

PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652

Letnik 26 (1998/1999)

Številka 4

Strani 234-240

Marino Pavletič:

VERIŽNI PRIBLIŽKI

Ključne besede: matematika, teorija števil, verižni ulomki, približki.

Elektronska verzija: <http://www.presek.si/26/1376-Pavletic.pdf>

© 1999 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

© 2010 DMFA - založništvo

Vse pravice pridržane. Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

VERIŽNI PRIBLIŽKI

V matematičnih učbenikih kar mrgoli nalog, kot je tale:

$$\text{Poenostavi: } 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5 + \frac{1}{3}}}.$$

Brez posebnega truda ugotovimo, da je rezultat naloge $\frac{54}{19}$.

Ko opazujemo nalogo in rezultat, nam pride na misel vprašanje, kako je pisec nalogo sestavil. Pogosta zvijača pri sestavljanju matematičnih nalog je, da začnemo pri koncu in rezultat preoblikujemo tako dolgo, dokler se nam izraz ne zdi dovolj zapleten. Takega zastavimo kot nalogo za učence.

Začnimo torej z ulomkom $x = \frac{54}{19}$. Kot vidimo, ga lahko razdelimo na celi in ulomljeni del

$$x = \frac{54}{19} = 2 + \frac{16}{19}.$$

Ulomljeni del zdaj spremenimo v dvojni ulomek

$$x = 2 + \frac{1}{\frac{19}{16}}.$$

Pod glavno ulomkovo črto smo dobili ulomek $\frac{19}{16}$, ki ga spet lahko razdelimo na celi in ulomljeni del $\frac{19}{16} = 1 + \frac{3}{16}$. Prvotni ulomek je torej enak

$$x = 2 + \frac{1}{1 + \frac{3}{16}}.$$

Postopek lahko nadaljujemo. Zadnji dobljeni ulomljeni del $\frac{3}{16}$ spet spremenimo v dvojni ulomek in dobimo

$$x = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{16}{3}}}.$$

Če še $\frac{16}{3}$ delimo na celi in ulomljeni del $5 + \frac{1}{3}$, lahko x izrazimo kot

$$x = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5 + \frac{1}{3}}}. \quad (1)$$

To pa je izraz, zapisan na začetku.

Sestavljalcu naloge se je zdel ta izraz očitno že dovolj zapleten, mi pa se vprašajmo, ali bi lahko s postopkom nadaljevali. Kot vidimo, smo uporabljali izmenično dva koraka:

- A. ulomek (večji od 1) smo razdelili na celi in ulomljeni del (ulomek med 0 in 1),
- B. dobljeni ulomljeni del smo spremenili v dvojni ulomek oziroma poiskali smo njegovo recipročno vrednost. Ker je le-ta večja od 1, smo lahko spet uporabili korak A.

Zadnji ulomljeni del, ki smo ga dobili v našem primeru, je enak $\frac{1}{3}$ in njegova recipročna vrednost je 3, torej celo število. Če poskusimo spet uporabiti korak A, dobimo neceli del enak 0, kar pomeni, da postopka ne moremo več nadaljevati. Z uporabo enakosti $3 = 2 + \frac{1}{1}$ lahko izsilimo še en korak, ki nas pripelje do pravega, a nič kaj lepega zapisa

$$x = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1}}}} \quad (2)$$

Pravi matematik zdajle že premišljuje, kako bi se dalo nova spoznanja posplošiti. Tudi nam po glavi rojijo vprašanja:

Ali lahko podoben postopek uporabimo tudi za druge ulomke?

Ali morda tudi za ostala števila?

Kako bi lahko dobljeni rezultat uporabili v praksi?

Da potešimo radovednost, povejmo nekaj osnovnih ugotovitev, do katerih so se prikopali veliki matematiki pred nami. Ugotovili so, da lahko postopek izvajamo tudi na splošno. S ponavljanjem korakov A in B lahko vsak ulomek u pretvorimo v obliko

$$u = b_0 + \frac{1}{b_1 + \frac{1}{b_2 + \frac{1}{b_3 + \dots + \frac{1}{b_n}}}} \quad (3)$$

Pravimo, da smo število u razvili v *veržni ulomek*. Zaradi načina dela (korak B) so vsi števcji enaki 1 in vrednost veržnega ulomka določajo števila b_0, b_1, \dots, b_n , ki jim pravimo *veržni koeficienti*. Ker je zapis veržnega ulomka v običajni matematični obliki (3) precej nepregleden, ga

na kratko zapišemo tako, da navedemo njegove verižne koeficiente: $u = [b_0, b_1, \dots, b_n]$. Torej bomo število, s katerim smo začeli to zgodbo, pisali kot $\frac{54}{19} = [2, 1, 5, 3]$ (ali pa, če upoštevamo drugo, gršo možnost, $\frac{54}{19} = [2, 1, 5, 2, 1]$).

Velja izrek, ki ga navajamo brez dokaza:

Izrek. Poljubno pozitivno racionalno število lahko razvijemo v verižni ulomek na natanko dva načina.

Oba načina smo že spoznali, to sta obliki (1) in (2). Običajno uporabljamo "lepši" način – tisti, ki se ne konča z $\frac{1}{1}$.

Če je verižni ulomek preprost, ga lahko spremenimo nazaj v običajni ulomek že z nekaj preprostimi računskimi operacijami – računati moramo od spodaj navzgor. Težave nastopijo, če je verižni ulomek zapletenejši. Za ta primer so matematiki izdelali posebno shemo, ki nam omogoča hitrejša računanja. Oglejmo si jo na našem zgledu: verižni ulomek $[2, 1, 5, 3]$ bomo poskusili preoblikovati v $\frac{54}{19}$.

Najprej napišimo shemo

$$\begin{array}{cc|ccc} & & 2 & 1 & 5 & 3 \\ \hline 0 & 1 & & & & \\ 1 & 0 & & & & \end{array}$$

Števila 2, 1, 5, 3 v prvi vrstici so verižni koeficienti našega števila, ničle in enke na levi strani pa so začetne vrednosti, ki so potrebne za pravilno delovanje sheme (njihova razporeditev je enaka za vse ulomke). Zdaj moramo napolniti desni del spodnjih dveh vrstic. Ravnali se bomo po principu $a + b \cdot c$. Če je v zgornji (prvi) vrstici število c , v spodnji (drugi ali tretji) pa sta v prejšnjih stolpcih števili a in b , bomo v prazen prostorček pod c vpisali vrednost $a + b \cdot c$. Enak postopek uporabljamo za drugo in za tretjo vrstico, paziti je treba le, da število c obakrat vzamemo iz prve vrstice.

Tako bomo pod število 2 vpisali v drugo vrstico $0 + 1 \cdot 2 = 2$, v tretjo pa $1 + 0 \cdot 2 = 1$

$$\begin{array}{cc|ccc} & & 2 & 1 & 5 & 3 \\ \hline 0 & 1 & 2 & & & \\ 1 & 0 & 1 & & & \end{array}$$

Enako računamo do konca

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & 1 & 5 & 3 \\ \hline 0 & 1 & 2 & 3 & 17 & 54 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 6 & 19 \end{array}$$

V zadnjem stolpcu že vidimo števili 54 in 19, torej se rezultat skriva v zadnjem stolpcu. Zapisan je že v obliki ulomka, manjka le ulomkova črta. Tudi ostale pare števil si lahko predstavljamo kot ulomke – dodajmo še ulomkove črte

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & 1 & 5 & 3 \\ \hline 0 & 1 & 2 & 3 & 17 & 54 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 6 & 19 \end{array}$$

Poleg rezultata $\frac{54}{19}$ smo dobili še tri ulomke: $x_0 = \frac{2}{1} = 2$, $x_1 = \frac{3}{1} = 3$ in $x_2 = \frac{17}{6}$. Pomožnim ulomkom, ki jih dobimo z opisano shemo, bomo rekli *verižni približki* danega števila. Verižne približke dobimo pravzaprav tako, da zadnjih nekaj verižnih koeficientov v razvoju $[b_0, b_1, \dots, b_n]$ izpustimo. V našem primeru je

$$2 = [2], \quad 3 = [2, 1], \quad \frac{17}{6} = [2, 1, 5], \quad \frac{54}{19} = [2, 1, 5, 3].$$

Verižni približki so za matematiko zanimivi, ker so zelo *dobri približki*. Med ulomki, ki imajo imenovalac manjši ali enak 6, je ulomek $\frac{17}{6}$ *najboljši približek* za vrednost $\frac{54}{19}$. To velja tudi splošneje, z eno samo majhno izjemo: prvi verižni približek je celi del danega števila in zato ni nujno najboljši celoštevilski približek. Tudi v našem primeru prvi približek ($x_0 = 2$) ni najboljši celoštevilski približek – drugi približek ($x_1 = 3$) je boljši.

Izrek. Vsak verižni približek danega števila, razen morda prvega, je boljši približek tega števila kot katerikoli drug ulomek z manjšim ali enakim imenovalcem.

Vsak ulomek lahko zapišemo tudi v decimalni obliki – tako trdi teorija. V praksi pa se pojavijo težave. Decimalni zapis ima skoraj vedno neskončno mnogo decimalk in iz čisto praktičnih razlogov ga ponavadi zaokrožimo na nekaj mest.

Poglejmo si naslednjo nalogo. Pri računanju z računalom se na zaslonskem izpiše število $y = 2.358208955$. To seveda ni pravi rezultat računa, ki smo ga želeli izračunati, je le decimalni približek. Ali bi se dalo ta decimalni približek nekako nadomestiti z ulomkom?

Pomagali si bomo s postopkom razvijanja v verižni ulomek. Koraka **A** in **B** namreč lahko izvajamo tudi, če je število zapisano v decimalni obliki. Pa poglejmo:

$$\begin{aligned} y &= 2.358208955 = 2 + 0.358208955 = 2 + \frac{1}{2.791666668} = \\ &= 2 + \frac{1}{2 + 0.791666668} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1.263157892}} = \dots \end{aligned}$$

Vidimo, da moramo na računalu samo izmenično uporabljati tipki FRAC (= *ulomljeni del*)¹ in 1/x (= *recipročna vrednost*). Pri tem ne pozabimo zapisovati dobljenih celih delov, to so namreč verižni koeficienti. Po nekaj korakih dobimo naslednji razvoj

$$y = [2, 2, 1, 3, 1, 4, 997446, 1, 1, 6, 3, \dots].$$

Iz koeficientov dobimo naslednje verižne približke

$$\begin{aligned} [2] &= 2 \\ [2, 2] &= \frac{5}{2} \\ [2, 2, 1] &= \frac{7}{3} \\ [2, 2, 1, 3] &= \frac{26}{11} \\ [2, 2, 1, 3, 1] &= \frac{33}{14} \\ [2, 2, 1, 3, 1, 4] &= \frac{158}{67} \\ [2, 2, 1, 3, 1, 4, 997446] &= \frac{157596501}{66828896} \\ &\dots \end{aligned}$$

Žepno računalno nam pokaže, da se že ulomek $\frac{158}{67}$ ujema s številom y na vsa mesta, kar jih je na zaslončku. To velja tudi za zadnji ulomek, ki pa ima neprimerno večji števec in imenovalec. Ulomek $\frac{158}{67}$ je torej precčej lepsi približek za rezultat računa, ki smo ga želeli izračunati.

¹ Na nekaterih računalih te tipke ni. Pomagamo si tako, da celi del kar odštejemo.

Ker ostalih decimalk rezultata ne poznamo, ne moremo vedeti, če se ga sploh da pisati kot ulomek; zgornji račun pa nam kaže, da lahko za *praktične potrebe* privzamemo, da je rezultat *skoraj* enak $\frac{158}{67}$. Celó več: ujemanje je takó lépo, da je možno, da je pravi rezultat *enak* $\frac{158}{67}$, naslednje verižne koeficiente pa smo dobili le zaradi napak pri zaokrožanju. Tisti, ki se mu zdi, da je število 997446 preveliko za napako pri zaokrožanju, naj se spomni, da smo ga dobili kot recipročno vrednost števila 0.00000100256. Pojav tako velikega verižnega koeficienta nas navadno opozarja, da smo prišli do meje natančnosti, ki jo lahko dosežemo z računalom: naslednji koeficienti so praviloma napačni (zaradi napak pri zaokrožanju).

Poskusimo podobno še s številom $z = 1.414213562$. Hitro dobimo razvoj

$$z = [1, 2, 2, 2, 2, 2, \dots]$$

in ustrezne verižne približke

$$1, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{7}{5}, \quad \frac{41}{29}, \quad \frac{99}{70}, \quad \dots$$

Število z je desetmestni približek števila $\sqrt{2}$. Števila $\sqrt{2}$ ne moremo zapisati z ulomkom — pravimo, da je *iracionalno*. Zato se verižni koeficienti nadaljujejo v neskončnost. Če bi bilo koeficientov končno mnogo, bi bil zadnji verižni približek neki ulomek, *enak* številu $\sqrt{2}$, kar ni mogoče.

Tudi na splošno velja:

Izrek. V verižni ulomek lahko razvijemo poljubno pozitivno realno število. Razvoj racionalnih števil je končen, razvoj iracionalnih števil pa neskončen.

Opomba: Zgled $\sqrt{2} = [1, 2, 2, 2, 2, \dots]$ potrebuje še malo razlage. Kdor je zadosti vztrajen, bo prišel po nekaj korakih računanja z računalom tudi do koeficientov, različnih od 2. To je posledica napak pri zaokrožanju, pri pravem razvoju se nadaljujejo v neskončnost same dvojke.

Bralca vabim, da poskusi napisati računalniški program za (približno) pretvarjanje decimalnih števil v ulomke. Program naj izpiše vse verižne približke, ki jih je pri danem številu *smiselno* izpisati. To pomeni, da mora upoštevati, na koliko mest natančni so podatki, in nehati z izpisom, ko pridejo na vrsto verižni koeficienti, pri katerih se napake pri zaokrožanju preveč poznajo.

Za konec si oglejmo še verižne približke za število π . Če izhajamo iz približka $\pi \doteq 3.141592654$ in računamo na deset mest (z računalom), dobimo razvoj

$$\pi = [3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 4, \dots].$$

Temu razvoju pripadajo verižni približki

$$3, \quad \frac{22}{7}, \quad \frac{333}{106}, \quad \frac{355}{113}, \quad \frac{104348}{33215}, \quad \dots$$

Nadaljnji verižni približki se razlikujejo od prave vrednosti šele na desetem decimalnem mestu. Sklepamo, da naslednji verižni koeficienti zaradi napak pri zaokrožanju najbrž niso natančni. Dober računalniški program bo torej izpisal samo navedene približke.

Marino Pavletič
