

PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652

Letnik **29** (2001/2002)

Številka 1

Strani 4-11

Jože Grasselli:

PREDALČNO NAČELO

Ključne besede: matematika, teorija števil, porazdelitve, deljivost.

Elektronska verzija: <http://www.presek.si/29/1467-Grasselli.pdf>

© 2001 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

© 2010 DMFA - založništvo

Vse pravice pridržane. Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

PREDALČNO NAČELO

Jakob ima v dveh žepih vsega tri jabolka. Ob tem edinem podatku lahko samo ugibamo, koliko jabolok je v posameznem od obeh Jakobovih žepov. Nekaj trdnega pa vendarle lahko izjavimo. Zapišimo vse načine, kako se dajo porazdeliti tri jabolka na dva žepa. Dobimo preglednico:

število jabolok v prvem žepu	število jabolok v drugem žepu
3	0
2	1
1	2
0	3

V prvih dveh primerih sta v prvem žepu vsaj dve jabolki; v zadnjih dveh primerih velja isto za drugi žep. Zato drži: Jakob ima v enem od obeh žepov najmanj dve jabolki; ne vemo pa, ali gre za prvi ali drugi žep.

Iz obravnavanega zgleada povzamemo predalčno načelo: *Če so v dveh predalih (žepih) tri reči (jabolka), vsebuje eden od obeh predalov (žepov) vsaj dve reči (jabolki).*

Imejmo sedaj namesto dveh žepov n predalov in namesto treh jabolok $n + 1$ reči. Splošno predalčno načelo pravi: *Če je v n predalih $n + 1$ ali več reči, vsebuje vsaj en predal najmanj dve od teh reči.*

Načelo je jasno; ako bi bila v vsakem predalu le ena reč, bi bilo v n predalih le n ne pa $n + 1$ ali več reči. Spet pa ne vemo, v katerem od n predalov sta vsaj dve reči.

Predalčno načelo se v matematiki večkrat uporablja. Tu bomo z njim izpeljali nekaj trditev.

- A. Naj bo naravno število a tuje praštevilu p ; obstaja potenca a^k , $1 \leq k \leq p - 1$, ki pušča pri delitvi s p ostanek 1.

Če katerokoli celo število delimo s p , dobimo za ostanek eno od števil $0, 1, 2, \dots, p - 1$; ostanek 0 se pojavi le, če je število a deljivo s p ; če dajeta števili pri delitvi s p isti ostanek, je njuna razlika deljiva s p . Ker je a tuj p , je vsaka od potenc

$$a, a^2, a^3, \dots, a^p \quad (1)$$

tuja p in ni deljiva s p . Zato se ostanki, ko delimo potence (1) s p , nahajajo med števili $1, 2, \dots, p - 1$. Števil (reči) v (1) je p , možnih ostankov

(predalov) $p - 1$. Po predalčnem načelu sta med potencami (1) potenci a^s , a^t z eksponentoma

$$1 \leq s < t \leq p, \quad (2)$$

ki pri delitvi s p puščata enak ostanek. Njuna razlika

$$a^t - a^s = a^s (a^{t-s} - 1)$$

je zato deljiva s p . Ker je p tuj a^s , mora deliti $a^{t-s} - 1$. To pomeni, da pri celem številu m velja

$$a^{t-s} - 1 = mp.$$

Eksponent $t - s = k$ je zaradi (2) naravno število in največ $p - 1$. Zadnja enakost se zapiše tudi

$$a^k = mp + 1$$

in trditev A je dognana.

Zgled.

Naj bo $a = 8$, $p = 13$. S potenciranjem ugotovimo, da tri od potenc

$$8^j, \quad 1 \leq j \leq 13$$

dajejo pri delitvi s 13 ostanek 1. To so

$$\begin{aligned} 8^4 &= 4\,096 = 315 \cdot 13 + 1 \\ 8^8 &= 16\,776\,216 = 1\,290\,555 \cdot 13 + 1 \\ 8^{12} &= 68\,719\,476\,736 = 5\,286\,113\,595 \cdot 13 + 1 \end{aligned} \quad (3)$$

Pri $a = 14$, $p = 17$ od potenc

$$14^j, \quad 1 \leq j \leq 17$$

še le predzadnja daje pri delitvi s 17 ostanek 1; je namreč

$$14^{16} = 2\,197\,953\,337\,809\,371\,136 = 128\,114\,224\,080\,655 \cdot 17 + 1. \quad (4)$$

Opomba.

Trditev A se da takole dopolniti: Najmanjši naraven k , pri katerem daje potencia a^k pri delitvi s p ostanek 1, je delitelj števila $p - 1$, vsi drugi takšni k so večkratniki tega delitelja. Dokaz izpuščamo, ponazoritev dopolnitve je vidna v (3) in (4).

- B. Naravni števili a , n naj bosta večji od 1 in a tuj številu 10. Obstaja potenca a^k , ki ima za zadnjo števk 1, pred njo pa $n - 1$ števk enakih 0.

Ravnamo podobno kot pri A. Zaradi tujosti števil a in 10 se delitev potenc

$$a, a^2, a^3, \dots, a^{10^n} \quad (5)$$

z 10^n nikoli ne izide; za ostanke so tako možnosti $1, 2, 3, \dots, 10^n - 1$. Potenc (5) je 10^n , možnih ostankov $10^n - 1$; po predalčnem načelu dajeta vsaj dve potenci iz (5) pri delitvi z 10^n isti ostanek, npr. potenci a^s, a^t , $s < t$. Razlika

$$a^t - a^s = a^s(a^{t-s} - 1)$$

je potem deljiva z 10^n . Faktor a^s je tuj 10^n , zato 10^n deli faktor $a^k - 1$, kjer je $k = t - s$ naravno število. Zato je $a^k - 1 = v \cdot 10^n$ pri naravnem številu v . Od tod je

$$a^k = v \cdot 10^n + 1 = v0 \dots 01$$

in tu pred 1 nastopa $n - 1$ ničel. Trditev B je dobljena.

Zgled.

Vzemimo $a = 3$, $n = 2$. Z računanjem zaporednih potenc $3, 3^2, 3^3, \dots$ najdemo, da je

$$3^{20} = 3\,486\,784\,401$$

najmanjša potenca števila 3, ki se končuje na 01. Na 001 se končuje šele 3^{100} .

Opomba.

Najmanjši eksponent k za katerega drži trditev B, je delitelj števila $4 \cdot 10^{n-1}$. Dokaz spet izpuščamo, ponazoritev nudi zadnji zgled.

Naj bo a naravno število. Naravno število c , ki se začneja z nekajkrat zapored zapisanim a in se končuje z nekaj ničlami, zapišemo

$$c = a \dots a0 \dots 0. \quad (6)$$

Če je $a = 37$, je npr. $c = 37\,373\,700$; tu se 37 ponovi trikrat, na koncu sta dve števki 0.

- C. Naj bosta a , b naravni števili; obstaja število, ki ima obliko (6) in je deljivo z b .

Glejmo $b + 1$ števil

$$a, aa, aaa, \dots, aaa \dots a, \quad (7)$$

ki nastanejo, ko zapišemo a enkrat, dvakrat, \dots , $b + 1$ -krat zapored. Ko števila iz seznama (7) delimo z b , so mogoči ostanki $0, 1, 2, \dots, b - 1$. Števil (7) je $b + 1$, za ostanek je b možnosti; po predalčnem načelu sta v (7) najmanj dve števili y, x , ki dajeta isti ostanek pri delitvi z b ; ker sta y, x različna, naj bo $y > x$. Razlika $y - x$ je zato naravno število deljivo z b ; razlika ima tudi obliko (6), saj se y končuje z x . Trditev C je dobljena.

Zgled.

Poiščimo pri $a = 17$ najmanjše število z zapisom (6), ki je deljivo z $b = 84$. Iskano število se končuje na n ničel in ga zato zapišemo

$$17 \dots 17 \cdot 10^n. \quad (8)$$

Ker je $84 = 4 \cdot 21$, mora biti število (8) deljivo s 4 in z 21. Prvi faktor v (8) je lih in torej tuj 4; zato mora 4 deliti drugi faktor 10^n . Najmanjši eksponent n , pri katerem to velja, je 2. Ker je 21 tuj 10^n , mora deliti prvi faktor v (8); s preizkusom preverimo, da 17 in 1717 nista deljiva z 21, pač pa 21 deli 171717. Iskano število je

$$17\,171\,700 = 84 \cdot 204\,425.$$

Če številu 17 171 700 pritaknemo nekaj ničel ali spredaj pripišemo nekajkrat skupino števk 171717, so dobljena števila še zmeraj deljiva s 84. Števil oblike (6), deljivih s 84, je tako neskončno mnogo.

Č. Če izmed zaporednih naravnih števil,

$$1, 2, 3, \dots, 2n - 1, 2n, \quad n \geq 2 \quad (9)$$

izberemo $n + 1$ števil, sta med njimi vsaj dve zaporedni.

Iz zaporedja (9) izbrana števila

$$a_1 < a_2 < \dots < a_n < a_{n+1}$$

sestavljajo množico M ; seveda je

$$1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_n < a_{n+1} \leq 2n.$$

Števila množice M razdelimo na dva razreda. Število x iz M je v prvem razredu M_1 , če je vsaj eno od števil $x - 1$, $x + 1$ v M , in v drugem razredu M_2 , če nobeno od števil $x - 1$, $x + 1$ ni v M . Jasno je, da vsako število iz M pade ravno v enega od obeh razredov M_1 , M_2 . Ker je $n \geq 2$, je $n + 1 \geq 3$; tako so v dveh razredih vsaj tri števila. Zato po predalčnem načelu vsaj eden od razredov M_1 , M_2 vsebuje vsaj dve števili zaporedja (9). Pokažimo, da je to razred M_1 . Razred M_2 bi lahko zajel največ vsa liha števila

$$1, 3, 5, \dots, 2n - 1$$

ali pa največ vsa soda števila

$$2, 4, 6, \dots, 2n.$$

Obakrat je to največ n števil in je potem v M_1 vsaj eno število x . Če pa je x v M_1 , je z njim v M_1 vsaj eno od števil $x - 1$, $x + 1$; če je to $x - 1$, sta $x - 1$, x zaporedni naravni števili; za $x + 1$ sta x , $x + 1$ zaporedna. Trditev Č je dobljena.

Opomba.

Zaporedni naravni števili sta zmeraj tuji. Ugotovitev Č torej pove, da sta med $n + 1$ števili, vzetimi iz zaporedja (9), vsaj dve tuji števili.

Zgled.

Pri $n = 2$ premore množica (9) števila

$$1, 2, 3, 4.$$

Množico M sestavljajo tri izmed teh štirih števil; vse možnosti za M so tako

$$1, 2, 3$$

$$1, 2, 4$$

$$1, 3, 4$$

$$2, 3, 4$$

V drugem primeru je le en par zaporednih naravnih števil, namreč 1, 2; tudi v tretjem primeru je en sam tak par 3, 4; v prvem primeru sta para dva, namreč 1, 2 in 2, 3; prav tako sta v zadnjem primeru dva para 2, 3 in 3, 4. Ko n narašča, se število možnosti za M hitro večja. Pri $n = 6$ vsebuje množica (9) števila

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$$

in izmed njih je možno izbrati 7 števil na 792 različnih načinov. Toliko je sedaj možnosti za M ; neposredno preveriti trditev Č tu ni prav lahko.

Znameniti matematik Paul Erdős (1913–1996) je mladim nadebnim matematikom rad zastavljal nalogo, naj dokažejo trditev:

D. Če izmed števil

$$1, 2, 3, \dots, 2n \quad (10)$$

izberemo $n + 1$ števil, sta med njimi vsaj dve takšni, da manjše deli večje.

Vsako izmed $n + 1$ izbranih števil se da pisati v obliki

$$2^k z, \quad (11)$$

kjer je k nič ali naravno število, z pa liho naravno število. (Npr. $240 = 2^4 \cdot 15$, $35 = 2^0 \cdot 35$.) Med števili v (10) je n lihih

$$1, 3, 5, \dots, 2n - 1.$$

Za z v izrazitvi (11) je tako največ n možnosti. Izbrani števili damo v isti razred, če imata v zapisu (11) enak z . Ker je izbranih števil $n + 1$, možnosti za z pa kvečjemu n , imata od izbranih števil vsaj dve enak z in padeta v isti razred. To sta npr. števili x, y ; ker sta različni, smemo vzeti $x < y$. Torej je

$$x = 2^s z, \quad y = 2^t z \quad \text{pri } 0 \leq s < t.$$

Ker je $\frac{y}{x} = 2^{t-s}$, x deli y . Trditev D je dognana.

Zgled.

Za $n = 3$ sestavljajo množico (10) števila

$$1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Izmed njih je mogoče izbrati štiri različna števila na 15 načinov. Med izbranimi četvericami so npr.

$$2, 3, 4, 5$$

$$3, 4, 5, 6$$

$$2, 3, 5, 6$$

V prvi četverici le 2 deli 4, v drugi le 3 deli 6; v teh dveh četvericah sta v vsaki le dve takšni števili, da manjše deli večje. V tretji četverici 2 deli 6 in 3 deli 6; tu imamo dva para števil, ko manjše deli večje.

- E. Množica M , ki jo sestavlja $n + 1$ različnih naravnih števil, manjših od $2n$, vsebuje vsaj eno število, ki je vsota dveh (različnih) števil iz M .

V množici M je $n + 1$ naravnih števil

$$a_1 < a_2 < \dots < a_n < a_{n+1}, \quad (12)$$

ki so pod $2n$; zato je

$$1 \leq a_1, \quad a_{n+1} \leq 2n - 1. \quad (13)$$

Zaradi (12) so razlike

$$a_2 - a_1, a_3 - a_1, \dots, a_{n+1} - a_1 \quad (14)$$

različna naravna števila in naraščajo; po (13) je zadnja, največja diferenca pod $2n$. V množicah (12) in (14) je skupaj $2n + 1$ naravnih števil, ki so vsa pod $2n$; to pomeni, da so zanje možne le vrednosti $1, 2, \dots, 2n - 1$. Ker je števil $2n + 1$, razpoložljivih vrednosti zanje pa $2n - 1$, imata po predalčnem načelu vsaj dve števili, npr. u, v , isto vrednost $u = v$. V (12) so sama različna števila, prav tako v (14); od enakih števil u, v mora zato eno biti v množici (12), drugo v množici (14). Je npr. $u = a_i, v = a_j - a_1$; zaradi $u = v$ je $a_j = a_i + a_1$ in števila a_1, a_i, a_j so iz M . Trditev E je dobljena.

Zgled.

Pri $n = 4$ so pod 8 naravna števila $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$; izmed njih je mogoče 5 števil izbrati na 21 načinov; toliko je možnosti za M . Ena od možnosti za M , tj. (12), je

$$3 < 4 < 5 < 6 < 7.$$

Tu je $3 + 4 = 7$ in nobeno drugo od števil $4, 5, 6, 7$ iz M ni vsota dveh različnih števil iz M . Če se za M vzame števila

$$1 < 2 < 3 < 5 < 6,$$

je $1 + 2 = 3, 1 + 5 = 6, 2 + 3 = 5$ in tri števila iz M so vsote dveh različnih števil iz M .

Včasih srečamo predalčno načelo v še bolj splošni obliki:

Če je $kn + 1$ reči razporejenih v n predalov, vsebuje vsaj en predal najmanj $k + 1$ teh reči.

Tudi to je jasno. Ko bi vsak od n predalov vseboval največ k reči, bi bilo v vseh predalih največ kn reči; ne gre, saj je reči $kn + 1$.

F. Na gredo, ki ima obliko kvadrata s stranico 1 m, je posejal vrtnar 301 seme. Na gredi se najde krog s polmerom 8 cm, v katerega so padla vsaj štiri semena. (Seme vzamemo kot točko.)

Kvadratno gredo razdelimo z vzporednicami stranicam na 100 enakih kvadratkov, stranica vsakega meri 1 dm. Ker je $301 = 3 \cdot 100 + 1$, je $k = 3$, $n = 100$. Po predalčnem načelu obstaja vsaj en kvadratek ki vsebuje najmanj $k + 1 = 3 + 1 = 4$ semena. V krogu, ki je temu kvadratu očrtan, ta semena še tem bolj gotovo ležijo. Premer kroga $2r$ je enak diagonali kvadrata; torej je $2r = \sqrt{2}$ dm in

$$r = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ dm} = 0,707 \dots \text{ dm} < 8 \text{ cm}.$$

Trditev F je dognana.

Kdaj pa kdaj naletimo tudi na tole obliko predalčnega načela:

Če je v n predalih manj kot n reči, je vsaj en predal brez teh reči.

G. V pravokotni gozdni parceli, dolgi 30 km in široki 20 km, se zadržuje 49 medvedov, njihov stalež se s časom ne spreminja. V vsakem trenutku je na parceli pravokotno območje površine 12 km^2 , na katerem ni nobenega medveda.

Težišče vsakega medveda projiciramo pravokotno na parcelo in dobimo s tem na njej 49 točk. Parcela meri 600 km^2 ; razdelimo jo z vzporednicami stranicam na 50 pravokotnih parcelic dolžine 6 km in širine 2 km; torej meri parcelica 12 km^2 . Ker je parcelic 50, medvedov pa 49, vsaj na eni od parcelic ni nobenega medveda. (S tem pa še ne vemo, katera od parcelic je v izbranem trenutku "varna").