3a/2$ preseka premico $x = a/2$ v točki $C(a/2, a\sqrt{2})$, pomeni, da skozi O in C poteka premica $y = 2x\sqrt{2}$, ki oklepa z osjo x kot 2α. Na premici s, simetrali kota DOC, ki ima enačbo

$y = x\sqrt{2}/2$ in ki oklepa z osjo x kot α, pa je na razdalji $\varrho_P = 3a/2$ prevoj kampile. Skozenj je treba načrtati le še vzporednico s premico skozi O in C, jo presekati s krožnico s središčem v $D(a, 0)$ in polmerom a, pa dobimo točko P, ki ima za absciso $b = |P_0P|$, kar je približek za $a\sqrt[3]{2}$. Podrobnosti so razvidne na sliki 4.



Slika 4. Približna podvojitev kocke.

Konstrukcija je približno tako natančna kot Plemljeva konstrukcija pravilnega sedemkotnika (glej [4]). Pri kocki z robom $a = 100$ m je napaka pri robu tako približno podvojene kocke okoli 3,6 mm, kar pa se precej pozna pri prostornini, za katero lahko napako hitro ocenimo z diferencialnim računom. Kocka z robom x ima prostornino $V = x^3$, zato je $dV = 3x^2\,dx$. Za $x = 126$ m in $dx = 3{,}6$ mm dobimo $dV = 171$ m^3. Relativna napaka pa je majhna: samo okoli $8{,}5 \cdot 10^{-5}$. Dvomimo, da bi kdo v praksi podvajal tako veliko kocko.

LITERATURA

[1] G. Kocijančič (ured.), *Fragmenti predsokratikov*, Študentska založba, Ljubljana, 2012.

[2] B. von Pape, *Von Eudoxus zu Uhlhorn*, Books on Demand, Norderstedt, 2019.

[3] M. Jerman, *Reševanje treh velikih starogrških problemov*, Obzornik. mat. fiz. **59** (2012), 182–192.

[4] J. Plemelj, *Pravilni sedmerokotnik*, Obzornik. mat. fiz. **3** (1953), 134–135.

[5] M. Razpet, *Arhitova krivulja*, Obzornik. mat. fiz. **62** (2015), 1–11.

EULER PRED FOURIEROM

ANDREJ LIKAR

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 01A50

V prispevku obravnavamo del vsebine pisma, ki ga je Leonhard Euler poslal Christianu Goldbachu 4. julija 1744. V njem je navedel svojo pot do za tisti čas nenavadne vrste, ki jo je odkril med pisanjem neke razprave o diferencialnem računu.

EULER AHEAD OF FOURIER

We discuss an interesting part of a letter which was written by Leonhard Euler to Christian Goldbach on 4th of July 1744. He reported on for that time a curious series discovered during his work on a treatise on differential calculus.

Leonhard Euler (1707–1783) si je dopisoval s številnimi takratnimi znanstveniki. Dopisovanje je skrbno vodil, zato je večina pisem do danes ohranjena in na voljo vsakomur. Kot je impozanten njegov opus, je tudi število pisem v obe smeri zelo veliko (okrog 3200), dopisovalcev pa je bilo okoli 300. Skoraj 200 pisem si je izmenjal s Christianom Goldbachom (1690–1764), profesorjem matematike v Moskvi. Eno teh, ki ga je napisal Euler 4. julija 1744, vsebuje za tisti čas presenetljivo ugotovitev, in sicer Fourierovo vrsto:

$$\frac{\pi - t}{2} = \sin t + \frac{\sin 2t}{2} + \frac{\sin 3t}{3} + \cdots, \;\; 0 < t < 2\pi.$$

Joseph Fourier (1768–1830), ki mu danes pripisujemo zasluge za odkritje trigonometričnih vrst in jih poimenujemo po njem, je bil rojen šele leta 1768, torej 24 let po tem pismu. Kako se je Fourier lotil vrst, je lepo opisano v kateremkoli visokošolskem učbeniku matematike, pri nas glej na primer [1]. Kako pa se je tega lotil Euler? Zelo preprosto sicer, vsak študent drugega semestra naravoslovja ali tehnike bi sledil razlagi, a pri tem odkimaval z glavo.

Začel je z naslednjo vrsto:

$$S(t) = e^{it} + e^{2it} + e^{3it} + e^{4it} + e^{5it} + e^{6it} + \cdots$$

Pri tem je t realno število. Zapisano bolj strnjeno:

$$S(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{ikt}\,.$$

Tu se odkimavanje pojavi prvič. Vsekakor čudna vrsta, saj členi z naraščajočim k nikakor ne padajo, njihova absolutna vrednost je ves čas enaka 1. To se še bolj jasno vidi, če uporabimo znamenito Eulerjevo enačbo

$$e^{it} = \cos t + i \sin t\,,$$

torej

$$S(t) = \cos t + \cos 2t + \cos 3t + \cdots + i(\sin t + \sin 2t + \sin 3t + \cdots)\,.$$

Ne realni ne imaginarni del vrste nimata smisla, vrsti sta divergentni, še tako pozni členi opletajo na intervalu med -1 in 1. Divergentne vrste so bile jabolko spora tudi v Eulerjevem času. Goldbach je njihovo uporabo zagovarjal že več kot dvajset let pred tem, kar se vidi iz njegovega dopisovanja z Bernoullijema. Tudi Euler je bil prepričan, da lahko divergentnim vrstam pripišemo neko vsoto. S to metodo je prišel do osupljivih rezultatov, posebej v teoriji števil. Vendar, le kako?

Pa si oglejmo primer. Imamo vrsto:

$$T = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + \cdots$$

Gotovo je vrsta divergentna, saj njeni členi po absolutni vrednosti naraščajo. Na prvi pogled bi mislili, da je povsem nesmiselna. A razmišljamo lahko po drugi poti. Oglejmo si identiteto:

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots = \frac{1}{1-x}\,.$$

Velja pri $|x| < 1$ in je geometrijska vrsta s kvocientom x. Sedaj jo odvajajmo po x na obeh straneh:

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots = \frac{1}{(1-x)^2}\,.$$

Če zamenjamo x z $-x$, dobimo

$$1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \cdots = \frac{1}{(1+x)^2}.$$

Če sedaj hrabro postavimo $x = 1$, imamo

$$1 - 2 + 3 - 4 + \cdots = \frac{1}{4}\,.$$

Torej smo nesmiselni vrsti pripisali vsoto. Matematiki tej vsoti rečejo Abelova ali Abel-Poissonova vsota divergentne vrste.

Francoski matematik in matematični fizik Simeon Denis Poisson (1781–1840) je postavil tudi tole definicijo:

Definicija 1. Če za dano vrsto

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \tag{1}$$

potenčna vrsta

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

konvergira za $-1 < x < 1$ ter obstaja limita S funkcije $f(x)$, ko se realno število x z leve bliža 1, imenujemo to limito *Abel-Poissonova vsota* ali *Abelova vsota* vrste (1).

Slavni norveški matematik Niels Henrik Abel (1802–1829) je dokazal naslednji izrek [2, 3]:

Izrek 2. *Če pri pogojih zgornje definicije vrsta* (1) *konvergira, je njena vsota enaka Abelovi vsoti.*

Izrek velja tudi za kompleksne a_n.

Tudi od drugih metod sumacije divergentnih vrst zahtevamo, da v primeru konvergentne vrste dajo običajno vsoto. Seveda pa je Abel vedel, da obstajajo tudi take možnosti sumiranja divergentnih vrst, ki pripeljejo pri isti vrsti do različnih vsot. Zato je zapisal: »Divergentne vrste so hudičeva iznajdba …«

Čeprav je enačba

$$1 - 2 + 3 - 4 + \cdots = \frac{1}{4}$$

milo rečeno nenavadna, se moramo zavedati, kaj smo pravzaprav naredili. Ko smo hrabro postavili $x = 1$, smo v resnici le limitirali ϵ pri $x = 1 - \epsilon$

proti nič, pri čemer ϵ ni nikoli res natanko nič. S še tako majhnim ϵ pa polagoma odrežemo vpliv zelo oddaljenih členov na vsoto. Ker vrsto zapisujemo le s prvimi nekaj členi, ta odrez nekako spregledamo. V teoretični fiziki zasledimo prav pretresljivo enačbo

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots = -\frac{1}{12}\,,$$

kjer smo na levi strani spet napisali le limite nekaj prvih členov. Gre pa za tole limito:

$$\lim_{\epsilon \to 0} \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-\epsilon n} \cos \epsilon n = -\frac{1}{12}\,,$$

kar pojasni negativno vsoto.

V fiziki moramo pogosto nežno odrezati vpliv divergentnih členov na vsoto kake vrste. To se rado dogaja pri perturbativnih računih kake fizikalne količine v kvantni mehaniki. Pravimo, da vrsto regulariziramo. Najpogosteje dobro deluje, če vsak člen pomnožimo z neko primerno izbrano regulacijsko funkcijo $f(k, \epsilon)$. Za prikazan primer, ko smo vrsti pripisali Abelovo vsoto, bi namreč pri

$$S_1(\epsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (k+1) f(k, \epsilon)$$

izbrali funkcijo $f(k, \epsilon) = e^{-\epsilon k} = x^k$. V limiti $\epsilon \to 0$ gre $x \to 1$ z leve, kot to terja Abelova vsota. Brez kake posebne utemeljitve pogosto izberejo tole funkcijo:

$$f(k, \epsilon) = e^{-\epsilon k^2}\,.$$

Tudi pri tej funkciji limitiramo ϵ proti nič. Pri zelo majhnem ϵ tako vplivamo le na zelo oddaljen vrstin rep, drugih členov ne spremenimo kaj dosti. Z računalnikom se prepričamo, da dobimo tudi s to funkcijo $\lim_{\epsilon \to 0} S_1(\epsilon) = \frac{1}{4}$.

Če smo na dva načina našli vsoto zgornje vrste, jo je Euler gotovo našel tudi za $S(t)$, saj tu členi po absolutni vrednosti ne naraščajo. Brez zadržkov se je lotil računanja. Vrsto $S(t)$ je zapisal, kot se spodobi za geometrijsko vrsto:

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{e^{it}}{1 - e^{it}} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sin t}{2(1 - \cos t)} \\ &= \cos t + \cos 2t + \cos 3t + \cdots + i(\sin t + \sin 2t + \sin 3t + \cdots)\,. \end{aligned}$$

Torej mora veljati:

$$\cos t + \cos 2t + \cos 3t + \cdots = -\frac{1}{2}\,.$$

Euler je torej na zelo preprost način našel vsoto tej divergentni vrsti. Seveda je našel tisto, kar so pozneje imenovali Abel-Poissonovo vsoto. Geometrijska vrsta

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{ikt} x^k$$

namreč konvergira za $|x| < 1$. Njena vsota je

$$S(t,x) = \frac{e^{it}x}{1 - e^{it}x}\,.$$

Ko se x od spodaj bliža 1, vsota konvergira k

$$S(t) = \frac{e^{it}}{1 - e^{it}}\,.$$

Z računalnikom in z regulacijsko funkcijo $f(k,\epsilon) = e^{-\epsilon k^2}$ pridemo do enake vsote.

Sedaj levi in desni strani enačbe $\cos t + \cos 2t + \cos 3t + \cdots = -\frac{1}{2}$ poiščemo nedoločeni integral in dobimo:

$$\sin t + \frac{\sin 2t}{2} + \frac{\sin 3t}{3} + \cdots = -\frac{t}{2} + C\,.$$

Konstanto C določimo tako, da postavimo

$$t = \frac{\pi}{2}\,,$$

torej

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = -\frac{\pi}{4} + C = \frac{\pi}{4}\,.$$

Vrsto na levi pa je Euler poznal, saj je bila takrat že znana. Poznal jo je že Indijec Madhava Sangamagrama (c. 1350–c. 1425), v Evropi pa Škot James Gregory (1638–1675) leta 1671, in je:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}\,.$$

To danes utemeljimo takole: Za $|x| < 1$ velja

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots = \frac{1}{1+x^2}\,.$$

Integrirajmo:

$$x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \cdots = \arctan x + D\,. \tag{2}$$

Če postavimo $x = 0$, vidimo, da je $D = 0$. Vemo, da vrsta

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots \tag{3}$$

konvergira. Zato je Abelova vsota vrste (3), ki je limita desne strani v enačbi (2), ko gre x z leve proti 1, enaka $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$. Po Abelovem izreku je Abelova vsota enaka vsoti vrste (3).

Tako je C določen in torej na intervalu $0 < t < 2\pi$ res velja:

$$\frac{\pi - t}{2} = \sin t + \frac{\sin 2t}{2} + \frac{\sin 3t}{3} + \cdots$$

Pri $t = 0$ je na desni strani zgornje enačbe 0, na levi strani pa $\frac{\pi}{2}$, prav tako enakost ne velja pri $t = 2\pi$. To ni presenetljivo. Vrsta na desni strani zgornje enačbe je periodična s periodo 2π. Če levo stran periodično nadaljujemo s periodo 2π, ima pri $t = 0$ desno limito enako $\frac{\pi}{2}$, levo limito pa enako levi limiti pri 2π, torej $-\frac{\pi}{2}$. Fourierova vrsta pri $t = 0$ konvergira k aritmetični sredini leve in desne limite naše funkcije, torej k 0. Enako velja pri $t = 2\pi$.

LITERATURA

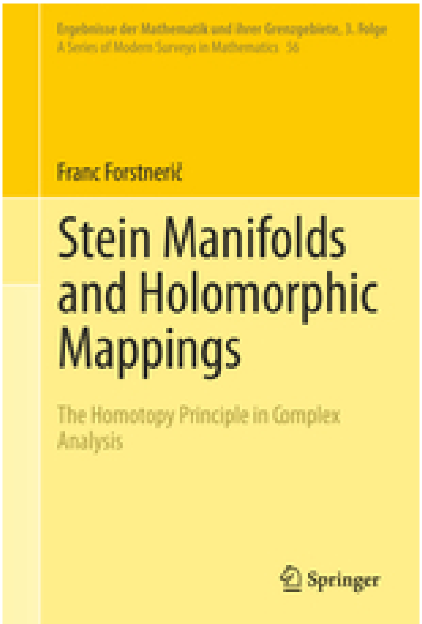
[1] R. Jamnik, *Trigonometrijske vrste*, v I. Vidav, *Višja matematika II*, DZS, Ljubljana, 1979, 189.

[2] G. M. Fihtengol'c, *Kurs differencial'nogo i integral'nogo isčislenia*, II del, Nauka, Moskva, 1969, 397–398.

[3] *Abel's theorem*, Wikipedia, dostopno na `https://en.wikipedia.org/wiki/Abel%27s_theorem`, ogled 11. 10. 2021.

NOVE KNJIGE

F. Forstnerič, Stein manifolds and holomorphic mappings: the homotopy principle in complex analysis, 2nd ed., Springer, Cham, 2017, 562 strani.



Pred nami je druga izdaja knjige Stein Manifolds and Holomorphic Mappings, avtorja akad. prof. dr. Franca Forstneriča. Delo je posvečeno homotopskemu principu v kompleksni analizi, ki se po pionirju moderne kompleksne analize Kiyoshiju Oka imenuje princip Oka. V grobem povedano princip Oka trdi, da imajo kohomološko formulirani analitični problemi na Steinovih mnogoterostih zgolj topološke ovire. Moderni princip Oka nadomesti kohomološko formulacijo problemov s homotopsko formulacijo, v povezavi z ustreznimi fleksibilnostnimi pogoji na kodomene holomorfnih preslikav. Namen dela je bil predstaviti razvoj principa Oka od klasičnega principa Oka-Grauert iz let 1939–1958, preko homotopskega principa in eliptičnih mnogoterosti, pojmov, ki ju je uvedel Mikhail Gromov leta 1989, teorije Andersén-Lempert (1992) o holomorfnih avtomofizmih kompleksnih evklidskih prostorov in njim sorodnih kompleksnih mnogoterosti, do novejših rezultatov avtorja in njegovih številnih sodelavcev od l. 2000 dalje.

Glavna pojma knjige sta Steinova mnogoterost in mnogoterost Oka, ki sta v določenem smislu dualna. Steinove mnogoterosti so zaprte kompleksne podmnogoterosti kompleksnih evklidskih prostorov. Posledično imajo take mnogoterosti veliko holomorfnih funkcij in s tem tudi obilico holomorfnih preslikav v kompleksne evklidske prostore; torej so naravne domene holomorfnih preslikav. Po drugi strani pa mnogoterosti Oka vsebujejo obilico holomorfnih slik kompleksnih evklidskih prostorov in so zato naravne kodomene holomorfnih preslikav. Zato je naravno pričakovati obstoj velike družine holomorfnih preslikav Steinovih mnogoterosti v mnogoterosti Oka. Potrditev in preciziranje tega dejstva so med glavnimi rezultati, predstavljenimi v pričujoči knjigi.

Knjiga je razdeljena v tri večje sklope. V prvem sklopu z naslovom Stein Manifolds (str. 2–203) se nahajajo poglavja Preliminaries, Stein manifolds, Stein Neighborhoods and Approximation ter Automorphisms of Complex Euclidean Spaces, kjer so predstavljene nekatere temeljne teme analize na Steinovih mnogoterostih.

Osrednji del knjige predstavlja drugi sklop Oka Theory (str. 207–349). Poglavje Oka Manifolds se začne z zgodovinskim pregledom klasične teorije Oka-Grauert. Glavnina poglavja je posvečena moderni teoriji Oka, ki je nastala po letu 2000. Avtor uvodoma predstavi definicijo mnogoterosti Oka, ki jo je uvedel v enem od svojih člankov l. 2009: kompleksno mnogoterost Y imenujemo *mnogoterost Oka*, če lahko vsako holomorfno preslikavo $f : K \to Y$ z okolice neke kompaktne konveksne podmnožice K kompleksnega evklidskega prostora $\mathbb{C}^n$ (za poljuben n) aproksimiramo enakomerno na K s holomorfnimi preslikavami $\mathbb{C}^n \to Y$. Preostanek poglavja je posvečen dokazu glavnega izreka (izrek 5.4.4), ki pove, da holomorfne preslikave Steinovih mnogoterosti v Oka mnogoterosti zadoščajo vsem pomembnim rezultatom klasične funkcijske teorije v odsotnosti topoloških ovir. Poglavje se zaključi z vrsto med seboj netrivialno ekvivalentnih karakterizacij mnogoterosti Oka. V naslednjem poglavju Elliptic Complex Geometry and Oka Theory je predstavljen koncept eliptičnosti, ki ga je uvedel v teorijo M. Gromov v pomembnem delu leta 1989. Podrobno je predstavljen dokaz izreka Gromova o homotopskem principu za prereze eliptičnih holomorfnih submerzij nad Steinovimi prostori in nekatere posplošitve. Vsaka eliptična kompleksna mnogoterost je tudi mnogoterost Oka, obratno pa ne velja. V naslednjem poglavju Flexibility Properties of Complex Manifolds and Holomorphic Maps avtor razloži, kako se pojma mnogoterosti Oka in eliptičnosti vklapljata v druge znane holomorfne fleksibilnostne lastnosti kompleksnih mnogoterosti kot so C-povezanost, Liouvilleova lastnost, veljavnosti transverzalnostnih izrekov za holomorfne preslikave in druge. Poglavje vsebuje tudi pregled novejših rezultatov po 1. izdaji knjige l. 2011.

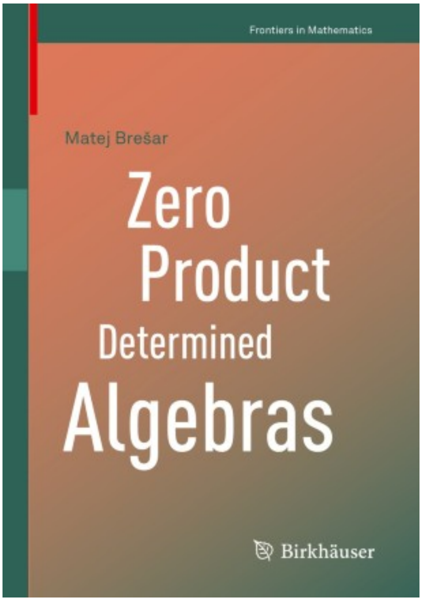
V tretjem, zadnjem delu knjige, z naslovom Applications (353–531), so v poglavju Applications of Oka Theory and Its Methods predstavljeni primeri uporabe teorije Oka za iskanje prerezov holomorfnih vlaknenj, uporaba v teoriji transverzalnosti za holomorfne preslikave, odstranjevanje samopresečišč, uporaba principa Oka v rešitvi holomorfnega Vassersteinovega problema in vrsta drugih. V poglavju Embeddings, Immersions and Submersions so predstavljene konstrukcije holomorfnih vložitev in imerzij Steinovih mnogoterosti v evklidske prostore ter sorodne kompleksne mnogoterosti, princip Oka za prave holomorfne preslikave, konstrukcija holomorfnih funkcij brez kritičnih točk na Steinovih mnogoterostih, ter konstrukcije pravih holomorfnih vložitev odprtih Riemannovih ploskev v evklidsko ravnino $\mathbb{C}^2$. V zadnjem poglavju, Topological Methods in Stein Geometry, je predstavljena Eliashberg-Gompfova konstrukcija integrabilnih Steinovih struktur na skoraj kompleksnih mnogoterostih, s posebnim poudarkom na 4-dimenzionalnih mnogoterostih in s tem povezanim ›mehkim‹ principom Oka, ki poleg običajne homotopske deformacije preslikav dodatno dopušča homotopno spremembo kompleksne strukture na izvorni Steinovi mnogoterosti.

Pričujoča knjiga je – tako kot njena predhodnica iz l. 2011 – postala pomembna referenca za vsakogar, ki se raziskovalno ukvarja s kompleksno analizo, posebej za tiste, ki se ukvarjajo s principom Oka v katerikoli njegovi različici. Gre za edino knjigo, kjer je (poleg klasične Steinove teorije) predstavljena tako teorija Oka kot tudi teorija kompleksnih mnogoterosti z veliko grupo holomorfnih avtomorfizmov (taki so npr. kompleksni evklidski prostori in velika večina kompleksnih Liejevih grup in homogenih prostorov). V delu je prikazano, kako sta ti dve področji kompleksne analize med seboj intimno povezani.

Na osnovi razvoja teorije Oka v zadnjih desetletjih in še posebej uvedbe pojma Oka mnogoterosti v literaturo je bilo leta 2020 v matematično klasifikacijo MSC-2020 uvedeno novo področje »32Q56 Oka principle and Oka manifolds«.

Jasna Prezelj

M. Brešar, Zero product determined algebras, Frontiers in Mathematics, Birkhäuser/Springer, Basel, 2021, 185 strani.



Profesor Matej Brešar, avtor znanstvene monografije, ki je nedavno izšla pri založbi Birkhäuser/Springer, je študij matematike na Univerzi v Ljubljani vpisal leta 1983. Po končanem dodiplomskem študiju je sledil bliskovit vzpon med vodilne slovenske matematike. Zelo mlad je leta 1990 doktoriral in samo pet let kasneje že prejel nagrado Republike Slovenije za znanstveno-raziskovalno delo (današnjo Zoisovo nagrado). Leta 2015 je bil kot izredni član sprejet v Slovensko akademijo znanosti in umetnosti, od leta 2021 pa je njen redni član. Je redni profesor na Fakulteti za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani in na Fakulteti za naravoslovje in matematiko Univerze v Mariboru. V letih 2014 do 2016 je bil predsednik Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije. Vključen je tudi v raziskovalno delo na Inštitutu za matematiko, fiziko in mehaniko v Ljubljani.

Rezultati njegovega znanstvenega dela so bili objavljeni v več kot 160 znanstvenih člankih. Sodi med najbolj citirane slovenske matematike. V zadnjem času se odlikuje kot plodovit pisec učbenikov in znanstvenih monografij. Je avtor učbenika Uvod v algebro, ki je izšel pri DMFA Založništvo. V zadnjih petnajstih letih so izšle štiri njegove knjige pri založbi Springer. Leta 2007 je s soavtorjema M. Chebotarjem in W. S. Martindaleom izdal znanstveno monografijo »Functional identities«. Sledila sta učbenika »Introduction to noncommutative algebra« in »Undergraduate Algebra. A unified approach«, ki sta bila natisnjena v letih 2014 in 2019. V septembru 2021 pa smo pričakali še njegovo zadnjo znanstveno monografijo »Zero product determined algebras«.

Spomnimo se, da je algebra množica s tremi operacijami. Tu sta najprej dve notranji operaciji, to sta seštevanje in množenje. Za seštevanje zahtevamo vse običajne lastnosti, pri množenju pa se po navadi omejimo na zahtevo, da je asociativno. Zelo pogosto pa se obravnavajo tudi neasociativne algebre, kot so npr. Liejeve in jordanske algebre. Tretja operacija je zunanja. To je množenje s skalarji in tu zahtevamo podobne lastnosti, kot jih ima množenje običajnih vektorjev s skalarji.

Izkaže se, da o nekaterih algebrah lahko povemo zelo veliko, če poznamo zgolj tiste urejene pare elementov, katerih produkt je enak nič. Kadar nam ta informacija zadostuje za dobro razumevanje strukture algebre, govorimo o algebri, določeni z ničelnim produktom. Ta »definicija« je bila namenoma predstavljena nenatančno, saj želimo v tem kratkem zapisu zgolj intuitivno predstaviti glavne matematične ideje, o katerih teče beseda v monografiji. Vsi, ki bi želeli izvedeti več, ste toplo vabljeni k prebiranju te monografije.

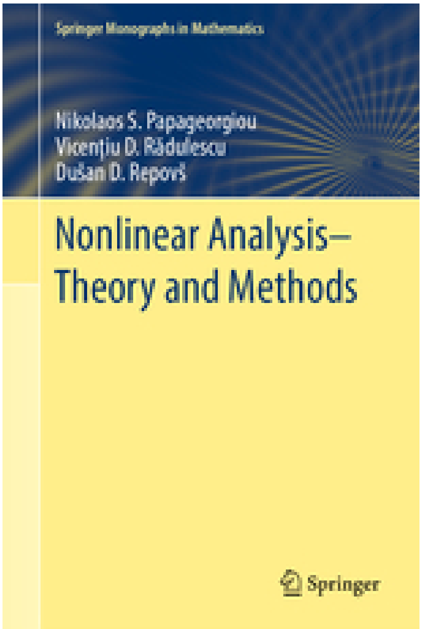
Koncept algebre, določene z ničelnim produktom, je naravno zrasel iz študija dveh na prvi pogled povsem nepovezanih problemov. Prvi je problem karakterizacije linearnih ohranjevalcev komutativnosti na centralnih enostavnih algebrah, drugi pa je študij lokalnih odvajanj na operatorskih algebrah. Stična točka pri obravnavi teh dveh problemov je bil študij bilinearnih preslikav, ki imajo ničelno vrednost na vseh parih elementov z ničelnim produktom. V obeh primerih je bil to odločilni korak k rešitvi zastavljenega problema. To je potem naravno vodilo do koncepta, ki je tema pričujoče monografije. Lahko bi rekli, da je ta koncept v začetku služil zgolj kot glavno orodje pri rešitvi dveh konkretnih matematičnih problemov. A se je kmalu izkazalo, da se zadaj skriva mnogo več – razvoj teorije je ves čas stregel s številnimi uporabami v algebri in v analizi.

Že sam začetek teorije ima dualni značaj, algebrski na eni strani in analitični na drugi. Avtor monografije je bil vodilni pri razvoju algebrske smeri, pri analitičnem delu zgodbe pa je glavno vlogo odigral španski matematik Armando Villena iz Univerze v Granadi. V monografiji se do sedaj pretežno ločeni zgodbi združita in poenotita, kar vodi do mnogoterih poenostavitev že objavljenih rezultatov in dokazov.

Prvi del monografije je posvečen algebraični veji teorije, drugi analitični, tretji pa je namenjen uporabi teorije na različnih področjih algebre in funkcionalne analize. Prav uporabnost teorije je bila ves čas glavna motivacija za njen razvoj.

Peter Šemrl

N. S. Papageorgiou, V. D. Rădulescu in D. D. Repovš, Nonlinear analysis – theory and methods, Springer Monographs in Mathematics, Springer, Cham, 2019, 577 strani.



V minulih petdesetih letih se je nelinearna analiza razvila v zelo široko interdisciplinarno raziskovalno področje in nobena knjiga ne more v celoti predstaviti niti najnovejšega razvoja na vseh njenih podpodročjih. Avtorji knjige, ki je izšla pri eni izmed vodilnih znanstvenih založb na svetu, so se odločili poudariti tiste aspekte nelinearne analize, ki se uporabljajo pri študiju nelinearnih robnih problemov. Glede na to so jo razdelili na naslednjih šest poglavij: 1. Prostori Soboljeva, 2. Kompaktni operatorji in operatorji monotonega tipa, 3. Teorije stopenj, 4. Delna urejenost, teorija negibnih točk, variacijski principi, 5. Teorija kritičnih točk in 6. Morseova teorija in kritične grupe. Na koncu vsakega poglavja so dodali opombe in reference na ustrezno literaturo. Monografija je prvi zvezek dvodelne publikacije in je v celoti posvečena razvoju omenjenih tem v abstraktnem okviru. Naslednji zvezek, ki je v tisku pri isti založbi, pa je posvečen najpomembnejšim aplikacijam in modelom, ki jih narekuje realni svet.

Prvih pet poglavij uporablja analitične metode, ki jih tisti, ki so seznanjeni s funkcionalno analizo, že poznajo. S šibkimi odvodi funkcij v Lebesgueovih prostorih na evklidskem prostoru so vpeljani prostori Soboljeva. Tak uvod je precej uveljavljen, prvi rezultati so dokazani z regularizacijo z gladkimi konvolucijskimi jedri. Topološki vektorski prostori niso omenjeni, teorija distribucij pa le mimogrede. To je razumljivo glede na namen, da se gre v delu preko sicer široke palete metod za linearne parcialne diferencialne enačbe. Standardni rezultati o vložitvah prostorov Soboljeva pa so podani in tudi njihovi dualni prostori so predstavljeni že na začetku. Za tem sledi poglavje o kompaktnih operatorjih na Banachovih in Hilbertovih prostorih. Za neskončno-dimenzionalne separabilne Hilbertove prostore je predstavljen in dokazan Spektralni izrek. Dodani so tudi monotoni operatorji, ki se izkažejo za zelo koristne za predstavitev teorije.

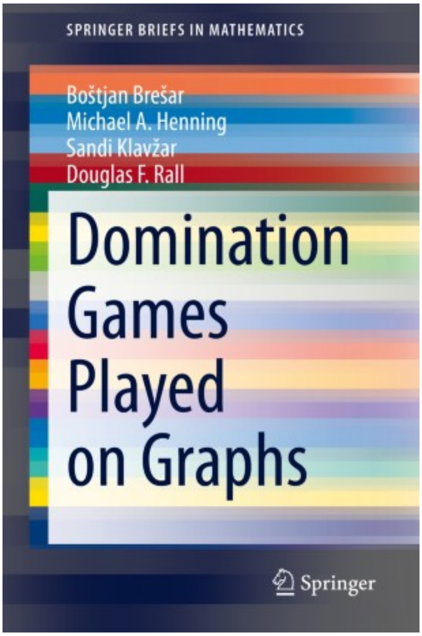
Naslednja poglavja izkazujejo pomen homotopije (in nato tudi homologije) parov prostorov, ki pri obravnavi nivojskih množic operatorjev dajeta pomembne informacije. Poleg kompaktnih operatorjev so na široko obdelane večlične funkcije (ki preslikujejo točke Banachovega prostora v podmnožice istega prostora). Leray-Schauderjevi teoriji stopenj je dodana diskusija Brouwerjeve teorije stopenj za retrakte in razširjena na primer večličnih funkcij (kjer je s stožci vpeljana struktura delne urejenosti). Vseskozi se predstavitev začne na metričnih prostorih in nadaljuje na splošnih topoloških prostorih. Teorija kritičnih točk je uporabljena za iskanje minimumov energijskih funkcionalov, ob tem pa so predstavljeni tudi variacijski koncepti. Zadnji poglavji, o Morseovi teoriji in homoloških grupah kritičnih množic, od bralca zahtevata nekaj znanja algebrske topologije.

Gre za zelo dobro napisan uvod v obravnavano področje. Vsi omenjeni izreki so pomembni in predstavljeni na kompetenten in strogo znanstven način. Uvod je jedrnato zastavljen, vendar ne predpostavlja poglobljenega poznavanja algebrske topologije in se podaja v to področje z vidika matematične analize. Vsa orodja za študij nelinearnih parcialnih diferencialnih enačb so vključena in razložena na dovolj jasen način za uporabo v raziskovalnem delu. To je eden najboljših uvodov za vse, ki želijo raziskovati na področjih teoretične in uporabne nelinearne analize. Pravzaprav je ciljna publika te knjige precej širša, saj gre za odličen prikaz področja in detajlno in zelo navdihujočo monografijo. V celoti gledano je knjiga odličen tekst za nadaljevalni tečaj iz nelinearne analize na podiplomskem nivoju kakor tudi odličen referenčni priročnik za raziskovalce in učitelje teorije in uporabe parcialnih diferencialnih enačb. To dokazuje tudi izjemna citiranost te knjige: po podatkih osrednje referenčne revije Mathematical Reviews je ta knjiga daleč največkrat citirana med vsemi matematičnimi knjigami, ki so izšle istega leta.

Dušan Repovš je redni profesor na Univerzi v Ljubljani, na Inštitutu za matematiko, fiziko in mehaniko pa vodi Skupino za topologijo, geometrijo in nelinearno analizo. Objavil je že več kot 450 raziskovalnih člankov in 4 monografije, ob tem je imel več kot 400 vabljenih predavanj na konferencah in tujih ustanovah širom po svetu. Je ustanovni član Inženirske akademije Slovenije, član Evropske akademije znanosti in umetnosti in drugih tujih akademij. Prejel je nagrado Republike Slovenije za znanstveno-raziskovalno delo, priznanje ambasador Republike Slovenije v znanosti, medaljo Bogoljubova in druga tuja priznanja. Je urednik v več tujih revijah in član številnih tujih matematičnih združenj.

Matija Cencelj

B. Brešar, M. A. Henning, S. Klavžar in D. F. Rall, Domination Games Played on Graphs, SpringerBriefs in Mathematics, Springer, Cham, 2021, 121 strani.



Aprila je pri založbi Springer izšla nova knjiga z naslovom Domination Games Played on Graphs (Dominacijske igre na grafih). Avtorji monografije so Boštjan Brešar (Univerza v Mariboru), Michael A. Henning (Univerza v Johannesburgu), Sandi Klavžar (Univerza v Ljubljani) in Douglas F. Rall (Univerza Furman), ki vsi sodijo med vodilne raziskovalce na področju dominacijskih iger. Knjiga predstavlja strnjen pregled različic dominacijske igre ter rezultatov in odprtih problemov povezanih z njimi. V glavnem je namenjena raziskovalcem, tako mladim kot izkušenim. Avtorji v knjigi največ pozornosti posvetijo osnovni različici dominacijske igre, ki je bila v zadnjem desetletju deležna izjemne pozornosti.

Knjiga je razdeljena na pet poglavij. V prvem, uvodnem poglavju najdemo potrebne oznake in definicije. Spomnimo se, da vozlišče dominira sebe in svoje sosede. Podmnožica vozlišč grafa je dominacijska množica, če dominira vsa vozlišča grafa. Velikost najmanjše dominacijske množice je grafovska invarianta imenovana dominantno število grafa G in označena z $\gamma(G)$. Določanje dominantnega števila splošnih grafov je zahteven problem, zato je zanimivo nanj pogledati tudi z vidika teorije iger. Dominacijska igra je tekmovalna optimizacijska igra, ki so jo leta 2010 vpeljali prav Brešar, Klavžar in Rall. Igro na danem grafu G igrata dva igralca (Dominator in Zavlačevalka), ki izmenično izbirata vozlišča in jih dodajata v izbrano množico. Vsako izbrano vozlišče mora dominirati vsaj eno vozlišče, ki ga prej izbrana vozlišča ne dominirajo. Igra se konča, ko izbrana množica tvori dominacijsko množico grafa G (in torej nadaljnje poteze niso mogoče). Igralca imata nasprotujoča si cilja: Dominator želi doseči čim manjšo končno velikost izbrane množice, Zavlačevalka pa teži k čim večji končni množici izbranih vozlišč. Igra nima zmagovalca ali poraženca. Oba igralca preprosto sledita strategiji, ki najbolj ustreza njunemu cilju. Če oba igrata optimalno, končna velikost množice izbranih vozlišč postane grafovska invarianta. Imenujemo jo igralno dominantno število grafa G in označimo z $\gamma_{\mathrm{g}}(G)$, če prvo potezo naredi Dominator, in z $\gamma_{\mathrm{g}}'(G)$, če je Zavlačevalka prva na potezi.

Izmed različic dominacijske igre v prvem poglavju natančneje spoznamo še celotno dominacijsko igro. Spomnimo se, da vozlišče celotno dominira svoje sosede, ne pa tudi samega sebe. Celotna dominacijska igra je definirana podobno kot dominacijska igra, le da mora izbrano vozlišče na vsaki potezi celotno dominirati vsaj eno vozlišče, ki ga prej izbrana vozlišča še ne dominirajo celotno. Če oba igralca igrata optimalno in igro na grafu G začne Dominator, dobljeno invarianto označimo z $\gamma_{\mathrm{tg}}(G)$.

Drugo poglavje je posvečeno dominacijski igri. Predstavljena sta nadaljevalni princip in strategija namišljene igre, ki se izkaže za zelo uporabno tehniko dokazovanja. Nadaljevalni princip je formalizacija intuitivno jasne lastnosti, da se igra na grafu konča hitreje, če so nekatera vozlišča že vnaprej dominirana, ki pa zahteva netrivialen dokaz. Naj $G|S$ označuje graf G, na katerem so vozlišča $S \subseteq V(G)$ že dominirana, in naj $\gamma_{\mathrm{g}}(G|S)$ označuje število potez v dominacijski igri na $G|S$, kjer prvo potezo naredi Dominator in vozlišč iz S ni več treba dominirati. Nadaljevalni princip pravi, da če je G graf in $B \subseteq A \subseteq V(G)$, potem velja $\gamma_{\mathrm{g}}(G|A) \leq \gamma_{\mathrm{g}}(G|B)$. Podobna lastnost velja tudi za igro, kjer začne Zavlačevalka. Predstavljene so znane zgornje meje za igralno dominantno število grafa. Leta 2013 so Kinnersley, West in Zamani postavili domnevo, da za vsak graf G brez izoliranih vozlišč in z n vozlišči velja $\gamma_{\mathrm{g}}(G) \leq \frac{3}{5}n$. Podobna domneva je še vedno odprta tudi za drevesa brez izoliranih vozlišč. Pri dokazovanju tovrstnih zgornjih mej je izredno uporabna metoda praznjenja Bujtáseve. Najboljša znana zgornja meja v splošnem je $\frac{5}{8}n$, če se omejimo na grafe z najmanjšo stopnjo 2, pa je dokazana zgornja meja $\frac{3}{5}n$. Posebej je študirana tudi podobna domneva, ki obravnava le grafe, ki premorejo Hamiltonovo pot (tj. pot v grafu, ki vsako vozlišče obišče natanko enkrat). Za tak graf na n vozliščih je domnevna zgornja meja enaka $\lceil \frac{1}{2}n \rceil$.

Določanje igralnega dominantnega števila ni enostavno niti na posameznih družinah grafov. Avtorji predstavijo natančne vrednosti za poti, cikle in njihove potence ter glavnike. Karakterizirani so grafi, ki imajo igralno dominantno število enako 2 ali 3. Posebna pozornost je namenjena vplivu odstranitve vozlišča ali povezave na igralno dominantno število grafa. Ker študirana invarianta za ti operaciji ni monotona, so tudi (povezavno) kritični grafi definirani nekoliko drugače kot običajno. Predstavljena je tudi časovna zahtevnost problema.

V tretjem poglavju avtorji predstavijo znane rezultate o celotni dominacijski igri. Analogno z zgornjo mejo za igralno dominantno število je postavljena domneva, da za vsak graf G na n vozliščih, katerega vsaka komponenta vsebuje vsaj tri vozlišča, velja $\gamma_{\rm tg}(G) \leq \frac{3}{4}n$. Natančna vrednost celotnega igralnega dominantnega števila je znana za poti, cikle in ciklične dvodelne grafe. Predstavljeni so kritični in popolni grafi, rezultati o vplivu odstranitve vozlišča ter računska zahtevnost problema.

Če si predstavljamo, da dominacijsko igro igra samo Dominator, je končna množica izbranih vozlišč ravno najmanjša dominacijska množica grafa. Bolj zanimivo je torej študirati igro, ki jo igra samo Zavlačevalka in porodi t. i. Grundyjevo dominantno število. Pri tej igri vozlišča izbira le Zavlačevalka, njen cilj je še vedno končati igro s čim več izbranimi vozlišči, različna pravila za veljavnost poteze pa porodijo več različic igre. Tej igri (in njenim različicam) je posvečeno četrto poglavje knjige. Posebej je izpostavljena povezava ene izmed različic z ničelno prisilo in najmanjšim rangom.

Zadnje poglavje predstavi še preostale različice dominacijske igre. Med drugim spoznamo disjunktno dominacijsko igro, povezano dominacijsko igro, Z-, L- in LL-dominacijske igre ter nekatere igre na hipergrafih. Pri disjunktni dominacijski igri eden izmed igralcev poskuša zgraditi dve disjunktni dominacijski množici, pri čemer mu drugi igralec poskuša to preprečiti. Povezana, Z-, L- in LL-dominacijska igra sledijo podobnim pravilom kot dominacijska igra, le da so pogoji za veljavnost poteze nekoliko drugačni. Na koncu poglavja najdemo tudi strnjen pregled preostalih različic dominacijske igre – nekatere so se v literaturi pojavile že pred letom 2010, vendar niso bile nikoli deležne tolikšne pozornosti kot osnovna verzija dominacijske igre, ki jo obravnava opisana knjiga.

Z jedrnatim pregledom definicij, rezultatov, metod dokazovanja in odprtih problemov knjiga predstavlja odlično referenco tako za bolj zagrete študente kot za trenutne in bodoče raziskovalce na tem področju.

Vesna Iršič

Dr. Nada Razpet – nova častna članica Društva matematikov, fizikov in astronomov

Dr. Nada Razpet je v zadnjih tridesetih letih res veliko prispevala k uspešnemu delovanju Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, saj je bila od leta 1991 pa do 2020, skoraj polnih 30 let, njegova podpredsednica.

Po končanem petletnem učiteljišču v Ljubljani se je vpisala na študij matematike in fizike na takratni Fakulteti za naravoslovje in tehnologijo Univerze v Ljubljani in diplomirala leta 1974. Leta 2008 je magistrirala iz fizikalnega izobraževanja, leta 2014 pa je na Fakulteti za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani zagovarjala doktorsko disertacijo z naslovom *Obravnava valovanja s hamiltonsko metodo.*

Po diplomi je bila zaposlena kot profesorica matematike in fizike na Gimnaziji Bežigrad, nato pa najprej na Zavodu RS za šolstvo kot višja svetovalka za opismenjevanje v računalništvu, potem pa na Pedagoški fakulteti Univerze v Ljubljani in kasneje tudi na Pedagoški fakulteti Univerze na Primorskem. Vseskozi je aktivno sodelovala na različnih seminarjih za učitelje v osnovnih in srednjih šolah s strokovnimi prispevki o zgodnjem uvajanju naravoslovja v šole, uporabi matematičnih in fizikalnih igrač pri pouku na nižjih stopnjah ter uporabi računalnika pri pouku geometrije.

Njena bibliografija obsega na Cobissu 544 enot in sega od fizikalnih znanstvenih člankov, napisanih v sodelovanju z mentorjem in drugimi raziskovalci, do del, kjer se ukvarja zlasti z vprašanji pouka fizike. Skoraj 100 njenih strokovnih in poljudnih člankov je objavljenih v *Preseku*, *Obzorniku za matematiko in fiziko* ter v drugih slovenskih revijah, namenjenih popularizaciji matematike in fizike v šolah. Od leta 2004 dalje je članica uredniškega odbora revije *Obzornik za matematiko in fiziko.*

Nada Razpet je bila skoraj štirideset let zelo aktivna pri Društvu matematikov, fizikov in astronomov Slovenije. Vsako leto je kot podpredsednica društva skrbela za priprave na redne letne občne zbore in urejala Bilten

DMFA Slovenije, ki ob tej priložnosti izide. Bedela je nad realizacijo sklepov upravnega odbora, opravljala vrsto drobnih tekočih nalog in zastopala DMFA Slovenije na različnih dogodkih. Sodelovala je pri dokumentiranju spominskih obeležij zaslužnih matematikov in fizikov, pri organizaciji proslav pomembnih obletnic in pri urejanju ustreznih zbornikov in publikacij. Na letošnjem 8. kongresu evropskih matematikov, ki je bil julija v Portorožu, je skupaj z Izidorjem Hafnerjem in Markom Razpetom pripravila predstavitev petih pomembnih slovenskih matematikov (Vege, Močnika, Plemlja, Laha in Vidava).

Leta 2002 je bila pri društvu ustanovljena zgodovinska sekcija, ki se je sprva ukvarjala predvsem s pripravo Vegovih proslav, pozneje pa je iz nje nastal in zaživel seminar za zgodovino matematičnih znanosti, na katerem Nada Razpet vseskozi aktivno sodeluje, od lani pa ga tudi vodi.

Dr. Milan Hladnik, dr. Izidor Hafner in dr. Andrej Likar

Akad. prof. dr. Josip Globevnik, novi častni član DMFA Slovenije

Akademik, redni profesor dr. Josip Globevnik v pokoju in zaslužni profesor Univerze v Ljubljani, je utemeljitelj kompleksne analize več spremenljivk v Sloveniji in mednarodna avtoriteta na svojem znanstvenem področju.

Rojen je bil leta 1945 v Ljubljani. Iz matematike je diplomiral leta 1968 na Univerzi v Ljubljani, magistriral na Univerzi v Zagrebu leta 1971 in doktoriral na Univerzi v Ljubljani leta 1972. Po diplomi se je leta 1969 zaposlil na Fakulteti za arhitekturo, gradbeništvo in geodezijo Univerze v Ljubljani. Leta 1973 je postal docent, leta 1978 izredni profesor in leta 1983 redni profesor za matematiko. Leta 1988 se je zaposlil na Oddelku za matematiko in mehaniko Fakultete za naravoslovje in tehnologijo, izpod okrilja katere je leta 1995 nastala Fakulteta za matematiko in fiziko. Pri njenem formiranju je sam odigral pomembno vlogo kot tedanji prestojnik Oddelka za matematiko. Na fakulteti je ostal do upokojitve v letu 2012.

Predaval je številne predmete iz matematične analize in bil mentor vrsti diplomantov, magistrantov in doktorandov. Izjemna je bila njegova vloga pri mentorstvu in vsestranski pomoči mlajšim kolegom na začetku karierne poti.

Globevnik je prvi v Sloveniji začel raziskovanja na področju kompleksne analize in je leta 1975 osnoval seminar za kompleksno analizo, ki ga je samostojno vodil do leta 2001. Vseskozi je bil intenzivno prisoten v mednarodnem prostoru in je gostoval na številnih univerzah in inštitutih v Evropi, ZDA in Izraelu, pogosto za daljša obdobja. Njegov znanstveni opus obsega 117 originalnih del z različnih področij matematične analize. Številna med njegovimi deli so objavljena v elitnih matematičnih revijah. Tako ima dve objavi v najuglednejši reviji Annals of Mathematics (druga objava l. 2015 pri starosti 70 let) ter objave v Inventiones Math., American J. Math., Math. Ann., Anal. PDE, Trans. AMS in vrsti drugih. Znanstveno je sodeloval z uglednimi svetovnimi matematiki, med drugimi z legendarnim Walterjem Rudinom. Ves čas svoje kariere je bil nosilec raziskovalnih nalog, projektov in programov pri Raziskovalni skupnosti Slovenije, Ministrstvu za znanost in tehnologijo in nato pri ARRS. Za svoje raziskovalno delo je leta 1976 prejel Kidričevo nagrado. Leta 1985 je bil izvoljen za izrednega člana Slovenske akademije znanosti in umetnosti, leta 1989 pa za njenega rednega člana. Leta 2019 je prejel Zoisovo nagrado za življenjsko delo.

Josip Globevnik je opravljal številne pomembne funkcije. Bil je predstojnik Oddelka za matematiko na IMFM, član univerzitetnega sveta Univerze v Ljubljani, predsednik programskega sveta za matematiko in mehaniko pri Raziskovalni skupnosti Slovenije, predstojnik Oddelka za matematiko in mehaniko FNT UL, član habilitacijske komisije Univerze v Ljubljani, član znanstvenega sveta NAMA in koordinator za polje matematika pri Ministrstvu za znanost in tehnologijo, član komisije za nagrade in priznanja Republike Slovenije, načelnik Oddelka za matematične, fizikalne, kemijske in tehniške vede tretjega razreda SAZU in tajnik tretjega razreda SAZU.

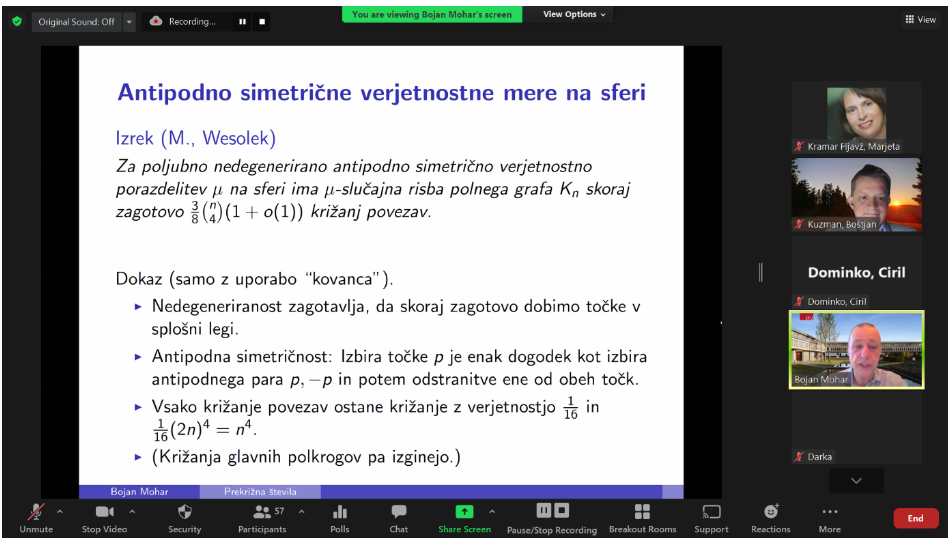
Poleg imen, kot so Jurij Vega, Josip Plemelj in Ivan Vidav, je akad. Josip Globevnik v mednarodnih matematičnih krogih eden najvidnejših in najbolj cenjenih ter spoštovanih slovenskih matematikov.

Akad. prof. dr. Franc Forstnerič

74. Občni zbor DMFA Slovenije uspešno izveden na daljavo

Letošnji, že 74. Občni zbor DMFA Slovenije, je potekal 19. novembra 2021 na daljavo preko spleta. Znanstveno popoldne pred samim občnim zborom sta ob 17. uri s tradicionalnima vabljenima znanstvenima predavanjema za širše članstvo začela ugledna gosta. Prvi predavatelj, fizik **prof. dr. Samo Kralj**, UM FNM, prejemnik Zoisovega priznanja 2020 in državne nagrade za šolstvo 2021, je v predavanju *Tekoči kristali: poligon osnovne fizike* predstavil pristop k matematični obravnavi zanimivih lastnosti tekočih kristalov s pomočjo fizike topoloških defektov. Drugi predavatelj, matematik **prof. dr. Bojan Mohar**, IMFM in Simon Fraser University, Kanada, je bil v zadnjem obdobju izvoljen med častne člane American Mathematical Society (2020), častne člane Society for Industrial and Applied Mathematics (2018) in v akademijo znanosti pri Royal Society of Canada (2020). V predavanju *Prekrižna števila in Hillova domneva* je predstavil klasični problem določanja prekrižnega števila polnega grafa in njegovo povezavo s sorodnimi problemi kombinatorike, geometrije in verjetnosti.

Ob začetku Občnega zbora ob 18.30 je navzoče najprej pozdravila predsednica **Nežka Mramor Kosta** in se zahvalila vsem članom, ki so prispevali k uspešnemu delu Društva v zadnjem letu. Med čakanjem na sklepčnost je **Barbara Japelj Pavešić**, Pedagoški inštitut, v krajšem predavanju predsta-



Slika 1. Vabljeno predavanje prof. dr. Bojana Moharja.

Slika 2. Vabljeno predavanje Barbare Japelj Pavešić.

vila nekaj zadnjih spoznanj o slovenskem matematičnem in fizikalnem izobraževanju v luči mednarodnih raziskav. Predavanje je izpostavilo številne kritične točke v šolskem sistemu in je pritegnilo veliko zanimanja poslušalcev.

Po ugotovitvi sklepčnosti (prisotnih 57 članov, od tega 14 članov Upravnega odbora) se je Občni zbor nadaljeval s potrditvijo dnevnega reda in delovnega predsedstva, ki sem ga vodil podpisani **Boštjan Kuzman**. Že v naslednji točki je **Ciril Dominko**, predsednik statutarne komisije, predstavil predlog novega Statuta DMFA Slovenije, ki je bil v nadaljevanju soglasno potrjen z glasovanjem preko ankete v sistemu Zoom. Glavna razloga za spremembe sta bila uskladitev z Zakonom o nevladnih organizacijah ter sklep UO o možnosti plačevanja znižanih skupinskih članarin. Ob tem so prisotni predlagali, da bi bilo primerno ponuditi popust pri članarini tudi za upokojene člane. Obenem so bile v statutu urejene še nekatere druge spremembe (natančnejša opredelitev pristojnosti organov društva, črtanje členov, ki omenjajo podružnice, natančnejša opredelitev javnega delovanja in obveščanja, ureditev možnosti izvajanja sej (sestankov upravnega odbora, občnega zbora in drugih) na daljavo, in uvrstitev intelektualne lastnine Društva med premoženje).

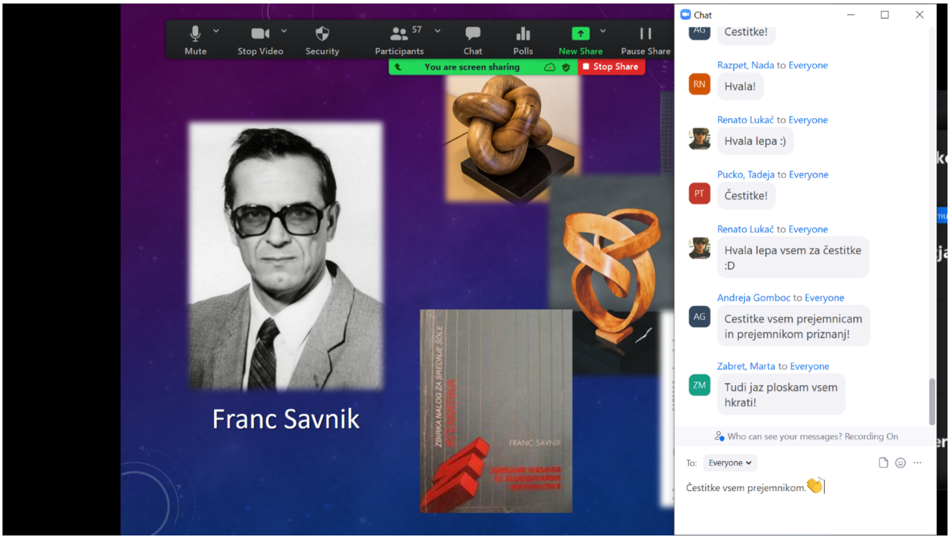
V nadaljevanju so prisotni izvolili dva nova častna člana DMFA Slovenije, **akad. prof. Josipa Globevnika**, in **dr. Nado Razpet**, podeljenih je bilo

Slika 3. Imenovanje častnih članov.

tudi pet društvenih priznanj, ki so jih prejeli **Metka Jemec**, **Katja Kmetec**, **dr. Renato Lukač**, **Miran Ravnjak** in **Franc Savnik**. Več o prejemnikih je zapisano v posebnih prispevkih.

Sledil je pregled društvenih poročil za minulo leto. Podpredsednica **Marjeta Kramar Fijavž** je ob predstavitvi poročil poudarila, da je bila kljub pandemiji večina dejavnosti uspešno izvedenih in na kratko izpostavila nekaj dejavnosti (8. evropski matematični kongres junija v Portorožu, uskladitev tekmovalnih pravilnikov s krovnim pravilnikom MIZŠ, prijava 11 selekcijskih in 6 interesnih tekmovanj iz znanja na razpis za sofinanciranje, vpeljava novih tekmovanj Razvoj novih analitskih metod v medicini (skupaj s FMF, MF, IJS) in Ekonomija (skupaj z EF), uspešna prijava na Javni razpis za digitalno preobrazbo nevladnih in prostovoljskih organizacij (MJU) v konzorciju z ZOTKS, pridobitev namenskih sredstev MIZŠ in priprave na organizacijo Evropske fizikalne olimpijade v letu 2022 ter priprave na organizacijo Evropske dekliške matematične olimpijade v letu 2023.

Na kratko smo preleteli tudi druga poročila, ki so v celoti dostopna v Biltenu na spletni strani DMFA Slovenije. Med njimi so poročilo predsednice in podpredsednice in poročila strokovnih odborov (za matematiko, za fiziko, za astronomijo, za ženske, študentske sekcije), 14 poročil komisij o državnih tekmovanjih, 12 poročil o sodelovanjih na mednarodnih tekmovanjih in nekaj poročil o drugih strokovnih aktivnostih (MARS, Presekov seminar, Seminar

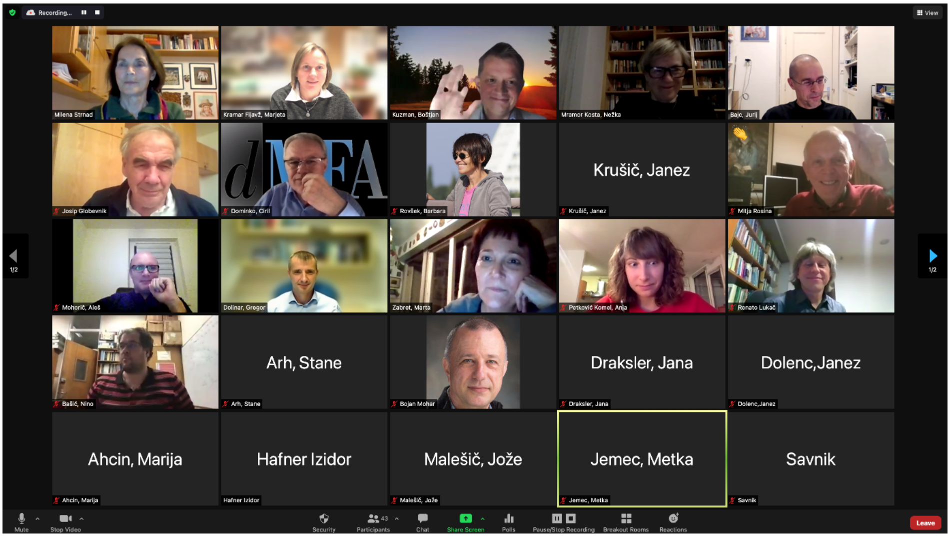


Slika 4. Virtualna voščila ob podelitvi priznanj.

za zgodovino matematičnih znanosti, natečaj Matematika za boljši svet, Založniška dejavnost). **Jurij Bajc** je poročal o statusu Plemljeve vile, ki je na razpolago za družtvene (izobraževalne) dejavnosti, čakamo pa na ureditev statusa s strani občine Bled, ki bi omogočal ponovno uporabo vile tudi za turistične namene.

Pregled poročil smo zaključili s poročilom o članstvu, ki ga je pripravil tajnik **Janez Krušič**. Društvo ima trenutno 882 aktivnih članov (820 rednih, 17 družinskih, 27 študentov, 18 častnih članov), od tega 752 individualnih in 130 kolektivnih (IJS 116, UL FGG 6 in UL FRI 8). Od zadnjega občnega zbora se je včlanilo 25 novih članov, 33 pa je članstvo prenehalo. Med njimi so tudi trije, ki so se za vedno poslovili, in smo jim namenili minuto molka: **Marjan Kodelja**, upokojeni profesor matematike in fizike na Gimnaziji Šentvid, **Martina Koman**, upokojena profesorica matematike in fizike, dolgoletna sodelavka in predsednica (1982–1983) ter častna članica DMFA Slovenije, ter **dr. Edvard Kramar**, upokojeni profesor matematike na UL FMF, dolgoletni sodelavec Komisije za tisk DMFA in več let odgovorni urednik revije Presek.

Prisotni so soglasno potrdili Računovodsko poročilo za leto 2020, ki ga je pripravila računovodkinja **Simona Puncer Klemenčič** in sta ga pred tem že potrdila Upravni in Nadzorni odbor ter je v celoti objavljeno v javno dostopni bazi AJPES. Po večjem primanjkljaju v letu 2019 je bil izid leta



Slika 5. Zaključni klepet udeležencev Občnega zbora.

2020 pozitiven kljub manjšemu prihodku od kotizacij iz tekmovanj. Trenutno stanje v letu 2021 je po podatkih računovodkinje prav tako ugodno. Pred zaključkom Občnega zbora sem v imenu Upravnega odbora povedal, da iščemo sodelavce/ustanove za (so)organizacijo naslednjega Občnega zbora ter kandidate za organe društva za obdobje 2022–2023, in da bi želeli datum naslednjega Občnega zbora z volitvami napovedati še pred poletjem 2022. Drugih pobud s strani prisotnih ni bilo, članice in člani pa jih lahko pošljete tudi naknadno na naslov `tajnik@dmfa.si`, ali posameznim članom Upravnega odbora.

Ob koncu se je predsednica Nežka Mramor Kosta zahvalila vsem sodelavcem in ustanovam, posebej DMFA – založništvu, FMF, ZOTKS, sponzorjem in donatorjem, članom Upravnega odbora in različnih komisij ter udeležencem zbora. Posebno zahvalo za sodelovanje pri pripravah in vodenju občnega zbora je namenila tudi meni, sam pa sem se ji zahvalil za uspešno in izjemno prizadevno vodenje DMFA Slovenije v zadnjem letu. Omenil sem še druge sodelavce, ki so sodelovali pri pripravi in organizaciji občnega zbora. To so bili predvsem Marjeta Kramar Fijavž, Matjaž Željko, Martin Klanjšček, Aleš Mohorič in Janez Krušič.

Boštjan Kuzman

Metka Jemec, Katja Kmetec, dr. Renato Lukač, Miran Ravnjak in Franc Savnik prejemniki priznanj DMFA za leto 2021

DMFA Slovenije že od leta 1968 podeljuje društvena priznanja z namenom promocije uspešnega strokovnega in pedagoškega dela posameznikov ali ustanov na področjih matematike, fizike in astronomije. Na 74. Občnem zboru DMFA Slovenije 19. novembra 2021 je komisija za priznanja podelila pet priznanj za uspešno pedagoško in strokovno delo. Prejeli so jih **Metka Jemec**, učiteljica matematike na OŠ Josipa Plemlja Bled, *za ustvarjalen pouk in uspešno delo z učenci na področjih matematike, logike in razvedrilne matematike*, **Katja Kmetec**, učiteljica matematike na OŠ Prule, *za ustvarjalno strokovno delo in navduševanje osnovnošolcev za matematiko s skupinskimi projekti*, **dr. Renato Lukač**, profesor fizike na Gimnaziji Murska Sobota, *za uspešno delo z dijaki, mladimi raziskovalci in ljubitelji na področjih fizike in astronomije*, **Miran Ravnjak**, profesor matematike na Gimnaziji Velenje, *za dolgoletni prispevek h kvalitetnemu poučevanju matematike*, in **Franc Savnik**, upokojeni profesor matematike in nekdanji ravnatelj Gimnazije Brežice, *za trajen prispevek k poučevanju matematike in računalništva v slovenskih šolah.*

Iskrene čestitke vsem prejemnikom! Komisija se zahvaljuje vsem predlagateljem za poslane predloge in tudi v prihodnje vabi vse člane in članice društva, da predlagajo kandidate in kandidatke, ki v svojem okolju izstopajo s kvalitetnim strokovnim ali pedagoškim delom.

V nadaljevanju objavljamo kratke utemeljitve, ki jih je pripravila komisija na osnovi prejetih predlogov.

Metka Jemec, učiteljica matematike na OŠ Josipa Plemlja, Bled, prejme priznanje DMFA Slovenije *za ustvarjalen pouk in uspešno delo z učenci na področjih matematike, logike in razvedrilne matematike.*

Metka Jemec je diplomirala na smeri Matematika-tehnika na Pedagoški fakulteti v Ljubljani, od leta 2001 pa poučuje matematiko na OŠ Josipa Plemlja, Bled. Pri poučevanju matematike je zelo inovativna. Učenke in učence z didaktično dobro zastavljenimi aktivnostmi spodbuja k raziskovanju in samostojnemu projektnemu delu, kar je večkrat odmevno predstavila s prispevki na nacionalnih konferencah o poučevanju matematike KUPM. Ob kvalitetnem delu pri rednem pouku pa je tudi izjemno uspešna mentorica tistim, ki se pripravljajo na tekmovanja. S sistematičnim delom na krožkih jih odlično motivira in opremi z znanjem, ki je potrebno za uspeh na tekmovanju. Na državnem nivoju so njeni učenci in učenke posebej uspešni na tekmovanjih iz matematike za Vegova priznanja, logike in razvedrilne matematike, na katerih so v zadnjih letih prejeli skupaj več kot 60 zlatih priznanj in več kot 10 nagrad za najvišja mesta. Njeni učenci se od osnovne šole poslovijo odlično opremljeni za nadaljevanje šolanja na srednji stopnji in se radi še kasneje vračajo k njej po nasvete. To zelo cenijo tudi njeni sokrajani, ki so ji na predlog večje skupine učencev in staršev leta 2020 za požrtvovalno in srčno vzgojno delo podelili tudi Zlato priznanje občine Bled.

Katja Kmetec, učiteljica matematike na OŠ Prule, Ljubljana, prejme priznanje DMFA Slovenije *za ustvarjalno strokovno delo in navduševanje osnovnošolcev za matematiko s skupinskimi projekti.*

Katja Kmetec je diplomirala na smeri Matematika-fizika na Pedagoški fakulteti v Ljubljani leta 1999. Najprej je poučevala matematiko na OŠ Brinje, Grosuplje, od leta 2018 pa poučuje na OŠ Prule v Ljubljani. Njeno pedagoško delo je navdihujoče in prepoznavno tudi v širšem slovenskem prostoru. Na konferencah in strokovnih seminarjih v organizaciji DMFA, ZRSŠ in PeF je pripravila vrsto odmevnih predstavitev (Raziskovanje vzorcev v igri Hanojski stolpi, S čarovnijo do motivacije pri dodatnem pouku matematike, Matematični kazino, Matematični triki in igre) in objavila več strokovnih prispevkov na temo posodobitve pouka matematike v osnovni šoli. Že vrsto let kvalitetno sodeluje s Pedagoško fakulteto pri izvajanju študentske prakse in v različnih tekmovalnih komisijah DMFA Slovenije. Morda najbolj dragoceno pa je njeno neposredno delo z učenci, ki jih za matematiko navdušuje z vključevalno zastavljenimi projekti. V zadnjih letih so bile tako izrazito opazne njene aktivnosti ob dnevu števila Pi oziroma Mednarodnem dnevu matematike, ob katerih je k sodelovanju pritegnila več šol in izkoristila talente učencev za matematično navdihnjeno ustvarjanje glasbe, likovnih in kuharskih umetnin, recitiranje, snemanje filmov in druge aktivnosti. Katja Kmetec je zgled delavnosti, široke razgledanosti, kreativnosti in skromnosti – lastnosti, ki jih redko najdemo pri eni sami osebi, a jih pri dobrem učitelju matematike vselej cenijo tako sodelavci kot tudi učenci in starši.

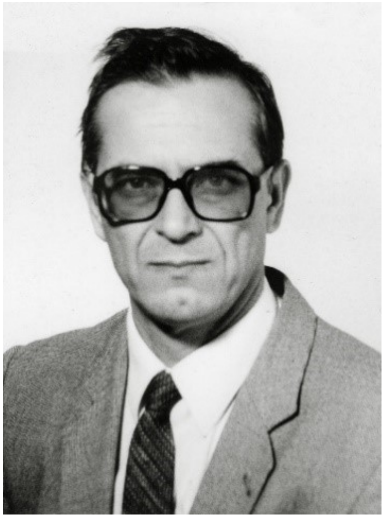
Dr. Renato Lukač, prof. fizike na Gimnaziji Murska Sobota, prejme priznanje DMFA Slovenije *za uspešno delo z dijaki, mladimi raziskovalci in ljubitelji na področjih fizike in astronomije.*

Dr. Renato Lukač je leta 1992 zaključil študij fizike na takratni Fakulteti za naravoslovje in tehnologijo Univerze v Ljubljani. Že leto prej se je zaposlil kot učitelj fizike in računalništva na Gimnaziji Murska Sobota, študij pa je nadaljeval in leta 1999 na Univerzi na Dunaju doktoriral na področju uporabe numeričnih metod pri raziskavah tekočih kristalov. Že tri desetletja dr. Lukač z veliko predanostjo do pedagoškega in raziskovalnega dela uspešno vzpodbuja številne dijake k poglobljenemu delu na področju naravoslovja in računalništva. Dijaki so pod njegovim mentorstvom pripravili več kot 20 raziskovalnih nalog, med katerimi so bile nekatere nagrajene tudi z zlatim priznanjem na državnem srečanju mladih raziskovalcev, osvojili pa so tudi vidne uspehe na tekmovanjih v znanju fizike in astronomije. Kot tajnik

Astronomskega društva Kmica Renato Lukač že vrsto let organizira poletne astronomske tabore in priložnostna javna astronomska opazovanja, občasno pa sodeluje tudi v lokalnih medijih in na znanstveni konferenci PAZU. Zaradi njegovega aktivnega sodelovanja je Gimnazija Murska Sobota ena od treh lokacij, kjer poteka državno tekmovanje v znanju astronomije. Dr. Lukač je svoje navdušenje za astronomijo uspešno prenesel na številne dijake in dijakinje; nekateri med njimi so zdaj že uveljavljeni raziskovalci, zaposleni na domačih in tujih ustanovah.

Miran Ravnjak, prof. matematike na Gimnaziji Velenje, prejme priznanje DMFA Slovenije *za dolgoletni prispevek h kvalitetnemu poučevanju matematike.*

Miran Ravnjak je leta 1982 diplomiral na smeri Pedagoška matematika na takratni Fakulteti za naravoslovje in tehnologijo v Ljubljani. Od leta 1983 poučuje na Šolskem centru Velenje, kjer je sprva učil na Srednji strojni šoli, zdaj pa že več kot 30 let kvalitetno poučuje na Gimnaziji Velenje, kar vsako leto znova pokažejo tudi rezultati mature. Na matematičnih krožkih uspešno pripravlja dijake na tekmovanja, občasno izvaja tečaje GeoGebre za dijake ter sodeluje v različnih strokovnih projektih. Več kot deset let je vodil aktiv matematikov na šoli. Ima odlično znanje matematike in nanj se lahko mlajši sodelavci vedno obrnejo po nasvet v zvezi z obravnavo posameznih vsebin. Njegovo pedagoško delo vključuje tudi mentorstva pripravnikom in študentom na praksi. Je skrben razrednik in v zbornici cenjen sodelavec, ki večkrat poskrbi za smeh tudi kot član učiteljske gledališke skupine TREMA. Med dijaki in dijakinjami je priljubljen, čeprav veliko zahteva, saj tudi veliko nauči. Je dosleden in prav nič raztresen – odlično računa na pamet. Odlikuje ga smisel za humor, kar so dijaki v času dela na daljavo še posebej izpostavili. Generacije dijakov s ponosom povedo, da jih je prav on učil matematiko in poudarjajo dobro podlago za študij. Vsaj štirje njegovi bivši dijaki in dijakinje so iz matematike doktorirali, še več pa jih je zaključilo študij pedagoške smeri. Ena od njih je o njem zapisala: »Je pošten, iskren, preprost in srčen človek in boljšega učitelja si ne bi mogli želeti. Naučil nas je uporabljati, ceniti in spoštovati matematiko in nas pripravil tudi na življenje – za to mu bomo vedno hvaležni.«



Franc Savnik, upokojeni profesor matematike in nekdanji ravnatelj Gimnazije Brežice, prejme priznanje DMFA Slovenije *za trajen prispevek k poučevanju matematike in računalništva v slovenskih šolah.*

Franc Savnik je diplomiral leta 1963 na Prirodoslovno-matematični fakulteti Univerze v Zagrebu. Njegova poklicna pot je tesno povezana s poučevanjem matematike na Gimnaziji Brežice, kjer je bil vrsto let tudi ravnatelj. Leta 1971 je bil izbran v Komisijo za uvajanje računalništva v SŠ, ki je poskusno uvedla pouk računalništva v 7 slovenskih šol. Kot eden prvih učiteljev računalništva v Sloveniji je tako 25 let na Gimnaziji Brežice poučeval tudi računalništvo (1971–1996), tudi v obdobju zaposlitve na Zavodu za šolstvo SRS (1972–1979). Franc Savnik je soavtor didaktičnih gradiv in učbenikov za matematiko od petega do osmega razreda OŠ, ki jih je Zavod za šolstvo prvič izdal med leti 1976 in 1980, njihove posodobitve in ponatisi pa so pri Državni založbi Slovenije izhajali še vse do leta 2006. Za srednješolce je objavil zbirko nalog iz elementarne matematike in zbirko nalog za intenzivni pouk. Za monografijo Z računalnikom v matematiko (DZS, 1987) je napisal poglavje o računanju z velikimi celimi števili, več strokovnih prispevkov je objavil tudi v revijah Presek in Obzornik. Leta 1996 je prejel nagrado RS na področju šolstva. Še vedno zelo aktiven se zadnjih dvajset let poglobljeno posveča izdelovanju umetniških lesenih skulptur, ki pogosto ponazarjajo posebej zanimive ploskve, telesa in druge matematične objekte. Matematične in tehnične izzive njihove izdelave je večkrat predstavil strokovni javnosti, nedavno tudi v prispevku za 8. Evropski kongres matematike leta 2021, na katerem so njegove skulpture v dar prejeli tudi prejemniki nagrad Evropskega matematičnega združenja.

V imenu komisije pripravil Boštjan Kuzman

Francu Cvelbarju v spomin (1932–2021)

V devetdesetem letu življenja se je 26. novembra 2021 od nas poslovil cenjeni kolega prof. dr. Franc Cvelbar, upokojeni redni profesor na Fakulteti za matematiko in fiziko, višji znanstveni sodelavec Instituta Jožef Stefan ter častni član Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije.

Franc Cvelbar se je rodil v Gorenji vasi pri Šmarjeti 18. januarja 1932. Po končanih štirih razredih osnovne šole v Šmarjeti je šolanje nadaljeval na gimnaziji v Novem mestu, kjer je leta 1951 tudi maturiral z odličnim uspehom. Leta 1958 je diplomiral iz tehnične fizike na Odseku za fiziko tedanje Fakultete za farmacijo, rudarstvo, metalurgijo in kemijsko tehnologijo. Nato je bil eno leto na plodnem izpopolnjevanju v Milanu. Doktoriral je leta 1966 na tedanji Fakulteti za naravoslovje in tehnologijo (»Konstrukcija teleskopskega scintilacijskega parskega spektrometra in meritev spektra žarkov gama iz zajetja nevtronov energije 14 MeV v Al27«). Od leta 1968 je bil docent na isti fakulteti in od 1978 redni profesor fizike. Večino svojega pedagoškega dela je posvetil posodabljanju in vodenju fizikalnega praktikuma v 3. letniku in zanj razvil niz vaj, ki so še danes aktualne, na primer vaje iz merjenja sevanja radioaktivnih izotopov, mikrovalovne tehnike in optike in holografije. Občasno je tudi predaval jedrske meritve, fizikalna merjenja II, fiziko I, največkrat za matematike, fiziko jedra in razvijal podiplomski praktikum za didaktiko fizike in za nuklearno medicino. Posvečal se je tudi delu na področju uporabne fizike ter napisal več učbenikov, zlasti o jedrskih meritvah (merjenju ionizirajočega sevanja). Največji prispevek slovenski fiziki pa je dal prof. Cvelbar s svojim obsežnim in zavzetim mentorstvom. Diplomantom je pomagal pri razvoju številnih merilnih metod, ki so pomembne v industriji, kot je merjenje vlage v lesu, študij Reedovih kontaktnikov, merjenje na podlagi holografske interferometrije, razvoj termoluminiscentne dozimetrije, študij plazme, tankih plasti Cr-Ta-N, razvoj vakuumskega merilnika na podlagi miniaturne Penningove črpalke in številnih drugih. Cele generacije fizikov nosijo pečat njegovega vestnega in vztrajnega vodenja pri raziskavah in pri pisanju del. Sprejel je mentorstvo s številnih področij uporabne fizike s somentorstvom kolegov iz industrije. Tako je omogočil plodno sodelovanje Oddelka za fiziko z industrijo in pomagal vzgajati zainteresirane študente na poti v uporabno fiziko. Pri tem je pokazal izredno širino problematike. Bil je mentor 5 doktorantom, 7 magistrantom in kar 55 diplomantom. Zelo se je posvetil diplomantom iz drugih inštitutov in industrije in s tem povezal fakulteto s prakso.

Z Zavodom za šolstvo je sodeloval pri pripravi programa za predmet fizikalna merjenja v srednji šoli in sodeloval pri pisanju gradiv. Napisal je univerzitetni učbenik Merjenja ionizirajočega sevanja in skripta podiplomskih predavanj o ionizirajočem sevanju. Sodeloval je pri dveh zbirkah vaj.

Profesor Cvelbar je bil hkrati tudi sodelavec Instituta Jožef Stefan. Ukvarjal se je z raziskavami v atomski in jedrski fiziki, predvsem z zajetjem nevtrona. Sodeloval je v skupini, ki je prva sistematično merila sevanje gama iz zajetja nevtronov in ugotovila, da so nekatere veljavne vrednosti presekov za tako reakcijo previsoke. Njihove izmerjene vrednosti so bile v nekaterih primerih tudi do desetkrat nižje kot meritve, dobljene v ZDA z neko drugo metodo. Vendar pa so se rezultati te meritve ujemali s teoretičnimi rezultati in kasneje z na novo izmerjenimi rezultati. Za to delo je s sodelavci leta 1971 prejel Kidričevo nagrado. Na področju uporabne fizike je razvijal nevtronsko dozimetrijo z uporabo polprevodniških diod v času, ko je bilo to področje povsem novo. Temeljit pristop k temu problemu je vodil do povsem uporabnega sistema za nadzor nevtronskega obsevanja osebja.

Profesor Cvelbar je bil tudi odličen poznavalec problemov, ki so povezani z dozimetrijo ionizirajočega sevanja. Sodeloval je z mednarodno atomsko agencijo IAEA na Dunaju kot izvedenec za meritve, izračune in vrednotenje presekov pri reakcijah, kjer nastajajo fotoni. Tovrstni podatki so pomembni pri načrtovanjih modernih energijskih izvorov.

Franc Cvelbar je bil tudi družbeno angažiran, sodeloval je v društvu Slovenski katoliški izobraženci in nekaj časa vodil Domoznansko društvo Šmarjeta. Leta 2007 je bil skupaj z zgodovinarjem Stanetom Grando sourednik zbornika »Šmarjeta in Bela Cerkev skozi stoletja«, in je napisal več prispevkov. Leta 2008 pa je postal prvi častni občan občine Šmarješke Toplice.

V letih 1992–1994 je bil predsednik Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, ki ga je vodil modro in zavzeto. Leta 2000 ga je Društvo zaradi zaslug za razvoj fizike izvolilo za svojega častnega člana. Dosežki prvega leta njegovega predsednikovanja so bili, da se je DMFA včlanilo v Evropsko matematično društvo, Mednarodno matematično unijo in Evropsko fizikalno društvo; organiziran je bil seminar za srednješolske učitelje Ionizirajoče sevanje v okolju in sodelovanje na razstavi učil – Dnevi slovenskega izobraževanja. Drugo leto pa je bilo posvečeno predvsem Prvemu kongresu matematikov, fizikov in astronomov Slovenije. Tudi njegova zasluga je, da je vse teklo tako gladko. V drugem letu je tudi pomagal utreti pot obnovi Plemljeve hiše na Bledu, ki je sedaj na voljo za strokovna srečanja in izobraževanje. Kot predsednik DMFA je s svojim navdušenjem in človeško toplino mnogo pripomogel k prijetnemu delovnemu ozračju in zagnanosti sodelavcev v raznih sekcijah društva.

Profesor Cvelbar je bil odličen kolega, vedno je rad pomagal z nasveti in dejanji, prevzel je številne, tudi naporne obveznosti (»Ni znal reči: ne«). Pogrešali bomo njegovo eksperimentalno razgledanost, modre pripombe in optimistični prijateljski nasmeh. Tudi profesorjem fizike je s svojo izkušenostjo in znanjem rad priskočil na pomoč z nasveti pri pripravi in izvedbi poskusov ne le z besedo, ampak tudi s pripomočki. S študenti in pravzaprav vsemi je gojil odnos, ki je odražal njegovo dušo, srce: topel, prijazen in pošten. Med kolegi je s tem pustil neizbrisen pečat, ki sega tudi čez okvire stroke.

Mitja Rosina in Aleš Mohorič

LETNO KAZALO

Obzornik za matematiko in fiziko 68 (2021)
številke 1–4, strani 1–160

Članki — Articles

Nove knjige — New books

http://www.dmfa-zaloznistvo.si/

Iz zgodovine — Miscellanea

Zanimivosti — Miscellanea

Vesti — News

http://www.obzornik.si/

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
LJUBLJANA, DECEMBER 2021
Letnik 68, številka 4
ISSN 0473-7466, UDK 51 + 52 + 53

VSEBINA

CONTENTS

Na naslovnici: Evdoks iz Kníde, starogrški astronom in matematik, je morda najbolj znan po svojem geocentričnem planetarnem sistemu koncentričnih sfer, s katerim je opisal tudi retrogradno gibanje planetov (leva slika). V teoriji števil je izjemna njegova definicija razmerij, s katero je odpravil težave z neprimerljivimi veličinami in je navdihnila Dedekinda pri njegovi definiciji realnih števil. Problem podvojitve kocke je rešil z vpeljavo krivulje kampile (slika desno) – glej članek na straneh 121–127.