

# Plazemski plašč v poševnem magnetnem polju

Tomaž Gyergyek<sup>1,2</sup>, Jernej Kovačič<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Univerza v Ljubljani, Fakulteta za elektrotehniko, Tržaška 25, 1000 Ljubljana, Slovenija

<sup>2</sup>Inštitut Jožef Stefan, Jamova 39, 1000 Ljubljana, Slovenija

E-pošta: tomaz.gyergyek@fe.uni-lj.si

**Povzetek.** V delu najprej dokaj podrobno predstavimo dvotekočinski model plazemskega plašča pred planarno elektrodo, ki je potopljena v plazmo, v kateri je prisotno zunanje magnetno polje. Predstavimo tudi nekaj pojmov iz fizike plazme, predvsem ob misli na bralce, ki jim pojavi v plinski plazmi niso poznani. Nato predstavimo osnovne lastnosti modela – prostorske profile potenciala, električnega polja ter ionske in elektronske gostote. Nato pa podrobneje pregledamo odvisnost debeline Chodurine plasti, debeline plašča in ionskih Larmorjevih radijev od kota magnetnega polja. Izkaže se, da je odvisnost debeline plašča in Chodurine plasti od magnetnega kota nemonotona, ionski Larmorjev radij na robu plašča pa je istega reda velikosti kot debelina Chodurine plasti. Iz tega sklepamo, da je glavni mehanizem izgub ionov na končno elektrodo sekanje njihovih ciklotronskih orbit z elektrodo.

**Ključne besede:** plazma, plašč, Bohmov kriterij, magnetno polje, Chodurina plast

## Plasma sheath in an oblique magnetic field

A one-dimensional two-fluid model is presented and used to analyze the potential formation in front of a planar electrode immersed in a magnetized plasma. The basic properties of the model are illustrated by the potential, electric field and density profiles. The dependence of the Chodura layer and sheath thicknesses and of the ion Larmor radius on the magnetic field angle is examined. It is shown that dependence of the Chodura layer and sheath thicknesses on magnetic field angle is not monotonous, while the ion Larmor radius at the sheath edge is of the same order as the Chodura layer thickness. This leads to the conclusion that the ions are lost from the system mainly because their orbits intersect the surface of the electrode.

**Keywords:** Plasma, sheath, Bohm criterion, magnetic field, Chodura layer

## 1 UVOD

Plazma je ioniziran plin, sestavljen iz električno nabitih in nevtralnih delcev, ki je navzven električno nevtralen. Ker je coulombska sila, ki deluje med nabitimi delci v plazmi, dolgega dosega, je za plinsko plazmo značilno kolektivno obnašanje delcev. Rekli smo že, da je plazma makroskopsko gledano navzven električno nevtralna. Je pa električna nevtralnost lahko kršena lokalno na območjih, katerih značilno dolžinsko merilo je Debyejeva dolžina  $\lambda_D$ . Debyejevo dolžino je sicer mogoče definirati za vsako posamično vrsto nabitih delcev, ki sestavljajo plazmo, vendar pa je najpomembnejša Debyejeva dolžina za elektrone, ki je definirana takole (glej na primer [1]):

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k T_e}{n_0 e^2}}. \quad (1)$$

Pri tem je  $\epsilon_0$  influenčna konstanta,  $k$  je Boltzmannova konstanta,  $e_0$  je osnovni naboj,  $n_0$  pa je število elektronov na volumsko enoto v plazmi. Malomarno temu pravimo kar gostota plazme. Poleg Debyejeve dolžine je še en pomemben pojem, ki opredeljuje plinsko plazmo, to je plazemska frekvenca. Tudi plazemska frekvenca je definirana za vsako vrsto nabitih delcev posebej. Če imamo v plazmi poleg elektronov samo eno vrsto pozitivnih ionov, ki imajo po en osnovni naboj, zapišemo ustrezni plazemski frekvenci takole:

$$\omega_{pi} = \sqrt{\frac{n_0 e_0^2}{m_i \epsilon_0}}, \quad \omega_{pe} = \sqrt{\frac{n_0 e_0^2}{m_e \epsilon_0}}. \quad (2)$$

Pri tem je  $\omega_{pi}$  plazemska frekvenca za ione,  $\omega_{pe}$  pa je plazemska frekvenca za elektrone. Gre seveda za krožni frekvenci. Masa ionov je  $m_i$ , masa elektronov je  $m_e$ . Ker je razmerje mas  $m_i/m_e$  tipično reda velikosti  $10^4$ , seveda odvisno od vrste ionov, je tudi elektronska plazemska frekvenca praviloma za približno dva reda velikosti večja od ionske frekvence. Neki ionizirani plin lahko imenujemo plazma, če sta izpolnjena naslednja pogoja:

$$\lambda_D^3 n_0 \gg 1, \quad \omega_{pi} \gg \omega_{en}, \omega_m. \quad (3)$$

Število nabitih delcev v kocki, ki ima za stranico Debyejevo dolžino, mora biti veliko večje od 1, ionska plazemska frekvenca pa mora biti veliko večja od frekvence trkov med nabitimi in nevtralnimi delci. Če

drugi pogoj ni izpolnjen, se opazovani ionizirani plin obnaša kot navaden plin in ne kot plazma.

Na Zemlji plazmo redkokdaj srečamo v naravi. Znana primera sta strela in ionosfera. Plazmo na Zemlji v večini primerov ustvarimo umetno z različnimi načini ionizacije izbranih plinov, v vesolju pa je po mnenju nekaterih, več kot 99 % vse vidne snovi v stanju plazme. Plazmo uporabljamo pri številnih tehnoloških postopkih, glavno gonilo raziskav na področju plazme pa so prizadevanja za zgraditev fuzijskega reaktorja, v katerem bi pridobivali energijo s kontroliranim zlivanjem lahkih atomskih jeder v težja. V teh napravah bo plazma v vakuumski posodi omejena z močnim magnetnim poljem.

Rekli smo že, da je plazma kot celota makroskopsko električno nevtralna. Lahko pa je nevtralnost prekršena lokalno, na manjših območjih, katerih značilna dimenzija je Debyejeva dolžina  $\lambda_D$ , ki jo podaja izraz (1). To se vedno zgodi ob površini stene posode, ki plazmo omejuje, ali pa ob površini kakšne druge elektrode, ki je potopljena v plazmo. Prav zato, ker plazma skuša ohranjati makroskopsko nevtralnost, pozitivno in negativno nabiti delci pa iz plazme uhajajo z različno hitrostjo, se plazma električno nabije glede na steno tako, da uravnovesi izgube pozitivnih in negativnih delcev. Lažji elektroni uhajajo hitreje kot težji pozitivni ioni in praviloma se plazma nabije pozitivno glede na steno. Potencialni padec med plazmo in steno je praviloma lokaliziran na ozko območje ob steni, ki mu pravimo plazemski plašč [2]. Prav zato, ker je v fuzijskih plazemskih napravah plazma omejena z močnim magnetnim poljem, je modeliranje plazemskih plaščev pred elektrodami ob prisotnosti magnetnega polja zelo živahno področje raziskav [3–5].

V tem delu predstavljamo dvotekočinski model formiranja potenciala pred negativno planarno elektrodo, s katero magnetne silnice oklepajo skoraj poljuben kot. Edina omejitev je, da magnetne silnice ne smejo biti čisto vzporedne s površino elektrode. V naslednjem razdelku je model predstavljen dokaj podrobno. V tretjem razdelku predstavljamo nekaj rezultatov modela, v zadnjem pa podamo sklepe.

## 2 MODEL

Najpopolnejši način teoretskega opisovanja pojavov v plazmi bi bil, če bi za vsak delec poznali njegovo trenutno lego in hitrost. To seveda ni mogoče zaradi zelo velikega števila delcev. Naslednji v tej hierarhiji opisov je po natančnosti kinetični model. Pri kinetičnem modelu vsako vrsto nabitih delcev, ki so prisotni v plazmi, opisujemo s hitrostno porazdelitveno funkcijo  $f_\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  za delcev vrste  $\sigma$ , ki je funkcija kraja  $\mathbf{r}$ , hitrosti  $\mathbf{v}$ , in časa  $t$ . Ta funkcija podaja število delcev vrste  $\sigma$  na enoto prostornine, ki imajo v trenutku  $t$  na mestu  $\mathbf{r}$  hitrosti  $\mathbf{v}$  v intervalu med  $\mathbf{v}-(1/2)d\mathbf{v}$  in  $\mathbf{v}+(1/2)d\mathbf{v}$ . Odvisnost te funkcije od  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{v}$  in  $t$  določa Boltzmannova enačba:

$$\frac{\partial f_\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + \mathbf{a} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \left[ \frac{\delta f_\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)}{\delta t} \right]_{trki} . \quad (4)$$

Če predpostavimo, da je pospešek delca  $\mathbf{a}$  samo posledica delovanja Lorentzove sile, enačba (4) dobi obliko, ki se imenuje enačba Vlasova:

$$\frac{\partial f_p}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_p + \frac{q_p}{m_p} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_p = \left[ \frac{\delta f_p}{\delta t} \right]_{trki} . \quad (5)$$

Pri tem je  $q_\sigma$  naboj delca vrste  $\sigma$ ,  $m_\sigma$  je njegova masa,  $\mathbf{E}$  je jakost električnega polja in  $\mathbf{B}$  gostota magnetnega polja.

Pri študiju problematike plazemskih plaščev se je uveljavil tekočinski model, ki plazmo obravnava kot mešanico več vrst električno prevodnih tekočin. Teh tekočin je toliko, kolikor je v plazmi vrst nabitih delcev. Tekočinske enačbe dobimo kot momente enačbe Vlasova (5). Momente enačbe Vlasova izračunamo tako, da enačbo (5) pomnožimo s funkcijami hitrosti  $\chi(\mathbf{v})$  in integriramo po hitrostnem prostoru:

$$\int_{\mathbf{v}} \chi \left( \mathbf{v} \frac{\partial f_\sigma}{\partial t} \right) d^3 \mathbf{v}_s + \int_{\mathbf{v}} \chi (\mathbf{v} \cdot \nabla f_\sigma) d^3 \mathbf{v} + \int_{\mathbf{v}} \chi \left( \frac{q_\sigma}{m_\sigma} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_\sigma \right) d^3 \mathbf{v} = \int_{\mathbf{v}} \chi \left( \mathbf{v} \frac{\delta f_\sigma}{\delta t} \right)_{trki} d^3 \mathbf{v} . \quad (6)$$

Funkcije  $\chi(\mathbf{v})$  izbiramo po vrsti čedalje višje potence hitrosti tako, da so tenzorji vedno višjih redov. V ničtem redu je to masa delca  $\chi(\mathbf{v}) = m_\sigma \mathbf{v}^0 = m_\sigma$  in iz enačbe (6) dobimo kontinuitetno enačbo. V prvem redu izberemo gibalno količino delca,  $\chi(\mathbf{v}) = m_\sigma \mathbf{v}$ , in iz (6) dobimo enačbo gibanja. Temu lahko sledi tenzor kinetične energije delca  $\chi(\mathbf{v}) = \mathbf{W}_k = (1/2) m_\sigma (\mathbf{v} \otimes \mathbf{v})$  in iz enačbe (6) dobimo energijsko enačbo. Simbol  $\otimes$  pomeni tenzorsko množenje vektorja  $\mathbf{v}$  s samim seboj. S takšnim nizanjem momentov iz enačbe (6) dobimo sistem parcialnih diferencialnih enačb, v katerih nastopajo neznane funkcije kraja in časa. Te funkcije so zaporedni momenti porazdelitvene funkcije in na splošno so tudi tenzorji vedno višjih redov. Ničti moment je gostota delcev vrste  $\sigma$  in je skalar:

$$n_\sigma(\mathbf{r}, t) = \int_{\mathbf{v}} f_\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} , \quad (7)$$

Prvi moment je povprečna hitrost toka delcev vrste  $\sigma$  in je vektor:

$$\langle \mathbf{v} \rangle_\sigma = \mathbf{u}_\sigma = \frac{\int_{\mathbf{v}} \mathbf{v} f_\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}}{n_\sigma(\mathbf{r}, t)} . \quad (8)$$

Drugi moment je gostota toka gibalne količine  $\Pi_\sigma$  in je tenzor drugega reda:

$$\Pi_\sigma = m_\sigma \int_{\mathbf{v}} (\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) f_\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} . \quad (9)$$

Gostota energijskega toka bi bila že tenzor tretjega reda. Na desni strani enačbe (6) pa v ničtem redu dobimo funkcijo izvira  $S_\sigma$  za delce vrste  $\sigma$ :

$$S_\sigma(\mathbf{r}, t) = \int_{\mathbf{v}} \left( \frac{\delta f_\sigma}{\delta t} \right)_{trki} d^3\mathbf{v}. \quad (10)$$

Ta funkcija podaja razliko med številom nastalih in izginulih delcev vrste  $\sigma$  na enoto prostornine in na enoto časa. V prvem redu dobimo gostoto sile  $\mathbf{A}_\sigma$  na delce vrste  $\sigma$ , ki na te delce deluje zaradi njihovih elastičnih trkov z delci vseh drugih vrst, ki so prisotni v plazmi:

$$\mathbf{A}_\sigma(\mathbf{r}, t) = m_\sigma \int_{\mathbf{v}} \mathbf{v} \left( \frac{\delta f_\sigma}{\delta t} \right)_{trki} d^3\mathbf{v}. \quad (11)$$

Ko z uporabo enačbe (6) nizamo zaporedne momente enačbe (5), nastaja sistem parcialnih diferencialnih enačb. Izkaže pa se, da imamo vedno eno neznano funkcijo več, kot je enačb. V kontinuitetni enačbi nastopata gostota  $n_\sigma$  in povprečna hitrost  $\mathbf{u}_\sigma$ . V gibalni enačbi nastopajo  $n_\sigma$ ,  $\mathbf{u}_\sigma$  in divergenca tenzorja  $\mathbf{\Pi}_\sigma$ . Zato moramo nizanje momentov enačbe (5) v nekem redu odrezati in sprejeti neko predpostavko o zadnji neznani funkciji, ki je najvišji moment porazdelitvene funkcije. Ustavili se bomo pri enačbi gibanja in razložili, kako opravimo z divergenco  $\nabla \cdot \mathbf{\Pi}_\sigma$  tenzorja gostote toka gibalne količine. Hitrost  $\mathbf{v}_\sigma$  delcev vrste  $\sigma$  lahko vedno predstavimo kot vsoto povprečnega dela  $\mathbf{u}_\sigma$  in termičnega dela  $\mathbf{w}_\sigma$ :

$$\mathbf{v}_\sigma = \mathbf{u}_\sigma + \mathbf{w}_\sigma. \quad (12)$$

Pri tem je seveda:

$$\langle \mathbf{w}_\sigma \rangle = \frac{\int_{\mathbf{v}} \left( \mathbf{v} - \frac{\int \mathbf{v} f_\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}}{n_\sigma(\mathbf{r}, t)} \right) f_\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}}{n_\sigma(\mathbf{r}, t)} = 0. \quad (13)$$

V našem modelu najprej tenzor gostote toka gibalne količine  $\mathbf{\Pi}_\sigma$  nadomestimo samo z njegovim termičnim delom, to je tenzorjem tlaka  $\mathbf{P}_\sigma$ , ki je podan z izrazom

$$\mathbf{P}_\sigma = m_\sigma n_\sigma \langle \mathbf{w}_\sigma \otimes \mathbf{w}_\sigma \rangle. \quad (14)$$

Pri tem oklepaj  $\langle \rangle$  pomeni povprečje v smislu izrazov (8) in (13). V naslednjem koraku definiramo hidrostatični tlak  $p_\sigma$  kot tretjino sledi tenzorja tlaka. V kartezičnih koordinatah bi torej zapisali hidrostatični tlak takole:

$$p_\sigma = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 P_{\sigma jj} = \frac{1}{3} (P_{\sigma xx} + P_{\sigma yy} + P_{\sigma zz}), \quad (15)$$

oziroma:

$$p_\sigma = \frac{1}{3} n_\sigma m_\sigma \langle w_{\sigma x}^2 + w_{\sigma y}^2 + w_{\sigma z}^2 \rangle = \frac{1}{3} n_\sigma m_\sigma w_\sigma^2. \quad (16)$$

V zadnjem koraku pa zunaj diagonalne elemente tenzorja  $\mathbf{P}_\sigma$  izenačimo z 0. Zunajdiagonalni elementi tenzorja  $\mathbf{P}_\sigma$  opisujejo sile, ki so posledica viskoznosti plazme, viskoznost v plazmi pa je dejansko največkrat zanemarljivo majhna. Tako divergenca  $\nabla \cdot \mathbf{\Pi}_\sigma$

nadomestimo z gradientom tlaka  $\nabla p_\sigma$ . Gradient tlaka  $\nabla p_\sigma$  pa je sorazmeren z gradientom gostote delcev  $\nabla n_\sigma$ . Če se želimo prepričati, ali je zadnja trditev resnična, moramo definirati absolutno temperaturo  $T_\sigma$  za delce vrste  $\sigma$ . Le-ta podaja tisti del njihove povprečne kinetične energije, ki je posledica termičnega gibanja teh delcev. Po ekviparticijskem teoremu [6] je z vsako od prostostnih stopenj gibanja povezana termična energija  $kT_{\sigma j}/2$ , kjer je  $j=x, y, z$ , torej:

$$\frac{1}{2} kT_{\sigma j} = \frac{1}{2} m_\sigma \langle w_{\sigma j}^2 \rangle. \quad (17)$$

Pri tem je  $k$  Boltzmannova konstanta. Če je porazdelitvena funkcija izotropna, potem je  $w_{\sigma x}^2 = w_{\sigma y}^2 = w_{\sigma z}^2 = w_\sigma^2/3$  in so vsi diagonalni elementi tenzorja tlaka med seboj enaki. Potem je  $p_\sigma = n_\sigma m_\sigma \langle w_{\sigma j}^2 \rangle$ , kjer je  $j=x, y, z$ . Tlak je potem:

$$p_\sigma = n_\sigma kT_\sigma. \quad (18)$$

Če je temperatura konstantna, potem je  $\nabla p_\sigma = kT_\sigma \nabla n_\sigma$ . V magnetizirani plazmi je predpostavka o izotropnosti porazdelitvene funkcije seveda zelo šibka, vendar jo moramo sprejeti, da ohranimo model dovolj preprost za reševanje.

V tem delu predpostavimo, da je plazma sestavljena iz negativno nabitih elektronov in samo ene vrste pozitivnih ionov, ki imajo en pozitiven osnovni naboj. Vzamemo ione devterija. Plazma je torej mešanica ionske in elektronske tekočine. Velja  $\sigma = i, e$  in  $q_\sigma = \pm e_0$ . Zgornji znak velja za ione, spodnji pa za elektrone. Ko iz enačbe (6) izračunamo ničta momenta, dobimo kontinuitetni enačbi za ione in elektrone:

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla \cdot (n_i \mathbf{u}_i) = S_i, \quad (19)$$

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \mathbf{u}_e) = S_e, \quad (20)$$

Prva momenta dasta enačbi gibanja:

$$m_i n_i \left( \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} + (\mathbf{u}_i \cdot \nabla) \mathbf{u}_i \right) = n_i e_0 (\mathbf{E} + \mathbf{u}_i \times \mathbf{B}) - \nabla p_i + \mathbf{A}_i - m_i n_i S_i, \quad (21)$$

$$m_e n_e \left( \frac{\partial \mathbf{u}_e}{\partial t} + (\mathbf{u}_e \cdot \nabla) \mathbf{u}_e \right) = -n_e e_0 (\mathbf{E} + \mathbf{u}_e \times \mathbf{B}) - \nabla p_e + \mathbf{A}_e - m_e n_e S_e. \quad (22)$$

Sistem enačb (19) - (22) dopolnjuje še Poissonova enačba, ki določa krajevno odvisnost elektrostatskega potenciala v plazmi  $\Phi(\mathbf{r})$ :

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) = -\frac{e_0}{\epsilon_0} (n_i(\mathbf{r}) - n_e(\mathbf{r})). \quad (23)$$

Električno polje  $\mathbf{E}$  je s potencialom  $\Phi$  povezano prek negativnega gradienta:

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi. \quad (24)$$

Najprej povejmo, da v našem modelu obravnavamo samo stacionarno situacijo in da torej vse člene, ki

vsebujejo odvode po času  $\partial/\partial t$ , zanemarimo. Če pogledamo sistem enačb (19)–(22) ob izbranih parcialnih odvodih po času, vidimo, da gre za sistem štirih navadnih diferencialnih enačb, ki pa vsebuje šest neznanih funkcij kraja. Te so:  $n_i(\mathbf{r})$ ,  $n_e(\mathbf{r})$ ,  $\mathbf{u}_i(\mathbf{r})$ ,  $\mathbf{u}_e(\mathbf{r})$ ,  $p_i(\mathbf{r})$  in  $p_e(\mathbf{r})$ . Pri obeh tlakih si zdaj pomagamo z enačbo (18). Treba se je zavedati, da sta na splošno tudi temperaturi  $T_i$  in  $T_e$  funkciji kraja. Vendar pa bomo predpostavili, da sta to dani konstanti. Gradienta tlakov v enačbah (21) in (22) potem zapišemo takole:

$$\nabla p_i = kT_i \nabla n_i, \quad \nabla p_e = kT_e \nabla n_e. \quad (25)$$

Dodajmo še eno pripombo. Če bi dopustili, da je tudi  $T_i$  funkcija kraja, bi gradient ionskega tlaka zapisali takole:

$$\nabla p_i = kT_i \nabla n_i + kn_i \nabla T_i. \quad (26)$$

Enačba (26) omogoča, da definiramo politropsko funkcijo  $\kappa(\mathbf{r})$  [7] takole:

$$\nabla p_i(\mathbf{r}) = \kappa(\mathbf{r}) kT_i(\mathbf{r}) \nabla n_i(\mathbf{r}). \quad (27)$$

Iz enačb (26) in (27) vidimo, da je:

$$\kappa(\mathbf{r}) = 1 + \frac{n_i(\mathbf{r})}{T_i(\mathbf{r})} \frac{dT_i}{dn_i}. \quad (28)$$

V našem modelu pa vzamemo, da je  $T_i$  konstanta, temu pa ustreza  $\kappa = 1$ . Kadar je vrednost  $\kappa$  konstantna, ne govorimo o politropski funkciji, ampak o politropskem koeficientu. Politropski koeficient ustreza razmerju specifičnih toplot pri konstantnem tlaku in pri konstantnem volumnu, kinetični teoriji navadnih plinov [6],  $\kappa = C_p/C_v$ . Kadar je ionski tok izotermen, kot je v našem primeru, vzamemo  $\kappa = 1$ . Kadar pa je ionski tok adiabatan, vzamemo  $\kappa = 3$  [8].

Poglejmo zdaj gostoti »sil trenja«  $\mathbf{A}_i$  in  $\mathbf{A}_e$ . Ionska in elektronska tekočina delujeta druga na drugo s silo, ki je po svoje podobna trenju med njima, vzrok zanjo pa so coulombski trki med ioni in elektroni. Pri takšnih trkih ioni in elektroni med seboj izmenjavajo gibalno količino. V podrobnosti opisa coulombskih trkov se ne bomo spuščali. Zelo dober opis coulombskih trkov je mogoče najti na primer v [9]. Pri študiju teh trkov je treba ločiti obravnavo za dva primera. V prvem primeru obravnavamo ione kot izstrelke, ki zadevajo elektronske tarče. Število takih trkov na časovno enoto označimo  $v_{ie}$ . Gostota gibalne količine, ki jo na časovno enoto ioni zaradi takšnih trkov oddajo, je

$$\mathbf{A}_i = -m_i n_i v_{ie} (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e). \quad (29)$$

Če pa elektrone obravnavamo kot izstrelke, ki zadevajo ionske tarče, je število takšnih trkov na časovno enoto enako  $v_{ei}$ . Gostota gibalne količine, ki jo zaradi takšnih trkov oddajo elektroni, pa je:

$$\mathbf{A}_e = -m_e n_e v_{ei} (\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i). \quad (30)$$

V našem primeru so v plazmi prisotni samo ioni in elektroni, zato se mora njihova skupna gibalna količina ohraniti. To pa prinese zahtevo:

$$m_i n_i v_{ie} = m_e n_e v_{ei}. \quad (31)$$

Končno se posvetimo še funkcijama izvira  $S_i$  in  $S_e$ . Nastajanje in izginjanje ionov in elektronov določa prevladujoči mehanizem ionizacije in rekombinacije. Če so na primer glavni vzrok ionizacije elektromagnetni valovi, ki padajo na nevtralne atome ali molekule izbranega plina enakomerno z vseh strani, je število parov ion elektron, ki nastajajo na enoto časa in na enoto prostornine, po vsem sistemu bolj ali manj enako. Število nastalih parov ion elektron bo sorazmerno gostoti nevtralnih atomov ali molekul  $n_n$  ter gostoti toka vpadnega valovanja  $J_0$ . Število ionov in elektronov, ki se na enoto časa in prostornine rekombinirajo nazaj v nevtralne atome in zato izginejo iz plazme, pa je sorazmerno s produktom gostote ionov in elektronov  $n_i n_e$ . Ker imamo v plazmi samo ione in elektrone, je jasno, da morata biti funkciji izvira  $S_i$  in  $S_e$  enaki, saj se ne more zgoditi, da pri ionizaciji nastal samo ion, elektron pa ne, ali pa pri rekombinaciji izginil samo elektron, ion pa bi ostal. V tem primeru bi funkciji izvira torej modelirali takole:

$$S_i = S_e = \gamma_1 J_0 n_n - \gamma_2 n_i n_e. \quad (32)$$

Pri tem sta  $\gamma_1$  in  $\gamma_2$  ustrezni sorazmernostni konstanti. Jasno je, da je funkcija izvira (32) precej zapletena. Zato, da bi model ostal dovolj preprost, funkciji (32) nadomestimo s preprostejšo:

$$S_i = S_e = \frac{n_n}{\tau}. \quad (33)$$

Pri tem je  $\tau$  časovna konstanta, pravimo ji ionizacijski čas, njena vrednost pa je takšna, da že upošteva tako rekombinacijo kot gostoto toka vpadlega elektromagnetnega valovanja. Njena prednost je v tem, da je preprosta, ker je konstantna.

Drugi pogosti mehanizem ionizacije pa so ionizacijski trki elektronov in nevtralnih delcev. V tem primeru je število na novo nastalih parov ion elektron sorazmerno s produktom gostote nevtralnih delcev  $n_n$  in gostote elektronov  $n_e$ . Število ionov in elektronov, ki se na enoto časa in prostornine rekombinirajo nazaj v nevtralne atome in zato izginejo iz plazme, pa je sorazmerno s produktom gostote ionov in elektronov  $n_i n_e$ . Funkciji izvira sta torej takšni

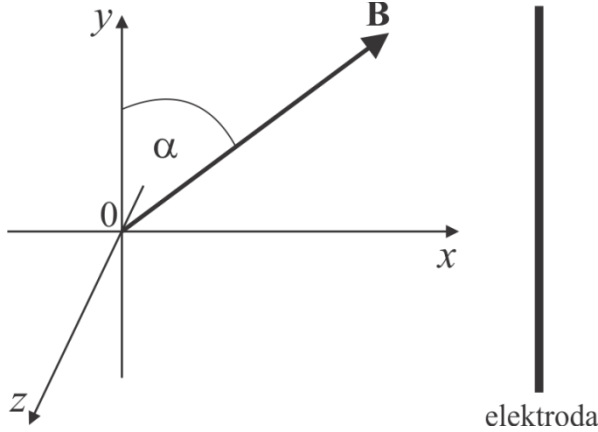
$$S_i = S_e = \gamma_1 n_n n_e - \gamma_2 n_i n_e. \quad (34)$$

Pri tem sta  $\gamma_1$  in  $\gamma_2$  ustrezni sorazmernostni konstanti. Tudi funkciji izvira (34) bi model po nepotrebem preveč zapletli. Zato ju nadomestimo s preprostejšima:

$$S_i(\mathbf{r}) = S_e(\mathbf{r}) = \frac{n_e(\mathbf{r})}{\tau}. \quad (35)$$

Pri tem je  $\tau$  časovna konstanta, katere vrednost je takšna, da že upošteva tudi rekombinacijo in gostoto nevtralnih delcev. Bistvena razlika med funkcijama (33) in (35) je v tem, da je prva konstantna, druga pa sorazmerna z gostoto elektronov. Prvi (33) pravimo konstantni izvir, drugi (35) pa elektronski izvir. Seveda pa je mogoče konstruirati še drugačne fizikalno smiselne funkcije izvira. Omenimo samo še en primer, ki je uporaben, kadar so glavni mehanizem ionizacije

elektromagnetni valovi, ki pa se gibljejo skozi plazmo v smeri pozitivne osi  $x$ , pravokotno na elektrodo, pred katero se formira plašč. Na svoji poti se elektromagnetni valovi absorbirajo, kar pomeni, da gostota toka elektromagnetnega valovanja z  $x$  eksponentno pojema. Če upoštevamo še rekombinacije ionov in elektronov, bi funkciji izvira zapisali takole:



Slika 1: Ilustracija koordinatnega sistema. Elektroda leži v ravnini  $yz$ , magnetno polje pa v ravnini  $xy$  in ima komponente  $\mathbf{B} = B(\sin\alpha, \cos\alpha, 0)$ .

$$S_i = S_e = \gamma_1 J_0 n_i \exp\left(-\frac{x}{l_a}\right) - \gamma_2 n_i n_e. \quad (36)$$

Pri tem je  $l_a$  absorpcijska dolžina. Tudi ti dve funkciji izvira seveda poenostavimo v takšno obliko:

$$S_i = S_e = \frac{n_n}{\tau} \exp\left(-\frac{x}{l_a}\right). \quad (37)$$

Funkcijama izvira (37) pravimo eksponentni izvir.

Preden bo model primeren za reševanje, ga moramo še dodatno poenostaviti. Rekli smo že, da se zanimamo samo za stacionarna stanja, ter izbrisali člene, ki vsebujejo odvode po času. Vendar pa gre pri enačbah (19)–(24) še vedno za parcialne diferencialne enačbe. Zato se še bolj omejimo, in sicer na obravnavo samo v eni dimenziji. Električno polje ima samo eno komponento v smeri osi  $x$ . Laplaceov in gradientni operator nadomestimo z odvodi po  $x$ . Naredimo torej zamenjave:

$$\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{e}_x E = -\frac{d\Phi}{dx} \mathbf{e}_x, \quad \nabla \rightarrow \mathbf{e}_x \frac{d}{dx}, \quad \nabla^2 \rightarrow \frac{d^2}{dx^2}. \quad (38)$$

Pri tem je  $\mathbf{e}_x = (1, 0, 0)$  enotski vektor v smeri osi  $x$ . Tako parcialne diferencialne enačbe spremenimo v navadne.

Nato postavimo koordinatni sistem tako, da elektroda leži v ravnini  $yz$  in je torej pravokotna na os  $x$ . Magnetno polje leži v ravnini  $xy$  in oklepa kot  $\alpha$  z osjo  $y$  tako, kot kaže slika 1. Komponente magnetnega polja so torej  $\mathbf{B} = B(\sin\alpha, \cos\alpha, 0)$ . Hitrosti ionskega in elektronskega toka pa imata na splošno vse tri komponente  $\mathbf{u}_{ie} = (u_{iex}, u_{iey}, u_{iez})$ . Zanimata nas projekciji hitrosti  $\mathbf{u}_{ie}$  v smeri pravokotno na magnetno polje in v

smeri vzporedno z magnetnim poljem. Označimo ju  $u_{perp}$  in  $u_{par}$ . Indeks  $par$  in  $perp$  izhajata iz angleških oznak *parallel* in *perpendicular*, indeksov  $i$  in  $e$  pa ne pišemo, kajti enačbe (39)–(41) veljajo za vsako izmed obeh vrst delcev posebej. Zanimata pa nas seveda samo velikosti obeh projekcij hitrosti. Velikost vzporedne projekcije hitrosti izračunamo takole:

$$u_{par} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}}{B} = u_x \sin\alpha + u_y \cos\alpha, \quad (39)$$

velikost pravokotne projekcije pa takole:

$$u_{perp} = \left| \frac{\mathbf{B}}{B} \times \left( \mathbf{u} \times \frac{\mathbf{B}}{B} \right) \right| = \sqrt{(u_x \cos\alpha - u_y \sin\alpha)^2 + u_z^2}. \quad (40)$$

Smiselno je definirati še vpadni kot  $\beta$

$$\beta = \arctan\left(\frac{u_x}{u_y}\right). \quad (41)$$

Definiciji ciklotronskih krožnih frekvenc za ione in elektrone sta

$$\omega_{ci} = \frac{e_0 B}{m_i}, \quad \omega_{ce} = \frac{e_0 B}{m_e}. \quad (42)$$

Larmorjeva radija za ione in elektrone pa sta potem

$$r_{Li} = \frac{u_{iperp}}{\omega_{ci}}, \quad r_{Le} = \frac{u_{eperp}}{\omega_{ce}}. \quad (43)$$

Naslednji korak je zapis enačb (19)–(23) po komponentah ob upoštevanju enačb (25), (29), (30), (31), (38) in izbrisu odvodov po času:

$$\frac{dn_i}{dx} u_{ix} + n_i \frac{du_{ix}}{dx} = S_i, \quad (44)$$

$$\frac{dn_e}{dx} u_{ex} + n_e \frac{du_{ex}}{dx} = S_e, \quad (45)$$

$$\begin{aligned} m_i n_i u_{ix} \frac{du_{ix}}{dx} &= -e_0 n_i \frac{d\Phi}{dx} - e_0 B \cos\alpha n_i u_{iz} - kT_i \frac{dn_i}{dx} - \\ &\quad - m_e n_e v_{ei} (u_{ix} - u_{ex}) - m_i u_{ix} S_i, \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} m_e n_e u_{ex} \frac{du_{ex}}{dx} &= e_0 n_e \frac{d\Phi}{dx} + e_0 B \cos\alpha n_e u_{ez} - kT_e \frac{dn_e}{dx} - \\ &\quad - m_e n_e v_{ei} (u_{ex} - u_{ix}) - m_e u_{ex} S_e, \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} m_i n_i u_{ix} \frac{du_{iy}}{dx} &= e_0 B \sin\alpha n_i u_{iz} - \\ &\quad - m_e n_e v_{ei} (u_{iy} - u_{ey}) - m_i u_{iy} S_i, \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} m_e n_e u_{ex} \frac{du_{ey}}{dx} &= -e_0 B \sin\alpha n_e u_{ez} - \\ &\quad - m_e n_e v_{ei} (u_{ey} - u_{iy}) - m_e u_{ey} S_e, \end{aligned} \quad (49)$$

$$m_i n_i u_{ix} \frac{du_{iz}}{dx} = e_0 B n_i (u_{ix} \cos \alpha - u_{iy} \sin \alpha) - (50)$$

$$- m_e n_e v_{ei} (u_{iz} - u_{ez}) - m_i u_{iz} S_i,$$

$$m_e n_e u_{ex} \frac{du_{ez}}{dx} = -e_0 B n_e (u_{ex} \cos \alpha - u_{ey} \sin \alpha) - (51)$$

$$- m_e n_e v_{ei} (u_{ez} - u_{iz}) - m_e u_{ez} S_e,$$

$$\frac{d^2 \Phi}{dx^2} = -\frac{e_0}{\epsilon_0} (n_i - n_e). \quad (52)$$

Sistem enačb (44)–(52) je sistem devetih navadnih diferencialnih enačb za devet neznanih funkcij spremenljivke  $x$ . Gre za sistem, ki je močno nelinearen, saj v nekaterih členih nastopajo celo trojni produkti neznanih funkcij in njihovih odvodov. Zato je smiselno samo numerično reševanje. Pred tem pa z uvedbo novih, brezdimenzijskih spremenljivk enačbe (44)–(52) spravimo v obliko, primernejšo za numerično reševanje. Uvedemo spremenljivke:

$$c_0 = \sqrt{\frac{kT_e}{m_i}}, \quad L = c_0 \tau, \quad \epsilon = \frac{\lambda_D}{L},$$

$$X = \frac{x}{L}, \quad \Psi = \frac{e_0 \Phi}{kT_e}, \quad K = \omega_{ci} \tau, \quad Z = v_{ei} \tau,$$

$$\mu = \frac{m_e}{m_i}, \quad \Theta = \frac{T_i}{T_e}, \quad \eta = -\frac{d\Psi}{dX}, \quad N_i = \frac{n_i}{n_0},$$

$$N_e = \frac{n_e}{n_0}, \quad A = \frac{n_n}{n_0}, \quad V_{ix} = \frac{u_{ix}}{c_0}, \quad V_{iy} = \frac{u_{iy}}{c_0}, \quad (53)$$

$$V_{iz} = \frac{u_{iz}}{c_0}, \quad V_{ex} = \frac{u_{ex}}{c_0}, \quad V_{ey} = \frac{u_{ey}}{c_0}, \quad L_a = \frac{l_a}{L},$$

$$V_{ez} = \frac{u_{ez}}{c_0}, \quad V_{iperp} = \frac{u_{iperp}}{c_0}, \quad V_{ipar} = \frac{u_{ipar}}{c_0},$$

$$R_{Li} = \frac{r_{Li}}{L} = \frac{V_{iperp}}{K}, \quad R_{Le} = \frac{r_{Le}}{L} = \frac{\mu V_{eperp}}{K}.$$

Hitrost  $c_0$  je umeritvena hitrost, ki pa ni enaka ionski zvočni hitrosti [1], ki jo podaja izraz:

$$c_S = \sqrt{\frac{k(T_e + \kappa T_i)}{m_i}}. \quad (54)$$

Z uporabo spremenljivk (53) in ob upoštevanju, da je  $\kappa = 1$ , brezdimenzijsko obliko ionske zvočne hitrosti zapišemo takole:

$$V_S = \frac{c_S}{c_0} = \sqrt{1 + \Theta}. \quad (55)$$

Ionizacijska dolžina  $L = c_0 \tau$ , s katero smo umerili krajevno koordinato  $x$ , je produkt umeritvene hitrosti  $c_0$  in ionizacijskega časa  $\tau$ . Takšna umeritev krajevne koordinate onemogoča, da bi za funkciji izvira izbrali najpreprostejšo možnost, namreč  $S_i = S_e = 0$ . V tem

primeru bi namreč  $\tau$  in s tem tudi  $L$  postala neskončno velika.

Z uporabo spremenljivk (53) sistem enačb (44)–(52) zapišemo takole:

$$\frac{d}{dX} (N_i V_{ix}) = s, \quad (56)$$

$$\frac{d}{dX} (N_e V_{ex}) = s, \quad (57)$$

$$N_i V_{ix} \frac{dV_{ix}}{dX} = -N_i \frac{d\Psi}{dX} - \Theta \frac{dN_i}{dX} - K \cos \alpha N_i V_{iz} - (58)$$

$$- \mu Z N_e (V_{ix} - V_{ex}) - V_{ix} s,$$

$$N_e V_{ex} \frac{dV_{ex}}{dX} = \frac{1}{\mu} N_e \frac{d\Psi}{dX} - \frac{1}{\mu} \frac{dN_e}{dX} + \frac{K}{\mu} \cos \alpha N_e V_{ez} - (59)$$

$$- Z N_e (V_{ex} - V_{ix}) - V_{ex} s,$$

$$N_i V_{ix} \frac{dV_{iy}}{dX} = K \sin \alpha N_i V_{iz} - \mu Z N_e (V_{iy} - V_{ey}) - V_{iy} s, \quad (60)$$

$$N_e V_{ex} \frac{dV_{ey}}{dX} = -\frac{K}{\mu} \sin \alpha N_e V_{ez} - Z N_e (V_{ey} - V_{iy}) - V_{ey} s, \quad (61)$$

$$N_i V_{ix} \frac{dV_{iz}}{dX} = K N_i (V_{ix} \cos \alpha - V_{iy} \sin \alpha) - (62)$$

$$- \mu Z N_e (V_{iz} - V_{ez}) - V_{iz} s,$$

$$N_e V_{ex} \frac{dV_{ez}}{dX} = -\frac{K}{\mu} N_e (V_{ex} \cos \alpha - V_{ey} \sin \alpha) - (63)$$

$$- Z N_e (V_{ez} - V_{iz}) - V_{ez} s,$$

$$\epsilon^2 \frac{d^2 \Psi}{dX^2} = N_e - N_i. \quad (64)$$

Pri tem je  $s$  brezdimenzijska funkcija izvira, ki je seveda enaka za ione in elektrone. Če izberemo konstanten izvir (33), je

$$s = A. \quad (65)$$

Če izberemo elektronski izvir (35), je

$$s = N_e. \quad (66)$$

Če pa izberemo eksponentni izvir (37), je

$$s = A \exp\left(-\frac{X}{L_a}\right). \quad (67)$$

Včasih nas zanimajo samo rešitve v tistem delu, kjer električna nevtralnost plazme še ni prekršena – imenuje se plazemski predplašč. V tem primeru Poissonovo enačbo (64) nadomestimo z zahtevo po nevtralnosti plazme:

$$N_i(X) = N_e(X) \equiv N(X). \quad (68)$$

Sistem enačb (56)–(63) potem zapišemo takole:

$$\frac{d}{dX}(NV_{ix}) = s, \quad (69)$$

$$\frac{d}{dX}(NV_{ex}) = s, \quad (70)$$

$$NV_{ix} \frac{dV_{ix}}{dX} = -N \frac{d\Psi}{dX} - \Theta \frac{dN}{dX} - K \cos \alpha NV_{iz} - \mu ZN(V_{ix} - V_{ex}) - V_{ix}s, \quad (71)$$

$$NV_{ex} \frac{dV_{ex}}{dX} = \frac{1}{\mu} N \frac{d\Psi}{dX} - \frac{1}{\mu} \frac{dN}{dX} + \frac{K}{\mu} \cos \alpha NV_{ez} - ZN(V_{ex} - V_{ix}) - V_{ex}s, \quad (72)$$

$$NV_{ix} \frac{dV_{iy}}{dX} = K \sin \alpha NV_{iz} - \mu ZN(V_{iy} - V_{ey}) - V_{iy}s, \quad (73)$$

$$NV_{ex} \frac{dV_{ey}}{dX} = -\frac{K}{\mu} \sin \alpha NV_{ez} - ZN(V_{ey} - V_{iy}) - V_{ey}s, \quad (74)$$

$$NV_{ix} \frac{dV_{iz}}{dX} = KN(V_{ix} \cos \alpha - V_{iy} \sin \alpha) - \mu ZN(V_{iz} - V_{ez}) - V_{iz}s, \quad (75)$$

$$NV_{ex} \frac{dV_{ez}}{dX} = -\frac{K}{\mu} N(V_{ex} \cos \alpha - V_{ey} \sin \alpha) - ZN(V_{ez} - V_{iz}) - V_{ez}s. \quad (76)$$

Sistem enačb (56)–(64) je sistem devetih navadnih diferencialnih enačb za devet neznanih funkcij krajevne koordinate  $X$ :  $N_i(X)$ ,  $N_e(X)$ ,  $V_{ix}(X)$ ,  $V_{iy}(X)$ ,  $V_{iz}(X)$ ,  $V_{ex}(X)$ ,  $V_{ey}(X)$ ,  $V_{ez}(X)$  in  $\Psi(X)$ . Sistem (69)–(76) pa je sistem osem navadnih diferencialnih enačb za osem neznanih funkcij spremenljivke  $X$ . Oba sistema lahko rešujemo samo numerično. Za enolično rešitev sistema (56)–(64) moramo določiti 10 robnih pogojev, kajti Poissonova enačba (64) je drugega reda. Za sistem (69)–(76) pa je treba izbrati osem robnih pogojev. Integracija obeh sistemov se začne pri  $X = 0$  in gre v smeri pozitivne osi  $X$  proti elektrodi. Smiselno izbiro robnih pogojev pri  $X = 0$  določajo fizikalne zahteve. Pri  $X = 0$  plazma ne čuti motečega vpliva elektrode, zato je tam zagotovo električno nevtralna, kar da zahtevo:

$$N_i(0) = N_e(0) = N(0) = 1. \quad (77)$$

Potencial plazme na tem mestu postavimo na ničlo, kajti za izhodišče štetja potenciala je najbolj smiselno izbrati plazemski potencial. Prav tako na tem mestu ne sme biti električnega polja. Iz tega sledi:

$$\Psi(0) = \eta(0) = 0. \quad (78)$$

Pri  $X = 0$ , plazma ne čuti vpliva elektrode, zato tam ne bi smelo biti nobenega usmerjena toka ionov ali elektronov. Torej bi morale biti vse hitrosti na tem mestu enake 0. Žal pa je v tem primeru mogoča samo trivialna rešitev. Izkaže se, da moramo vsaj komponenti

$x$  hitrosti obeh vrst delcev izbrati pozitivni in končno veliki. Robni pogoj za hitrosti zapišemo takole:

$$V_{ix}(0) = V_{i0}, \quad V_{ex}(0) = V_{e0}, \quad (79)$$

$$V_{iy}(0) = V_{iz}(0) = V_{ey}(0) = V_{ez}(0) = 0.$$

Fizikalni argumenti govorijo v prid izbire  $V_{i0} = V_{e0}$ , kajti na ta način dosežemo, da je gostota električnega toka

$$\mathbf{J} = N_i \mathbf{V}_i - N_e \mathbf{V}_e, \quad (80)$$

pri  $X = 0$  enaka 0. Kar se tiče samo matematičnih argumentov, sta začetni hitrosti  $V_{i0}$  in  $V_{e0}$  sta lahko enaki ali različni, morata pa biti pozitivni in končno veliki.

Kot neodvisne parametre izberemo tiste, ki bi jih lahko nastavljali ali pa vsaj vplivali nanje tudi v eksperimentu. To so zagotovo gostota in smer magnetnega polja ter masa ionov. Z načinom proizvodnje plazme pa lahko vplivamo tudi na gostoto plazme in temperaturo obeh vrst delcev in preko tega posredno tudi na frekvenco coulombskih trkov. Parametri, ki jih v modelu torej izberemo kot neodvisne, so:  $K$ ,  $\alpha$ ,  $\mu$ ,  $\Theta$ ,  $Z$  in  $\varepsilon$ . Prav tako izberemo funkcijo izvira  $s$  in če izberemo (65) ali (67), kot neodvisna parametra nastavljam tudi  $A$  in  $L_a$ . Pri izbiri teh dveh parametrov je svoboda res velika. Edina matematična omejitev je, da morata biti pozitivna. Fizikalno smiselna izbira pa narekuje, da naj  $A$  ne bo večji od 1, to je od gostote plazme pri  $X = 0$ , pri absorpcijski dolžini  $L_a$  pa je izbiro veliko težje fizikalno utemeljevati, zato je svoboda izbire večja.

Praden pa se lotimo numeričnega reševanja sistemov (56)–(64) in (69)–(76), je smiselno opozoriti na nekatere njune lastnosti. Vzemimo najprej enačbo (59) ter iz nje izpustimo člene, ki opisujejo coulombske trke, magnetno polje in ionizacijo (funkcijo izvira). Opazovanje omejimo tudi na območje blizu  $X = 0$ . Lahko pričakujemo, da se blizu  $X = 0$  električno polje, s tem pa tudi hitrost elektronov le malo spreminjata in torej lahko levo stran enačbe postavimo na ničlo. Dobimo torej enačbo:

$$0 = \frac{1}{\mu} N_e \frac{d\Psi}{dX} - \frac{1}{\mu} \frac{dN_e}{dX}. \quad (81)$$

To enačbo lahko pomnožimo z  $\mu dX$  ter ločimo spremenljivki in integriramo:

$$N_e(X) = N_e(0) \exp(\Psi(x)) = \exp(\Psi(x)). \quad (82)$$

Če torej ne bi bilo niti magnetnega polja, niti trkov, niti ionizacije, bi se gostota elektronov podredila Boltzmannovemu zakonu.

Iz enačbe (57) hitro dobimo:

$$\frac{dN_e}{dX} = \frac{1}{V_{ex}} \left( s - N_e \frac{dV_{ex}}{dX} \right), \quad (83)$$

in to vstavimo v enačbo (59), v njej pa zaradi enostavnosti izpustimo člena z magnetnim poljem in coulombskimi trki:

$$N_e V_{ex} \frac{dV_{ex}}{dX} = \frac{1}{\mu} N_e \frac{d\Psi}{dX} - \frac{1}{\mu} \frac{1}{V_{ex}} \left( s - N_e \frac{dV_{ex}}{dX} \right) - V_{ex}s.$$

To enačbo lahko preuredimo takole:

$$N_e V_{ex} \frac{dV_{ex}}{dX} \left(1 - \frac{1}{\mu V_{ex}^2}\right) = \frac{N_e}{\mu} \frac{d\Psi}{dX} - s V_{ex} \left(1 + \frac{1}{\mu V_{ex}^2}\right). \quad (85)$$

Dokler je hitrost  $V_{ex}$  dovolj majhna, je oklepaj na levi enačbe (85) negativen, zato je tudi leva stran enačbe (85) negativna. Desna stran enačbe (85) je prav tako negativna, saj je odvod potenciala negativen, električno polje pa pozitivno. Ko pa  $V_{ex}$  doseže vrednost

$$V_{ex} = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \equiv V_{eth} = \frac{1}{c_0} \sqrt{\frac{kT_e}{m_e}}, \quad (86)$$

leva stran enačbe (86) postane enaka 0. Ko  $V_{ex}$  doseže elektronsko termično hitrost  $V_{eth}$ , torej lahko pričakujemo singularnost pri reševanju sistema (56)–(64). Na podoben način kot enačbi (57) in (59) lahko kombiniramo tudi enačbi za ione (56) in (58) in dobimo:

$$N_i V_{ix} \frac{dV_{ix}}{dX} \left(1 - \frac{\Theta}{V_{ix}^2}\right) = -N_i \frac{d\Psi}{dX} - s V_{ix} \left(1 + \frac{\Theta}{V_{ix}^2}\right). \quad (87)$$

Dokler je  $V_{ix} > \sqrt{\Theta}$ , je leva stran enačbe (87) pozitivna.

Na desni imamo vsoto pozitivnega in negativnega člena, a izkaže se, da je pozitivni člen, ki vsebuje odvod potenciala, vedno večji od drugega člena, ki vsebuje ionsko hitrost. Če  $V_{ix}$  doseže ionsko termično hitrost  $V_{ih} = \sqrt{\Theta}$  ali celo pade pod njo, se obrne predznak na levi strani enačbe (87) in pričakujemo lahko singularnost pri reševanju sistema (56)–(64). Singularnost torej pričakujemo pri:

$$V_{ix} \leq \sqrt{\Theta} \equiv V_{ih} = \frac{1}{c_0} \sqrt{\frac{kT_i}{m_i}}, \quad (88)$$

Zdaj pa pogledjmo še sistem (69)–(76). Osredinimo se pravzaprav smo na enačbe (69)–(72). V enačbah (71) in (72) izpustimo člene z magnetnim poljem in coulombskimi trki. Najprej enačbi (69) in (70) integriramo po  $X$ :

$$\begin{aligned} NV_i &= I + V_{i0}, \\ NV_e &= I + V_{e0}. \end{aligned} \quad (89)$$

Nedoločeni integral funkcije izvira smo označili:

$$I = \int s(X) dX,$$

integracijska konstanta pa je seveda enaka začetni hitrosti. Iz enačb (89) hitro izpeljemo naslednje:

$$N = \frac{I + V_{i0}}{V_i} = \frac{I + V_{e0}}{V_e}, \quad (90)$$

$$\frac{dN}{dX} = \frac{sV_i - \frac{dV_i}{dX}(I + V_{i0})}{V_i^2} = \frac{sV_e - \frac{dV_e}{dX}(I + V_{e0})}{V_e^2}, \quad (91)$$

$$\frac{1}{N} \frac{dN}{dX} = \frac{s}{I + V_{i0}} - \frac{1}{V_i} \frac{dV_i}{dX} = \frac{s}{I + V_{e0}} - \frac{1}{V_e} \frac{dV_e}{dX}. \quad (92)$$

Iz enačbe (90) lahko izračunamo:

$$V_{ex} = V_{ix} \frac{I + V_{e0}}{I + V_{i0}}, \quad (93)$$

$$\frac{dV_{ex}}{dX} = \frac{I + V_{e0}}{I + V_{i0}} \left[ \frac{dV_{ix}}{dX} + \frac{sV_{ix}(V_{i0} - V_{e0})}{(I + V_{e0})(I + V_{i0})} \right], \quad (94)$$

$$V_{ex} \frac{dV_{ex}}{dX} = \left( \frac{I + V_{e0}}{I + V_{i0}} \right)^2 \left[ V_{ix} \frac{dV_{ix}}{dX} + \frac{sV_{ix}^2(V_{i0} - V_{e0})}{(I + V_{e0})(I + V_{i0})} \right]. \quad (95)$$

V enačbi (71) izpustimo člene z magnetnim poljem in coulombskimi trki in jo delimo z  $N$ :

$$V_{ix} \frac{dV_{ix}}{dX} = -\frac{d\Psi}{dX} - \frac{\Theta}{N} \frac{dN}{dX} - \frac{1}{N} V_{ix} s. \quad (96)$$

Podobno storimo z enačbo (72), le da to enačbo delimo z  $N$  in množimo z  $\mu$ :

$$\mu V_{ex} \frac{dV_{ex}}{dX} = \frac{d\Psi}{dX} - \frac{1}{N} \frac{dN}{dX} - \frac{\mu}{N} V_{ex} s, \quad (97)$$

Enačbi (96) in (97) seštejemo:

$$\begin{aligned} V_{ix} \frac{dV_{ix}}{dX} + \mu V_{ex} \frac{dV_{ex}}{dX} &= -\frac{1}{N} \frac{dN}{dX} (1 + \Theta) - \\ &\quad - \frac{s}{N} (V_{ix} + \mu V_{ex}). \end{aligned} \quad (98)$$

Člene, ki vsebujejo  $N$  ali  $V_{ex}$ , izločimo z uporabo enačb (90), (92), (93) (94) in (95). Po malo preurejanja na koncu dobimo:

$$\begin{aligned} V_{ix} \frac{dV_{ix}}{dX} \left[ 1 + \mu \left( \frac{I + V_{e0}}{I + V_{i0}} \right)^2 - \frac{1 + \Theta}{V_{ix}^2} \right] &= -\frac{s}{I + V_{i0}} \cdot \\ \cdot \left[ 1 + \Theta + V_{ix}^2 \left( 1 + \frac{\mu(I + V_{e0})}{I + V_{i0}} \right) + \frac{\mu V_{ix}^2 (V_{i0} - V_{e0})(I + V_{e0})}{(I + V_{i0})^2} \right]. \end{aligned} \quad (99)$$

Desna stran enačbe (99) je negativna. Leva stran pa je negativna le, dokler je  $V_{ix}$  pod mejno vrednostjo:

$$V_{ix} = \sqrt{\frac{1 + \Theta}{1 + \mu \left( \frac{I + V_{e0}}{I + V_{i0}} \right)^2}}. \quad (100)$$

Iz (93) in (100) sledi še:

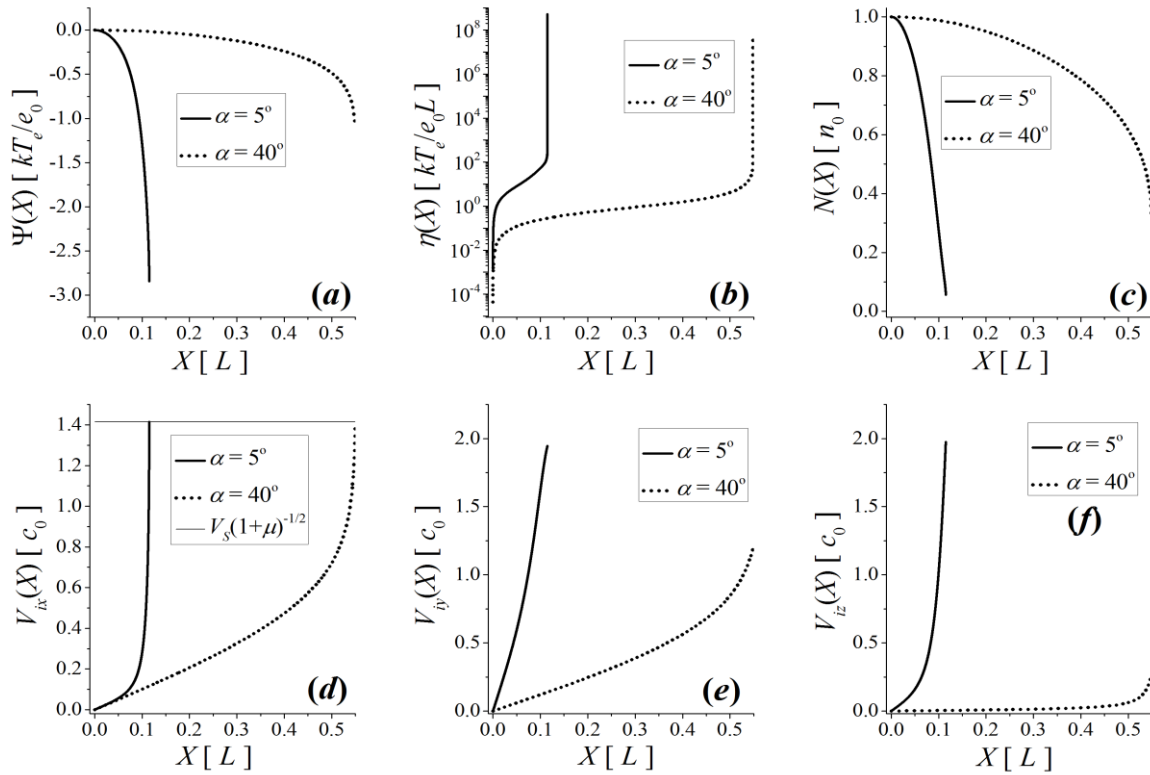
$$V_{ex} = \sqrt{\frac{1 + \Theta}{\mu + \left( \frac{I + V_{i0}}{I + V_{e0}} \right)^2}}. \quad (101)$$

Če izberemo robni pogoj  $V_{i0} = V_{e0}$ , pogoja (100) in (101) preideta v:

$$V_{ix} = V_{ex} = \sqrt{\frac{1 + \Theta}{1 + \mu}} = \frac{V_s}{\sqrt{1 + \mu}}. \quad (102)$$

Sporočilo izrazov (86), (88), (100), (101) in (102) lahko povzamemo takole. Sistem enačb (56)–(64) je rešljiv





Slika 2: Primer numerične rešitve sistema enačb (69)–(76) pri parametrih  $\Theta = 1$ ,  $K = 100$ ,  $\mu = 1/3671.48$ ,  $Z = 0$  ter dveh vrednostih kota med magnetnim poljem in osjo  $y$ , in sicer  $\alpha = 5^\circ$  in  $\alpha = 40^\circ$ . Robne pogoje določajo izrazi (77)–(79) pri vrednostih  $V_{i0} = V_{e0} = 10^{-7}$ , funkcija izvira je elektronska,  $s = N_e$ .

samo, če sta izpolnjena pogoja  $V_{ix} > V_{ith}$  in  $V_{ex} < V_{eth}$ . Sistem (69)–(76) pa je rešljiv, dokler  $V_{ix}$  in  $V_{ex}$  ne dosežeta vrednosti, ki jih določajo izrazi (100)–(102). Zlasti pogoj  $V_{ix} > V_{ith}$  zmanjšuje uporabno vrednost modela. Kot bomo videli, za robno vrednost ionske hitrosti  $V_{i0}$  izbiramo majhne vrednosti reda velikosti  $10^{-6}$  ali celo  $10^{-7}$ . To pa nas prisili, da pri reševanju sistema enačb (56)–(64) ionsko temperaturo vedno postavimo na ničlo,  $\Theta = 0$ , saj bi sicer  $V_{ith}$  lahko preseгла že robno vrednost  $V_{i0}$ .

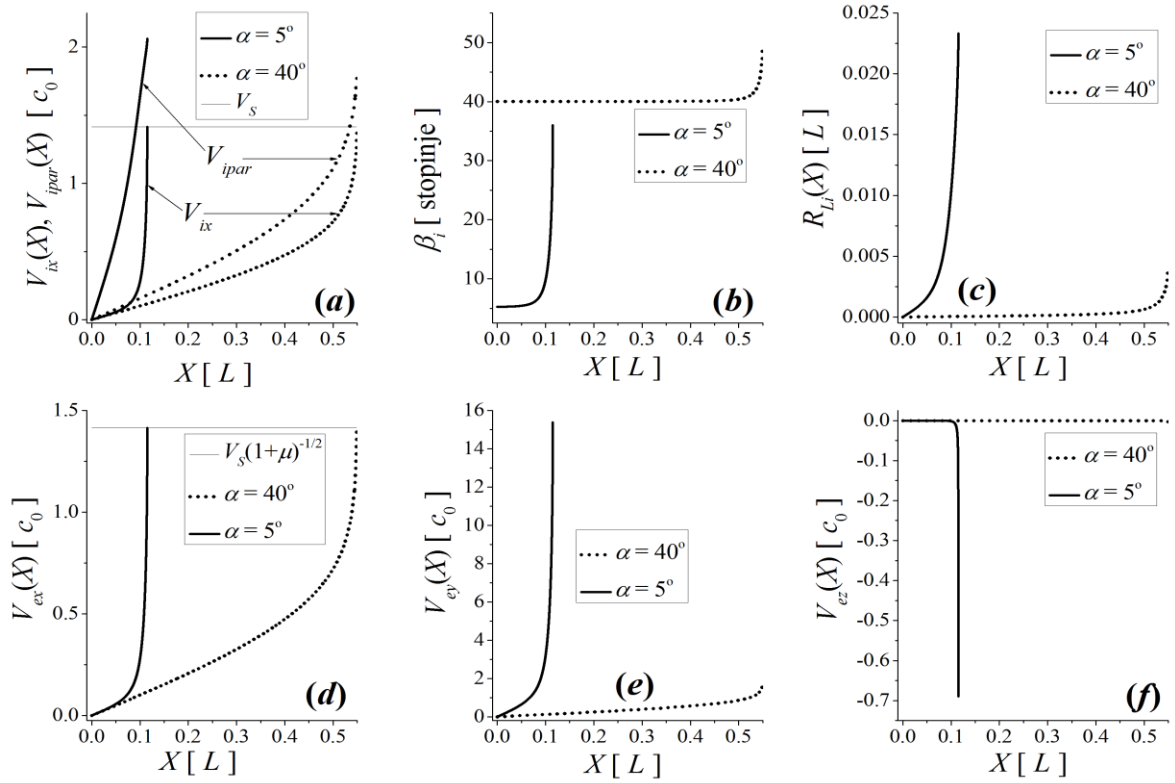
### 3 REZULTATI MODELA

Zdaj pa pogledjmo nekaj primerov numeričnih rešitev sistemov enačb (56)–(64) in (69)–(76). Robne pogoje določajo izrazi (77), (78) in (79). Parametri, ki jih sami izbiramo, pa so  $K$ ,  $\alpha$ ,  $\mu$ ,  $\Theta$ ,  $Z$  in  $\varepsilon$ . V enem samem članku seveda ne moremo pregledati vseh parametričnih odvisnosti rezultatov od omenjenih količin, ampak se moramo omejiti na študij določene količine.

Najprej pogledjmo primer rešitev sistema (69)–(76). Izberimo naslednje parametre:  $\mu = 1/3671.48$  (izberemo torej ione devterija),  $\Theta = 1$ ,  $K = 100$ ,  $Z = 0$  in 2 vrednosti kota med magnetnim poljem in osjo  $y$ , in sicer  $\alpha = 5^\circ$  in  $\alpha = 40^\circ$ . Za robne pogoje izberemo (77)–(79), pri tem pa je  $V_{i0} = V_{e0} = 10^{-7}$ . S funkcijo izvira  $s$  izberemo elektronski izvir (66),  $s = N_e$ . Na sliki 1 vidimo profile potenciala  $\Psi(X)$  – slika (a), električnega polja  $\eta(X)$  – graf (b), gostote delcev  $N(X)$  – slika (c), ter

profile komponent hitrosti ionskega toka  $V_{ix}(X)$ ,  $V_{iy}(X)$  in  $V_{iz}(X)$  na spodnjih grafih (d), (e) in (f). Polna črta prikazuje rešitve za  $\alpha = 5^\circ$ , črtkana črta pa rešitve pri  $\alpha = 40^\circ$ . Na sliki (d) vidimo, da je pogoj (102), kjer sistem (69)–(76) postane singularen, izpolnjen pri približno  $X_S \approx 0.55$ , če izberemo  $\alpha = 40^\circ$  in pri  $X_S \approx 0.115$  v primeru  $\alpha = 5^\circ$ . Dolžina je podana v enotah ionizacijske dolžine  $L$ , ki je definirana v izrazih (53). Profili potenciala  $\Psi(X)$ , gostote  $N(X)$ , električnega polja  $\eta(X)$  ter drugih dveh komponent hitrosti ionskega toka se ujemajo z rezultatom, ki je prikazan na grafu (d). Pri  $X = 0$  se potencial začne v ničli, kar je skladno z robnim pogojem (78), potem pa z naraščanjem  $X$  postaja vse bolj negativen, dokler ni izpolnjen pogoj (102), pri katerem postane sistem (69)–(76) singularen. Mesto  $X_S$  singularnosti sistema (69)–(76) ter vrednosti parametrov  $\Psi(X_S)$ ,  $N(X_S)$  in drugih na tem mestu lahko razumemo kot lastne vrednosti sistema enačb (69)–(76). Indeks  $S$  pride od angleške oznake za rob plašča – namreč *sheath edge*.

Tik pred singularnostjo električno polje  $\eta$  skokovito naraste za približno 5–6 redov velikosti. Takšen rezultat je v skladu s tako imenovano asimptotično limito dveh dolžinskih meril [2], ki jo dobimo v limiti  $\varepsilon \square 0$ . Če primerjamo sistema enačb (56)–(64) ter (69)–(76), vidimo, da drugi sistem enačb dobimo iz prvega, če v Poissonovo enačbo (64) vstavimo  $\varepsilon = 0$  in nato zaradi enakosti ionske in elektronske gostote uvedemo še



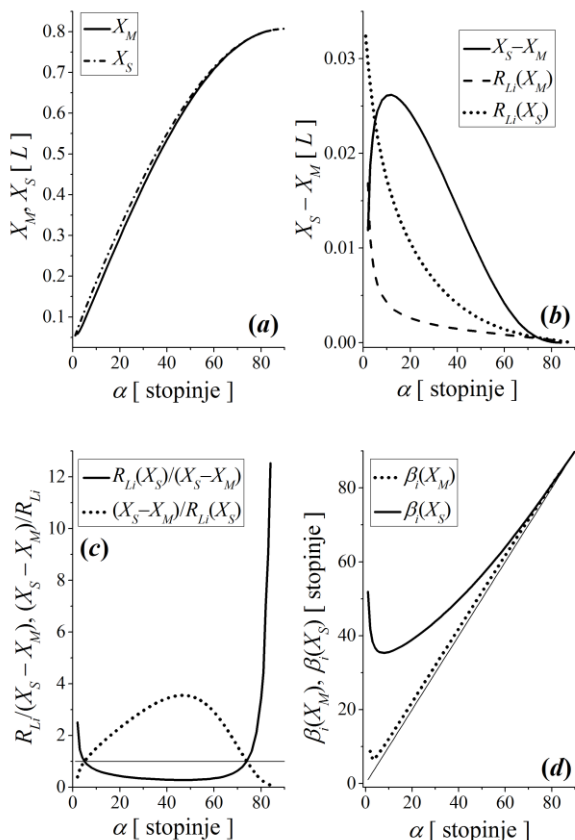
Slika 3: Nadaljevanje slike 2 – numerične rešitve sistema enačb (69)–(76) pri parametrih  $\Theta = 1$ ,  $K = 100$ ,  $\mu = 1/3671.48$ ,  $Z = 0$ , ter dveh vrednostih kota med magnetnim poljem in osjo  $y$ , in sicer  $\alpha = 5^\circ$  in  $\alpha = 40^\circ$ . Robne pogoje določajo izrazi (77)–(79) pri vrednostih  $V_{i0} = V_{e0} = 10^{-7}$ , funkcija izvira je elektronska,  $s = N_e$ .

oznako (68). V asimptotični limiti dveh dolžinskih meril [2] je rob plašča določen s singularnostjo električnega polja, debelina plašča pa gre proti 0, kadar problem obravnavamo v dolžinskem merilu ionizacijske dolžine  $L$ . Če pa ga obravnavamo v merilu Debyejeve dolžine  $\lambda_D$ , je debelina plašča zelo velika, električno polje na robu plašča pa gre proti 0. Kakor se vidi iz formul (53), naša obravnava poteka v merilu ionizacijske dolžine, vendar pa bo pri nadaljnji obravnavi parameter nevtralnosti plazme  $\varepsilon$  sicer majhen, vendar končno velik. Zaradi tega sta debelini tako plašča kot predplašča končno veliki, njuno razmerje pa je istega reda velikosti kot  $\varepsilon$ .

Analizo sistema enačb (69)–(76) nadaljujemo na sliki 3. Vsi parametri in robni pogoji so enaki kot na sliki 2. Na grafu (a) prikazujemo skoraj enak rezultat kot na sliki 2(d) s to razliko, da poleg komponente ionske hitrosti  $V_{ix}(X)$  prikazujemo še vzporedni del ionske hitrosti  $V_{ipar}(X)$ . Tanka horizontalna črta pa pomeni ionsko zvočno hitrost  $V_S$ , ki jo podaja formula (55). Ta hitrost je nekoliko večja od hitrosti  $V_S(1+\mu)^{-1/2}$ , ki jo podaja (102) in je prikazana s tanko horizontalno črto na grafih 2 (d) in 3 (d). Pri  $\Theta = 1$  in  $\mu = 1/3671.48$  sta vrednosti  $V_S = 1.41421$  in  $V_S(1+\mu)^{-1/2} = 1.41402$ . Te razlike na grafih seveda ni mogoče opaziti. Presečišče med  $V_{ipar}$  in  $V_S$  se nahaja na mestu  $X = X_M$ . Indeks  $M$  izhaja iz angleškega pojma *magnetic presheath edge* – rob magnetnega predplašča. Območje med  $X_M$  in  $X_S$

imenujemo namreč magnetni predplašč ali pogosto tudi Chodurina plast [10,11]. V tem območju postane električno polje že tako močno, da začne preusmerjati ionski tok iz smeri magnetnega polja v smer električnega polja. Če primerjamo grafa (a) in (b) na sliki 3, vidimo, da je res tako. Povprečen Larmorjev radij ionov  $R_{Li}$ , normiran z ionizacijsko dolžino  $L$ , izračunamo z uporabo formul (43) in (53), krajevno odvisnost pa prikazuje graf (c). Vidimo, da se Larmorjev radij povečuje nekako hkrati s preusmerjanjem ionskega toka proč od smeri magnetnih silnic. Pri  $\alpha = 5^\circ$  je debelina Chodurine plasti  $X_S - X_M = 0.02338$ , Larmorjev radij pri  $X_S$  pa je  $R_{Li}(X_S) = 0.02332$ . Pri  $\alpha = 40^\circ$  pa sta vrednosti  $X_S - X_M = 0.01426$  in  $R_{Li}(X_S) = 0.00415$ . Podrobnejšo odvisnost teh dveh količin od kota  $\alpha$  prikazuje slika 4. Ostanimo pa še malo pri sliki 3. Na spodnjih treh grafih (d), (e) in (f) so prikazane vse tri komponente hitrosti elektronskega toka v odvisnosti od  $X$ . Slika 2 (d) in 3 (d) sta seveda povsem identični. Če primerjamo komponenti  $V_{iy}$  in  $V_{ey}$  na slikah 2 (e) in 3 (e), vidimo, da hitrost elektronskega toka narašča hitreje kot pri ionih in tudi doseže višjo končno vrednost. To je razumljivo zaradi velike razlike v masi med ioni in elektroni. Komponenti  $V_{iz}$  in  $V_{ez}$  pa kažeta zelo različno obnašanje. Najprej ugotovimo naslednje. Glede na postavitev koordinatnega sistema (slika 1) je smer osi  $z$  enaka smeri vektorskega produkta  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ . Pod vplivom električnega in magnetnega polja

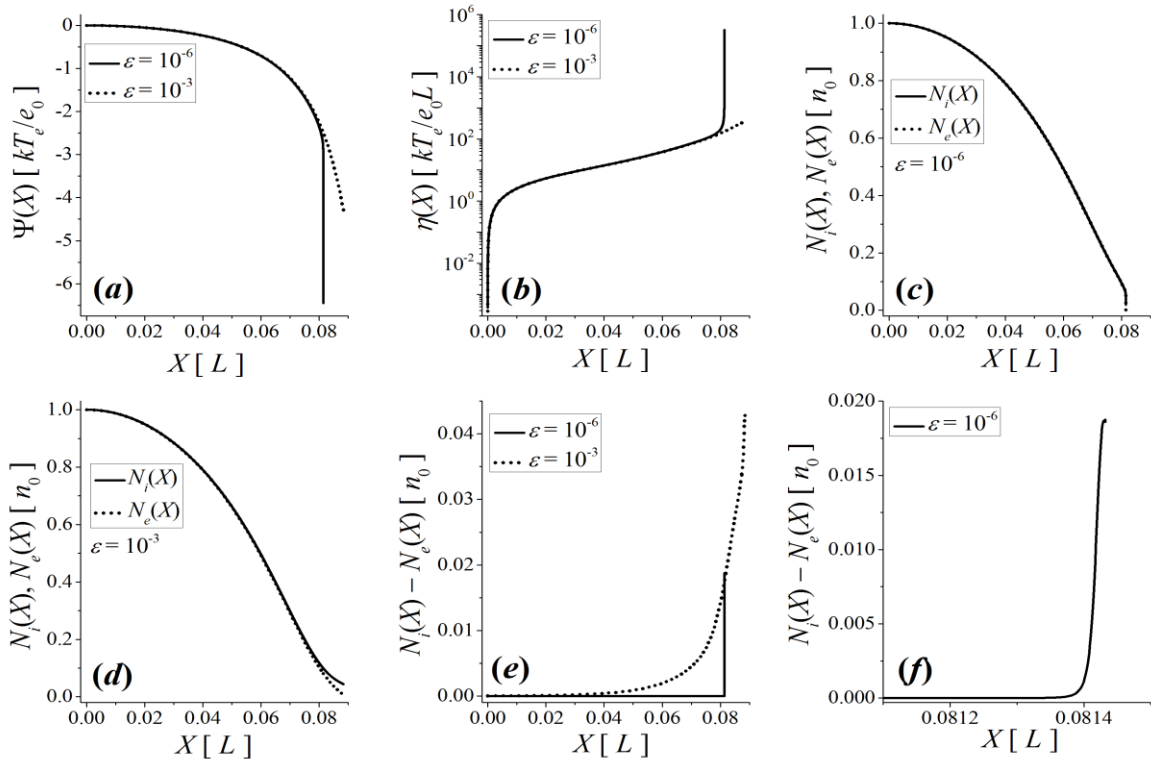
ioni tečejo v smeri pozitivne osi  $z$ , elektroni pa v nasprotni smeri. Opazno je tudi, da je  $V_{ez}$  zelo blizu ničle v skoraj celem območju, kjer obstaja rešitev sistema enačb (69)–(76), izrazito pa se spremeni blizu  $X_S$ . Po drugi strani pa  $V_{iz}$  narašča bolj enakomerno. Fizikalne razlage tega pojava za zdaj še nismo sposobni ponuditi.



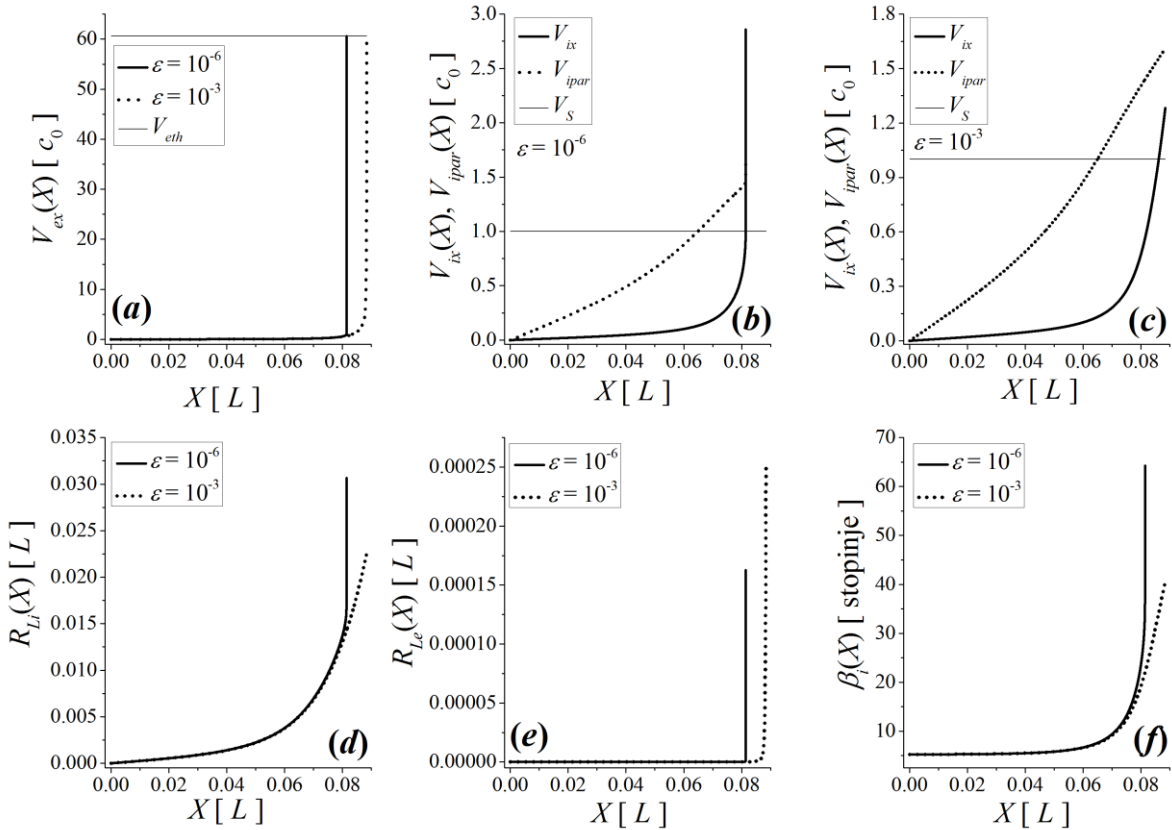
Slika 4: Graf (a) prikazuje odvisnost  $X_S$  in  $X_M$  od  $\alpha$ . Na sliki (b) vidimo odvisnost  $X_S - X_M$ ,  $R_{Li}(X_S)$  ter  $R_{Li}(X_M)$  od  $\alpha$  na grafu (c) razmerji  $R_{Li}(X_S)/(X_S - X_M)$  in  $(X_S - X_M)/R_{Li}(X_S)$ . Graf (d) prikazuje odvisnost  $\beta_i(X_M)$  in  $\beta_i(X_S)$  od  $\alpha$ . Parametri in robni pogoji so enaki kot pri slikah 2 in 3.

Na sliki 4 pa predstavljamo malo podrobnejšo analizo odvisnosti debeline Chodurine plasti  $X_S - X_M$  ter

Larmorjevega radija za ione  $R_{Li}$  od kota magnetnega polja  $\alpha$ . Izbrani parametri in robni pogoji so enaki kot na slikah 2 in 3, torej:  $\Theta = 1$ ,  $\mu = 1/3671.48$ ,  $K = 100$ ,  $Z = 0$ ,  $\mu = 1/3671.48$  ter robni pogoji (77)–(79), pri tem pa je  $V_{i0} = V_{e0} = 10^{-7}$ . Tudi tokrat je funkcija izvira (66) – elektronski izvir. Na grafu (a) sta prikazani poziciji roba Chodurine plasti  $X_M$  in roba plašča  $X_S$  v odvisnosti od »magnetnega kota«  $\alpha$ . Z naraščajočim kotom obe koordinati naraščata. Chodurina plast se pojavi šele pri kotu  $\alpha = 2^\circ$ . Pri manjših kotih  $V_{ipar}$  ne doseže  $V_S$ . Pri majhnih kotih  $\alpha$  je dolžina celotnega predplašča le nekaj odstotkov ionizacijske dolžine  $L$ , potem pa naraste na približno 81 odstotkov ionizacijske dolžine, ko postane magnetno polje pravokotno na elektrodo. Na sliki (b) vidimo odvisnost debeline Chodurine plasti  $X_S - X_M$ , Larmorjevega radija  $R_{Li}(X_M)$  na robu Chodurine plasti in Larmorjevega radija  $R_{Li}(X_S)$  na robu plašča od magnetnega kota  $\alpha$ . Oba Larmorjeva radija z naraščajočim magnetnim kotom pojemata. Debelina Chodurine plasti pa najprej hitro narašča, doseže maksimum pri  $\alpha \approx 12^\circ$ , nato pa pojemata. Debelina Chodurine plasti in Larmorjev radij na robu plašča sta pri skoraj vseh magnetnih kotih istega reda velikosti. Larmorjev radij  $R_{Li}(X_S)$  je večji od  $X_S - X_M$  pri kotih  $\alpha$ , ki so manjši od približno  $5^\circ$  ter pri kotih, ki so večji od približno  $73^\circ$ . Pri vmesnih kotih pa je debelina Chodurine plasti večja od Larmorjevega radija. Na grafu (c) vidimo razmerje med tema dvema dolžinama. Polna črta prikazuje razmerje  $R_{Li}(X_S)/(X_S - X_M)$ , črtkana črta pa obratno vrednost tega razmerja  $(X_S - X_M)/R_{Li}(X_S)$ . Pri magnetnih kotih  $\alpha$  med 40 in 50 stopinj je  $X_S - X_M$  do 4-krat večji od  $R_{Li}(X_S)$ , pri kotih, ki so blizu pravemu kotu, pa je  $R_{Li}(X_S)$  tudi do 13-krat večji od  $X_S - X_M$ . Na sliki (d) prikazujemo odvisnost vpadnega kota ionskega toka  $\beta_i$  (enačba (41)) na robu Chodurine plasti in na robu plašča. Do roba Chodurine plasti je preusmerjanje ionskega toka proč od smeri magnetnega polja zelo majhno, na robu plašča pa je razlika  $\beta_i(X_S) - \alpha$  občutno večja. Preusmeritev je seveda izrazitejša pri manjših kotih  $\alpha$ .



Slika 5: Profili potenciala  $\Psi(X)$ , električnega polja  $\eta(X)$ , gostot  $N_i(X)$  ter  $N_e(X)$  in njihovih razlik, ki jih dobimo iz sistema enačb (56)–(64) pri parametrih :  $\Theta = 0$ ,  $K = 100$ ,  $\mu = 1/3671.48$ ,  $Z = 0$ ,  $\alpha = 5^\circ$  in dveh vrednostih  $\varepsilon$ , in sicer  $\varepsilon = 10^{-3}$  in  $\varepsilon = 10^{-6}$ , robnih pogojih (77)–(79), z vrednostjo  $V_{i0} = V_{e0} = 10^{-7}$  ter elektronsko funkcijo izvira (66),  $s = N_e$



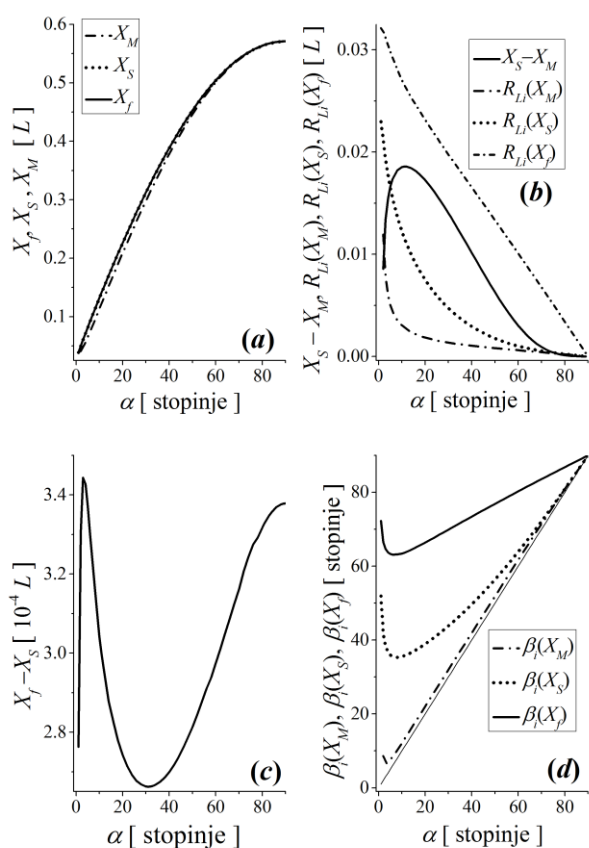
Slika 6: Nadaljevanje slike 5 – profili hitrosti, Larmorjevih radijev in vpadnega kota za ionski tok, ki jih dajo rešitve sistema enačb (56)–(64) pri istih parametrih, robnih pogojih in funkciji izvira kot na sliki 5

Zdaj pa pogledajmo še nekaj rešitev sistema enačb (56)–(64) – sliki 5 in 6. Izberemo naslednje parametre:  $\Theta = 0$ ,  $K = 100$ ,  $\mu = 1/3671.48$ ,  $Z = 0$ ,  $\alpha = 5^\circ$  in dve vrednosti  $\varepsilon$ , in sicer  $\varepsilon = 10^{-3}$  in  $\varepsilon = 10^{-6}$ . Robne pogoje določajo izrazi (77)–(79), pri tem pa je  $V_{i0} = V_{e0} = 10^{-7}$ . Za funkcijo izvira  $s$  izberemo elektronski izvir (66),  $s = N_e$ . Ničelno ionsko temperaturo  $\Theta = 0$  smo prisiljeni izbrati zaradi omejitve, ki jo postavlja pogoj (88). Za parameter nevtralnosti plazme  $\varepsilon$  pa izberemo dve vrednosti, ki sta obe majhni, se pa med seboj vendarle razlikujeta za tri rede velikosti. Tako lahko vidimo vpliv tega parametra. Na sliki 5 (a) vidimo profila potenciala  $\Psi(X)$  za obe vrednosti  $\varepsilon$ . V velikem delu območja, kjer lahko najdemo rešitev, potenciala najprej pojmeta skoraj enako, tako da obeh krivulj skoraj ne moremo razločiti. V nekem trenutku pa se potencial, ki ustreza manjši vrednosti  $\varepsilon = 10^{-6}$ , zniža veliko hitreje kot tisti, ki ustreza večji vrednosti  $\varepsilon = 10^{-3}$ . Profila električnega polja  $\eta(X)$ , ki ju vidimo na grafu (b), sta skladna s tem. Blizu roba območja, kjer še obstaja rešitev sistema enačb (56)–(64), se električni polji razlikujeta za približno tri rede velikosti. Za toliko se razlikujeta tudi izbrani vrednosti  $\varepsilon$ . Na slikah (c) in (d) vidimo profile gostot ionov in elektronov  $N_i(X)$  ter  $N_e(X)$  za obe prej navedeni vrednosti parametra nevtralnosti, in sicer  $\varepsilon = 10^{-6}$  in  $\varepsilon = 10^{-3}$ . Pri  $\varepsilon = 10^{-6}$  (slika (c)) je razlika med  $N_i(X)$  in  $N_e(X)$  tako majhna, da polne in črtkane krivulje sploh ne moremo razločiti. Pri  $\varepsilon = 10^{-3}$  (slika (d)) pa je razlika opazna, a tudi ni videti posebej velika. Zato na slikah (e) in (f) posebej prikazujemo razliko  $N_i(X) - N_e(X)$ . Na grafu (e) je razlika prikazana za obe vrednosti  $\varepsilon$ , na sliki (f) pa je del slike (e) prikazan v zelo povečanem merilu. Jasno se vidi, da je pri večji vrednosti  $\varepsilon$  odstopanje od nevtralnosti večje in do njega pride na večjem območju.

Analiza se nadaljuje na sliki 6. Izbrani parametri, robni pogoji in funkcija izvira so enaki kot na sliki 5. Na sliki 6 (a) vidimo profila hitrosti elektronskega toka  $V_{ex}(X)$  za obe vrednosti  $\varepsilon$ . Hitrost  $V_{ex}(X)$  najprej narašča od robne vrednosti  $V_{ex}(0) = V_{e0} = 10^{-7}$  zelo počasi, potem pa naraste zelo skokovito in doseže elektronsko termično hitrost  $V_{eth}$ , ki jo podaja izraz (86). Na sliki 6 (a) je ta hitrost označena s tanko vodoravno črto, njena vrednost pa je  $V_{eth} = 60.5927$ . Izbrali smo namreč ione devterija, za katere velja  $\mu = 1/3671.48$ . Takrat postane sistem enačb (56)–(64) singularen. Mesto, kjer se to zgodi, označimo  $X_f$ . Na sliki (b) vidimo profila hitrosti ionskega toka  $V_{ix}(X)$  in  $V_{ipar}(X)$  za  $\varepsilon = 10^{-6}$ . Tanka vodoravna črta označuje vrednost ionske zvočne hitrosti  $V_S$ , ki jo podaja (55). Na sliki (c) pa prikazujemo profila istih dveh hitrosti, vendar za  $\varepsilon = 10^{-3}$ . Presečišče med  $V_{ipar}$  in  $V_S$  določa lego roba Chodurine plasti  $X_M$ . Presečišče med  $V_{ix}$  in  $V_S$  pa določa lego roba plašča  $X_S$ . Razdalja  $X_f - X_S$  torej podaja debelino plašča. Slika 6 (d) prikazuje krajevni profil Larmorjevega radija  $R_{Li}(X)$  za ione. Izračunamo ga s pomočjo izrazov (40), (43) in (53). Pri  $\varepsilon = 10^{-6}$  doseže Larmorjev radij v točki

singularnosti sistema enačb (56)–(64), torej  $R_{Li}(X_f)$ , več kot tretjino vrednosti  $X_f$ . Pri  $\varepsilon = 10^{-3}$  pa  $R_{Li}(X_f)$  doseže dobro četrtino vrednosti  $X_f$ . Na sliki (e) pa vidimo krajevna profila Larmorjevega radija za elektrone  $R_{Le}(X)$  za obe vrednosti  $\varepsilon$ . Po pričakovanju sta maksimalni vrednosti Larmorjevih radijev  $R_{Le}(X_f)$ , ki ju Larmorjeva radija dosežeta v točki singularnosti sistema enačb (56)–(64),  $X = X_f$ , za dva reda velikosti manjša od ustreznih Larmorjevih radijev za ione. Primerjava grafov (d) in (e) na sliki 6 pokaže še eno zanimivo razliko. Larmorjev radij za ione z naraščajočim  $X$  narašča enakomerno, šele v plašču pa ima nekoliko izrazitejši skok, Larmorjev radij za elektrone pa je zelo blizu ničle v celotnem predplašču, nato pa skokovito zraste v plašču. Na grafu (f) pa vidimo krajevni profil vpadnega kota ionskega toka  $\beta_i(X)$ . Če ga primerjamo s slikama (b) in (c), se vidi, da se preusmerjanje smeri ionskega toka od smeri magnetnega polja v smer električnega polja začne v Chodurini plasti, v plašču pa postane še bolj izrazito. Iz profilov hitrosti  $V_{ipar}(X)$  in  $V_{ix}(X)$ , kakršna vidimo na slikah 6 (b) in (c), lahko določimo lego roba magnetnega plašča  $X_M$ , roba plašča  $X_S$  in mesto singularnosti sistema enačb (56)–(64),  $X_f$ . Torej lahko brez težav ugotovimo debelino Chodurine plasti  $X_S - X_M$  in debelino plašča  $X_f - X_S$ .

Na sliki 7 prikazujemo odvisnost teh debelin in Larmorjevih radijev za ione na robu Chodurine plasti,  $R_{Li}(X_M)$ , na robu plašča,  $R_{Li}(X_S)$  in v točki singularnosti sistema enačb (56)–(64),  $R_{Li}(X_f)$  od magnetnega kota  $\alpha$ . Izbrani parametri so:  $\Theta = 0$ ,  $K = 100$ ,  $\mu = 1/3671.48$ ,  $Z = 0$ ,  $\varepsilon = 10^{-5}$ , robne pogoje določajo izrazi (77)–(79) z vrednostma  $V_{i0} = V_{e0} = 10^{-7}$  ter elektronsko funkcijo izvira (66),  $s = N_e$ . Slika 7 je precej podobna sliki 4. Vrednosti  $X_M$ ,  $X_S$  in  $X_f$  z naraščajočim magnetnim kotom  $\alpha$  monotono naraščajo – slika (a). Debelina Chodurine plasti z naraščajočim kotom  $\alpha$  najprej hitro naraste, doseže maksimum, nato pa pojema. Larmorjev radij na robu plašča  $R_{Li}(X_S)$  je pri majhnih in velikih kotih  $\alpha$  večji od  $X_S - X_M$ , pri vmesnih pa manjši, kar je zelo podoben rezultat kot na sliki 4. Larmorjev radij v točki singularnosti sistema enačb (56)–(64),  $R_{Li}(X_f)$  je pri vseh kotih  $\alpha$  večji od  $X_S - X_M$  in z naraščajočim kotom  $\alpha$  skoraj linearno pojema – slika (b). Na grafu (c) vidimo odvisnost debeline plašča  $X_f - X_S$  od  $\alpha$ . Najprej velja opozoriti, da je debelina plašča v povprečju za približno dva reda velikosti manjša od debeline Chodurine plasti in ionskih Larmorjevih radijev  $R_{Li}(X_S)$  in  $R_{Li}(X_f)$ . Opozoriti velja tudi na zelo nemonotono odvisnost  $X_f - X_S$  od  $\alpha$  z ostrim maksimumom pri približno  $\alpha \approx 3^\circ$  in minimumom pri približno  $\alpha \approx 31^\circ$ . Na sliki (d) vidimo odvisnost vpadnih kotov ionskega toka  $\beta_i(X_M)$ ,  $\beta_i(X_S)$  in  $\beta_i(X_f)$  od magnetnega kota  $\alpha$ . Do roba Chodurine plasti je odklanjanje ionskega toka od smeri magnetnega polja zelo majhno. V Chodurini plasti pa je sprememba smeri ionskega toka precej bolj izrazita. V plašču je električno polje zelo veliko, vendar tudi tam ionski tok še vedno ni preusmerjen povsem v smer električnega polja, saj je vpadni kot še vedno manjši od  $90^\circ$ .



Slika 7: Odvisnost lege roba Chodurine plasti  $X_M$ , roba plašča  $X_S$ , točke singularnosti sistema enačb (56)–(64)  $X_f$ , debeline Chodurine plasti,  $X_S-X_M$ , debeline plašča  $X_f-X_S$ , Larmorjevih radijev za ione na robu Chodurine plasti,  $R_L(X_M)$ , na robu plašča  $R_L(X_S)$  in v točki singularnosti sistema enačb (56)–(64),  $R_L(X_f)$  ter vpadnih kotov ionskega toka  $\beta_i(X_M)$ ,  $\beta_i(X_S)$ ,  $\beta_i(X_f)$  od magnetnega kota  $\alpha$  pri parametrih  $\Theta = 0$ ,  $K = 100$ ,  $\mu = 1/3671.48$ ,  $Z = 0$ ,  $\varepsilon = 10^{-5}$ , robnih pogojih (77)–(79), z vrednostma  $V_{i0} = V_{e0} = 10^{-7}$  ter elektronsko funkcijo izvira (66),  $s = N_e$ .

#### 4 SKLEP

V delu smo podrobno predstavili dvotekočinski model plazemskega plašča pred negativno planarno elektrodo, ki je potopljena v plazmo, kjer je prisotno tudi zunanje magnetno polje. Osnova modela je sistem devetih navadnih diferencialnih enačb (56)–(64) z devetimi neznanimi funkcijami krajevne koordinate  $X$ . To so tri komponente hitrosti ionskega toka  $V_{ix}(X)$ ,  $V_{iy}(X)$ ,  $V_{iz}(X)$ , tri komponente hitrosti elektronskega toka  $V_{ex}(X)$ ,  $V_{ey}(X)$ ,  $V_{ez}(X)$ , ionska in elektronska gostota  $N_i(X)$ ,  $N_e(X)$  in potencial  $\Psi(X)$ . Ker so enačbe močno nelinearne, je mogoče samo numerično reševanje. Podali smo fizikalno smiselno izbiro robnih pogojev in pokazali, da ima sistem enačb (56)–(64) dve singularnosti (86) in (88). Rešitve sistema enačb (56)–(64) je mogoče najti samo, če je  $V_{ix}(X)$  večja od ionske termične hitrosti, obenem pa mora biti  $V_{ex}(X)$  manjša od elektronske termične hitrosti. Zlasti prva zahteva nekoliko omeji fizikalno uporabnost modela, saj skupaj z robnim

pogojem, ki zahteva končno veliko robno vrednost hitrosti  $V_{i0}$ , onemogoči izbiro neničelne ionske temperature. Ta problem je mogoče delno odpraviti tako, da se omejimo samo na rešitve, pri katerih nevtralnost plazme ni kršena in torej vnaprej zahtevamo enakost ionske in elektronske gostote – enačba (68). V tem primeru sistem enačb (56)–(64) preide v sistem (69)–(76). Ob enakih robnih pogojih je drugi sistem enačb rešljiv tudi, če izberemo ionsko temperaturo, višjo od 0. Ima pa drugi sistem enačb singularnost, ko hitrosti  $V_{ix}$  in  $V_{ex}$  izpolnita pogoje (100) in (101), to je približno na robu plašča.

Ilustrirali smo nekaj lastnosti rešitev obeh sistemov enačb. Osnovne lastnosti rešitev so takšne, kot pričakujemo. V smeri proti elektrodi potencial monotonno pojema, vendar pa je pojemanje najprej dokaj počasno in električno polje je zelo majhno. Ionski tok na začetku sledi smeri magnetnih silnic in vse tri komponente hitrosti ionskega toka naraščajo, ionska gostota pa pojema. Pojemanju ionske gostote sledijo tudi elektroni in plazma ohranja nevtralnost. Ko pa projekcija ionske hitrosti, ki je vzporedna z magnetnim poljem, doseže ionsko zvočno hitrost, električno polje naraste že do te mere, da prihaja do opaznega preusmerjanja ionskega toka iz smeri magnetnega polja v smer električnega polja, to je pravokotno na elektrodo. Ko pa komponenta hitrosti ionskega toka, ki je pravokotna na elektrodo, doseže ionsko zvočno hitrost, se poruši tudi nevtralnost plazme in nastane plazemski plašč – to je območje, v katerem obstaja presežek pozitivnega prostorskega naboja.

Ker v modelu nastopa veliko neodvisnih parametrov, bi sistematični pregled večjega števila parametričnih odvisnosti zahteval zelo veliko prostora. Zato smo se v tem delu omejili na primerjavo debeline plašča in Chodurine plasti s povprečnim ionskim Larmorjevim radijem na robu Chodurine plasti, na robu plašča in v točki singularnosti sistema enačb (56)–(64) v odvisnosti od magnetnega kota  $\alpha$ , in to pri samo enem nizu parametrov  $K$ ,  $\Theta$ ,  $\mu$ ,  $Z$  in  $\varepsilon$  in samo za elektronsko funkcijo izvira  $s = N_e$ . Izkaže se, da je ionski Larmorjev radij na robu plašča istega reda velikosti kot debelina Chodurine plasti, znotraj plašča pa to debelino celo preseže. To govori v prid domneve, da je glavni mehanizem ionskih izgub na končno elektrodo tako imenovano odpiranje ionskih ciklotronskih orbit. To pomeni, da ioni zadenejo končno elektrodo, ker se njihov ciklotronski tir seka z elektrodo. Opozorimo še na dva rahlo presenetljiva rezultata. Gre za odvisnost debeline Chodurine plasti in plašča od magnetnega kota. Morda bi pričakovali, da bosta ti dve debelini monotonno pojemali, ko bodo magnetne silnice vse bližje smeri, ki je pravokotna na elektrodo. Izkaže pa se, da ima debelina Chodurine plasti maksimum, debelina plašča pa najprej oster maksimum, ki mu sledi minimum, in nato ponovno naraščanje.

Predvsem zaradi ilustrativnih namenov smo  $K$  in  $\varepsilon$  izbrali tako, da se ionski Larmorjev radij na robu plašča

in Debyejeva dolžina razlikujeta za približno dva reda velikosti. Če bi izbrali  $K$  in  $\varepsilon$  tako, da bi bila ionski Larmorjev radij na robu plašča in Debyejeva dolžina istega reda velikosti, bi bili rezultati gotovo drugačni do te mere, da bi zahtevali čisto ločeno analizo.

### LITERATURA

- [1] J. A. Bittencourt, "Fundamentals of plasma physics", 3rd edition, 2004, Springer Verlag, New York.
- [2] K.-U. Riemann, "The Bohm criterion and the sheath formation" *J. Phys. D: Appl. Phys.* 24(4), str. 493–518, 1991.
- [3] M. M. Hatami, "An analytic expression for the sheath criterion in magnetized plasmas with multi-charged ion species", *Phys. Plasmas*, 22(4), str. 043519, 2015.
- [4] T. Gyergyek, J. Kovačič, "A self-consistent two-fluid model of a magnetized plasma-wall transition", *Phys. Plasmas*, 22(9), str. 093511, 2015.
- [5] P. C. Stangeby, "The Chodura sheath for angles of a few degrees between the magnetic field and the surface of divertor targets and limiters", *Nuclear Fusion*, 52(8), str. 083012, 2012.
- [6] A. Stanovnik, "Fizika I zapiski predavanj", 4. izdaja, 2006, Založba FE in FRI, Ljubljana.
- [7] S. Kuhn, K.-U. Riemann, N. Jelić, D. D. Tskhakaya Sr., D. Tskhakaya Jr., M. Stanojević, "Link between fluid and kinetic parameters near the plasma boundary", *Phys. Plasmas*, 13(1), str. 013503, 2006.
- [8] K.-U. Riemann, "Theory of the collisional presheath in an oblique magnetic field", *Phys. Plasmas*, 1(3), str. 552–558, 1994.
- [9] J. Freidberg, "Plasma Physics and Fusion Energy", 2007, Cambridge University Press, Cambridge.
- [10] R. Chodura, "Plasma-wall transition in an oblique magnetic field", *Phys. Fluids*, 25(9), str. 1628–1633, 1982.
- [11] P. C. Stangeby, "The Bohm-Chodura plasma sheath criterion" *Phys. Plasmas*, 2(3), str. 702–706, 1995.

**Tomaž Gyergyek** je diplomiral leta 1988, magistriral leta 1992 in doktoriral leta 1996 na Oddelku za fiziko sedanje Fakultete za matematiko in fiziko v Ljubljani. V tistem času pa je bil Oddelek za fiziko del Fakultete za naravoslovje in tehnologijo. Leta 2011 je doktoriral tudi na Fakulteti za elektrotehniko v Ljubljani. Zaposlen je na Fakulteti za elektrotehniko Univerze v Ljubljani, intenzivno pa sodeluje z Laboratorijem za fiziko plazme na Inštitutu Jožef Stefan v Ljubljani. Njegova raziskovalna zanimanja vključujejo modeliranje potencialnih struktur v plinski plazmi, delčne simulacije in razvoj diagnostike plazme z različnimi tipi električnih sond.

**Jernej Kovačič** je diplomiral leta 2007 in doktoriral leta 2013 v Laboratoriju za fiziko Fakultete za elektrotehniko v Ljubljani. Od leta 2012 je zaposlen na Inštitutu Jožef Stefan v Laboratoriju za fiziko plazme. Eksperimentalno se ukvarja z razvojem in raziskavami na področju diagnostike plazme s pomočjo električnih sond, kjer sodeluje s številnimi laboratoriji po Evropi. Udeležuje se tudi merilnih kampanj po evropskih fuzijskih laboratorijih. Njegove raziskave zajemajo tudi nastanke plinskih razelektritev in potencialne strukture v plazmi, česar se loteva s teoretičnimi modeli in delčnimi simulacijami.