Sedaj lahko združimo sorodne simetrične člene in upoštevamo

- $z^2 + \dfrac{1}{z^2} = (z + \dfrac{1}{z})^2 - 2$

in

- $z^3 + \dfrac{1}{z^3} = (z + \dfrac{1}{z})^3 - 3(z + \dfrac{1}{z}).$

Tako se enačba (3) v primeru $z = z_1$ glasi

- $x^3 - 3x + x^2 - 2 + x + 1 = x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0.$ (4)

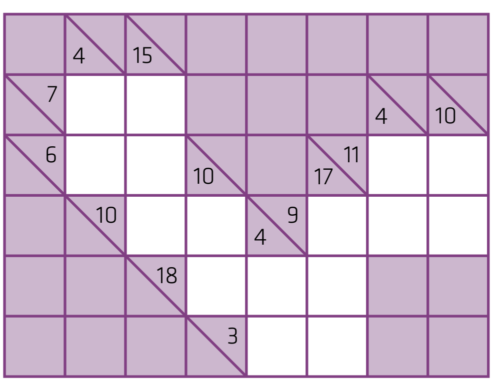
Enako kot prej vidimo, da -1 in 1 nista rešitvi enačbe (4). Zato je x rešitev nerazcepne enačbe stopnje 3 in daljice dolžine x ni mogoče narisati samo z ravnilom in šestilom.

Tako smo še na en način pokazali, da konstrukcija pravilnega sedemkotnika ni mogoča.

× × ×

Križne vsote

Naloga reševalca je, da izpolni bele kvadratke s števkami od 1 do 9 tako, da bo vsota števk v zaporednih belih kvadratkih po vrsticah in po stolpcih enaka številu, ki je zapisano v obarvanem kvadratku na začetku vrstice (stolpca) nad (pod) diagonalo. Pri tem morajo biti vse števke v posamezni vrstici (stolpcu) različne.



× × ×

Znate rešiti Leonardov problem o tetraedru?

Jurij Kovič

Opredelitev problema. Leonardo da Vinci je v enem svojih spisov brez dokaza navedel, da se težišče T pravilnega tetraedra $ABCD$ nahaja na eni četrtini razdalje od težišča T' osnovne ploskve do vrha D tetraedra ([2], str. 235). *Je to res? Kako bi to trditev dokazali ali ovrgli?*

Rešitvi. Oglejmo si dve rešitvi tega problema: prva, algebraična, uporablja *vektorje*, ki so univerzalno računsko orodje za reševanje geometrijskih nalog, zelo uporabni pa so tudi v fiziki, kjer z njimi ponazarjajo sile. Druga rešitev, geometrijska, temelji na neposrednem uvidu.

Metoda 1. (povzeta po [1], str. 214–215). Težišče točkastih mas $t_1, \ldots, t_k$ v točkah $A_1, \ldots, A_k$ je definirano takole: Izberimo izhodiščno točko O. Če je $t_1 + \cdots + t_k \neq 0$, potem obstaja točka P, za katero je

- $t_1\vec{OA}_1 + \cdots t_k\vec{OA}_k = (t_1 + \cdots + t_k)\vec{OP}.$

Ta točka P, ki ji pravimo ***težišče*** mas t_i v točkah A_i, je neodvisna od izbora izhodišča O, kar vidimo, če za neko drugo izhodišče O' dobimo po istem postopku namesto P točko P', ki ustreza enačbi

- $t_1\vec{O'A}_1 + \cdots t_k\vec{O'A}_k = (t_1 + \cdots + t_k)\vec{O'P'}.$

Potem z odštetjem druge enačbe od prve, upoštevaje $\vec{OA}_i - \vec{O'A}_i = \vec{OO'}$, dobimo

- $(t_1 + \cdots + t_k)\vec{OO'} = (t_1 + \cdots + t_k)(\vec{OP} - \vec{O'P'}),$

od koder po krajšanju s $(t_1 + \cdots + t_k)$ sledi $\vec{O'P'} = \vec{OP} - \vec{OO}$ in zato $\vec{OP'} = \vec{OO'} + \vec{O'P'} = \vec{OP'} + (\vec{OP} - \vec{OO'}) = \vec{OP}$ in $P = P'$.

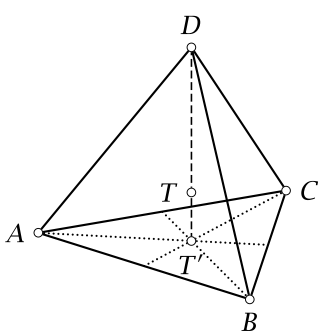
Če postavimo izhodišče O v točko P, dobimo $\Sigma_i t_i a_i = 0$. Če sta točki le dve, potem je $t_1\overrightarrow{PA}_1 = -t_2\overrightarrow{PA}_2$, tako da P leži na daljici A_1A_2 in jo deli v razmerju $t_2 : t_1$. Če je $t_1 = t_2$, potem je P središčna točka daljice A_1A_2.

Pri trikotniku $A_1A_2A_3$ imamo $(t_1 + t_2 + t_3)\overrightarrow{OP} = t_1\overrightarrow{OA}_1 + t_2\overrightarrow{OA}_2 + t_3\overrightarrow{OA}_3 = t_1\overrightarrow{OA}_1 + (t_2 + t_3)\overrightarrow{OQ}$, kjer je Q težišče mas t_2 v A_2 in t_3 v A_3. Tako lahko nadomestimo dve masi z eno dvojno v njunem težišču. Če je $t_1 = t_2 = t_3 (= 1)$, potem je Q središče A_2A_3, in P deli daljico A_1Q v razmerju $1 : 2$, kar sledi iz formule za težišče dveh mas (dokazane v prejšnjem odstavku), saj je tedaj $t_1\overrightarrow{OA} = -2t_1\overrightarrow{OQ}$.

Argumenta zdaj ni težko posplošiti na štiri enake mase v ogliščih tetraedra in videti, da težišče tetraedra deli višino skozi vrh D tetraedra v razmerju $1 : 3$. Težišče tetraedra namreč leži na spojnici vrha tetraedra D (kjer je masa 1) in težišča osnovne ploskve ABC (kjer je masa 3).

Metoda 2. Spomnimo se izreka, ki pove, kako se sekajo težiščnice v trikotniku. Sekajo se v isti točki in delijo druga drugo v razmerju $1 : 2$. Ali znamo dokazati to vsaj za enakostranični trikotnik? V enakostraničnem trikotniku so težiščnice tudi višine. Zato lahko enakostranični trikotnik s ploščino $av/2$ razdelimo na tri trikotnike z isto osnovnico a in isto višino x. Torej je $av/2 = 3ax/2$ in $x = v/3$.

Analogen sklep je uporaben tudi za pravilni tetraeder. Njegovo prostornino izračunamo po formuli za prostornino piramide z osnovno ploskvijo O in višino v takole: $O \cdot v/3$. A tetraeder lahko razdelimo na štiri skladne piramide z osnovno ploskvijo O in (zaenkrat še neznano) višino y, torej je $V = O \cdot v/3 = 4 \cdot O \cdot y/3$ in $y = v/4$. Preprosto, ali ne?



SLIKA 1.

Analiza rešitev. Katera rešitev vam je bolj všeč? Prva zahteva kar nekaj spretnosti pri računanju z vektorji. Druga temelji na uvidu, da pravilni tetraeder razpade na štiri skladne piramide z vrhom v težišču P in je torej razdalja težišča od vsake od ploskev tetraedra enaka višini y vsake od teh piramid. To sledi iz simetrij tetraedra $ABCD$; rotacija za tretjino polnega kota okrog višine na ravnino trikotnika ABC skozi vrh D namreč preslika piramido $ABPD$ v $BCPD$. Podobno vidimo, da so vse štiri piramide $ABPD$, $BCPD$, $CAPD$ in $ABCP$ skladne.

Literatura

[1] H. S. M. Coxeter, *Introduction to Geometry*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1969.

[2] M. Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, New York, 1972.

× × ×

Križne vsote

Rešitev s strani 7

	↓4	↓15					
→7	**3**	**4**				↓4	↓10
→6	**1**	**5**	↓10		↓17 →11	**3**	**8**
	→10	**6**	**4**	↓4 →9	**6**	**1**	**2**
		→18	**6**	**3**	**9**		
			→3	**1**	**2**		

× × ×