

TRANSFORMACIJE MED SLOVENSKIMI IN MEDNARODNIMI TERESTRIČNIMI REFERENČNIMI SESTAVI

TRANSFORMATIONS BETWEEN THE SLOVENIAN AND INTERNATIONAL TERRESTRIAL REFERENCE FRAMES

Sandi Berk, Klemen Medved

UDK: 528.7(4)(100)
Klasifikacija prispevka po COBISS.SI: 1.01
Prispelo: 29. 6. 2021
Sprejeto: 10. 9. 2021

DOI: 10.15292/geodetski-vestnik.2021.03.361-384
SCIENTIFIC ARTICLE
Received: 29. 6. 2021
Accepted: 10. 9. 2021

IZVLEČEK

Aktualen slovenski terestrični referenčni sestav (D96-17) je statičen sestav, ki temelji na tehnologiji GNSS. Njegova posebnost je, da ga z novo realizacijo ETRS89, ki jo je potrdil EUREF (D17), povezuje dodatna transformacija. Za zagotovitev visokokakovostnega državnega terestričnega referenčnega sestava je nujna povezava z aktualno realizacijo ITRS. To je še posebej pomembno ob predvidenem prehodu na polkinematičen terestrični referenčni sestav, ki bo podprt z državnim geokinematskim modelom. V pričujočem prispevku so podrobno obravnavane transformacije med aktualnima državnim in mednarodnim terestričnim referenčnim sestavom. Podani so postopki, enačbe in parametri datumskih transformacij, in sicer v obe smeri (naprej in obratne), po korakih in neposredne, stroge in poenostavljene (približne). Predstavljeni sta analiza koordinatnih razlik med slovenskim in mednarodnim terestričnim referenčnim sestavom ter analiza točnosti različnih poenostavitev transformacij med obema referenčnima sestavoma. Slednja omogoča optimalen izbor transformacijskih rešitev glede na različne zahteve uporabnikov. Prikazana sta tudi vloga in pomen obravnavanih transformacij pri postopkih določanja položaja in pri natančni navigaciji.

KLJUČNE BESEDE

datumaska transformacija, D17, D96-17, ETRF2000, ETRS89, ITRF2014, ITRS

ABSTRACT

The current Slovenian terrestrial reference frame (D96-17) is a static frame based on GNSS technology. An additional transformation connecting it with the new realisation of ETRS89 accepted by EUREF (D17) gives the D96-17 a specific character. In order to ensure a high-quality national terrestrial reference frame, connection to the current realisation of ITRS is needed. This is particularly important in the light of the intended transition to a semi-kinematic terrestrial reference frame, supported by a national geo-kinematic model. Transformations between the current national and international terrestrial reference frames are discussed in detail in the present paper. Processes, equations, and parameters of datum transformations are given in both directions (forward and inverse), step-by-step and direct ones, rigorous and simplified (approximate). Furthermore, an analysis of coordinate differences between current Slovenian and international terrestrial reference frames and an analysis of coordinate errors for various simplifications of transformation between both reference frames are given. This allows users to choose an optimal transformation solution to meet their requirements. The role and importance of transformations under consideration in the positioning procedures and in the precise navigation are also addressed.

KEY WORDS

datum transformation, D17, D96-17, ETRF2000, ETRS89, ITRF2014, ITRS

1 UVOD

V Sloveniji uporabljamo statičen referenčni koordinatni sistem, ki temelji na tehnologiji GNSS. Vzpostavljen je bil kakovostno, vendar ima tako zasnovan koordinatni sistem zaradi delovanja tektonike omejen rok trajanja. Distorzije v njem namreč sčasoma postanejo večje od negotovosti, ki so pogojene s kakovostjo GNSS-meritev (Poutanen in Häkli, 2018). Med osnovnimi pogoji za sodoben državni koordinatni sistem, ustrezen za potrebe geodezije in vseh drugih strok, ki se ukvarjajo s prostorom, so tudi kakovostno določene transformacije med tem in mednarodnim sistemom (Sterle in sod., 2009). To je pomembno tudi za zagotavljanje čezmejne skladnosti in povezljivosti prostorskih podatkov kot tudi združljivosti podatkov na globalni ravni. Kakovostne transformacije so nujne tudi za izvajanje nekaterih metod GNSS-izmere ter ne nazadnje za natančno in varno navigacijo.

Še posebej pomembna je obravnavana tema ob predvidenem prehodu na polkinematičen referenčni sestav, ki je za Slovenijo verjetno optimalna rešitev za zagotovitev kakovostnega državnega koordinatnega sistema na dolgi rok (npr. Stopar in sod., 2015; Medved in sod., 2018). Bistvena razlika med statičnim in polkinematičnim referenčnim sestavom je, da je slednji vzpostavljen na podlagi aktivnih GNSS-točk (stalnih GNSS-postaj). Poznavanje vektorjev hitrosti (iz analiz časovnih vrst koordinat) v teh točkah omogoča kakovostno povezavo med državnim in globalnim referenčnim sestavom. Koordinate točk so tudi v polkinematičnem referenčnem sestavu z vidika uporabnika nespremenljive, vendar je kakovost takšnega sestava zagotovljena za bistveno daljše časovno obdobje, kar zagotavljajo uporabnikom skrite transformacije koordinat, podprte z geokinematskim modelom (Poutanen in Häkli, 2018).

V terminologiji geografskih informacijskih sistemov (GIS) se ločita koordinatni sistem – CS (angl. *coordinate system*) in referenčni koordinatni sistem – CRS (angl. *coordinate reference system*); slednji je matematično definiran koordinatni sistem, ki je tudi dejansko vzpostavljen (ISO 19111, 2019). To pomeni, da je teoretično opredeljen koordinatni sistem pripet na fizično površje Zemlje kot planeta, in sicer z določitvijo koordinat temeljnih geodetskih točk v tem sistemu. Ali drugače povedano: referenčni koordinatni sistem je tisti koordinatni sistem, ki ima določen geodetski datum. Mednarodna zveza za geodezijo – IAG (International Association of Geodesy) pa daje prednost terminoma terestrični referenčni sistem – TRS (angl. *terrestrial reference system*) in terestrični referenčni sestav – TRF (angl. *terrestrial reference frame*), ki je konkretna realizacija prvega. Prehod med dvema CRS-oma, ko gre za različna geodetska datuma, oziroma prehod med dvema TRF-oma imenujemo datumska transformacija (angl. *datum transformation*), prehod med dvema CRS-oma, ko gre za isti geodetski datum, a različna koordinatna sistema, pa pretvorba koordinat (angl. *coordinate conversion*), na primer iz kartezičnih v geodetske (Berk in Boldin, 2017; Berk in sod., 2018a). Za izbrani trenutek v času kot četrto razsežnost koordinatnega sistema uporabljamo termin epoha (angl. *epoch*). Za »TRF, epoha t « je v nadaljevanju uporabljen krajši zapis TRF@ t .

Mednarodni terestrični referenčni sistem – ITRS (International Terrestrial Reference System) je sistem s središčem v težišču Zemlje (geocentričen); začetno orientacijo v epohi 1984,0 je podal Mednarodni urad za čas – BIH (Bureau International de l'Heure) in se za vsakokratno novo realizacijo ohranja ob pogoju, da se sistem ne vrti (angl. *no-net-rotation condition*), pri čemer se upoštevajo tektonska dogajanja na celotni Zemlji (Petit in Luzum, 2010, str. 34). Sistem se posodablja na vsakih nekaj let in doslej je

bilo že devet realizacij ITRS. Aktualna (zadnja) realizacija ITRS je mednarodni terestrični referenčni sestav 2014 – ITRF2014 (International Terrestrial Reference Frame 2014), v pripravi pa je ITRF2020 (ITRF Solutions, 2021).

Evropski terestrični referenčni sistem 1989 – ETRS89 (European Terrestrial Reference System 1989) je sistem, ki je pripet na stabilni del evrazijske tektonske plošče in se z ITRS ujema v epohi 1989,0 (Altamimi, 2018, str. 2). Realizacije ETRS89 se časovno ujemajo z realizacijami ITRS in aktualna realizacija je evropski terestrični referenčni sestav 2014 – ETRF2014 (European Terrestrial Reference Frame 2014).

Slovenija je kot uradni državni koordinatni sistem prevzela ETRS89 (ZDGRS, 2014). Zadnja od EUREF potrjena slovenska realizacija ETRS89 ima oznako D17 (Berk in sod., 2018b), a iz praktičnih razlogov ni bila uveljavljena neposredno. Aktualna realizacija slovenskega TRS z oznako D96-17 (Berk in sod., 2020) je z D17 povezana s 6-parametrično togo transformacijo, in sicer tako, da je upoštevana tudi prvotna realizacija ETRS89 z oznako D96 (Berk in sod., 2004).

Morda še nekaj besed o povezavi med ITRS in svetovnim geodetskim sistemom 1984 – WGS84 (World Geodetic System 1984). WGS84 je koordinatni sistem ameriškega globalnega sistema za določanje položaja – GPS (Global Positioning System). V tem sistemu so podane tirnice satelitov, ki jih ti posredujejo v realnem času (angl. *broadcast ephemerides*). Zato je sistem zelo pomemben predvsem za vse vrste navigacije – na morju, na kopnem in v zraku. Koordinatna odstopanja med realizacijami WGS84 in ITRS so bila v začetku do enega metra, vendar so se z leti zelo zmanjšala. Aktualna realizacija WGS84 (tj. G1762) se z aktualno realizacijo ITRS (tj. ITRF2014) ujema s centimetrovsko točnostjo, zato med njima ne izvajamo datumske transformacije (ITRS & WGS84, 2021).

Za transformacije med dosedanjimi slovenskimi realizacijami ETRS89 je na voljo brezplačni program ETRS89-SI (Berk, 2020). Za transformacije med realizacijami ETRS89 in realizacijami ITRS ter med samimi realizacijami ITRS je na voljo komercialna programska oprema, na primer programski paket Bernese (Dach in sod., 2015), pa tudi različna brezplačna programska orodja (npr. PROJ Contributors, 2021) in spletne aplikacije, kot je storitev EPN (ETRF/ITRF, 2021). Za uporabnike in razvijalce GIS-orodij velja omeniti, da so transformacije med različnimi realizacijami ETRS89 in ITRS vključene tudi v zbirko geodetskih parametrov EPSG (Berk in sod., 2018a).

Obravnavane transformacije so pomembne tudi za obstoječe postopke določanja položaja v Sloveniji, na primer v okviru storitev omrežja SIGNAL, kjer je treba poskrbeti za povezavo med produkcijskim okoljem (ITRF2014) in distribucijskim okoljem (D96-17); tovrstnim izzivom smo bili priča ob vzpostavitvi spletne storitve TOP (Fabiani in Ritlop, 2019). Zagotovitev kakovostnih transformacij med državnim in mednarodnim terestričnim referenčnim sestavom je nujna pri geodetski izmeri z metodo PPP (Sterle in sod., 2014). Slej ko prej pa bodo te transformacije aktualne tudi pri upravljanju državnih zbirk prostorskih podatkov in razvoju spletnih storitev nad temi podatki. Povpraševanje po kakovostnih transformacijskih rešitvah lahko pričakujemo tudi od uporabnikov WGS84, na primer v Slovenski vojski, civilnem letalstvu, pomorstvu, cestni navigaciji ipd.

Posebnost aktualnega slovenskega TRF je že navedena dodatna transformacija, ki ga povezuje z realizacijo ETRS89, potrjeno s strani EUREF. Dodatna težava so periodične nove realizacije ITRS in ETRS89 na vsakih nekaj let, kar zahteva sprotno posodabljanje parametrov transformacij. Za

nekatero potrebo (na primer navigacijo) zadoščajo tudi manj natančne rešitve za prehod med državnim in mednarodnim sestavom, ki so enostavnejše in hitrejšje. V nadaljevanju so zato podrobno obravnavane transformacije med aktualnima državnim in mednarodnim terestričnim referenčnim sestavom. Podani so postopki in enačbe transformacij (vključno s parametri) – v obe smeri, po korakih in neposredne, stroge in poenostavljene. Izvedene so tudi analize koordinatnih razlik med obema sestavoma ter koordinatnih napak pri poenostavljenih transformacijah. Na koncu so podane nekatere ugotovitve in priporočila pri izboru optimalnih metod transformacije, skladnih s specifičnimi zahtevami različnih uporabnikov.

2 ENAČBE IN PARAMETRI TRANSFORMACIJ MED ETRS89/D96-17 IN ITRF2014

Enačbe transformacij med slovenskimi in mednarodnimi terestričnimi referenčnimi sestavi temeljijo na prostorski podobnosti (Helmertovi) transformaciji, tj. strogi 7-parametrični konformni transformaciji – s tremi pomiki, spremembo merila in tremi zasuki. V rabi sta dve različici stroge konformne transformacije v trirazsežnem prostoru, in sicer z različnim vrstnim redom zasukov okoli koordinatnih osi. Ker pa so zasuki med globalnimi referenčnimi sestavi zelo majhni, lahko enačbo lineariziramo. Linearizirana enačba je enaka za obe različici stroge enačbe (Ruffhead, 2021). Se pa za linearizirano različico enačbe pojavljata dve različni interpretaciji parametrov rotacijske matrike. Posledično se ti razlikujejo v predznakih. V pričujočem prispevku je uporabljena linearna različica Burša-Wolfove formule (Ruffhead in Whiting, 2020, str. 17), ki jo predpisuje IERS-konvencija (Petit in Luzum, 2010, str. 31). Za parametre rotacijske matrike je uporabljena PV-konvencija (angl. *position vector transformation*), ki jo je skladno s priporočilom mednarodnega standarda Geografske informacije – lociranje s koordinatami (ISO 19111, 2019) sprejela tudi Mednarodna zveza za geodezijo (Ruffhead, 2021). Za navedeno enačbo transformacije velja, da lahko za poenostavljeno (približno) obratno transformacijo uporabimo kar isto enačbo in parametre z nasprotnimi predznaki (angl. *simple same-formula inverse*).

Prehod med aktualnima mednarodnim (ITRF2014) in slovenskim terestričnim referenčnim sestavom (D96-17) vključuje naslednje štiri tipe transformacij:

- transformacija vektorja koordinat med dvema epohama iste realizacije TRS,
- transformacija vektorjev koordinat in hitrosti med dvema realizacijama ITRS,
- transformacija vektorjev koordinat in hitrosti med realizacijama ITRS in ETRS89 ter
- transformacija vektorja koordinat med dvema realizacijama ETRS89.

Enačbe in parametri transformacij so izvorno določeni za prehode iz ITRS v ETRS89, torej samo v eni smeri (angl. *one-way transformation*). Za izbrani prehod iz izvornega sistema (angl. *source system*) v ciljni sistem (angl. *target system*) je zato v nadaljevanju za dano/objavljeno transformacijo naprej (angl. *forward transformation*) povsod izpeljana še obratna transformacija (angl. *inverse transformation*), in sicer tako stroga (ki zagotavlja povratnost) kot tudi poenostavljene, približne različice.

V prispevku uporabljena enota za določanje epoh je decimalno leto [yr], za komponente vektorja hitrosti premikanja točk na površju Zemlje pa milimeter na leto [mm/yr]. Kot enote za transformacijske parametre so uporabljeni milimeter [mm], tisočinka ločne sekunde [mas] in število delov na milijardo [ppb]; za parametre z ustreznimi odvodi po času pa [mm/yr], [mas/yr] in [ppb/yr].

2.1 Transformacija vektorja koordinat med dvema epohama iste realizacije TRS

Imamo vektorja koordinat in pripadajočih hitrosti za točko v izbrani realizaciji TRS (TRF₁). Koordinate točke želimo privedi iz izvirne epohe (t_i) v ciljno epoho (t_c). Transformacijo vektorja koordinat izvedemo po enačbi (Altamimi, 2018, enačba 4):

$$\mathbf{X}_{\text{TRF}_1}(t_c) = \mathbf{X}_{\text{TRF}_1}(t_i) + (t_c - t_i) \cdot \dot{\mathbf{X}}_{\text{TRF}_1} \quad (1)$$

kjer sta:

- $\mathbf{X} = [X \ Y \ Z]^T \dots$ vektor koordinat točke in
- $\dot{\mathbf{X}} = [\dot{X} \ \dot{Y} \ \dot{Z}]^T \dots$ vektor hitrosti točke.

Ciljna epoha pri transformaciji v aktualni slovenski TRF bi bila epoha realizacije ETRS89 z oznako D17 (Berk in sod., 2018b), ki je $t_0 \approx 2016,75$ (tj. 1. 10. 2016 ob 10:10 UTC). Upošteva je enačbo (1) lahko transformacijo vektorja koordinat iz ITRF2014@ t v ITRF2014@ t_0 zapišemo kot:

$$\mathbf{X}_{\text{ITRF}_{14}}(t_0) = \mathbf{X}_{\text{ITRF}_{14}}(t) + (t_0 - t) \cdot \dot{\mathbf{X}}_{\text{ITRF}_{14}} \quad (2)$$

Še nekaj opomb glede merjenja epoh in hitrosti:

Med geodeti uporabljeni enoti za merjenje epoh [yr] in hitrosti [mm/yr] nista najbolj posrečeni izbiri. Osnovna enota za merjenje časa po mednarodnem standardu SI (iz franc. *système international d'unités*) je tako imenovana SI-sekunda [s], ki je vezana na mednarodni atomski čas TAI (iz franc. *temps atomique international*). Tudi če zanemarimo razliko med mednarodnim atomskim časom in pri obdelavi GNSS-opazovanj uporabljanim univerzalnim koordiniranim časom UTC (kratica je kombinirana iz franc. *temps universel coordonné* in angl. *coordinated universal time*) – zaradi prestopnih sekund (angl. *leap second*) za občasne uskladitve UTC s srednjim sončevim časom (angl. *mean solar time*) se TAI in UTC trenutno razlikujeta za več kot 30 s –, je leto spremenljiva časovna enota, določanje epoh v decimalnih letih pa neenakomerno. Po gregorijanskem koledarju, vpeljanem v oktobru 1582, je vsako četrto leto prestopno (angl. *leap year*), tj. za dan daljše; izjema je, ko je letnica deljiva s 100, razen če je deljiva tudi s 400 (prestopno je bilo na primer tudi leto 2000). Slabo določen časovni razpon med epohami, merjenimi v letih, bi po zgledu astronomov lahko odpravili z merjenjem epoh z julijanskim datumom (angl. *Julian date*) – zaporednim številom dni [d] od 1. januarja 4713 pr. n. št. po proleptičnem julijanskem koledarju (IAU Resolutions, 1997, B1) z dodanim decimalnim delom dneva (upošteva je točen čas) – ter z uporabo mikrometra na dan [$\mu\text{m}/\text{d}$] kot enote za merjenje hitrosti.

2.2 Transformacija vektorjev koordinat in hitrosti med dvema realizacijama ITRS

Praviloma je transformacija določena iz noveše realizacije ITRS (ITRF₁) v eno izmed njenih predhodnic (ITRF₀). Uporabljena je prostorska podobnostna transformacija s sedmimi parametri, ki se s časom spreminjajo linearno. Transformacijo vektorja koordinat in odgovarjajočega vektorja hitrosti točke med obema realizacijama ITRS v referenčni epohi noveše realizacije (t_1) izvedemo po enačbah (Altamimi, 2018, enačba 1):

$$\mathbf{X}_{\text{ITRF}_0}(t_1) = ((1 + D) \cdot \mathbf{I} + \mathbf{R}) \cdot \mathbf{X}_{\text{ITRF}_1}(t_1) + \mathbf{T} \quad (3)$$

$$\dot{\mathbf{X}}_{\text{ITRF}_0} = \dot{\mathbf{X}}_{\text{ITRF}_1} + (\dot{D} \cdot \mathbf{I} + \dot{\mathbf{R}}) \cdot \mathbf{X}_{\text{ITRF}_1}(t_1) + \dot{\mathbf{T}} \quad (4)$$

kjer so:

- D ... razlika enot merila med dvema realizacijama ITRS,
- \dot{D} ... odvod razlike enot merila med dvema realizacijama ITRS po času,
- $\mathbf{T} = [T_x \ T_y \ T_z]^T$... vektor pomikov med dvema realizacijama ITRS,
- $\dot{\mathbf{T}} = [\dot{T}_x \ \dot{T}_y \ \dot{T}_z]^T$... vektor odvodov pomikov med dvema realizacijama ITRS po času,
- $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & -R_z & R_y \\ R_z & 0 & -R_x \\ -R_y & R_x & 0 \end{bmatrix}$... matrika zasukov med dvema realizacijama ITRS,
- $\dot{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{R}_z & \dot{R}_y \\ \dot{R}_z & 0 & -\dot{R}_x \\ -\dot{R}_y & \dot{R}_x & 0 \end{bmatrix}$... matrika odvodov zasukov med dvema realizacijama ITRS po času in
- $\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$... identična oziroma enotska matrika razsežnosti 3×3 .

Parametre transformacije vektorjev koordinat in hitrosti točke za poljubno epoho – na primer epoho realizacije ETRS89 z oznako D17 – določimo s pomočjo odvodov parametrov iz enačbe (3) po času, ki sicer nastopajo v enačbi (4). Parameter za izbrano epoho (t_0) je (Altamimi, 2018, enačba 5):

$$P(t_0) = P(t_1) + \dot{P} \cdot (t_0 - t_1) \tag{5}$$

Upošteva je enačbi (3) in (5) lahko vektor koordinat točke v predhodni realizaciji ITRS (ITRF₀) za izbrano epoho (t_0) zapišemo kot:

$$\mathbf{X}_{ITRF_0}(t_0) = ((1 + D) \cdot \mathbf{I} + \mathbf{R} + (t_0 - t_1) \cdot (\dot{D} \cdot \mathbf{I} + \dot{\mathbf{R}})) \cdot \mathbf{X}_{ITRF_1}(t_0) + \mathbf{T} + (t_0 - t_1) \cdot \dot{\mathbf{T}} \tag{6}$$

Upošteva je enačbo (1) lahko zapišemo:

$$\mathbf{X}_{ITRF_1}(t_1) = \mathbf{X}_{ITRF_1}(t_0) - (t_0 - t_1) \cdot \dot{\mathbf{X}}_{ITRF_1} \tag{7}$$

S pomočjo enačbe (7) preoblikujemo vektor hitrosti točke v predhodni realizaciji ITRS (ITRF₀) iz enačbe (4) v končno obliko:

$$\dot{\mathbf{X}}_{ITRF_0} = \dot{\mathbf{X}}_{ITRF_1} + (\dot{D} \cdot \mathbf{I} + \dot{\mathbf{R}}) \cdot (\mathbf{X}_{ITRF_1}(t_0) - (t_0 - t_1) \cdot \mathbf{X}_{ITRF_1}) + \dot{\mathbf{T}} \tag{8}$$

Če za potrebe določitve vektorja hitrosti predpostavimo $\mathbf{X}_{ITRF_1}(t_1) \approx \mathbf{X}_{ITRF_1}(t_0)$, dobimo približek za enačbo (8):

$$\dot{\mathbf{X}}_{ITRF_0} \approx \dot{\mathbf{X}}_{ITRF_1} + (\dot{D} \cdot \mathbf{I} + \dot{\mathbf{R}}) \cdot \mathbf{X}_{ITRF_1}(t_0) + \dot{\mathbf{T}} \tag{9}$$

Hkrati z novimi realizacijami ITRS so bili določeni transformacijski parametri transformacij v njihove predhodnice, kot na primer iz ITRF2014 v ITRF2008 (Altamimi in sod., 2016), iz ITRF2008 v ITRF2005 (Altamimi in sod., 2011), iz ITRF2005 v ITRF2000 (Altamimi in sod., 2007) itn. Naknadno so bili določeni tudi parametri, ki neposredno povezujejo vsakokratno novo (aktualno) realizacijo ITRS s katerokoli izmed predhodnic. Nas zanima transformacija iz vsakokratne nove realizacije ITRS v ITRF2000, saj je – skladno z resolucijami EUREF – aktualna slovenska realizacija ETRS89 vezana na ETRF2000 (Berk in sod., 2020).

Preglednica 1: Parametri transformacije ITRF2014 → ITRF2000 (Altamimi, 2018, dodatek A)

Parameter	Vrednost	Enota
t_0	2016,75	yr
t_1	2010,0	yr
$T_x(a)$	0,7	mm
$T_y(b)$	1,2	mm
$T_z(c)$	-26,1	mm
$D(d)$	2,12	ppb
R_x	0	mas
R_y	0	mas
R_z	0	mas
$\dot{T}_x(e)$	0,1	mm/yr
$\dot{T}_y(f)$	0,1	mm/yr
$\dot{T}_z(g)$	-1,9	mm/yr
$\dot{D}(h)$	0,11	ppb/yr
\dot{R}_x	0	mas/yr
\dot{R}_y	0	mas/yr
\dot{R}_z	0	mas/yr

Vsi parametri, ki se nanašajo na zasuke in njihove odvode po času, so za realizacije od vključno ITRF2000 dalje enaki 0. Transformacijo iz ITRF2014 v ITRF2000 (in v vse vmesne realizacije) za vektorja koordinat in hitrosti točke v izbrani epohi (t_0) lahko zato (upoštevaje samo neničelne parametre iz preglednice 1) na podlagi enačb (6) in (8) zapišemo kot:

$$X_{ITRF00}(t_0) = (1 + d + b \cdot (t_0 - t_1)) \cdot X_{ITRF14}(t_0) + T_0 + (t_0 - t_1) \cdot \dot{T}_0 \tag{10}$$

$$\dot{X}_{ITRF00} = (1 - b \cdot (t_0 - t_1)) \cdot \dot{X}_{ITRF14} + b \cdot X_{ITRF14}(t_0) + \dot{T}_0 \tag{11}$$

kjer so:

- $T_0 = [a \ b \ c]^T$... vektor pomikov med obema realizacijama ITRS,
- d ... razlika enot merila med obema realizacijama ITRS,
- $\dot{T}_0 = [e \ f \ g]^T$... vektor odvodov pomikov med obema realizacijama ITRS po času in
- b ... odvod razlike enot merila med obema realizacijama ITRS po času.

Če izhajamo iz enačbe (9), lahko zapišemo še približek za enačbo (11):

$$\dot{X}_{ITRF00} \approx \dot{X}_{ITRF14} + b \cdot X_{ITRF14}(t_0) + \dot{T}_0 \tag{12}$$

Obratno transformacijo dobimo s preureditvijo enačb (10) in (11). Transformacijo iz ITRF2000 v ITRF2014 za vektorja koordinat in hitrosti točke zapišemo kot:

$$X_{ITRF14}(t_0) = (X_{ITRF00}(t_0) - T_0 - (t_0 - t_1) \cdot \dot{T}_0) / (1 + d + b \cdot (t_0 - t_1)) \tag{13}$$

$$\dot{X}_{ITRF14} = (\dot{X}_{ITRF00} - b \cdot X_{ITRF14}(t_0) - \dot{T}_0) / (1 - b \cdot (t_0 - t_1)) \tag{14}$$

Vektor koordinat v ITRF2014, ki nastopa v enačbi (14), seveda sledi iz enačbe (13), ki ga določimo najprej.

Običajno pa za obratni transformaciji vektorjev koordinat in hitrosti vzamemo parametre z nasprotnimi predznaki – primerjaj z enačbama (10) in (11) – in sta prva približka enačb (13) in (14) kar:

$$\mathbf{X}_{ITRF14}(t_0) \approx (1 - d - b \cdot (t_0 - t_1)) \cdot \mathbf{X}_{ITRF00}(t_0) - \mathbf{T}_0 - (t_0 - t_1) \cdot \dot{\mathbf{T}}_0 \quad (15)$$

$$\dot{\mathbf{X}}_{ITRF14} \approx (1 + b \cdot (t_0 - t_1)) \cdot \dot{\mathbf{X}}_{ITRF00} - b \cdot \mathbf{X}_{ITRF14}(t_0) - \dot{\mathbf{T}}_0 \quad (16)$$

Če izhajamo iz enačbe (12), pa lahko zapišemo še drugi približek za enačbo (14):

$$\dot{\mathbf{X}}_{ITRF14} \approx \dot{\mathbf{X}}_{ITRF00} - b \cdot \mathbf{X}_{ITRF14}(t_0) - \dot{\mathbf{T}}_0 \quad (17)$$

2.3 Transformacija vektorjev koordinat in hitrosti med realizacijama ITRS in ETRS89

Praviloma se ta transformacija izvaja med sočasnima realizacijama ITRS in ETRS89, torej tistima z isto letnico. Določena je enačba transformacije med realizacijo ITRS (ITRF₀) in odgovarjajočo realizacijo ETRS89 (ETRF₀). Transformacija vektorja koordinat za izbrano epoho (t₀) – epoho realizacije ETRS89 z oznako D17 – in odgovarjajočega vektorja hitrosti točke je (Altamimi, 2018, enačbi 2 in 3):

$$\mathbf{X}_{ETRF_0}(t_0) = (\mathbf{I} + (t_0 - t_2) \cdot \dot{\mathbf{R}}) \cdot \mathbf{X}_{ITRF_0}(t_0) + \mathbf{T} \quad (18)$$

$$\dot{\mathbf{X}}_{ETRF_0} = \dot{\mathbf{X}}_{ITRF_0} + \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{X}_{ITRF_0}(t_1) \quad (19)$$

kjer sta:

- $\mathbf{T} = [T_1 \ T_2 \ T_3]^T \dots$ vektor pomikov med realizacijama TRS in
- $\dot{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{R}_3 & \dot{R}_2 \\ \dot{R}_3 & 0 & -\dot{R}_1 \\ -\dot{R}_2 & \dot{R}_1 & 0 \end{bmatrix} \dots$ matrika odvodov zasukov med realizacijama TRS po času.

Pri transformaciji je uporabljena izhodiščna epoha ETRS89 (t₂=1989,0) – epoha, v kateri se ETRS89 ujema z ITRS. Vektor koordinat v enačbi (19) se nanaša na referenčno epoho (t₁), za katero so podani transformacijski parametri transformacije iz realizacije ITRS v izbrano realizacijo ETRS89. Upoštevaje enačbo (1) lahko zapišemo:

$$\mathbf{X}_{ITRF_0} = \mathbf{X}_{ITRF_0}(t_0) - (t_0 - t_1) \cdot \dot{\mathbf{X}}_{ITRF_0} \quad (20)$$

S pomočjo enačbe (20) preoblikujemo vektor hitrosti točke v realizaciji ETRS89 (ETRF₀) iz enačbe (19) v končno obliko:

$$\dot{\mathbf{X}}_{ETRF_0} = \dot{\mathbf{X}}_{ITRF_0} + \dot{\mathbf{R}} \cdot (\mathbf{X}_{ITRF_0}(t_0) - (t_0 - t_1) \cdot \dot{\mathbf{X}}_{ITRF_0}) \quad (21)$$

Če za potrebe določitve vektorja hitrosti predpostavimo $\mathbf{X}_{ITRF_0}(t_1) \approx \mathbf{X}_{ITRF_0}(t_0)$, dobimo še približek za enačbo (21):

$$\dot{\mathbf{X}}_{ETRF_0} \approx \dot{\mathbf{X}}_{ITRF_0} + \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{X}_{ITRF_0}(t_0) \quad (22)$$

Iz že navedenega razloga nas seveda zanima predvsem transformacija iz ITRF2000 v ETRF2000. Za parametre transformacij iz vseh dosedanjih realizacij ITRS v ETRF2000 (Altamimi 2018, preglednica 3) je referenčna epoha enaka referenčni epohi aktualne realizacije ITRS, torej ITRF2014 (t₁ = 2010,0).

Preglednica 2: Parametri transformacije ITRF2000 → ETRF2000 (Altamimi, 2018, preglednica 3)

Parameter	Vrednost	Enota
t_0	2016,75	yr
t_1	2010,0	yr
t_2	1989,0	yr
$T_1 (i)$	54,0	mm
$T_2 (j)$	51,0	mm
$T_3 (k)$	-48,0	mm
D_0	0	ppb
R_1	1,701	mas
R_2	10,290	mas
R_3	-16,632	mas
\dot{T}_1	0	mm/yr
\dot{T}_2	0	mm/yr
\dot{T}_3	0	mm/yr
\dot{D}_0	0	ppb/yr
$\dot{R}_1 (\alpha)$	0,081	mas/yr
$\dot{R}_2 (\beta)$	0,490	mas/yr
$\dot{R}_3 (\gamma)$	-0,792	mas/yr

Transformacijo iz ITRF2000 v ETRF2000 za vektorja koordinat in hitrosti točke v izbrani epohi (t_0) lahko (upoštevaje uporabljene parametre iz preglednice 2) na podlagi enačb (18) in (21) zapišemo kot:

$$X_{ETRF00}(t_0) = (I + (t_0 - t_2) \cdot \dot{R}_1) \cdot X_{ITRF00}(t_0) + T_1 \tag{23}$$

$$\dot{X}_{ETRF00} = (I - (t_0 - t_1) \cdot \dot{R}_1) \cdot \dot{X}_{ITRF00} + \dot{R}_1 \cdot X_{ITRF00}(t_0) \tag{24}$$

kjer sta:

- $T_1 = [i \ j \ k]^T \dots$ vektor pomikov med realizacijama TRS in
- $\dot{R}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{bmatrix} \dots$ matrika odvodov zasukov med realizacijama TRS po času.

Če izhajamo iz enačbe (22), lahko zapišemo še približek za enačbo (24):

$$\dot{X}_{ETRF00} \approx \dot{X}_{ITRF00} + \dot{R}_1 \cdot X_{ITRF00}(t_0) \tag{25}$$

Obratno transformacijo dobimo s preureditvijo enačb (23) in (24). Transformacijo iz ETRF2000 v ITRF2000 za vektorja koordinat in hitrosti točke zapišemo kot:

$$X_{ITRF00}(t_0) = (I + (t_0 - t_2) \cdot \dot{R}_1)^{-1} \cdot (X_{ETRF00}(t_0) - T_1) \tag{26}$$

$$\dot{X}_{ITRF00} = (I - (t_0 - t_1) \cdot \dot{R}_1)^{-1} \cdot (\dot{X}_{ETRF00} - \dot{R}_1 \cdot X_{ITRF00}(t_0)) \tag{27}$$

Vektor koordinat v ITRF2000, ki nastopa v enačbi (27), seveda sledi iz enačbe (26), ki ga določimo najprej.

Običajno pa za obratni transformaciji vektorjev koordinat in hitrosti vzamemo parametre z nasprotnimi predznaki – primerjaj z enačbama (23) in (24) – in sta prva približka enačb (26) in (27) kar:

$$\mathbf{X}_{ITRF00}(t_0) \approx (\mathbf{I} - (t_0 - t_2) \cdot \dot{\mathbf{R}}_1) \cdot \mathbf{X}_{ETRF00}(t_0) - \mathbf{T}_1 \tag{28}$$

$$\dot{\mathbf{X}}_{ITRF00} \approx (\mathbf{I} + (t_0 - t_1) \cdot \dot{\mathbf{R}}_1) \cdot \dot{\mathbf{X}}_{ETRF00} - \dot{\mathbf{R}}_1 \cdot \mathbf{X}_{ITRF00}(t_0) \tag{29}$$

Če izhajamo iz enačbe (25), pa lahko zapišemo še drugi približek za enačbo (27):

$$\dot{\mathbf{X}}_{ITRF00} \approx \dot{\mathbf{X}}_{ETRF00} - \dot{\mathbf{R}}_1 \cdot \mathbf{X}_{ITRF00}(t_0) \tag{30}$$

2.4 Transformacija vektorja koordinat med dvema realizacijama ETRS89

Za transformacijo vektorjev koordinat med izbranim izvorno (D_A) in ciljno realizacijo ETRS89 v Sloveniji (D_B) uporabimo poenostavljeno prostorsko podobnostno (7-parametrično) transformacijo (Berk in sod., 2020):

$$\mathbf{X}_{D_B} = ((1 + D) \cdot \mathbf{I} + \mathbf{R}) \cdot \mathbf{X}_{D_A} + \mathbf{T} \tag{31}$$

kjer so:

- D ... razlika enot merila med dvema realizacijama ETRS89,
- $\mathbf{T} = [T_x \ T_y \ T_z]^T$... vektor pomikov med dvema realizacijama ETRS89 in
- $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & -R_z & R_y \\ R_z & 0 & -R_x \\ -R_y & R_x & 0 \end{bmatrix}$... matrika zasukov med dvema realizacijama ETRS89.

Gre za enačbo (3), pri čemer pa se parametri s časom ne spreminjajo. Za transformacije med slovenskimi realizacijami ETRS89 je izbrana ničelna razlika enot merila ($D = 0$), kar pomeni, da je transformacija dejansko toga (6-parametrična). Povezava med slovenskimi realizacijami ETRS89 in realizacijami ITRS je vzpostavljena prek realizacije z oznako D17, tj. ETRF2000@ t_0 . Zanima nas torej transformacija iz D17 v D96-17, ki je aktualna »hibridna« realizacija ETRS89 – temelji namreč na vseh dosedanjih realizacijah (Berk in sod., 2020). Gre za pragmatičen pristop k posodobitvi državnega referenčnega sestava po zgledu Nemčije (Altiner in Perl, 2018).

Preglednica 3: Parametri transformacije D17 → D96-17 (Berk in sod., 2020; gl. tudi Berk, 2020)

Parameter	Vrednost	Enota
T_x (l)	236,635	mm
T_y (m)	-98,535	mm
T_z (n)	-201,265	mm
D	0	ppb
R_x (δ)	17,790	mas
R_y (ε)	-3,673	mas
R_z (ζ)	24,3695	mas

Transformacijo vektorja koordinat točke iz D17 v D96-17 (upoštevaje samo neničelne parametre iz preglednice 3) na podlagi enačbe (31) zapišemo kot:

$$X_{D96-17} = (I + R_2) \cdot X_{D17} + T_2 \tag{32}$$

kjer sta:

- $T_2 = [l \ m \ n]^T$... vektor pomikov med obema realizacijama ETRS89 in
- $R_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\zeta & \varepsilon \\ \zeta & 0 & -\delta \\ -\varepsilon & \delta & 0 \end{bmatrix}$... matrika zasukov med obema realizacijama ETRS89.

Obratno transformacijo dobimo s preureditvijo enačbe (32); transformacijo vektorja koordinat iz D96-17 v D17 lahko zapišemo kot:

$$X_{D17} = (I + R_2)^{-1} \cdot (X_{D96-17} - T_2) \tag{33}$$

Običajno pa za obratno transformacijo vzamemo parametre z nasprotnimi predznaki – primerjaj z enačbo (32) – in je približek enačbe (33) kar:

$$X_{D17} \approx (I - R_2) \cdot X_{D96-17} - T_2 \tag{34}$$

3 POSTOPKI TRANSFORMACIJ MED ETRS89/D96-17 IN ITRF2014

Praktična izvedba prehoda je enostavnejša v smeri iz državnega referenčnega sestava v aktualno epoko aktualnega mednarodnega terestričnega referenčnega sestava, na primer ETRS89/D96-17 → ITRF2014@t, čeprav so vsi izvorni parametri ($a, b, c \dots \delta, \varepsilon, \zeta$) podani za enačbe transformacij v obratni smeri. Zato tu oba postopka obravnavamo v zamenjanem vrstnem redu.

3.1 Postopek transformacije iz ETRS89/D96-17 v ITRF2014

Koordinate točke v D96-17 so pričakovan vhodni podatek, glede pripadajočega vektorja hitrosti pa imamo tri možnosti:

- vektor hitrosti je dan/znan (rezultat obdelave časovnih vrst koordinat za dano točko),
- vektor hitrosti ni znan; v tem primeru lahko:
 - vektor hitrosti ocenimo z ustreznim modelom (na podlagi okoliških točk z znanimi vektorji hitrosti, glej zgoraj) ali pa
 - privzamemo ničelni vektor hitrosti (predpostavimo torej, da lahko ozemlje Slovenije geotektonsko obravnavamo kot stabilen del Evrope).

Privzem ničelnega vektorja hitrosti v ETRS89 (ETRF2000) je sprejemljiva poenostavitev, ko gre za kratka časovna obdobja (do nekaj let po vzpostavitvi statičnega referenčnega sestava). Žal je trenutno točk s kakovostno določenimi vektorji hitrosti v Sloveniji malo, kar onemogoča kakovostno oceno vektorja hitrosti v poljubno izbrani točki (modeliranje). Vrednosti komponent teh vektorjev v ETRF2000 znašajo v različnih predelih Slovenije glede na dosedanje grobe ocene iz kampanjskih GNSS-izmer do nekaj milimetrov na leto, pri čemer prevladuje komponenta v smeri severa (npr. Berk, 2019, str. 1080–1091; Zurutuza in sod., 2019). Za daljše časovno obdobje (desetletje ali več) potrebujemo kakovostno in dovolj gosto polje hitrosti, ki omogoča tvorbo geokinematskega modela državnega ozemlja (npr. Medved in sod., 2018); interdisciplinaren raziskovalni projekt za pripravo takšnega modela za Slovenijo je v teku (Stopar in sod., 2021).

Najprej izvedemo transformacijo vektorja koordinat iz D96-17 v D17 po enačbi (33). Ne glede na poreklo pripadajočega vektorja hitrosti (možnosti zgoraj) so nato koraki prehoda iz ETRS89/D17 v ITRF2014@ t naslednji:

1. Transformacija danega vektorja koordinat iz ETRF2000@ t_0 (D17) v ITRF2000@ t po enačbi (26).
2. Transformacija danega, modeliranega ali ničelnega vektorja hitrosti iz ETRF2000 v ITRF2000 s transformiranim vektorjem koordinat (rezultat 1. koraka) po enačbi (27).
3. Transformacija vektorja koordinat iz ITRF2000@ t_0 (rezultat 1. koraka) v ITRF2014@ t_0 po enačbi (13).
4. Transformacija vektorja hitrosti iz ITRF2000 (rezultat 2. koraka) v ITRF2014 po enačbi (14).
5. Transformacija vektorja koordinat iz ITRF2014@ t_0 (rezultat 3. koraka) v ITRF2014@ t po enačbi (1).

V nadaljevanju označujemo zgoraj navedenih pet korakov transformacije iz D17 v ITRF2014 kot **postopek A**.


3.2 Postopek transformacije iz ITRF2014 v ETRS89/D96-17

V nasprotju s transformacijo iz D96-17 v ITRF2014 je izvedba obratne transformacije odvisna od obstoja pripadajočega vektorja hitrosti. Če imamo poleg vektorja koordinat tudi pripadajoči vektor hitrosti v ITRF2014, so koraki prehoda iz ITRF2014@ t v ETRS89/D17 naslednji:

1. Transformacija danega vektorja koordinat iz ITRF2014@ t v ITRF2014@ t_0 po enačbi (2).
2. Transformacija vektorja koordinat iz ITRF2014@ t_0 (rezultat 1. koraka) v ITRF2000@ t_0 po enačbi (10).
3. Transformacija danega vektorja hitrosti iz ITRF2014 v ITRF2000 po enačbi (11).
4. Transformacija vektorja koordinat iz ITRF2000@ t_0 (rezultat 2. koraka) v ETRF2000@ t_0 (tj. ETRS89/D17) po enačbi (23).
5. Transformacija vektorja hitrosti iz ITRF2000 (rezultat 3. koraka) v ETRF2000 po enačbi (24).

V nadaljevanju označujemo zgoraj navedenih pet korakov transformacije iz ITRF2014 v D17 kot **postopek B**. Temu sledi še transformacija vektorja koordinat iz D17 (ETRF2000@ t_0) v D96-17 po enačbi (32).

Razen izjemoma, pri več let delujočih stalnih GNSS-postajah z izvedenimi analizami časovnih vrst koordinat, pa pripadajočih vektorjev hitrosti seveda nimamo. V tem primeru postopek B nadomesti naslednji iterativen postopek:

- 
1. Tvorba ničelnega vektorja hitrosti (če ozemlje Slovenije geotektonsko obravnavamo kot stabilen del Evrope) oziroma aproksimacija/interpolacija vektorja hitrosti v ETRF2000 (z geokinematskim modelom) za dani vektor koordinat (izvornih v prvi ponovitvi, sicer rezultat 3. koraka).
 2. Transformacija vektorja koordinat (izvornih v prvi ponovitvi, sicer rezultat 3. koraka) in vektorja hitrosti (rezultat 1. koraka) iz ETRF2000 v ITRF2014@ t po postopku A.
 3. Transformacija vektorja koordinat (izvornih) in vektorja hitrosti (rezultat 2. koraka) iz ETRF2000 v ITRF2014@ t po postopku A.

V navedenem postopku izračuna ponavljamo korake od 1. do 3., dokler se koordinate točk v referenčnem sestavu ETRS89/D17 še spreminjajo. Kot vidimo iz gornjega postopka, je prikladno, da se geokinematski model nanaša na različico ETRF, ki je uporabljena kot ogrodje državne realizacije ETRS89. V našem primeru je to ETRF2000 (Berk in sod., 2020), kar je skladno z EUREF-resolucijo št. 1 iz Vroclava (ERUEF Resolutions, 2017; Medved in Berk, 2017).

4 NEPOSREDNA TRANSFORMACIJA MED ETRS89/D96-17 IN ITRF2014

Seveda nas zanima čim bolj neposredna transformacija koordinat, torej transformacija na čim bolj enostaven način. V nadaljevanju sta podani izpeljavi neposrednih enačb transformacij med ETRS89/D96-17 in ITRF2014.

4.1 Neposredna transformacija iz ITRF2014 v ETRS89/D96-17

V enačbo (32) vstavimo enačbo (23), vanjo enačbo (10) in v slednjo še enačbo (2) ter dobimo:

$$\begin{aligned} X_{D96-17} = & (1 + d + b \cdot (t_0 - t_1)) \cdot (I + R_2) \cdot (I + (t_0 - t_2) \cdot \dot{R}_1) \cdot (X_{ITRF14}(t) + (t_0 - t) \cdot \dot{X}_{ITRF14}) + \\ & + (I + R_2) \cdot ((I + (t_0 - t_2) \cdot \dot{R}_1) \cdot (T_0 + (t_0 - t_1) \cdot \dot{T}_0) + T_1) + T_2 \end{aligned} \quad (35)$$

Približek enačbe (35) lahko zapišemo tudi kot:

$$X_{D96-17} \approx ((1 + r) \cdot I + R_3) \cdot (X_{ITRF14}(t) + (t_0 - t) \cdot \dot{X}_{ITRF14}) + T_3 \quad (36)$$

pri čemer uvajamo r kot novo razliko enot merila, T_3 kot nov vektor pomikov, R_3 pa kot novo matriko zasukov:

- r ... razlika enot merila med obema realizacijama TRS,
- $T_3 = [o \ p \ q]^T$... vektor pomikov med obema realizacijama TRS in
- $R_3 = \begin{bmatrix} 0 & -\kappa & \vartheta \\ \kappa & 0 & -\eta \\ -\vartheta & \eta & 0 \end{bmatrix}$... matrika zasukov med obema realizacijama TRS.

Elementi vektorja pomikov so kar elementi vektorja T_3 – primerjaj enačbi (35) in (36):

$$T_3 = (I + R_2) \cdot ((I + (t_0 - t_2) \cdot \dot{R}_1) \cdot (T_0 + (t_0 - t_1) \cdot \dot{T}_0) + T_1) + T_2 \quad (37)$$

Ostale parametre določimo z matriko $M = (1 + r) \cdot I + R_3$ iz enačbe (36); iz enačbe (35) vidimo, da je:

$$M = (1 + d + b \cdot (t_0 - t_1)) \cdot (I + R_2) \cdot (I + (t_0 - t_2) \cdot \dot{R}_1) \quad (38)$$

Razliko enot merila r izračunamo z matriko M iz enačbe (38); uporabimo sled matrike (vsoto diagonalnih elementov):

$$r = (sled(M) - 3)/3 = (M_{1,1} + M_{2,2} + M_{3,3} - 3)/3 \quad (39)$$

Elemente matrike zasukov R_3 pa izračunamo kot polovične razlike ustreznih elementov matrike M , in sicer:

$$\eta = (M_{3,2} - M_{2,3})/2 \quad (40)$$

$$\vartheta = (M_{1,3} - M_{3,1})/2 \quad (41)$$

$$\kappa = (M_{2,1} - M_{1,2})/2 \quad (42)$$

Preglednica 4: Parametri neposredne transformacije ITRF2014 → ETRS89/D96-17 po enačbi (36)

Parameter	Vrednost	Enota
t_0	2016,75	yr
$T_x(\mathbf{o})$	292,01	mm
$T_y(\mathbf{p})$	-45,66	mm
$T_z(\mathbf{q})$	-288,19	mm
r	2,8625	ppb
$R_x(\eta)$	20,038	mas
$R_y(\vartheta)$	9,924	mas
$R_z(\kappa)$	2,392	mas

Sledi še neposredna transformacija vektorja hitrosti iz ITRF2014 v ETRF2000. Če za potrebe določitve vektorja hitrosti tokrat predpostavimo kar $\mathbf{X}_{ITRF14}(t) \approx \mathbf{X}_{ITRF14}(t_0)$, lahko enačbo (17) preoblikujemo v:

$$\dot{\mathbf{X}}_{ITRF14} \approx \dot{\mathbf{X}}_{ITRF00} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{X}_{ITRF14}(t) - \dot{\mathbf{T}}_0 \quad (43)$$

Namesto $\dot{\mathbf{X}}_{ITRF00}$ vstavimo enačbo (30) in predpostavimo še $\mathbf{X}_{ITRF14}(t) \approx \mathbf{X}_{ITRF00}(t_0)$ ter dobimo:

$$\dot{\mathbf{X}}_{ITRF14} \approx \dot{\mathbf{X}}_{ETRF00} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{I} + \dot{\mathbf{R}}_1) \cdot \mathbf{X}_{ITRF14}(t) - \dot{\mathbf{T}}_0 \quad (44)$$

Enačbo (44) zdaj ustrezno preoblikujemo, da dobimo neposredno enačbo za vektor hitrosti v ciljnem sestavu:

$$\dot{\mathbf{X}}_{ETRF00} \approx \dot{\mathbf{X}}_{ITRF14} + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{I} + \dot{\mathbf{R}}_1) \cdot \mathbf{X}_{ITRF14}(t) + \dot{\mathbf{T}}_0 \quad (45)$$

Razen za dalj časa delujoče stalne GNSS-postaje vektorja hitrosti v izvornem sestavu (ITRF2014) seveda nimamo. V tem primeru ga določimo iz vektorja hitrosti v ETRF2000 – tvorjenega z geokinematskim modelom ali pa kar ničelnega, če modela nimamo – uporabimo enačbo (44). Če uporabimo kar ničelni vektor hitrosti v ETRF2000, pa lahko zapišemo še grobo oceno vektorja hitrosti v ITRF2014:

$$\dot{\mathbf{X}}_{ITRF14} \approx -(\mathbf{b} \cdot \mathbf{I} + \dot{\mathbf{R}}_1) \cdot \mathbf{X}_{ITRF14}(t) - \dot{\mathbf{T}}_0 \quad (46)$$

4.2 Neposredna transformacija iz ETRS89/D96-17 v ITRF2014

Preoblikujemo enačbo (36) in dobimo:

$$\mathbf{X}_{ITRF14}(t) \approx ((1+r) \cdot \mathbf{I} + \mathbf{R}_3)^{-1} \cdot (\mathbf{X}_{D96-17} - \mathbf{T}_3) - (t_0 - t) \cdot \dot{\mathbf{X}}_{ITRF14} \quad (47)$$

Po zgledih iz podpoglavij 2.2–2.4 lahko še nekoliko bolj grob približek izpeljemo iz enačbe (36); obratno transformacijo določimo kar s pomočjo parametrov z nasprotnimi predznaki:

$$\mathbf{X}_{ITRF14}(t) + (t_0 - t) \cdot \dot{\mathbf{X}}_{ITRF14} \approx ((1-r) \cdot \mathbf{I} - \mathbf{R}_3) \cdot \mathbf{X}_{D96-17} - \mathbf{T}_3 \quad (48)$$

in dobimo končno obliko:

$$\mathbf{X}_{ITRF14}(t) \approx ((1-r) \cdot \mathbf{I} - \mathbf{R}_3) \cdot \mathbf{X}_{D96-17} - \mathbf{T}_3 - (t_0 - t) \cdot \dot{\mathbf{X}}_{ITRF14} \quad (49)$$

Iz enačbe (49) izhaja, da moramo pred določitvijo koordinat v ciljnem sestavu določiti vektor hitrosti. Izhajamo iz enačbe (44). Da se izognemo iterativnemu postopku transformacije, za potrebe določitve vektorja hitrosti predpostavimo še $\mathbf{X}_{ITRF14}(t) \approx \mathbf{X}_{D96-17}$ in dobimo končno obliko:

$$\dot{X}_{ITRF14} \approx \dot{X}_{ETRF00} - (b \cdot I + \dot{R}_1) \cdot X_{D96-17} - \dot{T}_0 \quad (50)$$

Če uporabimo kar ničelni vektor hitrosti v ETRF2000, pa lahko zapišemo še nekoliko bolj grobo oceno vektorja hitrosti v ITRF2014:

$$\dot{X}_{ITRF14} \approx -(b \cdot I + \dot{R}_1) \cdot X_{D96-17} - \dot{T}_0 \quad (51)$$

4.3 Neposredna transformacija med ETRS89/D96-17 in ITRF2014 samo v odvisnosti od časa

Če vektorjev hitrosti točk v ETRF2000 ne poznamo in uporabimo kar ničelne vektorje – torej Slovenijo geotektonsko obravnavamo kot stabilen del Evrope –, lahko zapišemo neposredne povezave med slovenskim in mednarodnim terestričnim referenčnim sestavom zgolj v odvisnosti od izbrane epohe (t). Če enačbo (51) vstavimo v enačbo (49), dobimo neposredno enačbo transformacije iz D96-17 v ITRF2014@ t :

$$X_{ITRF14}(t) \approx ((1-r) \cdot I - R_3 + (t_0 - t) \cdot (b \cdot I + \dot{R}_1)) \cdot X_{D96-17} - T_3 + (t_0 - t) \cdot \dot{T}_0 \quad (52)$$

Enačbo (52) lahko razčlenimo še v enačbe za posamezne koordinate, brez uporabe matrik:

$$X_{ITRF14}(t) \approx (1-r) \cdot X_{D96-17} + \kappa \cdot Y_{D96-17} - \vartheta \cdot Z_{D96-17} - o + (t_0 - t) \cdot (b \cdot X_{D96-17} - \gamma \cdot Y_{D96-17} + \beta \cdot Z_{D96-17} + e) \quad (53)$$

$$Y_{ITRF14}(t) \approx -\kappa \cdot X_{D96-17} + (1-r) \cdot Y_{D96-17} + \eta \cdot Z_{D96-17} - p + (t_0 - t) \cdot (\gamma \cdot X_{D96-17} + b \cdot Y_{D96-17} - \alpha \cdot Z_{D96-17} + f) \quad (54)$$

$$Z_{ITRF14}(t) \approx \vartheta \cdot X_{D96-17} - \eta \cdot Y_{D96-17} + (1-r) \cdot Z_{D96-17} - q + (t_0 - t) \cdot (-\beta \cdot X_{D96-17} + \alpha \cdot Y_{D96-17} + b \cdot Z_{D96-17} + g) \quad (55)$$

Enačbo (52) lahko preoblikujemo v:

$$X_{D96-17} \approx ((1-r) \cdot I - R_3 + (t_0 - t) \cdot (b \cdot I + \dot{R}_1))^{-1} \cdot (X_{ITRF14}(t) + T_3 - (t_0 - t) \cdot \dot{T}_0) \quad (56)$$

Po zgledih iz podpoglavij 2.2–2.4 lahko tudi približek enačbe (56) zapišemo s pomočjo parametrov z nasprotnimi predznaki in dobimo še končno obliko neposredne enačbe transformacije iz ITRF2014@ t v D96-17:

$$X_{D96-17} \approx ((1+r) \cdot I + R_3 - (t_0 - t) \cdot (b \cdot I + \dot{R}_1)) \cdot X_{ITRF14}(t) + T_3 - (t_0 - t) \cdot \dot{T}_0 \quad (57)$$

Tudi enačbo (57) lahko razčlenimo še v enačbe za posamezne koordinate, brez uporabe matrik:

$$X_{D96-17} \approx (1+r) \cdot X_{ITRF14}(t) - \kappa \cdot Y_{ITRF14}(t) + \vartheta \cdot Z_{ITRF14}(t) + o + (t_0 - t) \cdot (-b \cdot X_{ITRF14}(t) + \gamma \cdot Y_{ITRF14}(t) - \beta \cdot Z_{ITRF14}(t) - e) \quad (58)$$

$$Y_{D96-17} \approx \kappa \cdot X_{ITRF14}(t) + (1+r) \cdot Y_{ITRF14}(t) - \eta \cdot Z_{ITRF14}(t) + p + (t_0 - t) \cdot (-\gamma \cdot X_{ITRF14}(t) - b \cdot Y_{ITRF14}(t) + \alpha \cdot Z_{ITRF14}(t) - f) \quad (59)$$

$$Z_{D96-17} \approx -\vartheta \cdot X_{ITRF14}(t) + \eta \cdot Y_{ITRF14}(t) + (1+r) \cdot Z_{ITRF14}(t) + q + (t_0 - t) \cdot (\beta \cdot X_{ITRF14}(t) - \alpha \cdot Y_{ITRF14}(t) - b \cdot Z_{ITRF14}(t) - g) \quad (60)$$

Pri uporabi navedenih transformacijskih parametrov velja opozoriti na ustrezne pretvorbe ob njihovi uporabi; pomike in njihove odvode po času delimo s 1000, zasuke in njihove odvode po času pomnožimo s π in delimo s 648.000.000, razlike enot merila in njihove odvode po času pa delimo z 1000.000.000.

5 ANALIZA TRANSFORMACIJ MED ETRS89/D96-17 IN ITRF2014

Najprej je predstavljena analiza razlik koordinat izbrane točke v D96-17 in ITRF2014. Koordinatne razlike so podane v odvisnosti od epohe določitve koordinat v ITRF2014, in sicer v trirazsežnem kartezičnem koordinatnem sistemu (X, Y, Z) in sestavljenem koordinatnem sistemu (e, n, b) , torej z ravninskima koordinatama in elipsoidno višino. Za to analizo so uporabljene stroge enačbe transformacij.

Nato je predstavljena analiza točnosti različnih metod in enačb transformacij med D96-17 in ITRF2014 (podanih v poglavjih 2 in 4). Gre za preverjanje točnosti različnih poenostavitvev enačb transformacij v primerjavi s strogimi enačbami in ne za analizo negotovosti koordinat v ciljnem referenčnem sestavu (po zakonu o prenosu varianc in kovarianc). Koordinate in hitrosti točk v izvornem referenčnem sestavu kot tudi transformacijski parametri so torej obravnavani kot absolutno točni (dani), ugotavljamo pa računске napake koordinat v ciljnem referenčnem sestavu. Vsi izračuni so izvedeni s tako imenovano dvojno natančnostjo (angl. *double precision*), brez vmesnih zaokrožitev koordinat.

Na koncu je predstavljen še poskus analize vpliva spremenljive časovne enote (decimalno leto) na kakovost transformacije med D96-17 in ITRF2014.

Predstavljene podrobne analize transformacij se nanašajo na EPN-postajo GSR1 v Ljubljani, ki je za zdaj edina točka v Sloveniji s kakovostno določenima vektorjema koordinat in tudi hitrosti v ETRF2000. Uporabljeni so bili produkti EPN v obliki kumulativnih izračunov koordinat in vektorjev hitrosti (Bruyninx in sod., 2012 in 2019; EPN Class A, 2021), in sicer za zadnjo kumulativno rešitev do vključno GPS-te dna 2130 (C2130). Podobne analize pa so bile izvedene tudi za tri najbližje EPN-postaje v sosesčini, in sicer za postaje GRAZ (Gradec) v Avstriji, PORE (Poreč) na Hrvaškem in ZOUF (Zouf Plan) v Italiji.

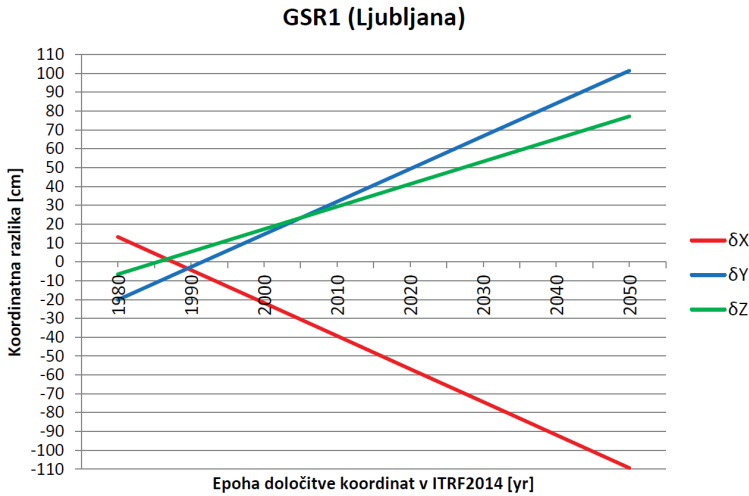
5.1 Koordinatne razlike med ETRS89/D96-17 in ITRF2014

Najmanjše absolutne razlike trirazsežnih kartezičnih koordinat (X, Y, Z) za EPN-postajo GSR1 (Ljubljana) v referenčnih sestavih D96-17 in ITRF2014 bi zabeležili 11. februarja 1989 (epoha 1989,115); absolutna razlika za Y - in Z -koordinati bi znašala 4,30 cm. Ob uveljavitvi koordinatnega sestava D96-17, tj. 1. januarja 2020 (epoha 2020,0), je največja razlika (za X -koordinato) znašala 56,81 cm, 4. septembra 2044 (epoha 2044,675) pa bo največja razlika (za X -koordinato) preseгла 100 cm. Razlike med kartezičnimi koordinatami v D96-17 in ITRF2014 v odvisnosti od ciljne epohe so prikazane na sliki 1.

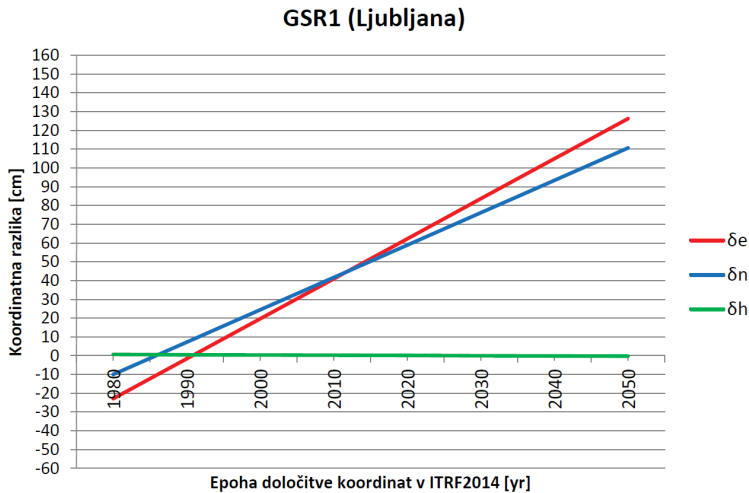
Koordinatne razlike med kartezičnimi koordinatami v D96-17 in ITRF2014 se s časom spreminjajo linearno. Največja absolutna koordinatna razlika za EPN-postajo GSR1 narašča (od 27. novembra 1991 dalje) s hitrostjo 1,75 cm/yr (za X -koordinato), kar je tudi absolutno največja komponenta njenega vektorja hitrosti v ITRF2014.

Za isto točko (GSR1) je izvedena tudi analiza razlik med ravninskimi koordinatami (e, n) in elipsoidnimi višinami (b) v D96-17 in ITRF2014. Najmanjše absolutne razlike koordinat bi zabeležili 11. julija 1988 (epoha 1988,527); absolutna razlika za e - in n -koordinati bi znašala 4,69 cm. Ob uveljavitvi koordinatnega

sestava D96-17, tj. 1. januarja 2020 (epoha 2020,0), je največja razlika (za e -koordinato) znašala 62,32 cm, 13. septembra 2037 (epoha 2037,699) pa bo največja razlika (za e -koordinato) presegla 100 cm. Razlike med ravninskimi koordinatami in elipsoidnimi višinami v D96-17 in ITRF2014 v odvisnosti od ciljne epohe so prikazane na sliki 2.



Slika 1: Razlike med kartezičnimi koordinatami: ITRF2014@t minus D96-17.



Slika 2: Razlike med ravninskimi koordinatami in elipsoidnimi višinami: ITRF2014@t minus D96-17.

Absolutna razlika med elipsoidnima višinama v D96-17 in ITRF2014 je zelo majhna. Ob uveljavitvi koordinatnega sestava D96-17, tj. 1. januarja 2020 (epoha 2020,0), je znašala 0,11 cm. Razlika se odtlej manjša in 25. septembra 2028 (epoha 2028,732) bo elipsoidna višina EPN-postaje GSR1 v obeh referenčnih sestavih enaka, nato pa se bo razlika spet počasi večala; šele sredi leta 2108 bo presegla 1 cm.

Tudi koordinatne razlike med ravninskimi koordinatami v D96-17 in ITRF2014 se s časom spreminjajo linearno. Največja absolutna koordinatna razlika za EPN-postajo GSR1 narašča (od 27. avgusta 2011 dalje) s hitrostjo 2,13 cm/yr (za e -koordinato), kar se ujema z absolutno največjo horizontalno komponento njenega vektorja hitrosti v ITRF2014. Tudi za ostale analizirane stalne postaje so vektorji hitrosti točk v ITRF2014 (kartirani v TM-projekciji) zelo podobni. Komponente, ki ustrezajo e -koordinatam, so od navedene hitrosti za ljubljansko postajo pa do 2,22 cm/yr za EPN-postajo PORE (Poreč), torej so ekstremne vrednosti komponent vektorjev v razmerju 1 : 1,042, glede na EPN-postajo GSR1 pa znašajo razlike do 4,2 % vrednosti komponente vektorja.

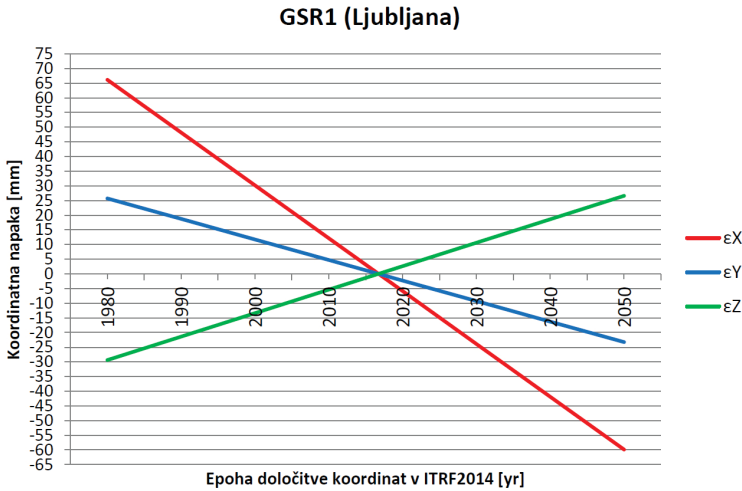
5.2 Točnost transformacij med ETRS89/D96-17 in ITRF2014

Najprej je bila preverjena povratnost (reverzibilnost) transformacije z uporabo strogih enačb. Za transformacijo iz D96-17 v ITRF2014 je bil uporabljena enačba (33) in nato postopek A (glej podpoglavje 3.1), za transformacijo iz ITRF2014 v D96-17 pa postopek B (glej podpoglavje 3.2) in nato enačba (32). Za vse štiri analizirane EPN-postaje (GRAZ, GSR1, PORE in ZOUF) je absolutna koordinatna napaka po transformaciji iz izvornega v ciljni in nazaj v izvorni referenčni sestav za vse tri kartezične koordinate manjša od 2 nm (0,000000002 m), kar je na meji dosegljive natančnosti računanja koordinat na površju Zemlje z dvojno natančnostjo (angl. *machine precision*).

Nato je bila analizirana točnost približkov enačb transformacij med D96-17 in ITRF2014 – z uporabo izvornih transformacijskih parametrov z nasprotnimi parametri pri določitvi vektorjev koordinat in hitrosti točk (prvi približki) in/ali z uporabo približnih koordinat pri določitvi vektorjev hitrosti točk (drugi približki). Za transformacijo iz ITRF2014 v D96-17 sta bili tako uporabljeni enačba (12) namesto (11) in enačba (25) namesto (24), za obratno transformacijo pa so bile uporabljene enačba (34) namesto (33), enačba (28) namesto (26), enačba (29) ali (30) namesto (27), enačba (15) namesto (13), in enačba (16) ali (17) namesto (14). Za vse štiri EPN-postaje je ne glede na izbor približnih enačb absolutna koordinatna napaka za vse tri kartezične koordinate (v ciljnem sestavu) manjša od 0,1 μ m (0,0000001 m), in sicer za ciljne epohe vse do leta 2285.

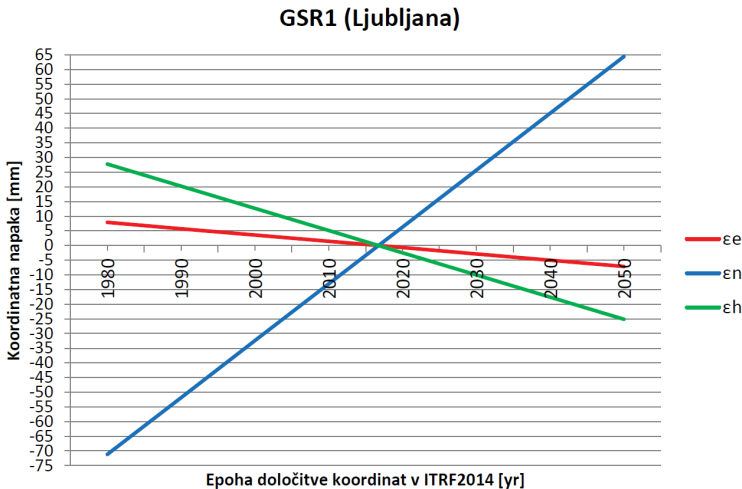
Sledila je analiza točnosti izpeljanih enačb za neposredno transformacijo koordinat med D96-17 in ITRF2014, torej enačbe (36) za transformacijo iz ITRF2014 v D96-17 in enačb (50) in (49) za obratno transformacijo. Za vse štiri EPN-postaje znaša absolutna koordinatna napaka v ciljnem sestavu za vse tri kartezične koordinate do okoli 0,01 mm. Koordinatne napake se z oddaljevanjem od referenčne epohe večajo zelo počasi in presežejo 0,02 mm šele v letu 6930.

Končno je bila izvedena še analiza koordinatnih napak pri transformacijah med D96-17 in ITRF2014 zaradi neupoštevanja pravih vektorjev hitrosti (določenih na podlagi časovnih vrst koordinat), torej ko zgolj privzamemo ničelne vektorje hitrosti v ETRF2000 (in ozemlje Slovenije geotektonsko obravnavamo kot stabilen del Evrope). Za analizo EPN-postaje GSR1 (Ljubljana) sta bili (poleg strogih enačb) uporabljeni enačbi (52) in (57). Trirazsežne kartezične koordinate (X, Y, Z) so v ciljnem sestavu brez napak v referenčni epohi referenčnega sestava D17, tj. 1. oktobra 2016 (epoha 2016,750). Z oddaljevanjem od referenčne epohe se največja absolutna koordinatna napaka večja. 20. aprila 2022 (epoha 2022,301) bo največja napaka (za X -koordinato) presegla 10 mm, 19. aprila 2072 (epoha 2072,298) pa bo največja napaka (prav tako za X -koordinato) presegla 100 mm. Napake trirazsežnih kartezičnih koordinat pri transformacijah med D96-17 in ITRF2014 (v ciljnem sestavu) v odvisnosti od ciljne epohe so prikazane na sliki 3.



Slika 3: Napake kartezičnih koordinat pri transformaciji med D96-17 in ITRF2014@t zaradi neupoštevanja pravega vektorja hitrosti v ETRF2000 (tj. ob privzemu ničelnega vektorja).

Koordinatne napake v kartezičnem koordinatnem sistemu pri transformaciji med D96-17 in ITRF2014 zaradi nepoznavanja vektorja hitrosti v ETRF2000 se s časom spreminjajo linearno. Največja absolutna koordinatna napaka za EPN-postajo GSR1 narašča s hitrostjo 1,80 mm/yr (za X-koordinato), kar je tudi absolutno največja komponenta njenega vektorja hitrosti v ETRF2000 (glej EPN Class A, 2021).



Slika 4: Napake ravninskih koordinat in elipsoidnih višin pri transformaciji med D96-17 in ITRF2014@t zaradi neupoštevanja pravega vektorja hitrosti v ETRF2000 (tj. ob privzemu ničelnega vektorja).

Za isto točko (GSR1) je izvedena tudi analiza napak ravninskih koordinat (e, n) in elipsoidnih višin (h). Tudi te so v ciljnem sestavu brez napak v referenčni epohi referenčne sestava D17, tj. 1. oktobra 2016

(epoha 2016,750). Z oddaljevanjem od referenčne epohe se največja absolutna koordinatna napaka večja; 27. novembra 2021 (epoha 2021,904) bo največja napaka (za n -koordinato) preseгла 10 mm, 13. maja 2068 (epoha 2068,363) pa bo največja napaka (prav tako za n -koordinato) preseгла 100 mm. Napake ravninskih koordinat in elipsoidnih višin pri transformacijah med D96-17 in ITRF2014 (v ciljnem sestavu) v odvisnosti od ciljne epohe so prikazane na sliki 4.

Tudi koordinatne napake v ravninskem sistemu in napake elipsoidnih višin pri transformaciji med D96-17 in ITRF2014 zaradi nepoznavanja vektorja hitrosti v ETRF2000 se s časom spreminjajo linearno. Največja absolutna koordinatna napaka za EPN-postajo GSR1 narašča s hitrostjo 1,94 mm/yr (za n -koordinato), kar se ujema z absolutno največjo horizontalno komponento njenega vektorja hitrosti v ETRF2000. V nasprotju s primerjavo vektorjev hitrosti točk v ITRF2014 se vektorji hitrosti ostalih analiziranih postaj v ETRF2000 (kartirani v TM-projekciji) seveda precej razlikujejo. Komponente, ki ustrezajo n -koordinatam, znašajo med 0,40 mm/yr za EPN-postajo GRAZ (Gradec) in 2,54 mm/yr za EPN-postajo PORE (Poreč), torej so ekstremne vrednosti komponent vektorjev v razmerju 1 : 6,35, glede na EPN-postajo GSR1 pa znašajo razlike do 79,4 % vrednosti komponente vektorja.

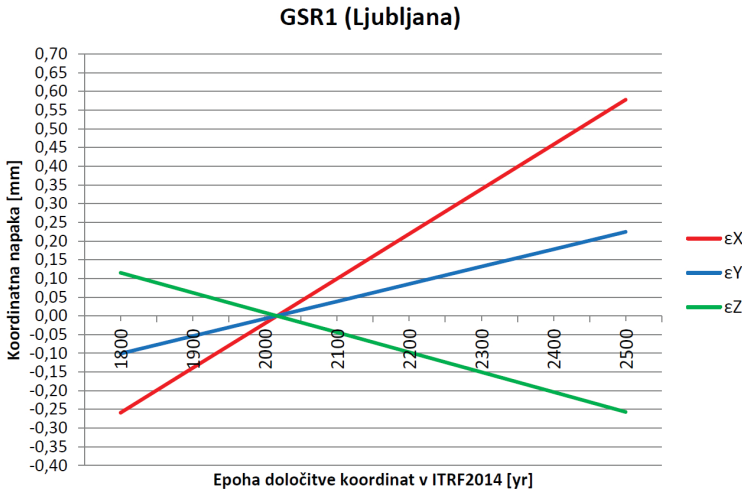
5.3 Vpliv uporabe spremenljive časovne enote na transformacijo med ETRS89/D96-17 in ITRF2014

Način določitve epohe vpliva že na parametre transformacij med različnimi realizacijami ITRS ter med realizacijami ITRS in ETRS89, ki jih v našem primeru prevzamemo kot dane količine. Poleg tega se napaka določitve epohe zaradi spremenljive dolžine leta periodično večja proti sredinam let in manjša proti vsakokratnemu novemu letu. Za grobo oceno vpliva uporabe spremenljive časovne enote [yr] na kakovost transformacije med D96-17 in ITRF2014 lahko predpostavimo, da je bil dani vektor hitrosti \dot{X}_{ETRF00} določen v obdobju brez prestopnega leta. V tem primeru bi pri določitvi komponent vektorja hitrosti upoštevali, da ima leto 365 dni. Za izračun povprečne dolžine leta je treba vzeti periodo 400 let – s 303 običajnimi leti s po 365 dnevi in s 97 prestopnimi leti s po 366 dnevi. Povprečno gregorijansko leto tako meri 365,2425 dni. Napako, ki bi jo povzročili z uporabo našega vektorja hitrosti pri transformaciji koordinat skozi daljše časovno obdobje, lahko ocenimo s popravljenim vektorjem hitrosti:

$$\dot{X}'_{ETRF00} = 365 \cdot \dot{X}_{ETRF00} / 365,2425 \quad (61)$$

Popravki vektorja hitrosti po enačbi (61) znašajo 0,66 % vrednosti njegovih komponent. Trirazsežne kartezične koordinate (X, Y, Z) so v ciljnem sestavu brez napak v referenčni epohi referenčnega sestava D17, tj. 1. oktobra 2016 (epoha 2016,750). Z oddaljevanjem od referenčne epohe se največja absolutna koordinatna napaka večja, vendar zelo počasi. Za EPN-postajo GSR1 (Ljubljana) bi ob upoštevanju zgornjih predpostavk šele v letu 2853 največja napaka (za X -koordinato) preseгла 1 mm. Ocenjene napake trirazsežnih kartezičnih koordinat pri transformacijah med D96-17 in ITRF2014 (v ciljnem sestavu) zaradi uporabe spremenljive časovne enote so za to postajo prikazane na sliki 5.

Na opisani način ocenjene koordinatne napake transformacije med D96-17 in ITRF2014 zaradi uporabe spremenljive časovne enote se s časom spreminjajo linearno. Največja absolutna koordinatna napaka za EPN-postajo GSR1 narašča s hitrostjo 1,20 $\mu\text{m}/\text{yr}$ (za X -koordinato).



Slika 5: Napake kartezičnih koordinat pri transformaciji med D96-17 in ITRF2014@t zaradi uporabe spremenljive časovne enote (decimalno leto).

6 RAZPRAVA

Iz analize koordinatnih razlik med D96-17 in ITRF2014 vidimo (sliki 1 in 2), da te s časom enakomerno naraščajo in postajajo nezanemarljive tudi za skupnost uporabnikov GIS. V Ljubljani bodo razlike med ravninskimi koordinatami presegle magično mejo enega metra v letu 2037. Po drugi strani so tehnološke zahteve pri določanju položaja in natančni navigaciji z razvojem novih tehnologij vse večje. Potrebo po kakovostnih transformacijah med državnim in mednarodnim TRS bo torej zaznaval vse širši krog uporabnikov.

Analiza točnosti različnih poenostavitev enačb (prvi približki za obratno transformacijo z uporabo iste enačbe in parametrov z nasprotnimi predznaki in drugi približki z uporabo približnih koordinat pri določitvi vektorjev hitrosti točk) pokaže (podpoglavje 5.2), da so vse navedene približne enačbe – vključno z neposrednima enačbama transformacij med D96-17 in ITRF2014@t (podpoglavji 4.1 in 4.2) – dovolj točne za vse praktične potrebe, tudi za najnatančnejše določitve koordinat v geodeziji. Glede na dosegljivo natančnost določitve vektorjev hitrosti s tehnologijo GNSS pa so vsekakor zanemarljive tudi napake pri transformacijah zaradi uporabe spremenljive časovne enote (podpoglavje 5.3). Argument za uporabo strogih enačb pri obratni transformaciji je izogibanje kumulativnim napakam pri večkratnih transformacijah iz izvornega v ciljni sestav in nazaj – ko na primer pri transformaciji iz ITRF2014 v D17 vektor hitrosti določamo iz geokinematskega modela in moramo uporabiti iterativni postopek (podpoglavje 3.2, postopek B). Nezanemarljiv je tudi učinek povratnosti transformacije na zaupanje uporabnikov v programsko opremo (Ruffhead, 2021).

Iz analize točnosti transformacij med D96-17 in ITRF2014, ko vektorja hitrosti v ETRF2000 ne poznamo, pa vidimo (sliki 3 in 4), kako pomemben bo geokinematski model države za ohranjanje kakovosti državnega koordinatnega sistema na dolgi rok. Še posebej to velja, ker so vektorji hitrosti v ETRF2000

po različnih delih države precej različni, tako po dolžini kot po smeri. V Ljubljani bodo napake pri ravninskih koordinatah še letos presegle 1 cm, kritično mejo 10 cm pa v letu 2068. Najnovejša različica Navodil za zgoštitev EUREF (tj. za nove državne realizacije ETRS89) že pri obdelavi kampanjskih izmer, ki trajajo dlje kot en mesec, predpisuje tudi modeliranje vektorjev hitrosti (Legrand in sod., 2021, str. 6–7). Glede na rezultate analiz pa lahko sklenemo, da sta poenostavljeni neposredni enačbi transformacij med D96-17 in ITRF2014, ki ne upoštevata lokalnih deformacij – enačbi (52) in (57) –, primerni za večino negeodetskih uporabnikov, kjer je zahtevana točnost transformacije koordinat med D96-17 in ITRF2014@*t* nekajcentimtrska ali slabša.

7 ZAKLJUČEK

Za zagotavljanje kakovosti sodobnega državnega terestričnega referenčnega sistema, ki temelji na tehnologiji GNSS, je nujno poznavanje razmerij med aktualnim državnim in mednarodnim terestričnim referenčnim sestavom, ki pa se zaradi delovanja tektonike s časom spreminjajo. Strategija EUREF temelji na vzpostavitvi gostega polja vektorjev hitrosti, kar bo omogočalo kakovostno modeliranje lokalnih deformacij na območju vse Evrope (Bruyninx in sod., 2017). Zato je za Slovenijo poleg lastnih projektov (mreža 0. reda, SLOKIN) zelo pomembno tudi sodelovanje pri tovrstnih mednarodnih aktivnostih (na primer v okviru EPN, EPOS, CEGRN). Končni cilj je vzpostavitev geokinematskega modela, ki bi omogočil prehod s statičnih na (pol)kinematične terestrične referenčne sestave. To bo prineslo bistveno izboljšanje kakovosti državnih koordinatnih sistemov na dolgi rok. Koordiniranje teh aktivnosti na mednarodni ravni pa zagotavlja tudi čezmejno skladnost in povezljivost teh sistemov.

Kakovostne časovno odvisne transformacije so osnovni pogoj tudi za izvajanje nekaterih metod geodetske izmere (npr. PPP), ki se pospešeno razvijajo – posebej z novimi, večfrekvenčnimi sistemi globalne satelitske navigacije, kot sta Galileo in BeiDou. Prav tako so te transformacije potrebne pri zagotavljanju storitev omrežij stalnih GNSS-postaj za določanje položaja v realnem času, kjer se izračuni koordinat praviloma izvajajo v aktualni realizaciji ITRS (produkcijske koordinate), uporabniku pa storitev zagotovi koordinate v aktualni realizaciji državnega koordinatnega sistema (distribucijske koordinate). Zaradi povečevanja koordinatnih razlik v državnem in globalnem sistemu pa postajajo transformacije med obema sistemoma nezanemarljive tudi pri natančni navigaciji.

V prispevku so na podlagi izvedenih analiz podana priporočila za izvajanje transformacij med aktualnim državnim (D96-17) in mednarodnim terestričnim referenčnim sestavom (ITRF2014), in sicer glede na zahtevano točnost transformacije in razpoložljivost vektorjev hitrosti točk – ali iz analize časovnih vrst koordinat ali pa iz ustreznega geokinematskega modela (poglavje 6). Enačbe oziroma njihove parametre pa bo seveda treba posodobiti ob vsaki novi slovenski realizaciji ETRS89 kot tudi ob vsaki novi realizaciji ITRS.

Literatura in viri:

- Altamimi, Z. (2018). Relationship and Transformation between the International and the European Terrestrial Reference Systems. EUREF Technical Note 1, Version June 28, 2018. IAG Reference Frame Subcommittee for Europe (EUREF), 11 str. <http://etrs89.ensg.ign.fr/pub/EUREF-TN-1.pdf>, pridobljeno 7. 5. 2021.
- Altamimi, Z., Collilieux, X., Legrand, J., Garayt, B., Boucher, C. (2007). ITRF2005: A New Release of the International Terrestrial Reference Frame Based on

Time Series of Station Positions and Earth Orientation Parameters. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 112 (B9), 19 str. DOI: <https://doi.org/10.1029/2007JB004949>

- Altamimi, Z., Collilieux, X., Métivier, L. (2011). ITRF2008: An Improved Solution of the International Terrestrial Reference Frame. *Journal of Geodesy*, 85 (8), 457–473. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00190-011-0444-4>

Altamimi, Z., Rebischung, P., Métivier, L., Collilieux, X. (2016). ITRF2014: A New Release of the International Terrestrial Reference Frame Modeling Nonlinear Station Motions. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 121 (8), 6109–6131. DOI: <https://doi.org/10.1002/2016JB013098>

Altiner, Y., Pertl, J. (2018). Geodätischer Raumbezug von GNSS-Messungen – Der Beitrag des BKG zur Realisierung 2016. *Zeitschrift für Geodäsie, Geoinformation und Landmanagement*, 143 (2), 114–120. DOI: <https://doi.org/10.12902/zfv-0201-2018>

Berk, S. (2019). Obdelava GNSS-kampanje »EUREF Slovenija 2016«. Končno poročilo, 1106 str. + 12 prilog. Ljubljana: Geodetska uprava Republike Slovenije.

Berk, S. (2020). ETRS89-SI – brezplačni program za transformacije koordinat med slovenskimi realizacijami ETRS89. *Geodetski vestnik*, 64 (4), 594–602. http://www.geodetski-vestnik.com/64/4/gv64-4_berk.pdf, pridobljeno 7. 5. 2021.

Berk, S., Boldin, D. (2017). Slovenski referenčni koordinatni sistemi v okolju GIS. *Geodetski vestnik*, 61 (1), 91–101. http://www.geodetski-vestnik.com/61/1/gv61-1_berk.pdf, pridobljeno 7. 5. 2021.

Berk, S., Boldin, D., Šavrič, B. (2018a). Nedavne posodobitve zbirke geodetskih parametrov EPSG in pregled podatkov, pomembnih za Slovenijo. *Geodetski vestnik*, 62 (4), 668–678. http://www.geodetski-vestnik.com/62/4/gv62-4_berk.pdf, pridobljeno 7. 5. 2021.

Berk, S., Komadina, Ž., Marjanovič, M., Radovan, D., Stopar, B. (2004). The Recomputation of the EUREF GPS Campaigns in Slovenia. Report on the Symposium of the IAG Reference Frame Subcommittee for Europe (EUREF), Toledo, Španija, 4.–7. junij 2003. EUREF publication, št. 13. *Mitteilungen des Bundesamtes für Kartographie und Geodäsie*, vol. 33, str. 132–149. Frankfurt na Majni: Verlag des Bundesamtes für Kartographie und Geodäsie. <http://www.euref.eu/symposia/book2003/4-02-Berk.pdf>, pridobljeno 7. 5. 2021.

Berk, S., Sterle, O., Medved, K., Komadina, Ž., Stopar, B. (2018b). Computation of the EUREF Slovenia 2016 GNSS Campaign. Report on the Symposium of the IAG Reference Frame Subcommittee for Europe (EUREF), Amsterdam, Nizozemska, 30. maj–1. junij 2018, št. 28, 27 str. + 7 prilog. <http://www.euref.eu/symposia/2018Amsterdam/01-03-p-Berk.pdf>, pridobljeno 7. 5. 2021.

Berk, S., Sterle, O., Medved, K., Stopar, B. (2020). ETRS89/D96-17 – rezultat GNSS-izmere EUREF Slovenija 2016. *Geodetski vestnik*, 64 (1), 43–67. DOI: <http://doi.org/10.15292/geodetski-vestnik.2020.01.43-67>

Bruyninx, C., Altamimi, Z., Brockmann, E., Caporali, A., Dach, R., Dousa, J., Fernandes, R., Giannou, M., Habrich, H., Ihde, J., Jivall, L., Kenyeres, A., Lidberg, M., Pacione, R., Poutanen, M., Szafrańek, K., Söhne, W., Stangl, G., Torres, J., Völksen, C. (2017). Implementation of the ETRS89 in Europe: Current Status and Challenges. *Proceedings of the Symposium on Reference Frames for Applications in Geosciences (REFAG 2014)*, Kirchberg, Luksemburg, 13.–17. oktober 2014. International Association of Geodesy Symposia, 146, 135–145. DOI: https://doi.org/10.1007/1345_2015_130

Bruyninx, C., Habrich, H., Söhne, W., Kenyeres, A., Stangl, G., Völksen, C. (2012). Enhancement of the EUREF Permanent Network Services and Products. *Proceedings of the 2009 IAG Symposium “Geodesy for Planet Earth”*, Buenos Aires, Argentina, 31. avgust–4. september 2009. International Association of Geodesy Symposia, 136, 27–34. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-642-20338-1_4

Bruyninx, C., Legrand, J., Fabian, A., Pottiaux, E. (2019). GNSS Metadata and Data Validation in the EUREF Permanent Network. *GPS Solutions*, 23 (4), 106. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10291-019-0880-9>

Dach, R., Lutz, S., Walser, P., Fridez, P. (2015). *Bernese GNSS Software. Version 5.2. User Manual*. 852 str. Bern: Astronomical Institute, University of Bern.

EPN Class A (2021). *Class A EPN Station Positions and Velocities*. http://www.epncb.oma.be/ftp/station/coord/EPN/EPN_A_ETRF2000_C2130.SSC, pridobljeno 7. 5. 2021.

ETRF/ITRF (2021). *EUREF Permanent GNSS Network: ETRF/ITRF Transformation*. Royal Observatory of Belgium. http://www.epncb.oma.be/_productsservices/coord_trans/, pridobljeno 7. 5. 2021.

EUREF Resolutions (2017). *EUREF 2017 Resolutions*. 27th Symposium of the IAG Reference Frame Subcommittee for Europe (EUREF), Wrocław, Poljska, 17.–19. maj 2017. <http://www.euref.eu/symposia/2017Wroclaw/06-01-Resolutions-EUREF2017.pdf>, pridobljeno 7. 5. 2021.

Fabiani, N., Ritlop, K. (2019). Trimble Online Processing – nova storitev za uporabnike omrežja SIGNAL. *Geodetski vestnik*, 63 (1), 104–108. http://www.geodetski-vestnik.com/63/1/gv63-1_fabiani.pdf, pridobljeno 7. 5. 2021.

IAU Resolutions (1997). *The XXIIIrd International Astronomical Union General Assembly*, Kjoto, Japonska. https://www.iau.org/static/resolutions/IAU1997_French.pdf, pridobljeno 7. 5. 2021.

ISO 19111 (2019). *Geographic Information – Referencing by Coordinates*. 3rd edition. Ženeva: International Organization for Standardization.

ITRF Solutions (2021). *ITRF Solutions*. ITRF Website. Institut Géographique National. https://trf.ign.fr/ITRF_solutions/index.php, pridobljeno 7. 5. 2021.

ITRS & WGS84 (2021). *ITRS and WGS84*. ITRF Website. Institut Géographique National. <ftp://trf-ftp.ign.fr/pub/trf/WGS84.TXT>, pridobljeno 7. 5. 2021.

Legrand, J., Bruyninx, C., Altamimi, Z., Caporali, A., Kenyeres, A., Lidberg, M. (2021). *Guidelines for EUREF Densifications*. Version 6. IAG Reference Frame Subcommittee for Europe (EUREF), 14 str. http://www.epncb.oma.be/_documentation/guidelines/Guidelines_for_EUREF_Densifications.pdf, pridobljeno 7. 5. 2021.

Medved, K., Berk, S. (2017). Proti novi realizaciji ETRS89. *Geodetski vestnik*, 61 (2), 293–295. http://www.geodetski-vestnik.com/61/2/gv61-2_medved.pdf, pridobljeno 7. 5. 2021.

Medved, K., Berk, S., Sterle, O., Stopar, B. (2018). Izzivi in dejavnosti v zvezi z državnim horizontalnim koordinatnim sistemom Slovenije. *Geodetski vestnik*, 62 (4), 567–586. DOI: <http://doi.org/10.15292/geodetski-vestnik.2018.04.567-586>

Petit, G., Luzum, B. (2010). *IERS Conventions*. IERS Technical Note No. 36, 179 str. Frankfurt na Majni: Verlag des Bundesamtes für Kartographie und Geodäsie. <https://www.iers.org/SharedDocs/Publicationen/EN/IERS/Publications/tn/Technote36/tm36.pdf>, pridobljeno 7. 5. 2021.

Poutanen, M., Häkli, P. (2018). Future of National Reference Frames – from Static to Kinematic? *Geodesy and Cartography*, 67 (1), 117–129. DOI: <https://doi.org/10.24425/118697>

PROJ Contributors (2021). *PROJ Coordinate Transformation Software Library*. Open Source Geospatial Foundation. <https://proj.org/>, pridobljeno 7. 5. 2021.

- Ruffhead, A. C. (2021). Equivalence Properties of 3D Conformal Transformations and Their Application to Reverse Transformations. *Survey Review*, 53 (377), 158–168. DOI: <https://doi.org/10.1080/00396265.2019.1708604>
- Ruffhead, A. C., Whiting, B. M. (2020). Introduction to Geodetic Datum Transformations and Their Reversibility. *Surveying Working Paper No. 01/2020*, 26 str. London: University of East London.
- Sterle, O., Pavlovčič Prešeren, P., Kuhar, M., Stopar, B. (2009). Definicija, realizacija in vzdrževanje modernih koordinatnih sistemov. *Geodetski vestnik*, 53 (4), 679–694. http://www.geodetski-vestnik.com/53/4/gv53-4_679-694.pdf, pridobljeno 7. 5. 2021.
- Sterle, O., Stopar, B., Pavlovčič Prešeren, P. (2014). Metoda PPP pri statični izmeri GNSS. *Geodetski vestnik*, 58 (3), 466–481. DOI: <https://doi.org/10.15292/geodetski-vestnik.2014.03.466-481>
- Stopar, B., Režek, J., Komadina, Ž., Medved, K., Berk, S., Bajec, K., Oven, K., Koler, B., Urbančič, T., Kuhar, M., Pavlovčič Prešeren, P., Sterle, O. (2015). Aktivnosti pri vzpostavitvi sodobnega geodetskega referenčnega sistema v Sloveniji. *Geodetska (r)evolucija*. 43. Geodetski dan, Sežana, 9.–10. april 2015. Zbornik posveta, str. 37–56. Ljubljana: Zveza geodetov Slovenije, in Nova Gorica: Primorsko geodetsko društvo.
- Stopar, B., Sterle, O., Ritlop, K., Pavlovčič Prešeren, P., Koler, B., Triglav Čekada, M., Radovan, D., Fabiani, N., Jamsšek Rupnik, P., Atanackov, J., Bavec, M., Vrabec, M. (2021). Projekt SLOKIN – geokinematski model ozemlja Slovenije. *Raziskave s področja geodezije in geofizike* 2020, 26. srečanje Slovenskega združenja za geodezijo in geofiziko, Ljubljana, 28. januar 2021. Zbornik del, letn. 26, str. 87–104. Ljubljana: Slovensko združenje za geodezijo in geofiziko. http://fgg-web.fgg.uni-lj.si/SUGG/referati/2021/SZGG_2021_Stopar_in_dr.pdf, pridobljeno 7. 5. 2021.
- ZDGRS (2014). Zakon o državnem geodetskem referenčnem sistemu. Uradni list Republike Slovenije, št. 25/2014 in 61/2017 – ZAIID. <http://www.pisrs.si/Pisweb/pregledPredpisa?id=ZAKO6446>, pridobljeno 7. 5. 2021.
- Zurutuza, J., Caporali, A., Bertocco, M., Ishchenko, M., Khoda, O., Steffen, H., Figurski, M., Parseliunas, E., Berk, S., Nykiel, G. (2019). The Central European GNSS Research Network (CEGRN) Dataset. *Data in Brief*, 27, 104762, 15 str. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.dib.2019.104762>



Berk S., Medved K. (2021). Transformacije med slovenskimi in mednarodnimi terestričnimi referenčnimi sestavi. *Geodetski vestnik*, 65 (3), 361–384.

DOI: <https://doi.org/10.15292/geodetski-vestnik.2021.03.361-384>

Sandi Berk, univ. dipl. inž. geod.

*Geodetska uprava Republike Slovenije, Urad za geodezijo
Zemljemerska ulica 12, 1000 Ljubljana
e-naslov: sandi.berk@gov.si*

mag. Klemen Medved, univ. dipl. inž. geod.

*Geodetska uprava Republike Slovenije, Urad za geodezijo
Zemljemerska ulica 12, 1000 Ljubljana
e-naslov: klemen.medved@gov.si*