

- MONTY HALLOV PARADOKS
- V ZAČETKU JE BILA TOČKA
- ŽARNICE IN SIJALKE
- POLZENJE NA POTUJOČE VALOVE
- ZORNI KOTI NEBESNIH TELES
- DELJENJE SKRIVNOSTI

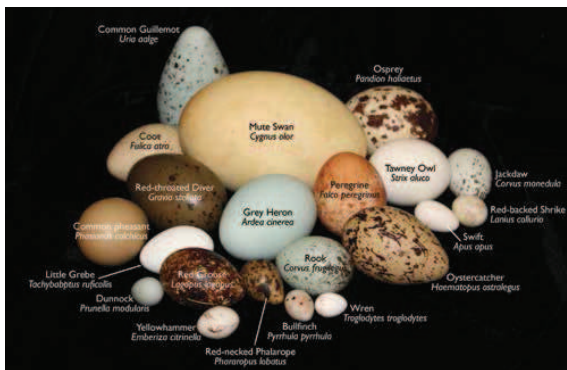
Oblika ptičjih jajc



→ Kljub obsežnim raziskavam še vedno ne vemo, niti zakaj so nekatera ptičja jajca bolj okrogla niti zakaj imajo nekatera več simetrijskih osi od drugih jajc. Nedavno so znanstveniki s pomočjo geometrije, vektorjev, polarnih koordinat in parcialnih diferencialnih enačb preučevali, kakšna je oblika jajc 1400 različnih vrst ptic. Zbrane podatke o jajcih vseh vrst so narisali na graf, ki je imel za eno od osi razpotejenost (tj., kako eliptično je jajce), za drugo os pa nivo nesimetrije (tj., kako ošiljeno je jajce na enem od koncev). Izkazalo se je, da imajo ptice, katerih telo je oblikovano tako, da ima med letom zelo majhen upor, tudi jajca takšne oblike. Tako imajo najboljši letalci in pogosto tudi plavalci zelo eliptična in zelo nesimetrična jajca.

Glavna funkcija jajca je, da zaščiti in prehrani zarodek. V sferično jajce lahko shranimo sorazmerno veliko hrane, a ga je težko izvaliti. Dolgo in ozko jajce pa lahko vsebuje enako količino hrane in veliko lažje prečka medenico. Raziskovalci so uspeli ugotoviti dve lastnosti jajčne membrane, povezani z debelino in pritiskom, ki razložita razlike v obliki jajc, vendar obstaja še veliko odprtih vprašanj. Ali obstaja močna povezava med načinom leta in obliko jajc za prav vse vrste ptic? Je med njima vzročna povezava? Na koncu si lahko zastavimo še najbolj osnovno vprašanje: Kaj je bilo prej, piščanec ali elipsa?

Za več informacij si lahko preberete članek *Avian egg shape: Form, function, and evolution*, ki ga je Stoddard s sodelavci objavil v reviji *Science* 23. junija 2017 na straneh 1249–1254.



Presek

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje letnik 45, šolsko leto 2017/2018, številka 5

Uredniški odbor: Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Mojca Čepič, Mirko Dobovišek, Vilko Domanjko, Bojan Golli, Andrej Guštin (astronomija), Marjan Jerman (matematika), Martin Juvan, Maja Klavžar, Damjan Kobal, Lucijana Kračun Berc (tekmovanja), Peter Legiša (glavni urednik), Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Aleš Mohorič (odgovorni urednik), Igor Pesek (računalništvo), Marko Razpet, Matjaž Vencelj, Matjaž Zaveršnik (tehnični urednik).

Dopisi in naročnine: DMFA–založništvo, Presek, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana, telefon (01) 4766 633, telefaks (01) 4232 460, 2517 281.

Internet: www.presek.si

Elektronska pošta: presek@dmfa.si

Naročnina za šolsko leto 2017/2018 je za posamezne naročnike 19,20 EUR – posamezno naročilo velja do preklica, za skupinska naročila učencev šol 16,80 EUR, posamezna številka 3,76 EUR, dvojna številka 6,89 EUR, stara številka 2,71 EUR, letna naročnina za tujino pa znaša 25 EUR.

Transakcijski račun: 03100–1000018787.

Devizna nakazila: SKB banka d.d. Ljubljana, Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana, SWIFT (BIC): SKBAS12X, IBAN: SI56 0310 0100 0018 787.

List sofinancira Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih poljudno-znanstvenih periodičnih publikacij.

Založilo DMFA–založništvo

Oblikovanje Tadeja Šekoranja

Tisk Collegium Graphicum, Ljubljana

Naklada 1300 izvodov

© 2018 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – 2064

Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

Poština plačana pri pošti 1102 Ljubljana.

NAVODILA SODELAVCEM PRESEKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Presek objavlja poljudne in strokovne članke iz matematike, fizike, astronomije in računalništva. Poleg člankov objavlja Priказe novih knjig s teh področij in poročila z osnovnošolskih in srednješolskih tekmovanj v matematiki in fiziki. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, učencem višjih razredov osnovnih šol in srednješolcem.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev) in sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo). Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Slike v elektronski obliki morajo biti visoke kakovosti (jpeg, tiff, eps, ...), velikosti vsaj 8 cm pri ločljivosti 300 dpi. V primeru slabše kakovosti se slika primerno pomanjša ali ne objavi. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Zaželeno velikost črk je vsaj 12 pt, razmak med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku na naslov uredništva DMFA–založništvo, Uredništvo revije Presek, p. p. 2964, 1001 Ljubljana ali na naslov elektronske pošte presek@dmfa.si.

Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki oceni primernost članka za objavo. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem uredništvo prosi avtorja za izvirne datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TeX oziroma LaTeX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

Kazalo

MATEMATIČNI TRENUTKI

- 2 Oblika ptičjih jajc

MATEMATIKA

- 4-5 Monty Hallov paradoks
(Primož Moravec)

- 6-8 V začetku je bila točka
(Marko Razpet)

FIZIKA

- 9-15 Žarnice in sijalke
(Peter Legiša)

- 15, 18-19 Polzenje na potujoče valove
(Andrej Likar)

ASTRONOMIJA

- 20-25 Zorni koti nebesnih teles
(Marijan Prosen)

RAČUNALNIŠTVO

- 26-28 Deljenje skrivnosti
(Damjan Strnad)

RAZVEDRILO

- 8 Križne vsote

- 16-17 Nagradna križanka
(Marko Bokalič)

- 28 Barvni sudoku

- 29 Rešitev nagradne križanke Presek 45/4
(Marko Bokalič)

- 30-31 Naravoslovna fotografija - Zaledeneli zrak
(Aleš Mohorič)

TEKMOVANJA

- priloga** 17. tekmovanje dijakov srednjih tehniških in strokovnih šol v znanju matematike - državno tekmovanje

- priloga** Tekmovanje iz fizike za srebrno Stefanovo priznanje - področno tekmovanje

- priloga** 8. tekmovanje v znanju astronomije za Dominkova priznanja - državno tekmovanje

SLIKA NA NASLOVNICI: Na fotografiji z naslovnice lepo vidimo zlato cesto, ki jo na razburkani gladini morja naredi zahajajoče Sonce. Razmislite, od česa je odvisna oblika, širina ceste. Ali cesta kaže vedno proti nam, ali se širi od Sonca radialno, kot opazimo pri sončnih žarkih, poteka morda v navpični smeri? Foto: Peter Legiša

Monty Hallov paradoks



PRIMOŽ MORAVEC

→ V šestdesetih letih prejšnjega stoletja je v Združenih državah Amerike na televizijski mreži NBC potekal priljubljen televizijski šov Sklenimo posel (angl. *Let's make a deal*), katerega voditelj je bil Monty Hall. Med drugim je med oddajo potekala igra, v kateri je imel tekmovalec pred seboj tri zaprte škatle, v eni od njih so bili ključi avtomobila, drugi dve pa sta bili prazni. Tekmovalec je izbral eno od škatel, in če so bili v njej ključi, se je domov odpeljal z novim avtomobilom.

V eni od teh iger je med Montyjem in tekmovalcem potekal naslednji pogovor:

MONTY: Ena od škatel A, B, in C vsebuje ključe povsem novega športnega avtomobila, drugi dve sta prazni. Dajem vam edinstveno priložnost, da izberete eno od škatel, in če so v njej ključi, je avto vaš!

TEKMOVALEC: Uh, to je res odlično! Izbiram škatlo B.

MONTY: Seveda je povsem mogoče, da so ključi v škatli B. Ampak premislite, možnost za to je $1 : 3$, medtem ko je možnost za to, da je vaša škatla prazna, enaka $2 : 3$. Dam vam 500 dolarjev, če mi vrnete škatlo.

Za trenutek ustavimo ta pogovor. To, o čemer Monty poskuša prepričati tekmovalca, v matematiki imenujemo *verjetnost dogodka*. Mislimo si, da ključe avtomobila naključno razporedimo v katerokoli od treh škatel. Nato tekmovalec izbere eno od škatel, zanj pa je ugoden *dogodek*, da so ključi v tej škatli. Število možnih razporejanj ključev v škatle A, B in C je 3,

za tekmovalca pa je ugodno le eno od teh. Razmerju $1/3$ pravimo *verjetnost*, da je tekmovalec izbral škatlo s ključi. Podobno je razmerje $2/3$ verjetnost, da je tekmovalec izbral prazno škatlo. Verjetnost torej meri, kakšna je možnost, da se dogodek zgodi, izračunamo pa jo tako, da število ugodnih možnosti za dani dogodek delimo s številom vseh možnosti, ki se lahko zgodijo v dani situaciji.

Tekmovalec se je torej znašel pred mamljivo ponudbo. Verjetnost, da dobi avto, je kar pol manjša od te, da ostane praznih rok. Zato je morda po načelu boljše vrabec v roki kakor golob na strehi boljše vzeti ponujeni denar in oditi. Toda sledil je preobrat:

TEKMOVALEC: Ne, vztrajam pri svoji izbiri! Vzamem škatlo B.

MONTY: Ker mi je všeč vaša odločnost, vam bom naredil uslugo in bom odprl eno od preostalih škatel (odpre škatlo A). Kot vidite, je škatla A prazna! To pomeni, da so ključi bodisi v škatli B bodisi v škatli C. Ker v igri ostajata le še dve škatli, je verjetnost, da dobite avto, že $1/2$. Ponujam vam 1000 dolarjev, če odstopite od igre!

Montyjeva izjava je intuitivno jasna. Odprl je škatlo A, v njej ni bilo ključev, torej se igra v resnici začne znova, tokrat z le dvema škatlama. V eni od teh škatel so ključi, druga je prazna. Verjetnost, da dobimo ključe, je torej narasla z $1/3$ na $1/2$. Ali pač ne?

Tekmovalec, ki je nastopal v tej oddaji, je bil matematik. Odvrnil je:

TEKMOVALEC: Škatlo B zamenjam za škatlo C!

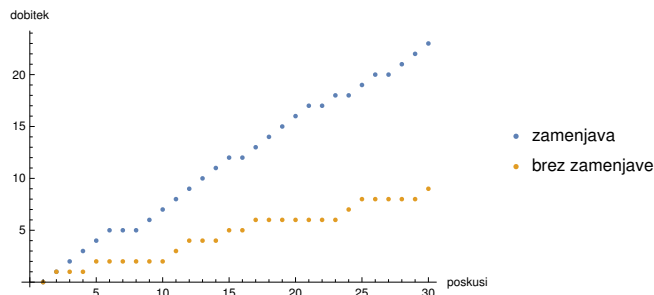
Montyja je ta zahteva presenetila. Imamo le še dve škatli, B in C. Verjetnost, da so ključi v B, je enaka $1/2$, prav tolikšna je verjetnost, da so ključi v škatli C. Ali pač ne?

Izkaže se, da zgornje sklepanje ni pravilno, Montyjeva izračuna verjetnosti po tem, ko je odprl škatlo A, sta oba napačna. Poiščimo pravilno rešitev. Najprej si oglejmo primer, ko Monty odpre škatlo A, ki je prazna, tekmovalec pa se odloči, da bo obdržal škatlo B. Na začetku je bila verjetnost, da so ključi v škatli B, enaka $1/3$. Ko je škatla A odprta, to ničesar ne spremeni, torej je verjetnost, da dobimo ključe, še vedno enaka $1/3$ in ne $1/2$, kot je trdil Monty. Kaj pa, če tekmovalec svojo škatlo zamenja s tisto, ki je ostala? Tu verjetnost izračunamo s pomočjo preštevanja vseh možnosti. Tekmovalec je izbral škatlo B, Monty odpre eno od praznih škatel in tekmovalec zamenja škatlo B za škatlo, ki je ostala. Če so ključi v škatli B, tekmovalec izgubi v vsakem primeru. Če so ključi v škatli A, bo Monty odprl škatlo C, tekmovalec bo zamenjal svojo škatlo B s škatlo A in gotovo dobil ključe. Če so ključi v škatli C, bo Monty odprl škatlo A, tekmovalec bo zamenjal škatlo B s škatlo C in spet gotovo dobil ključe. V dani situaciji imamo torej tri možne izide, za tekmovalca pa sta ugodna dva izmed njih, torej je verjetnost, da dobi avto, enaka $2/3$, kar je bistveno bolje kot na začetku. Do enakega rezultata bi prišli, če na začetku ne bi določili, katero škatlo je tekmovalec odprl, in bi spet prešteli vse možnosti.

Zgornji primer ima presenetljivo rešitev, ki je v nasprotju s sklepanjem po zdravi pameti. Pojavu v verjetnosti pravimo *Monty Hallov paradoks*. Problem je prvi opisal Selvin [1, 2].

V pravilnost našega sklepa se lahko prepričamo tudi s simulacijo z računalnikom. Večkrat ponovimo poskus, ko naključno izberemo škatlo, v kateri bodo ključi, naključno in neodvisno izberemo škatlo, za katero se odloči tekmovalec, in naključno ter neodvisno izberemo še neodprto prazno škatlo, ki jo bo Monty odprl. Nato štejemo, ali je tekmovalec dobil ključe, enkrat ob predpostavki, da je zamenjal svojo škatlo, drugič pa ne. Seveda rezultati ne bodo vsakič enaki, tipična simulacija 30-ih poskusov pa da rezultat, kot je grafično prikazan na sliki 1. Iz grafa je razvidno, da brez menjave v 30-ih poskusih ključ dobimo približno desetkrat, z menjavo škatle pa približno v dvakrat več primerih. To se sklada z našim izračunom.

Zgornji problem lahko posplošimo na n škatel, natančno ena od njih vsebuje avtomobilske ključe, Monty pa po tekmovalčevi izbiri škatle odpre m pra-



SLIKA 1.

Število dobitkov v več poskusih Montyjeve igre

znih škatel, pri čemer je $0 \leq m \leq n - 2$. Če tekmovalec ne zamenja škatle, je verjetnost dobitka enaka $1/n$. Če pa se odloči, da bo škatlo zamenjal z eno od preostalih zaprtih, je verjetnost dobitka enaka

$$p = \frac{n - 1}{n(n - m - 1)}.$$

Bralca vabimo, da preveri to formulo. Hitro vidimo, da če je $m = 0$, je ta verjetnost še vedno $1/n$. Če pa Monty odpre vsaj eno škatlo, potem je verjetnost dobitka večja od $1/n$. V najboljšem primeru, ko Monty odpre $m = n - 2$ praznih škatel, je verjetnost dobitka enaka

$$p = \frac{n - 1}{n}.$$

Ko je n velik, je vrednost p blizu 1, kar z drugimi besedami pomeni, da bomo v tem primeru z menjavo škatle skoraj gotovo priigrali avtomobil.

Literatura

- [1] S. Selvin, *A problem in probability (letter to the editor)*. American Statistician **29** (1975), 1, 67.
- [2] S. Selvin, *On the Monty Hall problem (letter to the editor)*, American Statistician **29** (1975), 3, 134.

× × ×

V začetku je bila točka



MARKO RAZPET

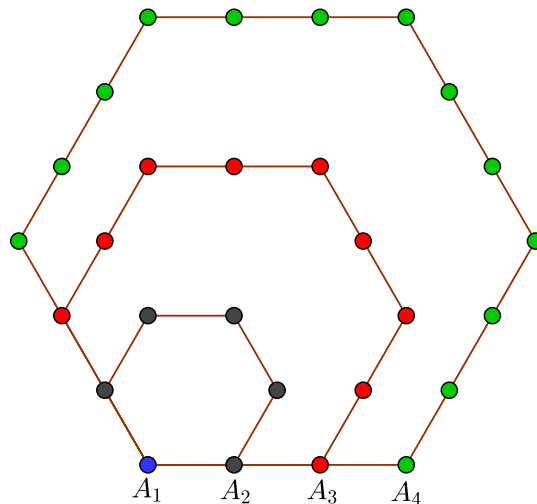
→ Figurativna števila, med katerimi so tudi večkotniška, so znana že zelo, zelo dolgo. Ljudje so že v sivi davnini razporejali enake predmete, npr. zrna semen ali kamenčke, v pravilne geometrijske figure in prej ali slej jih je zanimalo skupno število teh predmetov. V prispevku bomo namesto semen in kamenčkov razporejali točke, ki so na naših slikah namenoma pretirano odebeljene. Stari Grki, še posebno pitagorejci, za katere je bilo število bistveno, so poznali večkotniška števila, med katera spadajo tudi najpreprostejša – trikotniška. Vsem pa je skupna točka. Zato tudi tak naslov našega članka.

Večkotniška števila, ki ustrezajo pravilnemu k -kotniku, sestavljajo zaporedje $V_1^{(k)}, V_2^{(k)}, V_3^{(k)}, \dots$. Spodnji indeks označuje število točk na stranici. Za trikotniška števila je $k = 3$ in tedaj bomo pisali enostavneje: $T_n = V_n^{(3)}$.

Na sliki 1 je $k = 6$, kar pomeni, da predstavljamo šestkotniška števila $V_n^{(6)}$. Začnimo s točko A_1 , ko jo bomo šteli za najpreprostejši večkotnik (slika 1), prvi po vrsti. Ta ima samo eno točko, kar pomeni $V_1^{(6)} = 1$. Za vsako naravno število $k \geq 3$ je $V_1^{(k)} = 1$.

Nadaljujemo s točkama A_1 in A_2 , ki naj bosta oglišči pravilnega k -kotnika, drugega po vrsti, daljica A_1A_2 pa njegova stranica, recimo ji osnovnica. Preostalih oglišč ne bomo poimenovali, vse točke pa bomo risali odebeljeno. Vseh točk je šest, torej $V_2^{(6)} = 6$. V splošnem primeru je $V_2^{(k)} = k$.

Nato osnovnico A_1A_2 podaljšamo za faktor 2 prek A_2 do točke A_3 in daljico A_1A_3 vzamemo za osnovnico tretjega pravilnega k -kotnika, ki ga narišemo na istem bregu premice nosilke daljice A_1A_2 , kot je drugi pravilni k -kotnik. Na vse stranice in v oglišča tretjega pravilnega k -kotnika dodamo nove točke v



SLIKA 1.

Četrto šestkotniško število

medsebojni razdalji $|A_1A_2|$. Dobimo figuro, ki vsebuje nove točke. Vsako seveda štejemo le enkrat. Število vseh točk na prvem, drugem in tretjem pravilnem k -kotniku je tretje k -kotniško število $V_3^{(k)}$. V primeru $k = 6$ je vseh točk $V_3^{(6)} = 15$.

Opišimo še en korak. Osnovnico A_1A_2 podaljšamo za faktor 3 prek A_2 in A_3 do točke A_4 in daljico A_1A_4 vzamemo za osnovnico četrtega pravilnega k -kotnika, ki ga narišemo na istem bregu premice nosilke daljice A_1A_2 , kot sta drugi in tretji pravilni k -kotnik. Tudi tokrat na vse stranice in v oglišča novega, četrtega pravilnega k -kotnika dodamo nove točke v medsebojni razdalji $|A_1A_2|$. Spet dobimo figuro, ki vsebuje nove točke. Število vseh točk na prvem, drugem, tretjem in četrtem pravilnem k -kotniku je četrto k -kotniško število $V_4^{(k)}$. V primeru $k = 6$ je vseh točk $V_4^{(6)} = 28$. Postopek tako nadaljujemo, podaljšujemo osnovnico, nad njo konstruiramo pravilni k -kotnik, mu v oglišča in na stranice dodajamo

nove točke v medsebojni razdalji $|A_1A_2|$, vse do osnovnice $A_1A_2 \dots A_n$, ki je $(n - 1)$ -krat daljša kot A_1A_2 . Vseh točk je $V_n^{(k)}$, torej n -to k -kotniško število. Številu $V_n^{(k)}$ pravimo tudi n -to večkotniško število reda k .

Najlažje je najti izraz za n -to trikotniško število T_n , ki je očitno kar vsota prvih n zaporednih naravnih števil:

$$T_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n + 1)}{2}. \quad (1)$$

Zaporedje trikotniških števil se prične takole:

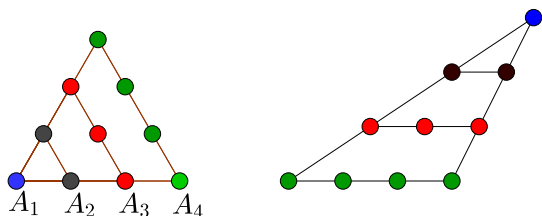
- 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55.

Od vseh relacij, ki veljajo za trikotniška števila, zapišimo samo očitno rekurzijo $T_n = T_{n-1} + n$. Trikotniška števila so pomembna zato, ker lahko z njimi na preprost način izrazimo katerokoli večkotniško število. Ravno to bomo naredili v nadaljevanju.

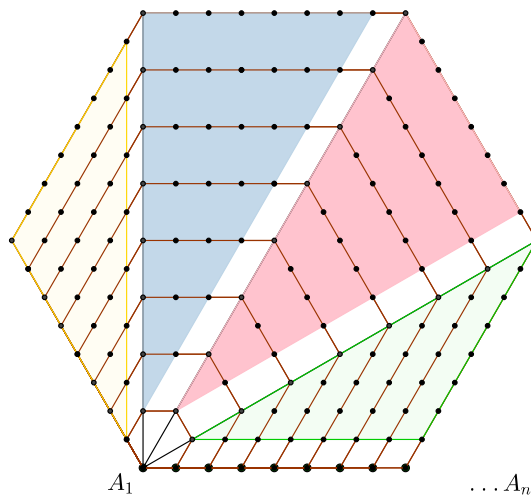
Kot zanimivost povejmo, da število $n(n + 1)$, ki nastopa v formuli za trikotniško število, imenujemo *podolžno število*.

Ni pa nujno, da pri ponazoritvi večkotniških števil vztrajamo pri pravilnih večkotnikih. Na sliki 2 imamo primer, ko trikotniško število predstavimo z raznostraničnim trikotnikom.

Diofant iz Aleksandrije, ki je živel v 3. stoletju našega štetja, nam je zapustil obširno razpravo *O večkotniških številih*. Njegovi zapisi se nam zdijo precej zapleteni, ker v njegovem času še niso zapisovali in računali tako, kot mi dandanes. Večinoma so si pomagali z geometrijsko razlago. Dokazal je enakost (4), kar bomo ponovili, pri čemer bomo seveda uporabljali moderno pisavo.



SLIKA 2.
Četrto trikotniško število



SLIKA 3.
Deveto šestkotniško število

Kako torej lahko izrazimo večkotniška števila s trikotniškimi? Pomagamo si s sliko 3, kjer so narisani pravilni šestkotniki z vsemi potrebnimi točkami. Enako bi postopali z vsakim pravilnim k -kotnikom in njegovimi $V_n^{(k)}$ točkami. Narišemo vse diagonale iz oglišča A_1 . Teh je očitno $k - 3$ in delijo pravilni k -kotnik na $k - 2$ trikotnikov. Paziti moramo, da točk ne bi dvakrat šteli. Zato smo trikotnike na sliki različno obarvali in jih med seboj ločili z vzporednicami diagonalam. Vsak tak trikotnik ima na stranici $n - 1$ točko in zato vsebuje T_{n-1} točk. Posebej smo izločili točke A_1, A_2, \dots, A_n . Teh je n , na $k - 2$ trikotnikih pa je $(k - 2)T_{n-1}$ točk. S tem smo našli izraz

$$V_n^{(k)} = n + (k - 2)T_{n-1}. \quad (2)$$

Pretvorimo ga lahko tudi v druge oblike, npr.:

$$V_n^{(k)} = T_n + (k - 3)T_{n-1} = \frac{n}{2}(2 + (k - 2)(n - 1)). \quad (3)$$

Za $k = 4$ dobimo štirikotniška ali kvadratna števila Q_n , za $k = 5$ petkotniška ali pentagonalna števila P_n , za $k = 6$ šestkotniška ali heksagonalna števila H_n . Izrazi zanje so:

$$\begin{aligned} Q_n &= V_n^{(4)} = n^2, \\ P_n &= V_n^{(5)} = \frac{1}{2}n(3n - 1), \\ H_n &= V_n^{(6)} = n(2n - 1). \end{aligned}$$

→ Za večkotniška števila je Diofant izpeljal z geometrijsko metodo enakost

$$\blacksquare 8(k-2)V_n^{(k)} + (k-4)^2 = (2 + (2n-1)(k-2))^2. \quad (4)$$

Sedaj jo lahko preverimo tako:

$$\begin{aligned} \blacksquare 8(k-2)V_n^{(k)} + (k-4)^2 &= \\ 4n(k-2)(2 + (k-2)(n-1)) + ((k-2)-2)^2 &= \\ = 8n(k-2) + 4n(k-2)^2(n-1) + (k-2)^2 - & \\ 4(k-2) + 4. & \end{aligned}$$

Združimo na desni strani prvi in četrti ter drugi in tretji člen, število 4 pa postavimo na prvo mesto:

$$\begin{aligned} \blacksquare 8(k-2)V_n^{(k)} + (k-4)^2 &= \\ 4 + (8n-4)(k-2) + (4n(n-1)+1)(k-2)^2 &= \\ 4 + 4(2n-1)(k-2) + (2n-1)^2(k-2)^2 &= \\ (2 + (2n-1)(k-2))^2. & \end{aligned}$$

Enakost (4) nam pomaga odgovoriti na vprašanje, kdaj je dano število N večkotniško reda k . To je takrat, ko je $8(k-2)N + (k-4)^2 = Q^2$ za neko naravno število Q . Ker mora po (4) biti $Q = 2 + (2n-1)(k-2)$, dobimo enačbo $2n-1 = (Q-2)/(k-2)$, ki ima rešitev

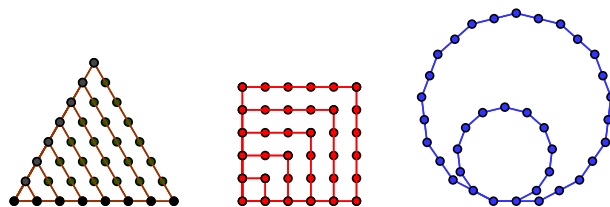
$$\blacksquare n = \frac{Q+k-4}{2(k-2)}.$$

V poštev pridejo seveda le naravne rešitve.

Za primer si pogledjmo število $N = 36$. Da bo to število k -kotniško, mora biti število $288(k-2) + (k-4)^2$ kvadratno, denimo Q^2 . S poskušanjem najdemo za $k = 3, 4, 13, 36$ ustrezne Q , in sicer 17, 24, 57, 104, in ustrezne n , ki so 8, 6, 3, 2. To pomeni, da je število 36 hkrati osmo trikotniško, šesto štirikotniško ali kvadratno, tretje trinajstkotniško (slika 4) in, trivalno, drugo šestintridesetkotniško.

1. naloga. Dokažite, da nobeno podolžno število ni kvadratno.

2. naloga. Za katere k je število $N = 1225$ večkotniško reda k in katero po vrsti?



SLIKA 4. Število 36 je trikotniško, štirikotniško in trinajstkotniško.

3. naloga. Preverite naslednjo trditev. Če sta j in k naravni števili, večji kot 2, in je njuna vsota sodo število, potem velja enakost

$$\blacksquare V_n^{(j)} + V_n^{(k)} = 2V_n^{((j+k)/2)}.$$

Križne vsote

→ Naloga reševalca je, da izpolni bele kvadratke s števki od 1 do 9 tako, da bo vsota števk v zaporednih belih kvadratih po vrsticah in po stolpcih enaka številu, ki je zapisano v sivem kvadratu na začetku vrstice (stolpca) nad (pod) diagonalo. Pri tem morajo biti vse številke v posamezni vrstici (stolpcu) različne.

	4	17					
3						10	11
10			6		17	6	
	10			24			
		10		13			
			15				

Žarnice in sijalke



PETER LEGIŠA



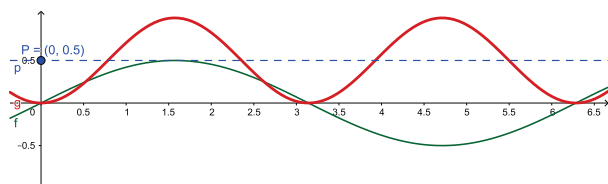
Izmenični tok in utripanje svetlobe

Skozi upornik, priključen na izmenično sinusno napetost $U(t) = U_0 \sin(\omega t)$ s frekvenco ν in krožno frekvenco $\omega = 2\pi\nu$, teče tok $I = U/R$, kjer je R upor. Moč na uporniku je

$$\blacksquare P = UI = U^2/R = (1/R)U_0^2 \sin^2(\omega t)$$

in zato se upornik greje. Vemo, da je $2 \sin^2 x = 1 - \cos(2x)$. Če pišemo $x = \omega t = 2\pi\nu t$, je $\sin^2(\omega t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\omega t)$ in tako

$$\blacksquare P = \frac{U_0^2}{2R} (1 - \cos(4\pi\nu t)). \quad (1)$$



SLIKA 1.

Graf funkcij $f(t) = 0,5 \sin t$ (zeleno) in $g(t) = \sin^2 t$ (rdeče).

Tako moč niha s frekvenco 2ν . Ker ima funkcija $t \mapsto \cos(4\pi\nu t)$ (kot vsako kosinusno nihanje) povprečno vrednost 0, vidimo, da je povprečna vrednost moči enaka $(1/2R)U_0^2$. Oglejmo si to še bolj nazorno. Na sliki 1 je zeleno narisano graf funkcije $f(t) = 1/2 \sin t$. Vidimo, ko sinus napravi en poln nihaj, napravi njegov kvadrat dva. Vidimo tudi, da je v enem polnem nihaju povprečna vrednost funkcije $g(t) = \sin^2 t$ enaka $1/2$. Če si namreč ogledamo ploščine med modro črtkano črto in rdečim grafom za g , imajo deli pod črto enako ploščino kot deli nad

to modro črto. Enako velja za povprečno vrednost funkcije $t \mapsto \sin^2(\omega t)$, saj njen graf dobimo tako, da graf za g raztegnemo ali skrčimo v vodoravni smeri. Torej je povprečna vrednost moči enaka

$$\blacksquare \frac{1}{2R} U_0^2 = \frac{1}{R} \frac{U_0^2}{2} = \frac{1}{R} \left(\frac{U_0}{\sqrt{2}} \right)^2.$$

To pa je enaka moč, kot če bi bil upornik priključen na enosmerno napetost $U_{ef} = U_0/\sqrt{2}$. Napetosti U_{ef} pravimo *efektivna napetost*. V našem omrežju U_{ef} znaša 230 V.

Žarnica je upornik, čeprav se njen upor lahko nekoliko spreminja s temperaturo. Še zmeraj pa velja, da moč niha z dvakratnikom frekvence ν priključne napetosti. Zato tudi njen svetlobni tok niha s frekvenco 2ν .

Ker imamo v Sloveniji napetost s frekvenco 50 Hz, torej 50 polnih nihajev na sekundo, svetlobni tok žarnice niha s frekvenco 100 Hz ali 100 s^{-1} . En celoten nihaj moči traja torej 10 milisekund. To mi je v času, ko sem bil še osnovnošolec, pokazal prijatelj Andrej Detela. Fotocelico je povezal s slušalko. Približal je žarnico in zaslišal sem nizkotonsko brnenje. Svetlobni tok žarnice se sicer ne spreminja dosti, po [1] le za kakih 5 do 15 %, saj se žarilna nitka v obdobju nekaj milisekund, ko je dovedena električna moč blizu nič, ne more kaj prida ohladiti. Halogenske žarnice so izboljšana varianta klasičnih žarnic. (Slednje so zaradi evropskih predpisov o varčni porabi energije praktično izginile s tržišča.) Halogenke imajo kakih 20–40 odstotkov večji izkoristek in dvakrat daljšo življenjsko dobo, so pa tudi dražje. Halogenke z navojem E27 dajejo okrog 10–15 lumnov svetlobe na watt dovedene moči.

Fluorescenčna razsvetljava

Po drugi svetovni vojni se je začela uveljavljati precej učinkovitejša razsvetljava s fluorescenčnimi cevmi. Že v devetnajstem stoletju so ugotovili, da razredčen plin ob primernih pogojih prevaja električni tok





SLIKA 2.

V preizkuševalniku napetosti imamo tlivko in močan upornik.

in pri tem sveti. Direktna priključitev na električno omrežje ni mogoča: ko plin začne prevajati, nastane plazma, ki vse lažje prevaja in tok bi tako hitro narasel, da bi nam pregorela varovalka.

V staromodnem preizkuševalniku napetosti (slika 2) in indikatorskih lučkah večkrat uporabljamo **tlivko**. Napolnjena je z zelo razredčenim neonom (tlak približno 1 milibar), elektrodi sta nekaj milimetrov narazen. Tlivka je torej primer neonke ali neonske cevi. Zaporedno je vezana na močan ohmski upornik, ki omejuje tok. V preizkuševalniku ta upor tudi iz varnostnih razlogov znaša okrog 1 MΩ. Tlivka, kot vse prave neonske cevi, oddaja oranžno svetlobo.

Za močnejše sijalke je taka rešitev nepraktična, saj se upor greje in je to velika izguba energije. Zato je v take sijalke potrebno vgraditi *dušilko* (*balast*). Klasična magnetna dušilka je tuljava, navita na železno jedro. Taka težka dušilka predstavlja induktivni upor za izmenični tok. Za učinkovit tok skozi idealno dušilko velja

$$\blacksquare I_{ef} = \frac{U_{ef}}{L\omega} = \frac{U_{ef}}{2\pi L\nu}, \quad (2)$$

kjer je L induktivnost dušilke in U_{ef} efektivna napetost na dušilki. Dušilka se torej za izmenični tok obnaša kot induktivni upor (*induktanca*, *impedanca*) velikosti $2\pi L\nu$. Upor je torej premo sorazmeren frekvenci izmenične napetosti. Izgube energije v idealni dušilki so nič. V resnici pa imajo navoji tuljave tudi določen ohmski upor. V železnem jedru nastajajo vrtnični tokovi, ki grejejo dušilko. (Na tem načelu delujejo indukcijske plošče na štedilniku.) Zato taka dušilka še zmeraj predstavlja določeno izgubo energije. Evropski predpis zdaj omejuje te izgube.

Nihanje toka skozi dušilko zaostaja za nihanjem priključne napetosti.

Fluorescenčna cev je tudi sicer precej bolj zapletena kot tlivka. Elektrodi sta decimetre narazen, zato je težje doseči prevajanje. Klasična fluorescenčna svetilka poleg magnetne dušilke potrebuje še *starter*, ki ga je potrebno večkrat zamenjati. Pogosto starter – majhen valj z dvema kontaktoma – za vsak primer menjamo hkrati s cevjo, še posebno pri težko dostopnih svetilkah. V cevi so poleg razredčenega žlahtnega plina (navadno argona), ki prevaja, še živosrebrne pare. Te v ioniziranem stanju oddajajo veliko kratkovalovne ultravijolične (v nadaljevanju UV) svetlobe. Cev je na notranji strani prekrita z belkastim fluorescenčnim premazom – *fosforjem*, ki vzbujen z UV sevanjem oddaja vidno svetlobo (in infrardeče sevanje), prepušča pa tudi nekaj UV svetlobe. Premaz se sicer ne odziva trenutno, a svetlobni tok klasičnih fluorescenčnih sijalk vseeno močno utripa, s frekvenco 100 Hz. V vsakem nihaju po [1] kar za nekaj milisekund pade na 60–75 odstotkov maksimalne vrednosti. Večina ljudi tega neposredno ne opazi. Človeško oko ima namreč nekaj spomina. Če svetloba migota s frekvenco nad 60 hertzov, večina tega neposredno ne opazi in vidi le povprečno vrednost. Občutljive ljudje pa moti tudi močnejše utripanje s 100 Hz. Zaznajo ga predvsem v kotičku očesa. Periferni vid je namreč občutljivejši na hitre spremembe. (Naši predniki so morali opaziti zver, ki se je od strani pognala v napad.)

Nihanje običajnih in halogenskih žarnic je tako šibko, da ne predstavlja težave. Klasična fluorescenčna razsvetljava pa zaradi močnejšega utripanja in, kot bomo videli, spreminjanja barv lahko pri določenem delu populacije povzroča nelagodje, glavobole. Raziskave so pokazale, da taka razsvetljava vpliva na možgane in da pisarniški delavci zaradi utripanja delajo več napak. Človeški organizem zazna utripanje s frekvencami nekako do 200 Hz in to tem bolj, čim močnejše je ([1]). Utripanje je problem tudi za fotografe in snemalce. Navadno smo na varnem, če je frekvenca utripanja nad 400 Hz.

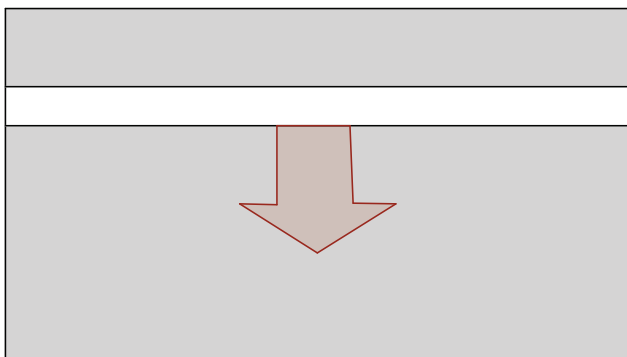
Sam sem utripanje klasične fluorescenčne razsvetljave večkrat opazil s kotičkom očesa na svetilkah s t. i. prizmatičnim pokrovom. Pri rahlem premikanju glave je verjetno prišlo do interakcije med nihanjem svetlobe in nazobčanim vzorcem na pokrovu, ki služi razpršitvi svetlobe.

Kamera v telefonu vidi utripanje

Za bralce imam **domačo nalogo**. Vzemite zvečer pametni telefon in ga vklopite v način foto/video, kot bi hoteli fotografirati. Potrebujete še bel karton ali bel kos papirja. Zdaj v prostoru pustite prižgano le eno svetilo. Po možnosti začnite s halogensko ali klasično žarnico kot referenčno točko. Približajte karton svetilu, kolikor se le da. Objektiv telefona usmerite na karton in malce počakajte. Če vidite na zaslonu telefona temne in svetle proge, svetilo utripa. Fotografirajte. Intenziteta prog na fotografiji pove, kako hudo je utripanje. Če izvori svetlobe niso majhni in intenzivni, lahko seveda telefon usmerite neposredno na svetilo.

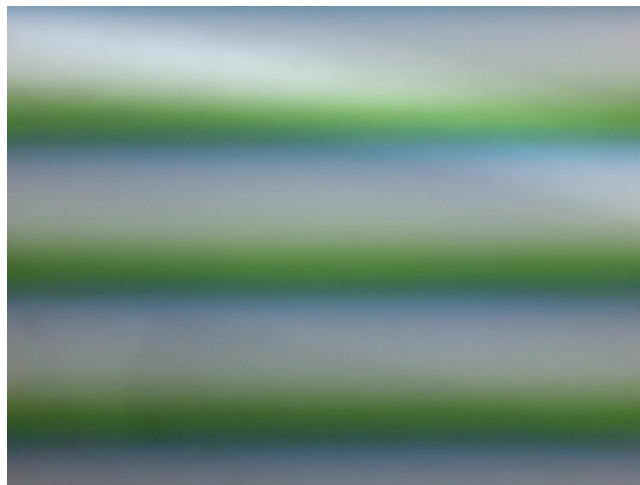
Telefon s senzorjem tipa CMOS slika tako kot kamera z zavesnim zaklopom. Lahko si mislimo, da pri posnetku potuje čez tipalo reža, in to vzporedno daljšemu robu senzorja, kot na sliki 3. Čim svetlejša je scena, tem ožja je reža. Tako na tipalo zmeraj pade primerna količina svetlobe. Ker smo naš karton zelo približali svetilu, je reža ozka. Reža ponazarja ekspozicijo in zaporedno branje eksponiranih vrstic na tipalu. Preberite si tudi, kaj je o zavesnem zaklopu nedavno povedal dr. Aleš Mohorič v Preseku [2, str. 30–31].

Pri telefonih reža potuje sorazmerno počasi. Kot prvi primer prikazujemo na fotografiji 4 svetlobo majhne in lahke fluorescenčne svetilke znane znamke (13 W, hladno bela barva). Vidimo, da je v času



SLIKA 3.

Pri zavesnem zaklopu reža potuje čez tipalo, tako da je vsak piksel enako dolgo osvetljen.



SLIKA 4.

Utripanje fluorescenčne sijalke, 13 W, 4000 K

prehoda reže njena svetloba naredila nekaj več kot tri utripe. Ker vsak utrip traja 10 milisekund, potrebuje reža za prehod tipala nekaj več kot 30 milisekund.

Svetel pas na fotografiji pomeni, da je tistih nekaj milisekund sijalka močno svetila. Ko se je reža premaknila navzdol, je zaradi časovnega zamika jakost osvetlitve že pojenjala in tam smo dobili temnejši pas. Čim večje so razlike med svetlimi in temnimi deli, tem močnejše je utripanje. Na sliki 4 vidimo poleg precej močnega utripanja še eno zanimivost: ko ta fluorescenčna cev za nekaj milisekund potemni, se njena barva spremeni, iz bele na zeleno in nato modro! Domači ljubljenci (psi, kanarčki) so sposobni videti utripanje z višjimi frekvencami. Zanje je taka svetilka morda nekaj takega kot razsvetljava v disko klubu.

Ko gledamo na zaslon, reža kar naprej potuje čez zaslon. Vsak naslednji prehod (ki traja dobrih 30 ms) pomeni osvežitev slike. Sklepamo lahko, da se na našem telefonu slika osvežuje okrog 30 krat na sekundo. Ker osvežitve niso ravno sinhronizirane z utripanjem sijalke, na zaslonu temni in svetli trakovi plešejo.

Za primerjavo je na fotografiji 5 utripanje svetlobe klasične žarnice s 60 W. Oddaja približno enako količino svetlobe kot prej omenjena »fluo« cev s 13 W, vendar žarnica utripa le minimalno.





SLIKA 5.

Utripanje klasične žarnice 60 W

Visokofrekvenčne elektronske predstikalne naprave

Zadnje čase so se v svetilkah za fluorescenčne cevi uveljavile ([3, str. 106]) **visokofrekvenčne elektronske predstikalne naprave** (nemško: Elektronisches Vorschaltgerät, EVG), ki so postale tudi dovolj zanesljive. Dobre naprave tega tipa omrežno napetost usmerijo, zgladijo (tako da je dobljena enosmerna napetost skoraj konstantna) in nato razsmerijo na izmenično napetost z visoko frekvenco (20–100 kHz). Fluorescenčni plašč skorajda ne more slediti tako hitrim spremembam. Tako oddajajo praktično konstanten svetlobni tok - fluktuacije znašajo največ pet odstotkov. Taka razsvetljava je neproblematična in nima negativnih učinkov, ki smo jih opisali pri razsvetljavi z magnetnimi dušilkami. (Opozorilo: nekatere cenejše elektronske predstikalne naprave – kot v mali svetilki (katere svetloba je) na sliki 4 – izpušajo drugi korak, glajenje. Njihova svetloba pošteno utripa s 100 Hz.)

Take naprave vsebujejo tudi balast. V formuli (1) imamo pri klasični dušilki frekvenco $\nu = 50$ Hz, pri elektronski napravi pa $\nu \geq 20000$ Hz. Upoštevajmo, da morata biti za dano cev efektivna napetost in tok v obeh primerih približno enaka. Zato mora biti produkt $L\nu$ v obeh primerih približno enak. Torej mora biti induktivnost L v visokofrekvenčnem primeru ne-

primerno manjša. Tako je pri elektronski napravi dušilka lahko majhna in lahka, izgube v njej pa so mnogo manjše kot pri klasičnem balastu. Po isti formuli lahko z večanjem frekvence ν zmanjšujemo tok skozi cev in jo tako zatemnjujemo. Visokofrekvenčne predstikalne naprave pomenijo precej manjše izgube. Fluorescenčna cev, priključena na elektronsko predstikalno napravo, danes daje do 105 lumnov na watt. Elektronika omogoča tudi hitrejši start, brez večkratnih poskusov kot pri klasičnih *starterjih*. To pomeni daljšo življensko dobo cevi. Elektromagnetni smog, ki nastane zaradi visoke frekvence, je omembe vreden le nekaj decimetrov stran od svetilke in ga lahko z ustrežno elektronikou zmanjšamo.



SLIKA 6.

Obročasta »varčna žarnica« ima fluorescenčno cev zvito v torus ali svitek.

Kompaktne fluorescenčne sijalke (CFL, po domače tudi »varčne žarnice«) so nastale z miniaturizacijo fluorescenčnih cevi, ki so jih upognili v razne oblike. Mnoge imajo vgrajeno elektronsko predstikalno napravo, tako da jih lahko privijemo v običajne navoje. (Ob vsaki menjavi nastane zato znatno več elektronskega odpada kot pri ceveh.) Dajejo od 40 do 70 lumnov na watt. Imajo pa nekaj slabosti: ko jih

prižgemo, se pogosto ne odzovejo takoj in mnoge v začetku svetijo zelo šibko. Potrebujejo kako minuto ali dve, da dosežejo polno svetilnost. Navadno slabo svetijo pri nizkih temperaturah. Pogosto štrlijo iz obstoječih svetilk. Daleč najboljša taka naprava med mojimi nakupi je precej velika sijalka v obliki obroča na sliki 5. Daje 1700 lumnov pri 24 W in takoj po vključitvi sveti s polovico moči. Utripanja svetlobe praktično ni.

Kompaktne fluorescenčne sijalke so danes tako rekoč zgodovina. V ZDA je že pred par leti njihova cena strmoglavila: proizvajalci in trgovci so se hoteli le še znebiti zalog. Nadomestile so jih boljše in učinkovitejše LED sijalke.

Barvna vernost

Utripanje svetilk s težkimi balasti je le eden od razlogov, zakaj mnogi niso bili navdušeni nad fluorescenčno razsvetljavo. Drugi razlog je spektralna sestava svetlobe. Medtem ko žarnica oddaja svetlobo, ki zvezno pokriva celotni spekter, je svetloba fluorescenčnih sijalk večinoma koncentrirana okrog nekaj malega točk v spektru. V mnogih trgovinah so do nedavnega prodajali le najcenejše cevi, ki so slabo podajale barve (in obenem imele slabši izkoristek in krajšo življenjsko dobo). **Indeks barvne vernosti** ali **Indeks barvnega videza Ra**, natančneje R_a , tudi **CRI, Color Rendering Index** je bil 55–65, medtem ko je pri žarnicah (klasičnih in halogenskih) enak 95–100. Moja mama je pri nakupovanju tekstila zmeraj prosila prodajalko, naj ji stvari pokaže na dnevni svetlobi, kjer je blago pogosto imelo precej drugačen videz kot pod fluorescenčno razsvetljavo v notranjosti trgovine.

Danes zaradi evropskih predpisov nekakovostnih cevi ni več na tržišču. Fluorescenčne cevi z $R_a > 80$ lahko dobimo za ugodno ceno. V specializiranih trgovinah dobimo cevi z $R_a > 90$. Te imajo dražje obloge, ki sevajo v več delih spektra. Ker je fluorescentni plašč debelejši, imajo nekaj manjši izkoristek.

Fluo svetilke s klasično težko elektromagnetno dušilko lahko posodobimo tako, da izrabljeno fluorescenčno cev zamenjamo z LED cevjo, ki vsebuje, kot ime pove, svetleče diode. Pri tem moramo zamenjati starter s priloženim elektronskim starterjem. Za zdaj (2018) so te LED cevi dražje, oddajajo ne-

kaj manj svetlobe, a imajo vsaj izdelki znanih znamk boljši izkoristek, boljšo barvno vernost, daljšo življenjsko dobo in večinoma manj utripajo. (Nekateri pa imajo slabe izkušnje s tovrstnimi LED izdelki manj znanih proizvajalcev.) Taka zamenjava za zdaj ni mogoča pri sodobnejših svetilkah z visokofrekvenčno elektronsko predstikalno napravo.

Pri nakupu moramo paziti tudi na barvno temperaturo cevi.

Barvna temperatura

LED sijalke in fluorescenčne cevi imajo razne barvne odtenke. Oznaka 2700 K pomeni, da svetilka oddaja približno tako svetlobo kot črno telo, segreto na 2700 Kelvinov. Pravimo, da ima svetloba **barvno temperaturo 2700 Kelvinov, tako kot klasična žarnica s 60 W**. Po DIN normi je svetloba z barvno temperaturo pod 3300 K toplo bela (warm white).

Višja barvna temperatura pomeni večji delež modre in nižji delež rdeče svetlobe. Nad 3300 K in pod 5000 K imamo hladno belo ali nevtralnno belo ali naravno belo (cool white). Za delovne prostore in učilnice navadno uporabljamo nevtralnno belo svetlobo s 4000 K. Tudi zato, ker se toplo bela slabo meša s svetlobo, ki prehaja čez dan skozi okna.

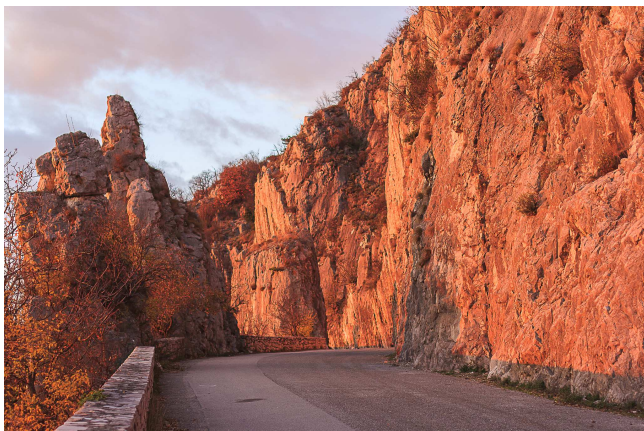
Nad 5000 K imamo dnevno belo svetlobo (daylight), ki je ob halogenskih žarnicah videti modrikasta. (Ali pa so halogenke, če so v manjšini, videti rumeno-oranžne.) Taka svetloba naj bi nas še bolj zbudila kot hladno bela.

Fluorescenčna cev z oznako 827 ima $R_a > 80$ in barvno temperaturo 2700 K (toplo bela).

Za občutek dobre osvetljenosti potrebujemo pri višji barvni temperaturi več svetlobe. Sredi dneva, ob visoki barvni temperaturi, smo namreč navajeni na mnogo svetlobe.

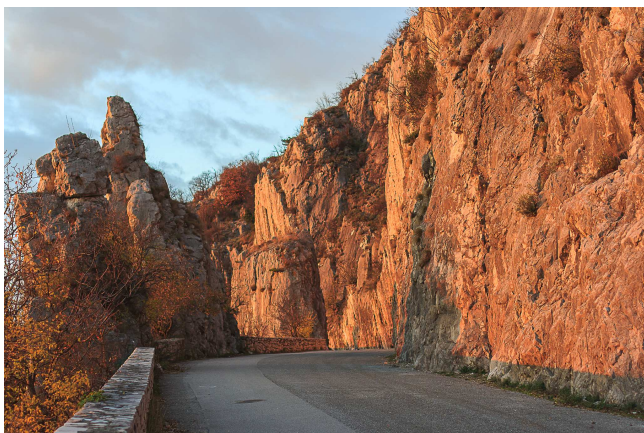
V večernih urah svetujejo uporabo toplo bele svetlobe, ker izpostavljenost modri svetlobi dokazano moti prehod v spanec. Zastonjski programček *f.lux* nam zvečer samodejno zniža barvno temperaturo na računalniškem zaslonu. Za delo z vizualnimi vsebinami (fotografije, video, risbe) pa moramo na zaslonu uporabljati eno samo barvno temperaturo, in to dnevno (5200–5500 K). Program *f.lux* lahko v ta namen hitro izključimo.





SLIKA 7.

Kamera je ocenila, da sceno nad Kontovelom osvetljuje svetloba s temperaturo 5100 K.



SLIKA 8.

Sliko smo predelali, tako da je zid levo spodaj resnično siv.

Barvna temperatura in fotografija

Včasih smo fotografi za najlepše slike iz narave uporabljali diafilm, kalibriran za dnevno svetlobo s temperaturo 5500 K. Pri tej temperaturi je tak film dajal najboljše rezultate. Če pa smo slikali s takim filmom prizor ob sveči, je bila slika bolj ali manj rdeča. Sveča ima barvno temperaturo okrog 1500 K. Mi svetlobo sveče ali tabornega ognja občutimo kot rumenkasto. Zasnežena pokrajina je na oblačen dan dala diapozitiv z modrikastim snegom. Barvna temperatura

dnevne svetlobe pod oblačnim pokrovom je okrog 7000 K.

Naši možgani preoblikujejo informacijo tako, da videz scene približajo videzu pri neposredni dopoldanski sončni svetlobi: papir v zvezku vidimo – ne glede na izvor svetlobe – kot približno bel.

V času filma smo temperaturo in sestavo svetlobe, ki je prihajala v kamero, spreminjali z uporabo barvnih filtrov.

Piksel na tipalu digitalne kamere registrira intenzivnost rdeče, zelene in modre barve. Programska oprema nato te podatke predela tako, da na računalniškem zaslonu dobimo sliko, ki je videti naravno in privlačno. Procesor lahko (bolj ali manj uspešno) kompenzira vpliv barvne temperature (in drugih pomanjkljivosti) svetlobe na sceni, tako da so na koncu bele površine fotografiranega objekta na zaslonu računalnika videti bele. Vkllopiti moramo le *popravek ravnovesja beline* ali angleško Automatic White Balance (AWB).

Če imamo s sabo nevtralnno siv objekt, lahko naredimo tudi *uporabniško ravnovesje beline* ali Custom White Balance, tako da najprej slikamo ta sivi predmet in kamera določi sestavo svetlobe, ki osvetljuje sceno. To da pravi rezultat pri svetlobi z odličnim barvnim videzom.

Tretja možnost je izbira ravnovesja beline iz možnosti v meniju:

- sončna svetloba – 5200 K;
- senca – 7000 K;
- klasična ali halogenska žarnica (tungsten = volfram) – 3200 K;
- hladno bela fluorescenčna svetloba – 4000 K itd.

Vendar moramo potem ob spremenjenih pogojih nastavitvev spremeniti sami. Ko smo v naravi imeli po pomoti vključeno ravnovesje beline za fluorescenčno razsvetljavo, smo dobili JPEG datoteke z resnično nemogočimi barvami!

Če slikamo v RAW načinu, se nam ni treba vznemirjati zaradi izravnave beline. To lahko naredimo naknadno s programom za obdelavo slik. Z drsniki spreminjamo barvno temperaturo in ton, dokler nismo zadovoljni. Najhitreje pa gre, če imamo na sceni kako sivo (ali šibko osvetljeno belo) površino. S posebno kapalko kliknemo na tako barvno nevtralnno površino in poprava je tu.

Naša kamera je ob sončnem zahodu na slikoviti cesti nad Trstom ocenila, da je scena osvetljena z dnevno svetlobo z barvno temperaturo 5100 K in dala sliko 7. Rdeči ton je močnejši, kot se ga spomnimo s scene. Je pa tak, kot bi ga občutili, če bi na sceno stopili iz sobe, razsvetljene s 5100 K. Ker pa smo bili na cesti že dalj časa, smo se deloma prilagodili in sceno občutili drugače. V programu za obdelavo slik smo s kapalko kliknili na sivi zid levo spodaj. Program je z analizo izbranega delčka slike ocenil barvno temperaturo na 4400 K in ustrezno popravil sliko. Tako smo dobili sliko 8. Katera verzija vam je bolj všeč? Morda bi bilo najbolje nekaj vmes?

Pri fluorescenčni razsvetljavi so tudi po zgoraj opisanih metodah poprave večkrat težave (zaradi nizke barvne vernosti). Tako je bilo tudi s sliko 6. Takrat poskusimo rezultat izboljšati s spreminjanjem odtenka ali intenzivnosti rdeče barve, ki je najbolj problematična.

Zadovoljivo lahko navadno popravimo tudi barve JPEG datotek. Težko pa je izboljšati sceno, ki so jo osvetljevali viri z različno barvno temperaturo. Bliiskavico, ki oddaja svetlobo z barvno temperaturo okrog 5200–5500 K, lahko opremimo s filtrom, ki temperaturo njene svetlobe približa ambientni.

Naši možgani, kot smo že rekli, izravnavo (=popravo ravnovesja) beline naredijo avtomatično. Pri prehodu iz ene osvetlitve v drugo za to potrebujejo le nekaj sekund.

Literatura

- [1] Utripanje žarnic in sijalk, Flickern (Flackern oder Flimmern) von Glühbirnen und Lampen, Energie-Umwelt.ch, dostopno na www.energie-umwelt.ch/beleuchtungundbatterien/gluehbirnen-und-lampen/1425, ogled 15. 2. 2018.
- [2] A. Mohorič, *Zavesni zaklop*, Presek 44 (2016/17) 2, 30–31.
- [3] G. Bizjak, M. B. Kobav in M. Prelovšek, *Razsvetljava*, dostopno na lrf.fe.uni-lj.si/razsvetljava.pdf, ogled 15. 2. 2018.

× × ×

Polzenje na potujoče valove

↓↓↓

ANDREJ LIKAR

→ Najprej se spomnimo nekaj osnov iz valovanja. Ravno potujoče valovanje opišemo z odmikom y delca sredstva, po katerem se valovanje širi, z enačbo

$$y = y_0 \cos(\omega t - kx).$$

Odmik y je odvisen od lege delca x in časa t . V poljubno izbranem izhodišču pri $x = 0$ odmik harmonično niha s krožno frekvenco ω tako, da je na začetku štetja časa amplitudni y_0 , potem pa se odmik manjša, po polovici periode pa je najbolj negativen $-y_0$. Argument pri kosinusni funkciji imenujemo faza. Fazni zaostanek kx od izhodišča določa valovno dolžino $x = \lambda$, kjer se odmik ponovi, torej pri

$$k\lambda = 2\pi.$$

Ko opazujemo val, navadno spremljamo njegov amplitudni odmik y_0 , torej valovni vrh. Tam je faza enaka nič, torej velja

$$kx = \omega t.$$

Drugače zapisano

$$x = \frac{\omega}{k} t = ct.$$

Hitrost valovanja c je ravno hitrost valovnega vrha, torej

$$c = \frac{\omega}{k}.$$

Vemo še, da je valovanje transverzalno ali longitudinalno. Pri prvem so odmiki pravokotni na širjenje, pri drugem pa v smeri širjenja. Tako je valovanje na vrvi transverzalno, zvok pa je longitudinalno valovanje.

18

nadaljevanje
na strani






Nagradna križanka



				TOČKA, TELO ALI OBJEKT, KI KAJ (GRAVITACIJSKO) PRIVLAČI, PRIVLAČEVALEC	AMERIŠKI IGRALEC, KI JE BIL POROČEN Z MADONNO	NEKANDJI SPORTNI DIREKTOR FERRARJIA (FRITZ)	MESTO OB VELIKEM ISTOIMEN. JEZERU V ZDA	DEL IGRE PRI TENISU IN ODBOJKI	GIBLJIV PREDNJI DROG PRI VOZU	SLANE TERME ZAHODNO OD PARMJE V ITALJI	FRANC GALIČ	OZVEZDJE JUŽNEGA NEBA Z ZVEZDO AHERNAR	AVSTRJI.-AMERIŠKI MATEMATIK JUD. RODU (WALTER)	TOČKA, PROTI KATERI SE GIBLJE SONCE			
				PAS DELNO NATALJENIH KAMNIN V ZEMELJ. PLAŠČU			2										
				PODROČJE ALGEBRE													
				KRAJ NA OBRONKIH POHORJA PRI MARIBORU										DNEVI V RIMSKEM KOLEDARJU	RAČUNSTVO		
				POGOSTO HRVAŠKO MOŠKO IME				FRANCIJ	VESLAČ MUKJIC								
				OZNAKA KOPRA			OMLAČEN SNOPI									6	
				ALKALOID V KAKAVU												ATENSKI BOGATAŠ, KI JE TOŽIL SOKRATA	SREDIŠČE GREBENA VRHE NA KRASU
				SADNI SOK, KI ZAČE-NJA VRETI													
												STROJNI DEL V VALJU			ANDREJ ŠIFRER	KRAJ VZHOD. OD KOČEVAJA	
				AVTOR MARKO BOKALIČ	AMERIŠKI PLAVALEC (MICHAEL)	SREDNJE-VEŠKI ARAGONSKI KRALJ	ODKritelj algoritma za iskanje ničel POLINOMA (WILLIAM G.) IDEALIZIRANA PODOBA	MAČJI GLAS				NIZ. VOJ-SKOVODJA (LAMORAL) AM. PEVKA (DIANA)	5				
PRVI VIOLINIST IN VODJA CIGANSKE GODBE		11				NAŠ POSLOVNEŽ ZORN	"SORODNIK" ČEBULE" PRIKAZ PRED PUBLIKO			IZREDEN UM			4				
IRSKI MATEMATIK IN FIZIK (WILLIAM, ROWAN)							NOVOST										
GLADKA ZAŠČITNA PREVLEKA NA KOVIN. IZDELKIH					TANTAL		ZODIA-KALNO OZVEZDJE	MIREN, RAVNO-DUŠEN ČLOVEK		15		MNOŽICA VSEH UREJE-NIH PAROV ELEMENTOV MNOŽIC					
V PRVI IGRAJO NAJBOLJŠA MOŠTVA				SIBIRSKO VELEMESTO			9	NAŠA PEV-KA (LEA) SNEŽNI PLUG (KOS-TELSKO)				OSREDNJI TRG V KAIRU	SPODNJA POVRŠINA PROSTORA	MIŠIČNA BULA			
IZZIVAČ, HUJSKAC				PIVO STARIH SLOVANOV					SREDIŠČE SZ. DELA ZDA OB TIHEM OCEANU			17		VLAČUGA, CANDRA			
5. SOLMI-ZAČLJSKI ZLOG			LISTNA BLEDIČA ZARADI MANKA KLOROFILA						VANJ SE STEKA DEŽEVNICA S STREHE	AMEA	ODPRTINA V STENI	ZVOČNI ZNAK ZA NEVARNOST BARIJ					
										UŽIVANJE HOSTIJ MED MAŠO OMAMNA LEPOTA							
														SOŠEDNJI ČRKI			
														SREDNJI ZLOG KENGURUJA			
											14	NAPRAVE V KAZINU, FLIPERJI					
														MAJHNA DRŽAVA V SREDNJI AFRIKI			



					GRAFIČNO OBLIKOVANJE MATEVŽ BOKALIČ	KOLENCE NA RASTLINSKEM STEBLU	PRIPOVEDNIŠTVO	KRATEK REKLAMNI TV FILM	ANGLEŠKI REŽISER LOACH	OSEBNI ZAIMEK, 3. OSEBA DVOJINE	NICOLE HOSP	PRIDELOVALEC MEDU	ODREŠENJSKI CILJ V BUDIZMU	NAŠA IGRALKA (BERNARDA)	KMEČKO POSLOPJE ZA SUHO KRMO	SKUPINA POVEZANIH NOTRANJNH ORGANOV			
					LASTNOST VESOLJA IN ČLOVEŠKE NEUMNOSTI														
					AM. FIZIK, "OČE" ATOMSKE BOMBE (J. ROBERT)														
					VELIKA NOTRANJA SATURNOVA LUNA	1								ORODJE ZA RAHLJANJE ZEMLJE RADIJKA PERVANJE					
					NAGLASNO MESTO V VERZU							IZRASTEK ŽIVČNE CELICE, DENDRIT TOPNIŠTVO							10
					LJUĐSKA PRITR-DILNICA						HRIB PRI BEOGRADU OSNOVNI NAČRT, ZASNOVA				3		KAZIMIR TARMAN RAZISKOV-VALNA USTANOVA		
					RIBOLOVNI PRIPOMOČEK IZ VEČ ZAPOREDNO VEZANIH TRNKOV					OBČANI NEKDANJA IRSKA TERORIST. ORGANIZ.								VEČJE SKUPINE PTIC ALI RIB	FRANCOSKI REŽISER (HENRI-GEORGES)
					FRANCOSKA SMUCARKA (JENNIFER) ŽOLČNI KANAL					12				NAŠ HOKE-JIST (ALES) IME VEČ NAŠIH VASI (PO HRASTU)					
												KOS GARDEROBE, KI SE NOSI OKOLI VRATU RIMSKO MITOLOŠKO PODZEMLJE							
dMFA	TEKOČE TELESNO TKIVO	KORALNI OTOK	NAŠ PISATELJ (ALQJZ)	PRVA IN ZADNJA ČRKA ANGLEŠKE ABECEDE	AMERIŠKA RACUNALN. ZDRUŽBA PRIDELOVA-NJE VINA						DVIGNJEN PROSTOR, PODIJ	NEMŠKI INŽENIR, KI JE RAZVIL BENCINSKI MOTOR							
OBMEJNA STRAŽNICA PREBIVALEC ZDRUŽENIH DRŽAV							FINSKI ARHITEKT SAARINEN IGOR AKRAPOVIČ					NIZ. VIOLIN. (ANDRE) MEDNAR. KOLESAR. ZVEZA	18						
			8											ZAHOD HEKTAR					
				ČRNO-GLEDNEŽ, PESIMIST MESTO V TEKSASU									ČUTILO ZA SLUH						
PREKMUR-SKA REKA, PRITOK MURE MILLILITER					13		dMFA	CIRILSKA ČRKA, TRDI I AVANS, ARA	7				LJUBITELJ TUJE LASTNINE						
		FRANCOSKA IGRALKA (MARTINE) NIHAJOČA MEMBRANA					OKRAJŠAN IGNAČIJ FINSKI DIRKAČ RAIKKÖNEN												
			MOČNO SINTETIČNO MAMILO OLIMPIJSKE IGRE			KILOAMPER VPREŽNO VOZILO				ATA (NAREČNO)	ŠALA								
BARVA KOŽE LOVSKA DRUŽINA						POKOJNI MATEMATIK (IVAN) TALIJ													
			BOJNI STRUP, KI DRAŽI OČI		16														

NAGRADNI RAZPIS

→ Črke iz oštevilčenih polj vpišite skupaj z osebnimi podatki v obrazec na spletni strani

www.presek.si/krizanka

ter ga oddajte do **5. maja 2018**, ko bomo izžrebali tri nagrajence, ki bodo prejeli **knjižno nagrado**.

XXX



15

nadaljevanje
s strani

Ker pri valovanju delci snovi le nihajo okrog svojih ravnovesnih leg, pri valovanju potujeta na večje razdalje le energija in gibalna količina, ne pa snov. A potujoče valove lahko izkoristimo tudi za premikanje. Spomnimo se deskarjev, ki prav hitro drsijo na visokih valovih pri obalah. Če se torej nekako »oprimemo« valov, nas lahko ponesejo s seboj.

Oglejmo si preprost primer. Zamislimo si napet lok in potujoče transverzalne valove na tetivi, za katere velja prva enačba. Pustimo ob strani vprašanje, kako bi tako valovanje vzbujali. Zamislimo si še letvico z valovito zgornjo stranjo, kjer bi za višino vzdolž letvice veljalo

$$y = y_0 \cos(kx).$$

Na letvico bi torej vrezali zamrznjen potujoči val. Mika nas, da bi mu rekli kar stoječi val, a pod tem izrazom razumemo nekaj drugega. Če lok z valovi premikamo vzdolž tetive v nasprotni smeri potujočih valov, tudi vsaj za nekaj časa vidimo zamrznjen val. Iz enačbe za valovanje

$$y = y_0 \cos(\omega t - kx),$$

ki velja za odmike na mirujoči tetivi, preidemo na odmike pri gibajoči se tetivi tako, da zapišemo lego x , kot jo vidimo iz mirujočega zornega kota

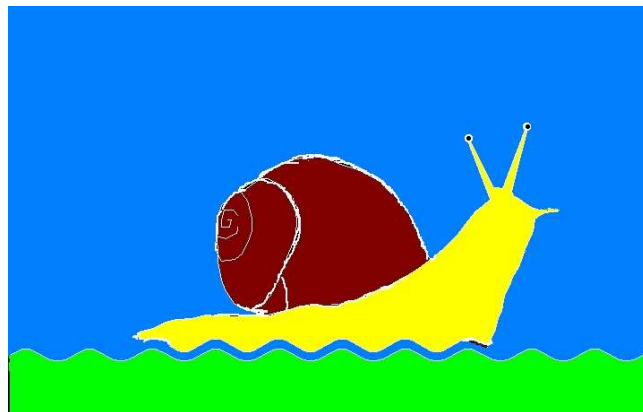
$$x_{mir} = x - vt,$$

kjer je v hitrost gibanja tetive. Z izbrano hitrostjo $v = c$ pridemo do zamrznjega potujočega vala

$$y = y_0 \cos(kx_{mir}).$$

Če se torej zamrznjena vala tetive in letvice ujemata, lahko položimo gibajoči se lok na letvico tako, da se tetiva povsod tesno prilega letvici. Lok torej potuje po mirujoči letvici in se lahko od nje tudi odriva, če ga kaj ovira pri gibanju.

Primer pojasni način gibanja pri polžih. Njihova mišična noga omogoča tvorbo potujočega transverzalnega valovanja vzdolž polža. Da se polž lahko giblje kot lok po letvi, potrebuje valovito podlago, ki se povsem ujema z njegovim potujočim valom. Takih podlag v naravi seveda ni, a plošč s svojo lepljivo in zelo viskozno slino premaga to težavo. Slina se dobro prilepi na podlago, val v nogi pa jo oblikuje sebi podobno. Tako polž s slino peoblikuje podlago.



SLIKA 1.

Vodni polži se gibljejo na način transverzalno potujočega valovanja.

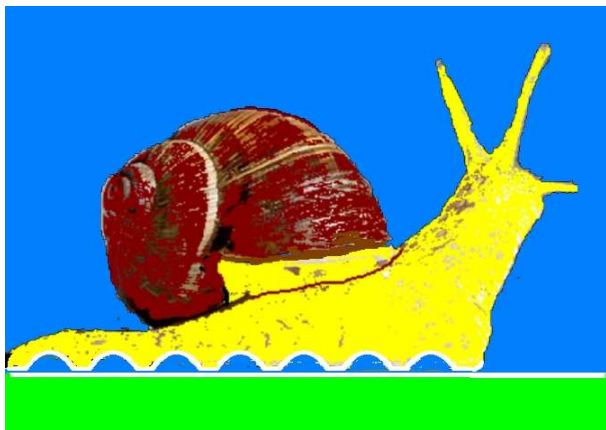
Na sliki 1 je shematično prikazano gibanje polža na transverzalno valovanje. Transverzalno valovanje v nogi potuje v nasprotni smeri, kot se giblje polž. S transverzalnim pogonom se gibljejo večinoma vodni polži.

Vrtni polži se pri gibanju zanašajo na longitudinalno potujoče valovanje. Da se lahko premikajo naprej, se mora noga dotikati podlage le na mestih, kjer je njeno vzdolžno gibanje v smeri od glave proti zadku. Dele nog, ki se gibljejo v obratni smeri, mora polž odmakniti od podlage. Torej se mora po nogi širiti poleg longitudinalnega vala tudi transverzalni, ki poskrbi za odmikanje delov noge od podlage z napačno smerjo vzdolžnega gibanja. Veljati mora torej

$$x_{od} = x - x_0 \cos(\omega t - kx),$$

$$y = y_0 \sin(\omega t - kx).$$

Tu smo z x_{od} zapisali lego delca noge na oddaljenosti x od izhodišča, denimo, od oznake na polževi hišici, z y odmik noge od podlage, x_0 in y_0 pa sta amplitudi longitudinalnega in transverzalnega vala, ki se širita v smeri gibanja polža. Deli nog se pod vplivom teh dveh valovanj gibljejo po eliptičnih tirih, kar spominja na gibanje naših nog pri hoji ali teku. Mislimo si lahko, da je polževa noga množica drobnih nožic, ki se usklajeno gibljejo kot pri stonogi. Na sliki 2 je prikazana polževa noga v nekem trenutku. Deli noge s pravilnim gibanjem so v stiku s podlago, deli z napačnim pa so od podlage odmaknjeni.

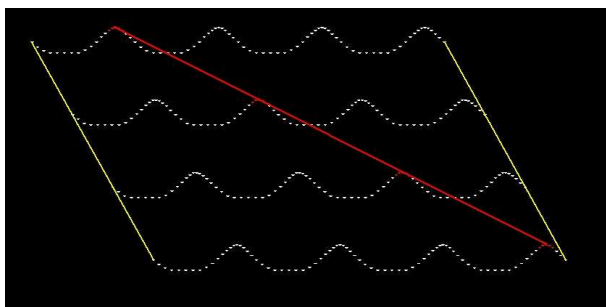


SLIKA 2.

Vrtni polži se gibljejo na način pretežno longitudinalno potujočega valovanja.

Odmike noge smo v štirih zaporednih trenutkih prikazali na sliki 3. Polž se giblje od leve proti desni, kar nakazujeta rumeni črti. Valovanje se širi v isti smeri, le da je precej hitreje od polža, kar vidimo po rdeči črti, ki povezuje vrhove z enako fazo. Da se približamo pravim razmeram, smo transversalni odmik y navzdol omejili. Tako se noga tesneje oprime podlage. Za razliko od vodnih polžev je hitrost vrtnega polža odvisna od amplitude longitudinalnega vala

$$v = \omega x_0,$$



SLIKA 3.

Lege polževe noge v enakomernih časovnih intervalih. Vidimo, da se vala širita v smeri polževega gibanja od leve proti desni (rdeča črta), in sicer precej hitreje, kot se giblje sam polž (rumeni črti). Čas teče od zgoraj navzdol.

in zato manjša od hitrosti valov. Valove lepo vidimo, če na drugi strani opazujemo polževo polzenje po šipi. Pri vrtnem polžu je slina prav tako pomembna, saj mu omogoča povsem neslišno polzenje tudi po zelo strmih, celo previsnih podlagah.

Prav te odlike polževega gibanja zelo zanimajo inženirje, ki bi radi naredili polže-robote. Potrebujemo tudi umetno slino, ki bi omogočila gibanje robotov po strmih podlagah. Zato v literaturi še vedno najdemo strokovne in znanstvene članke na to temo.

× × ×

Nalogi

↓↓↓

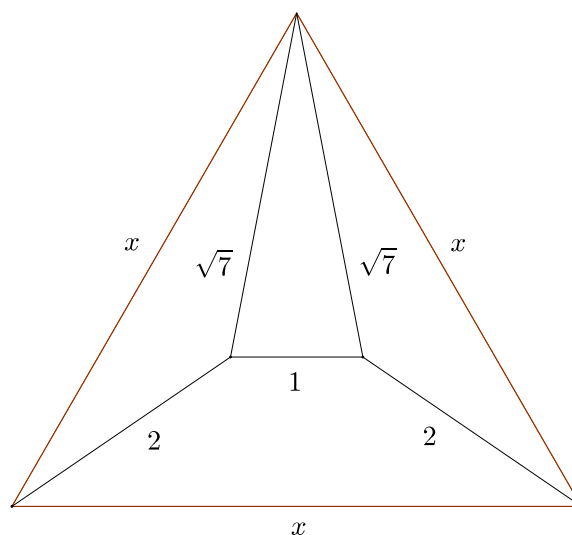
MARKO RAZPET

→

1. Poišči funkcijo f , ki za vsak realen x zadošča funkcijski enačbi

$$x(x+1)f(x) + f(1-x) = x(x^3-1). \quad (1)$$

2. Na sliki je enakostranični trikotnik s stranico x , ki je razdeljen na dva skladna raznostranična trikotnika, enakokrak trapez in enakokrak trikotnik z znanimi podatki. Izračunaj stranico x .



× × ×

Zorni koti nebesnih teles



MARIJAN PROSEN

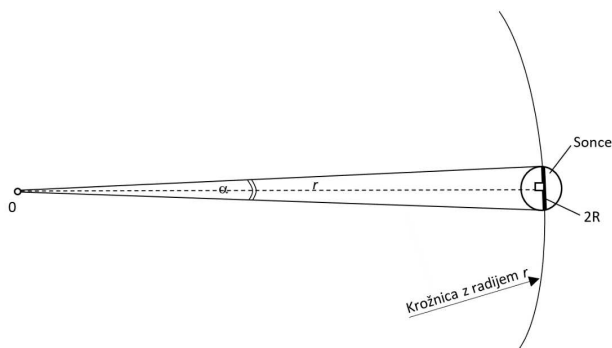
→ Zorni kot je temeljni pojem astronomske geometrije. Najprej bomo obravnavali zorni kot Sonca, nato pa še zorni kot Lune, planetov in zvezd.

Zorni kot Sonca

Zvezd je nešteto. Ena od njih in nam najbližja je Sonce. To je velikanska krogla razbeljenih plinov (poenostavljeni model). Sonce vidimo ali ga opazujemo kot svetlo rumeno dobro vidno okroglo ploskvico (disk, krožec) na dnevnem nebu. Pri opazovanju moramo biti zelo previdni. Opazujemo ga s posebnimi zaščitnimi očali s filtri, ki ne prepuščajo za naše oči njegove nevarne svetlobne žarke.

Zorni kot Sonca je kot, v katerem iz opazovališča na Zemlji, vidimo zelo oddaljeno Sonce.

Izračunajmo, koliko meri zorni kot α Sonca, ki je oddaljeno od Zemlje $r = 150$ milijonov km, njegov premer pa meri okoli $2R = 1\,400$ tisoč km.



SLIKA 1.

(Trenutni) zorni kot α Sonca, O - opazovalec na Zemlji; namesto Sonca si lahko predstavljamo Luno, planet, zvezdo ali drugo vesoljsko telo.

Ker je Sonce vidno v majhnem zornem kotu, lahko upravičeno uporabimo enačbo (sorazmerje) za središčni kot v krožnici in njemu pripadajoči lok, ki je v tem primeru kar enak dolžini tetive. Velja $\alpha/360^\circ = 2R/2\pi r$, od koder sledi za zorni kot Sonca $\alpha = 2R \cdot 360^\circ/2\pi r = 1\,400\,000\text{ km} \cdot 360^\circ/2\pi \cdot 150\,000\,000\text{ km} = 0,5^\circ (= 30')$, kar je približna vrednost.

Zorni kot Sonca pri opazovanju z Zemlje meri polovico kotne stopinje ali 30 kotnih minut. To okroglo vrednost si zlahka zapomnimo.

Zorni kot Sonca pri opazovanju z Zemlje ni stalen. Spreminja se, ker se Zemlja giblje okrog Sonca po elipsi in se oddaljenost Zemlje od Sonca spreminja. Enkrat je Zemlja najbližje Soncu, drugič najdlje. Ko je najbližje v priončju ali perihelu, ima največji zorni kot $32,5'$; ko je najdlje v odsončju ali afelu, pa najmanjšega $31,5'$. Povprečno meri $32'$, kar je okoli $0,5^\circ$, kot smo izračunali.

Pripomba. Ker se zorni kot Sonca s časom spreminja, bi vedno morali reči trenutni zorni kot. Enako velja za zorni kot Lune in planetov. Vendar bomo besedo *trenutni* v nadaljevanju izpuščali.

Zorni kot Lune

Luna je povprečno oddaljena od Zemlje $r = 60R$, njen radij pa je okoli $1/4R$, če R pomeni radij Zemlje. Izračunajmo zorni kot Lune pri pogledu z Zemlje.

Ker je Luna zelo oddaljena od Zemlje in vidna v majhnem kotu, lahko spet uporabimo že prej navedeno enačbo $\alpha/360^\circ = 2R/2\pi r$, od koder za zorni kot Lune dobimo $\alpha = 2 \cdot 1/4R \cdot 360^\circ/2\pi \cdot 60R = 90^\circ/\pi \cdot 60 = 0,5^\circ$, kar je približna vrednost.

Zorni kot Lune pri pogledu z Zemlje meri polovico kotne stopinje ali 30 kotnih minut. To je vrednost,

ki si jo zlahka zapomnimo. V prvem približku sta zorni kot Sonca in zorni kot Lune enaka $0,5^\circ$.

Luna se giblje po elipsi okrog Zemlje, ki leži v enem od gorišč elipse. Zato se oddaljenost Lune od Zemlje spreminja, s tem pa se spreminja tudi njen zorni kot pri pogledu z Zemlje. Spreminja se od $29,4'$ do $33,7'$. Srednja vrednost zornega kota Lune je $31'$, prvi približek in vrednost, ki jo uporabljamo v šoli, pa je $0,5^\circ$.

Pri računanju Luninega zornega kota bi morali torej dobiti vedno vrednost α , ki leži med omenjenima skrajnima vrednostma, zapisano matematično, kot interval $29,4' \leq \alpha \leq 33,7'$ ali $[29,4', 33,7']$.

Ali je možno iz splošnih astronomskih podatkov, ki jih imamo vedno na razpolago in jih znamo na pamet, s preprostim računom, ki povezuje nekaj fizikalnih zakonov, izračunati oziroma primerno oceniti zorni kot Lune ob opoziciji s Soncem, tj. ob polni luni? Gre za oceno Luninega zornega kota, ki naj bi se ne razlikovala za več kakor $\pm 15'$ od srednje vrednosti $31'$, najbolje pa bi bilo, da bi izračunana vrednost padla znotraj intervala $[29,4', 33,7']$. Nalogo rešimo za splošni (ne posebni) primer, saj je polna luna različno oddaljena od Zemlje in od Sonca. Zato bo rezultat naloge bolj ocena, približna vrednost za Lunin zorni kot, ki je seveda ob vsaki polni luni nekoliko drugačen, vendar naj bi njena vrednost padla znotraj ali vsaj blizu navedenega intervala (kar je ostra zahteva).

Za reševanje naloge smo izbrali naslednje osnovne podatke: sprejeta gostota svetlobnega toka s Sonca na Zemlji (solarna konstanta) $j_0 = 1400 \text{ W/m}^2$, ki je praktično taka kot na Luni (razlika je le za 4 W/m^2 (manj), kar zanemarimo glede na vrednost 1400 W/m^2), radij Lune R , sij polne lune (opozicija s Soncem) $m = 12,75$ magnituda (srednja vrednost) in albedo (svetlobna odbojnost) Lune $\delta = 0,12$ (približna vrednost). Podatki so približni, zato lahko pričakujemo, da bo približen tudi rezultat.

Lunin zorni kot α pri opazovanju z Zemlje izračunamo iz $\alpha/360^\circ = 2R/2\pi r$, kjer pomeni R radij Lune in r oddaljenost Lune od Zemlje. Zorni kot v kotnih enotah je

$$\alpha = 57,3^\circ \cdot (2R/r).$$

Gostota svetlobnega toka j_0 , ki pade s Sonca na Luno ob polni luni, je glede na gostoto svetlobnega toka, ki pade na Zemljo, kar $j_0 = 1400 \text{ W/m}^2$.

Gostoto svetlobnega toka j , ki pade s polne lune na Zemljo, izračunamo iz osnovne astrofotometrične Pogsonove enačbe $j/j' = 10^{-0,4(m-m')}$, kjer je $j' = 10^{-8} \text{ W/m}^2$ pri $m' = 1$ magnituda. Sledi, da je $j = 10^{-8} \cdot 10^{-0,4(-13,75)} \text{ W/m}^2 = 32 \cdot 10^{-4} \text{ W/m}^2$.

Od Lune se odbije svetlobni tok $j_0 \cdot \pi R^2 \cdot \delta$. V razdalji r pade na Zemljo tok z gostoto $j_0 \cdot \pi R^2 \cdot \delta / 2\pi r^2$ (upoštevamo le od Sonca osvetljeno Lunino polkroglo ob polni luni, obrnjeno proti Zemlji). Ta kvocient je enak gostoti svetlobnega toka j . Iz enakosti $j_0 \cdot \pi R^2 \cdot \delta / 2\pi r^2 = j$ dobimo $2R/r = \sqrt{(8 \cdot j/j_0 \cdot \delta)} = \sqrt{(8 \cdot 32 \cdot 10^{-4} / 1400 \cdot 0,12)} = 1,23 \cdot 10^{-2}$ radiana in $\alpha = 0,71^\circ \approx 42'$.

Dobili smo rezultat, ki je nekako na meji. Ne pade ravno v postavljeni interval, precej se razlikuje tudi od srednje vrednosti $31'$ (35 % relativna napaka). Vendar je za nas sprejemljiv. Solarna konstanta j_0 je podana približno, napaka je pri j , kjer ni upoštevana vpojnost Zemljinega ozračja (če jo upoštevamo, dobimo že boljšo vrednost za zorni kot $37'$), vprašljiva je tudi δ , ki je zelo približna. Vsak netočen podatek vpliva na končni rezultat, tako da ne moremo dobiti natančne vrednosti računane količine.

V takem primeru je najbolje, da zorni kot izračunamo iz neposredne zveze med premerom Lune in njeno trenutno oddaljenostjo od Zemlje, kar lahko natančno izmerimo z radarjem ali laserjem ali pa preberemo iz Astronomskih efemerid, radij Lune je konstanten.

Če je bila Luna v času polne lune od Zemlje npr. oddaljena $r = 59R_0$, potem je bil njen zorni kot $2R/r = 2 \cdot 1/4R_0/59R_0 = 1/118$ radiana ali $\alpha = 29'$, kar je odličen rezultat.

Na tak neposredni način vedno pravilno izračunamo zorni kot Lune, če imamo natančno podano oddaljenost Lune. Napaka se pojavi lahko samo zaradi nepravilno znanega premera Lune in njene oddaljenosti od Zemlje. Lunin premer ima stalno in znano vrednost, oddaljenost nam najbližjega vesoljskega telesa pa je tudi vsak trenutek zelo znana. Tako je tudi z izračunanim trenutnim zornim kotom Lune, ki se ne more dosti razlikovati od srednje vrednosti.



→ Zorni kot planeta

Zorni kot α planeta je kot, v katerem iz površja Zemlje vidimo oziroma opazujemo planet kot majčkeno navidezno okroglo ploskvico (disk) na nebu. Ker je kot α zelo majhen, tudi za planete velja sorazmerje $\alpha/2R = 360^\circ/2\pi r$, kjer je r oddaljenost planeta, $2R$ premer planeta in R radij planeta.

Planeti se gibljejo okrog Sonca, seveda tudi Zemlja.

Oddaljenost planetov od Zemlje se neprestano spreminja. Zato se spreminja tudi njihov zorni kot, in to pri vsakem planetu od neke najmanjše do neke največje vrednosti; pri Veneri od $10''$ do $65''$, pri Jupitru od $30''$ do $50''$, Saturnu od $15''$ do $21''$, Marsu od $3,5''$ do $25''$, Merkurju od $5''$ do $13''$, Uranu od $3''$ do $4''$, Neptunu od $2,2''$ do $2,4''$. Iz teh podatkov ugotovimo, da ima Venera največji zorni kot, najbolj pa se spreminja pri Marsu. Vse to pojasnimo s spreminjanjem oddaljenosti planetov od Zemlje.

Ločljivost človeškega očesa je nekaj kotnih minut, tako da nobenega planeta z očmi ne ločimo oziroma ne vidimo v zornem kotu. Vse vidimo le kot svetle pike (točke) na nočnem nebu. Z daljnogledom premera objektiva 5 cm, ki ima ločljivost okoli $3''$, pa že vidimo planete kot majčkene svetle okrogle ploskvice, vse tja do Saturna. Če želimo več in bolje opazovati planete, vzamemo zmogljivejši daljnogled.

Zgled

Mars zelo spreminja oddaljenost od Zemlje. Ima precej sploščen tir, vendar bomo privzeli, da se giblje po krožnici. Izračunajmo zorni kot Marsa pri pogledu z Zemlje, ko je v neki povprečni opoziciji s Soncem in je od Zemlje oddaljen okoli $1/2$ astronomske enote (ae.), če meri $1 \text{ ae} = 1,5 \cdot 10^8 \text{ km}$ in je radij Marsa $1/2$ radija Zemlje $R_0 = 6400 \text{ km}$.

Zorni kot α Marsa v povprečni opoziciji izračunamo iz $\alpha/2R = 360^\circ/2\pi r$, od koder sledi $\alpha = 2 \cdot 1/2R_0 \cdot 360^\circ/2\pi r = 6400 \text{ km} \cdot 360 \cdot 60 \cdot 60''/2\pi \cdot 0,5 \cdot 1,5 \cdot 10^8 \text{ km} \approx 18''$. Čeprav smo računali s približnimi podatki, smo dobili kar dober rezultat, ki leži v ustreznem intervalu [$3,5''$, $25''$] za vrednost zornega kota Marsa pri pogledu z Zemlje. S pet-centimetrskim daljnogledom ga že razločimo oziroma vidimo v zornem kotu.

Zorni kot zvezde

Sonce, Luno, planete vidimo v določenem zornem kotu. Kaj pa številne zvezde, ki jih na nočnem nebu vidimo le kot bolj ali manj svetle pike, kot točke brez razsežnosti? Z očmi jih res vidimo kot pike, toda z uporabo posebnih inštrumentov in posebnih načinov opazovanja pa tudi pri zvezdah zaznamo njihovo kotno razsežnost. Saj so to vendar velikanška vesoljska telesa, ogromne žareče krogle razbejlenih plinov (poenostavljeno) večinoma veliko večje od planetov, samo zelo, zelo so daleč. Zato so videti kot pike. Vse je tudi odvisno od zmogljivosti, natančnosti, od ločljivosti inštrumenta, s katerim opazujemo. Na vprašanje, *ali zvezde vidimo v zornem kotu*, lahko odgovorimo z da. Neverjetno, a resnično. Najbrž ste presenečeni, ko ste zvedeli, da so tudi zvezde vidne v določenem zornem kotu, čeprav jih s prostim očesom zaznavamo kot pike na jasnem nočnem nebu. Imajo, ampak skrajno, rečemo ekstremno majhne zorne kote.

Pri pogledu z Zemlje je Sonce vidno v zornem kotu okoli $0,5^\circ$ ali $30'$; Venera, ko nam je najbližje, je vidna v kotu okoli $1'$, Jupiter v opoziciji s Soncem v kotu okoli $50''$, Mars v opoziciji okoli $25''$, Saturn $20''$, Uran $4''$, Neptun $2,4''$, planetoidi pod $1''$, vse zvezde pa pod $0,06''$.

Torej: kot $0,06''$ je največji zorni kot zvezde (meja), v katerem je sploh kakšna zvezda zaznavna z Zemlje, vse druge zvezde zaznavamo v manjšem zornem kotu.

Človeško oko ima ločljivost okoli $5'$, daljnogled z odprtino (vhodno zenico ali premerom objektiva) 5 cm okoli $3''$, 10-centimetrski okoli $1,4''$, 1,2-metrski okoli $0,1''$, šest-metrski optični zvezdni interferometer, ki je deloval v letih 1920–1930 na astronomskem observatoriju na gori Wilson (Kalifornija, ZDA), okoli $0,02''$, 180-metrski intenzitetni zvezdni interferometer v Narrabriju (Avstralija), ki deluje od leta 1965 dalje, pa že okoli $0,0008''$, kar je zelo velika ločljivost.

Poglejmo, kaj razločimo s prostim očesom, v kakšnem zornem kotu katero od nebesnih teles še vidimo. Lahko smo zelo razočarani, kajti na nebu razločimo samo Sonce in Luno in nič več. Tudi zornega kota Venere ne moremo zaznati s svojimi očmi, čeprav pogosto pripovedujejo, kako zelo velika je včasih Venera na nebu. A takrat je velika bolj zaradi

svojega zelo močnega sija okoli -4 . magnitode, kar daje vidni vtis velike navidezne velikosti planeta. Kaj šele, da bi s svojimi očmi zaznali zorni kot Marsa, Jupitra, ..., sploh pa zvezd. Oko odpove že takoj v začetku, na drugi oviri. Razširimo vhodno zenico, ostreje vidimo, manjši kot razločimo.

S pet-centimetrskim dvogledom že razločimo planete kot majčkene svetle okrogle ploskvice na nebu. Vse tja do Saturna jih vidimo v določenem zornem kotu, z Uranom in planetoidi pa so že težave. Vzamemo spet zmogljivejši daljnogled z večjo vhodno zenico. Nekaj časa to gre, pri zvezdah se ustavi. Tudi z zelo ali najbolj zmogljivimi daljnogledi jih vidimo kot točke.

Toda kakšen daljnogled neki bi morali vzeti, da bi razločili zvezdo oziroma da bi jo videli v zornem kotu? Hm, seveda, dovolj zmogljiv, z zelo veliko ločljivostjo, morali pa bi si izmisliti še kakšen poseben način opazovanja. To je bila silna želja številnih astronomov preteklosti, vse od Galileja (1610) dalje, a se jim stvar ni posrečila.

Uresničili pa so jo na astronomskem observatoriju Mt. Wilson, v prvi četrtini prejšnjega stoletja. Najprej so izdelali in namenili opazovanjem 2,5-metrski reflektor (1917–1949 največji daljnogled na svetu) s teoretično ločljivostjo $0,06''$ in z nekoliko slabšo praktično ločljivostjo. Tako z njim ni bilo mogoče neposredno izmeriti zornega kota zvezde $0,06''$. Potem pa so si genialci izmislili posebni šest-metrski nastavek, ki so ga pričvrstili na vrh obstoječega reflektorja. Z novo nastalim inštrumentom, imenovanim šest-metrski optični zvezdni interferometer, so povečali ločljivost na $0,02''$. Z inštrumentom takšne ločljivosti pa so že mogli razločiti kot $0,06''$, tj. izmeriti zorni kot zvezde.

S tem inštrumentom so z interferenco svetlobe, ki je prihajala od merjene zvezde preko odbojev na štirih ravnih zrcalnih v gorišče reflektorja, 13. decembra leta 1920 prvič izmerili zorni kot zvezde. Ta, za vse astronomske dni najbolj slavna zvezda, je bila Betelgeza v ozvezdju Orion, njen izmerjeni zorni kot pa je bil $0,047''$.

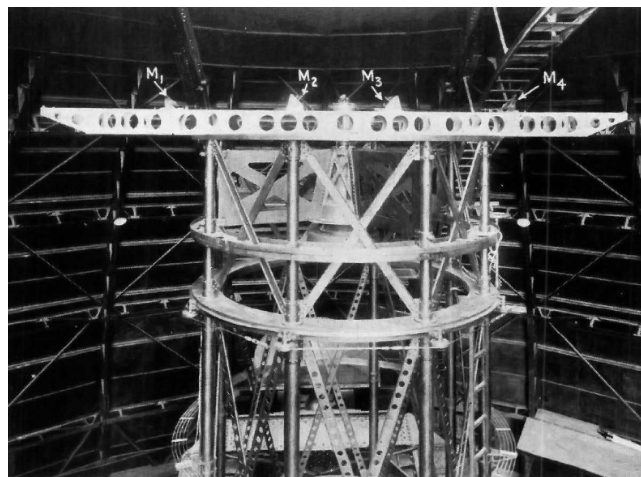
Prva, zgodovinska meritev zornega kota zvezde je tudi potrdila teoretične izračune $0,04''$ za zorni kot te zvezde. Pri tedanji znani oddaljenosti zvezde so nato še določili radij zvezde in ga ocenili na okoli 450 radijev Sonca. S tem so potrdili teoretične izračune in razmišljanja, da v vesolju obstajajo zvezde,

ki so po dolžinskih razsežnostih, tj. po radijih, veliko večje od Sonca, da torej obstajajo orjakinje in nadorjakinje.

S tem šest-metrskim in pozneje še s 15-metrskim optičnim zvezdnim interferetrom so od leta 1920 do leta 1939 izmerili zorne kote petnajstim zvezdam, ki so bile večinoma nadorjakinje poznega spektralnega tipa kot Betelgeza. Izmerjeni zorni koti pa so bili od $0,02''$ do $0,05''$. Z meritvami so prenehali po letu 1939 predvsem zaradi izredno velikih težav pri povečanju ločljivosti tega tipa zvezdnega interferetrometra in smrti F. G. Peasa, ki je pravzaprav edini znal ravnati s tem inštrumentom.

Kmalu nato so v astronomsko prakso začeli uvajati nove načine merjenja zornih kotov zvezd, in sicer večinoma iz Luninih zakritij ali okultacij zvezd (med drugo svetovno vojno in pozneje) in z intenzivnimi zvezdnimi interferometri (od 1958 dalje).

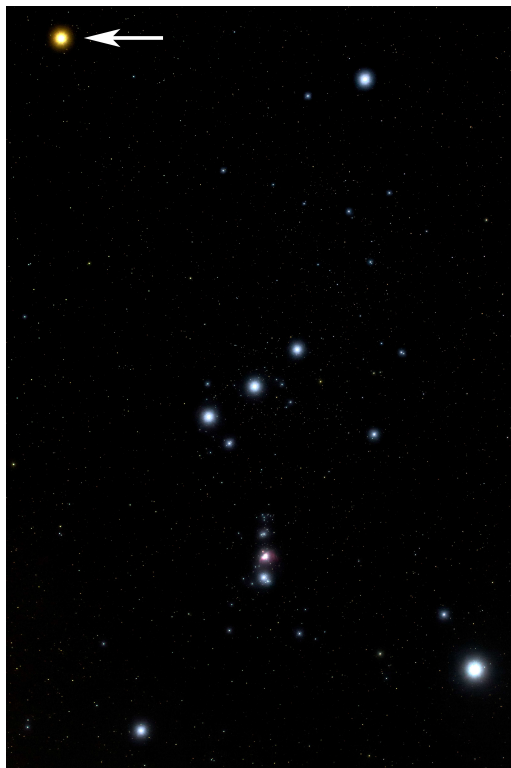
Ločljivosti intenzivnih interferetrometrov, skupaj s teorijo in načini opazovanja, so tako velike, da lahko izmerijo zorne kote zvezd precej pod $0,001''$. To je



SLIKA 2.

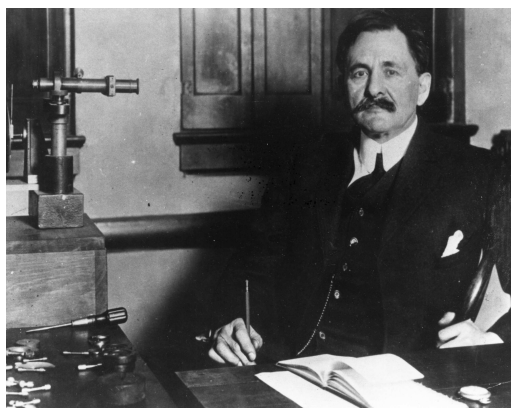
Na vrh, to je pred vhodno zenico novo izdelanega 2,5-metrskega reflektorja na zvezdarni Mt. Wilson, so pričvrstili kovinski tram s štirimi glede na optično os reflektorja simetričnimi ravnimi zrcali, in s tem sestavili šest-metrski optični zvezdni interferometer. Z njim so z interferenco svetlobe zvezde v gorišču reflektorja izmerili prvi zorni kot zvezde. Obsežno in zahtevno teorijo interferometričnih meritev zornih kotov zvezd tu pustimo ob strani, saj nas zanimajo samo rezultati meritev. (Foto: Wikipedia)





SLIKA 3.

Lega najbolj slavne zvezde v zgodovini astronomije – Betelgeze v ozvezdju Orion. (Foto: Andrej Guštin)



SLIKA 4.

Fizik Albert A. Michelson (1852–1931) – nobelovec 1907. (Foto: University of Chicago)

tako majhen kot, za kakršnega so včasih mislili, da ga sploh ni mogoče izmeriti. Pisati o teh meritvah pa je že nova astronomska zgodba.

Želeli smo povedati, da imajo zvezde zorni kot, da je ta zelo, zelo majhen in da je tudi tako ekstremno majhne kote mogoče izmeriti. Odlična teorija, izbrani način opazovanja ter super tehnika in tehnologija naredijo svoje: nemogoče postane mogoče.

Do zdaj so izmerili zorne kote nekaj sto zvezdam. Največji zorni kot $0,057''$ ima zvezda R Zlate ribe, sledijo Betelgeza in Mira z $0,050''$, Antares z $0,041''$, Ras Algeti z $0,03''$, Aldebaran in Arktur z $0,02''$ ter druge zvezde, med njimi Sirij s skrajno majhnim zornim kotom $0,0059''$.

Ob koncu si za orientacijo oglejmo, kaj pomeni, da ima inštrument ločljivost $0,06''$, da ima zvezda tak zorni kot ali da opazujemo v zornem kotu $0,06''$. Isto stvar lahko povemo na različne načine.



SLIKA 5.

Nobelovec (1907) in astronom Francis G. Pease (1881–1938), (foto: UNC Charlotte ITS) – S fizikom A. A. Michelson sta bili duši in srci enkratnih ter edinstvenih interferometričnih meritev zornih kotov zvezd na astronomskem observatoriju Mt. Wilson. To je bil tako velik astronomski dosežek kot prve meritve oddaljenosti zvezd v sredini 19. stoletja (ali pa še večji).

Naj bo x višina 10 km oddaljenega predmeta, ki ga opazujemo v kotu $\alpha = 0,06''$. Ker je kot skrajno majhen, lahko zapišemo $x/\alpha = 2\pi r/360^\circ$, kjer je r oddaljenost. Sledi $x = \pi r \alpha / 180^\circ = \pi \cdot 0,06'' \cdot 10\,000 \text{ m} / 180 \cdot 60 \cdot 60'' = 3 \text{ mm}$.

Če gledamo v zornem kotu $0,06''$, v oddaljenosti 10 km, razločimo pokončno daljico z dolžino tri milimetre ali razločimo točki, ki sta med seboj razmaknjeni za 3 mm. Taka ločljivost, da človeku vzame sapo. So pa še boljše.

Ko poznamo zorni kot zvezde, lahko pri znani oddaljenosti izračunamo radij zvezde.

Zgled

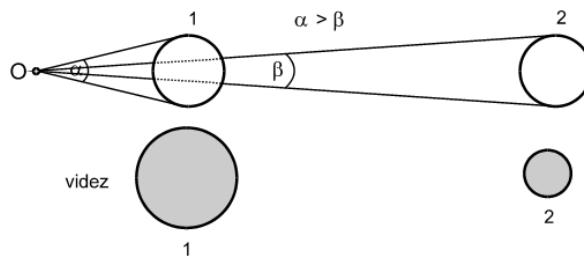
Izračunajmo radij R zvezde Antares v radijih R_0 Sonca, če je zorni kot Antaresa $\alpha = 0,041''$ in oddaljenost $r = 620$ svetlobnih let (1 svetlobno leto je $9,5 \cdot 10^{12}$ km), radij Sonca pa je $R_0 = 7 \cdot 10^5$ km.

Radij Antaresa v radijih Sonca dobimo iz $2R/2\pi r = \alpha/360^\circ$, od koder sledi $R/R_0 = \pi r \alpha / 360^\circ R_0 = \pi \cdot 620 \cdot 9,5 \cdot 10^{12} \text{ km} \cdot 0,041'' / 360 \cdot 60 \cdot 60'' \cdot 7 \cdot 10^5 \text{ km} \approx 840$.

Antares je nadorjakinja z radijem, ki je približno 840-krat večji od radija Sonca. Ker zvezda pulzira (radij se ji spreminja za $\pm 20\%$), njena površinska temperatura tudi niha za ± 150 K. Mimogrede: Antares ni navadna stacionarna ali stabilna zvezda, je spremenljivka.

Naloge

- Sonce vidimo v prisočju v zornem kotu $32,5'$, v odsončju pa v zornem kotu $31,5'$. Izračunajte, koliko merita najkrajša in najdaljša oddaljenost Zemlje od Sonca, če je radij Sonca $696\,000$ km. [147 milijonov km, 152 milijonov km]
- Tudi Luno, planete in zvezde vidimo v določenem zornem kotu. Pri Luni in planetih se spreminja, pri zvezdah pa ne. Zakaj? Pojasnite!
- Na sliki 6 je zgoraj v legi 1 in v legi 2 enako velika krogla (tj. krogla z enakim radijem). Kako je z zornim kotom, v katerem vidimo kroglo pri opazovanju iz točke O v obeh primerih? Opišite situacijo. Pri približevanju se nam zdi tudi gora večja.



SLIKA 6.

- Luna je povprečno oddaljena od Zemlje $380\,000$ km, njen premer pa je okoli 3500 km. Izračunajte zorni kot Lune pri pogledu z Zemlje. [0,5°]
- Trenutni zorni kot Lune je $30,5'$. Koliko je Luna oddaljena od Zemlje, če je radij Lune 1740 km? [392 000 km]
- Katere planete (če jih najdete na zvezdnem nebu) vidite v zornem kotu z opernim kukulom odprtine $2,5$ cm (ločljivosti okoli $6''$)?
- Opazujte planete z daljnogledi različnih povečav in ločljivosti. Opazovanja skrbno skicirajte in komentirajte.
- Izračunajte povprečni zorni kot Jupitra in povprečni zorni kot Saturna v povprečni opoziciji s Soncem pri opazovanju z Zemlje, če Jupiter kroži okrog Sonca v oddaljenosti 5 a e, Saturn v oddaljenosti 10 a e in je radij Jupitra enak 11 radijev Zemlje, radij Saturna pa enak $9,5$ radija Zemlje; 1 a e = $1,5 \cdot 10^8$ km, radij Zemlje $R_0 = 6400$ km. [Povprečni zorni kot Jupitra je okoli $48''$, Saturna okoli $19''$.]
- Venera je v trenutku opazovanja od Zemlje oddaljena 105 milijonov km, njen radij pa je skoraj enak radiju Zemlje. Izračunajte njen trenutni zorni kot. [25'']
- Izračunajte radij zvezde v radijih Sonca $R_0 = 7 \cdot 10^5$ km za: a) Betelgezo $\alpha = 0,05''$, $r = 643$ sv.l.; b) Sirij $\alpha = 0,0059''$ in $r = 8,6$ sv.l. (vzamemo ga kot enojno zvezdo, čeprav vemo, da je dvojna) in c) Proksimo Kentavra $\alpha = 0,001''$ in $r = 4,25$ sv.l. Rezultate komentirajte. [a) ≈ 1050 , b) $\approx 1,7$ in c) $\approx 0,14$]

× × ×

Deljenje skrivnosti



DAMJAN STRNAD

→ V življenju se pogosto zgodi, da je potrebno zaupno informacijo, imenujmo jo skrivnost, deliti med več oseb na tak način, da vsak posameznik poseduje le del skrivnosti. Pri tem zahtevamo, da posamezni del skrivnosti ne zadošča za določitev celotne skrivnosti, pač pa je potrebno za njeno rekonstrukcijo zbrati vsaj določeno število delov, ne pa nujno vseh.

Na slednji način lahko tudi zagotovimo, da skrivnost ne bo nedosegljiva ali celo izgubljena, če bo pogrešan katerikoli posamezni del. Praktičen primer potrebe po deljenju skrivnosti je npr. delitev varnostne kode za uporabo jedrskega orožja med skupino pooblaščenih oseb, od katerih jih mora svoj del kode prispevati vsaj polovica, da se varnostna koda lahko sestavi in orožje uporabi. Podobna primera uporabe sta delitev kombinacije trezorja ali gesla za dešifriranje zaupnih dokumentov. V določenih praktičnih primerih skrivnosti ne pozna nihče (npr. šifrirni ključ se naključno tvori med samim postopkom delitve), v drugih pa je lahko vsebina skrivnosti znana vsem pooblaščenim osebam in gre pri njenem deljenju samo za zaščito pred nepooblaščenimi osebami, ki mora pridobiti vsaj k delov skrivnosti za njeno rekonstrukcijo. Tretja možnost je uporaba zaupne osebe, imenovane **delivec**, ki izvede deljenje skrivnosti in posreduje dele pooblaščenim osebam.

V tem prispevku bomo opisali Shamirjev algoritem, ki je relativno preprosta, a učinkovita in dokaj varna metoda deljenja skrivnosti. Predpostavili bomo, da je skrivnost S predstavljena kot pozitivno celo število. V primeru, da je izvorna skrivnost besedilo, ga je potrebno najprej pretvoriti v številsko obliko. Daljša besedila je pri tem potrebno razde-

liti na krajše odseke, ki jih zatem obravnavamo kot ločene skrivnosti.

Naj bo n število delov, na katere želimo skrivnost S razdeliti, k pa minimalno število delov, ki jih potrebujemo za rekonstrukcijo S . Takšni obliki delitve skrivnosti bomo rekli **shema** (k, n) . Vrednosti k in n sta javno znani in odvisni od praktičnih potreb. Če želimo, da so vsi udeleženci enako pomembni, potem bomo vsaki od pooblaščenih oseb dodelili natančno en del. Lahko pa določenim pooblaščenim predredimo višjo prioriteto s tem, da jim dodelimo večje število delov skrivnosti od ostalih. Kombinacijo bančnega trezorja bi lahko, recimo, delili po shemi $(3, 4)$, nato pa predsedniku banke dodelili dva dela skrivnosti, vsakemu od njegovih dveh pomočnikov pa po enega. Za odprtje trezorja bi potem zadostovala prisotnost predsednika in kateregakoli od pomočnikov, medtem ko niti predsednik sam niti oba pomočnika skupaj ne bi imeli dostopa do trezorja.

V nadaljevanju bomo opisali poenostavljeno različico originalne Shamirjeve metode, ki ima določene pomanjkljivosti, a uporablja samo običajno aritmetiko in je zato enostavnejša za razumevanje. Metoda za razdelitev skrivnosti uporabi polinom stopnje $k - 1$, ki ga lahko zapišemo kot $p(x) = a_{k-1}x^{k-1} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Koefficienti a_1, \dots, a_{k-1} so skrita naravna števila, ki jih naključno izbere algoritem deljenja skrivnosti, medtem ko vrednost konstantnega člana a_0 postavimo na S . Shamirjeva metoda temelji na matematičnem dejstvu, da za enolično določitev polinoma stopnje $k - 1$ potrebujemo vsaj k njegovih točk - za določitev premice potrebujemo dve točki, za določitev parabole tri točke in tako naprej. Če kot dele skrivnosti izberemo točke $d_i = (x_i, p(x_i))$, kjer je $x_i = i$ za $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, potem bo potrebnih vsaj k ali več delov za enolično določitev neznanih koefficientov polinoma in s tem izračun skrivnosti.

Opisani postopek deljenja skrivnosti lahko strnemo v naslednjem algoritmu:

function Deli_Skrivnost(n, k, S)

```

 $a_0 = S$ 
for  $i = 1, 2, \dots, k - 1$  do
     $a_i = \text{randint}()$ 
end for
 $D = \{\}$ 
for  $i = 1, 2, \dots, n$  do
     $p_i = 0$ 
    for  $j = 0, 1, \dots, k - 1$  do
         $p_i = p_i + a_j \cdot i^j$ 
    end for
     $D = D \cup \{(i, p_i)\}$ 
end for
return  $D$ 
end function

```

Klic funkcije `randint` v zgornji kodi vrača naključno celo število. V praksi največjo vrednost koeficienta polinoma omejimo, da ne pride do prekoračitve obsega predstavitve celih števil. Vhodni podatki algoritma so javno znani vrednosti n in k ter vrednost skrivnosti S , rezultat algoritma pa je množica D delov skrivnosti, od katerih je vsak zapisan kot par $(x, p(x))$.

Ostane še vprašanje rekonstrukcije skrivnosti, če je znanih katerihkoli njenih k delov $(x_j, p(x_j))$ za $j \in \{1, 2, \dots, k\}$. Vrednost prostega člana polinoma, ki predstavlja iskano skrivnost, lahko izračunamo neposredno po naslednji enačbi:

$$S = p(0) = \sum_{j=1}^k p(x_j) \prod_{\substack{u=1 \\ u \neq j}}^k \frac{x_u}{x_u - x_j}.$$

Pri naivni implementaciji zgornje enačbe lahko pri računanju ulomkov prihaja do zaokrožitvenih napak, kar lahko omilimo tako, da produkta števcov in imenovalcev izračunavamo ločeno ter deljenje izvedemo šele na koncu.

Oglejmo si sedaj zgled deljenja in rekonstrukcije skrivnosti $S = 9672$ po shemi (3, 5). Ker je $k = 3$, tvorimo naključen polinom druge stopnje. Denimo, da sta naključno izbrana koeficienta $a_1 = 32731$ in $a_2 = 53929$. Skupaj z $a_0 = 9672$ nam to da naslednjo enačbo polinoma:

$$p(x) = 53929x^2 + 32731x + 9672.$$

Če enačbo polinoma ovrednotimo pri $x \in$

$\{1, 2, 3, 4, 5\}$, dobimo naslednje dele skrivnosti:

- $d_1 = (1, 96332)$
- $d_2 = (2, 290850)$
- $d_3 = (3, 593226)$
- $d_4 = (4, 1003460)$
- $d_5 = (5, 1521552)$

Poskusimo sedaj rekonstruirati skrivnost iz delov d_1, d_3 in d_4 :

$$\begin{aligned}
 S &= 96332 \cdot \frac{2}{2-1} \cdot \frac{4}{4-1} + \\
 &+ 290850 \cdot \frac{1}{1-2} \cdot \frac{4}{4-2} + \\
 &+ 1003460 \cdot \frac{1}{1-4} \cdot \frac{2}{2-4} = \\
 &= \frac{770656}{3} - \frac{1163400}{2} + \frac{2006920}{6} = 9672
 \end{aligned}$$

Na podoben način z rekonstrukcijo iz delov d_2, d_3 in d_5 dobimo:

$$\begin{aligned}
 S &= 290850 \cdot \frac{3}{3-2} \cdot \frac{5}{5-2} + \\
 &+ 593226 \cdot \frac{2}{2-3} \cdot \frac{5}{5-3} + \\
 &+ 1521552 \cdot \frac{2}{2-5} \cdot \frac{3}{3-5} = \\
 &= \frac{4362750}{3} - \frac{5932260}{2} + \frac{9129312}{6} = 9672
 \end{aligned}$$

Bralec se lahko prepriča, da tudi vsaka druga trojica delov omogoča rekonstrukcijo začetne skrivnosti.

Kot smo na začetku omenili, je opisan postopek v resnici poenostavitev originalne Shamirjeve metode, ki za izračun delov skrivnosti uporablja modularno aritmetiko. Pomanjkljivost opisane metode je v tem, da lahko z vsakim pridobljenim delom skrivnosti dodatno omejimo nabor možnih vrednosti koeficientov polinoma. Z zadostnim številom pridobljenih delov lahko zato nepridipravo uspe zalogo vrednosti koeficientov skrčiti do te meje, da lahko skrivnost izračuna z grobo metodo, tj. s preizkušanjem vseh



→ možnih kombinacij. Dobra novica je, da lahko varnost metode povečamo s preprosto razširitvijo, pri kateri izberemo veliko praštevilo m , za katerega velja $m > S$ in $m > n$. Vrednost m mora biti javno znana. Naključne vrednosti koeficientov polinoma potem omejimo na $a_i < m$ in dele skrivnosti določimo kot $d_i = (x_i, p(x_i) \bmod m)$, kjer **mod** predstavlja ostanek pri celoštevilskem deljenju. Zaradi tega se nekoliko zaplete tudi postopek rekonstrukcije skrivnosti, vendar sedaj nepooblaščen oseba s prilastitvijo dodatnih delov skrivnosti, vse dokler jih skupaj nima vsaj k , ne pridobi dodatne informacije za rekonstrukcijo celotne skrivnosti.

Literatura

[1] A. Shamir, *How to Share a Secret*, Communications of the ACM, 1979.

× × ×

Križne vsote

REŠITEV S STRANI 8

↓↓↓

	4	17						
3	1	2				10	11	
10	3	7	6		17	6	2	4
		10	8	2	24	9	8	7
			10	4	5	1		
				15	8	7		

× × ×

Barvni sudoku

↓↓↓

→ V 8×8 kvadratkov moraš vpisati začetna naravna števila od 1 do 8 tako, da bo v vsaki vrstici, v vsakem stolpcu in v kvadratih iste barve (pravokotnikih 2×4) nastopalo vseh 8 števil.

			4				6
1				8			
	1						
		4	6				3
7	2						5
			5	6	7		
			2				
8				1	3		

REŠITEV BARVNI SUDOKU

2	9	3	1	7	5	4	8
7	8	5	4	2	1	3	9
1	2	7	9	5	3	8	4
8	5	4	3	1	9	2	7
3	1	8	2	9	4	7	5
4	7	9	5	8	2	1	3
5	4	2	8	3	7	9	1
6	3	1	7	4	8	5	2

→
→
→

× × ×

Zaledeneli zrak



ALEŠ MOHORIČ

→ Kdo se je tako razjezil in nametal koščke ledu po močvirski travi, kot bi se na njej raztreščila steklena šipa?

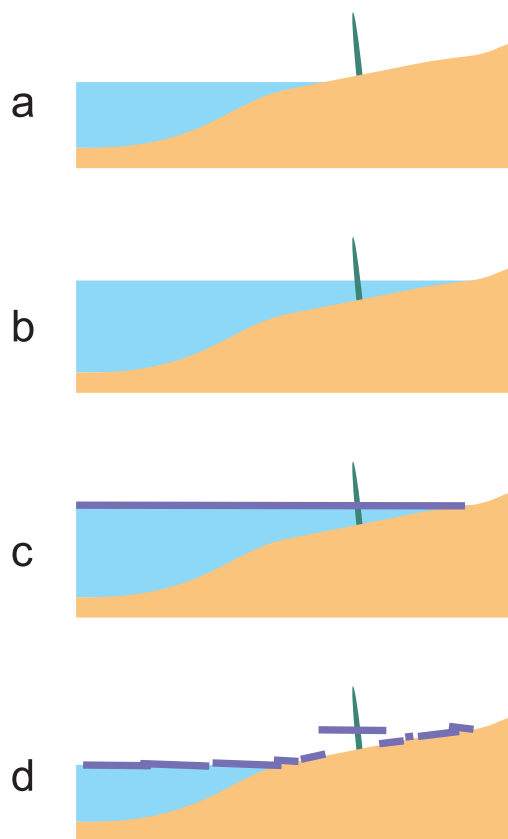


SLIKA 1.

Nedavno poplavljen, zaledenel travnik ob mlaki (Foto: Maja Klavžar)

Tokratna naravoslovna fotografija kaže zdobljen led, ki je videti, kot da bi nastal nekaj decimetrov nad travnikom in vodno gladino, potem pa bi razpadel ne kose in padel na tla. Fotografija je narejena v mrzli zimi na močvirnem, poplavnem območju, kakor ga kaže slika 2a. Najprej je obilica padavin, v obliki dežja, morda skupaj z odjugo, povzročila, da je voda narasla in poplavila svojo okolico (slika 2b). Potem pa je, verjetno čez noč, površina tako nastale mlake zamrznila (slika 2c), kar pomeni, da voda ni drla. Voda je nato izpod ledene plošče odtekla in plošča se je zaradi teže razdrobila in sesedla (slika 2d). Nekateri manjši kosi, ki so nastali okoli vej štr-

lečih nad vodno gladino, so ostali na svojem mestu. Tako lahko lepo vidimo, do kod je segla voda, ko je bilo območje poplavljenno. To vidimo na podrobnosti fotografije na sliki 3.



SLIKA 2.

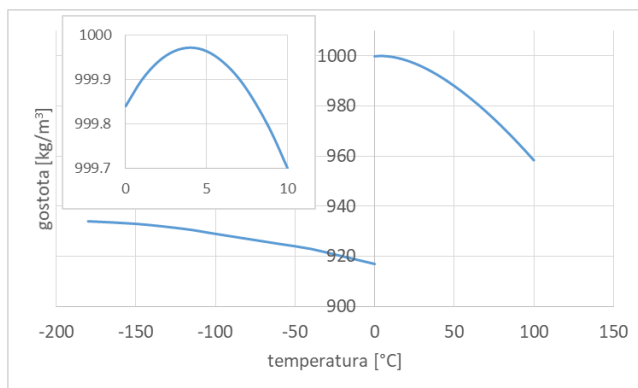
Nastanek zdobljene ledene plošče na tleh, s katerih se umakne poplavna voda potem, ko zamrzne njena površina: a) začetno stanje, b) voda poplavi, c) gladina vode zamrzne, d) voda se umakne in ledena plošča razpade.


SLIKA 3.

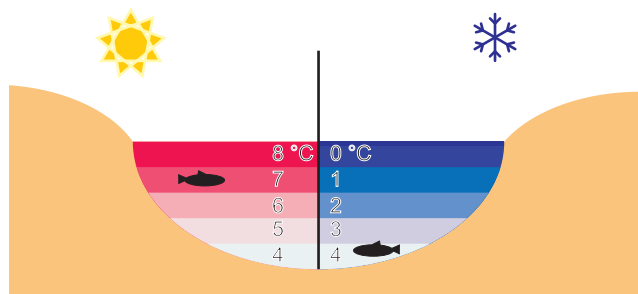
Ostanke ledene plošče, ki je zamrznila okoli vej na gladini poplavne vode, ki je kasneje odtekla. (Foto: Maja Klavžar)

Zakaj pa voda zamrzne na vrhu, ne pa na primer na dnu? Kar pomislimo, kaj se zgodi s kockami ledu, ki jih damo v kozarec vode. Plavajo na gladini. To je dokaj nenavadna lastnost vode v primerjavi z drugimi snovmi. Običajne snovi so v trdnem stanju gostejše kot v tekočem stanju. Pri vodi pa je obratno. Voda ima največjo gostoto, ko je tekoča in je njena temperatura 4,5 °C. Graf gostote vode v odvisnosti od temperature kaže slika 4. Voda se v mrzli noči, ko temperatura pade pod ledišče, začne ohlajati na gladini. Ohlajena najprej potone na dno. Potem se začne ohlajati nova plast pri vrhu, dokler ni najgostejša voda zbrana pri dnu. Na vrhu začne voda nato zmrzovati, na dnu pa ostane tekoča. Led plava na površini vode. Seveda je debelina ledene plošče tem večja, tem dlje traja ohlajanje, torej tem dlje je temperatura okolice pod lediščem. Seveda lahko v dovolj dolgem času zamrzne prav vsa voda v luži, mlaki ali jezeru. Če voda z dna odteče, ledena plošča na vrhu ostane vpeta na robu, pod njo pa nastaja vedno večji zračni mehur. Ko je mehur prevelik, robovi plošče ne zmorejo več nositi njene teže in plošča se sesede. Če je dovolj tanka, se pri tem razleti na drobne kose.

Voda je ujeta med tla in ozračje. Poleti je ozračje toplejše od tal in voda je po plasteh vedno hladnejša, globlje ko smo. Pozimi je obratno. Zrak je hladnejši od tal in plast vode na dnu je toplejša, kot na vrhu, kot kaže slika 5.


SLIKA 4.

Gostota vode in ledu v odvisnosti od temperature. Največjo gostoto ima voda pri 4,5 °C. Gostota ledu je 8 % nižja od gostote vode.


SLIKA 5.

Poleti so globlje plasti vode hladnejše, pozimi pa ravno obratno.

Lastnost ledu, da je redkejši od vode, povzroča pozimi tudi rast razpok na cestišču. Čez dan se led segreje, stali in voda steče v drobne razpoke. Čez noč zamrzne, se razširi in poveča razpoke. Tako imajo spomladi cestarji vedno veliko dela. Težavi se izognemo tako, da na površini ni razpok in poskrbimo za primerno odvodnjavanje.

× × ×

www.dmfa-zaloznistvo.si
www.presek.si

Matematični kenguru

Osnovna naloga tekmovanja Kenguru je popularizacija matematike. Zanimiv, zabaven in igriv način zastavljanja matematičnih problemov je pripomogel, da se je tekmovanje kmalu razširilo po vsej Evropi, hkrati pa so se v tekmovanje vključevali tudi otroci in mladostniki iz drugih držav sveta. Tekmovanje je preseglo evropske okvire in postalo Mednarodni matematični kenguru. Leta 2016 se ga je udeležilo več kot 6 milijonov tekmovalcev iz več kot 60 držav sveta. V Sloveniji Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije organizira tekmovanje za učence od prvega razreda osnovne šole do četrtega letnika srednje šole. Poseben izbor je pripravljen za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol, za dijake srednjih poklicnih šol ter za študente.

Naloge, zbrane v teh knjigah, so najboljše možno gradivo za pripravo na prihodnja tekmovanja. Predvsem zato, ker je vsaki nalogi dodana podrobno razložena rešitev, ki bralca vodi v logično mišljenje in spoznavanje novih strategij reševanja. Marsikatera naloga, ki je sprva na videz nerešljiva, postane tako dosegljiv iskriv matematični izziv.



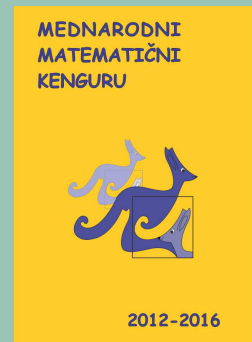
10,99 EUR



18,74 EUR



14,50 EUR



23,00 EUR

Pri DMFA-založništvo je v Presekovi knjižnici izšlo že pet knjig Matematičnega kenguruja. Na zalogi so še:

- *Evropski matematični kenguru 2002-2004,*
- *Mednarodni matematični kenguru 2005-2008,*
- *Mednarodni matematični kenguru 2009-2011,*
- *Mednarodni matematični kenguru 2012-2016 (novost).*

Poleg omenjenih ponujamo tudi druga matematična, fizikalna in astronomska dela. Podrobnejše predstavitev so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse publikacije tudi naročite:

<http://www.dmfa-zaloznistvo.si/>

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA Slovenije, dijaki in študentje imate ob naročilu starejših zbirk nalog pri DMFA-založništvo 20 % popusta na zgornje cene - izkoristite ga!