PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **4** (1976/1977)
Številka 2
Strani 67–71

Anton Suhadolc:

MATEMATIČNE NAPAKE, II.Del

Ključne besede: matematika, teorija števil, popularizacija matematike, rekreacijska matematika.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/4/4-2-Suhadolc.pdf

MATEMATIKA

MATEMATIČNE NEPAKE
2. DEL

V 1. številki Preseka smo si ogledali nekaj primerov matematičnih nepak. Ponovimo, kaj je nepaka: to je naloga, ki jo računamo nepravilno, rezultat pa je kljub temu pravilen.

V drugem delu si bomo ogledali še nekaj novih primerov nepak.

1. Vsakdo ve, da je laže seštevati kot množiti, zato skušamo izračunati $1\frac{1}{2} \cdot 3$ po lažji poti:

$$1\frac{1}{2} \cdot 3 = 1\frac{1}{2} + 3 = 4\frac{1}{2} \tag{1}$$

Običajna pot da isto. Spet se vprašamo, za kakšne ulomke je ta način računanja pravilen. Splošni primer računa (1) zapišemo v obliki

$$(k + \frac{a}{b}) \cdot n = (k + \frac{a}{b}) + n \tag{2}$$

Tu so a, b, k, n naravna števila, $a < b$, a in b nimata skupnega faktorja razen 1. Enačbo (2) množimo z b in uredimo, pa dobimo

$$(n - 1) [(k - 1)b + a] = b$$

če je $k \geqq 2$, je leva stran enaka 0, če je $n = 1$, ali pa večja od $a + b$, če je $n > 1$, torej ne more biti enaka desni. Ostane še možnost $k = 1$:

$$(n - 1)a = b$$

število a deli b, ker pa nimata skupnih faktorjev, mora biti $a = 1$; potem pa je $n = b + 1$.

Splošna rešitev enačbe (2) je torej

$$(1 + \frac{1}{b}) \cdot (b + 1) = (1 + \frac{1}{b}) + (b + 1)$$

kjer je b poljubno naravno število. Primer (1) dobimo pri $b = 2$.

2. Vsi menimo, da je računanje z ulomki nadležno, zato jih bomo pri množenju kar spustili, kot kaže zgled

$$(31 + \tfrac{1}{2})(21 - \tfrac{1}{3}) = 31.21 \qquad (4)$$

Po "stari" poti je leva stran $\frac{63}{2} \cdot \frac{62}{3} = 21.31$, torej je zgornji rezultat pravilen.

Splošen primer nepake (4) se da zapisati v obliki

$$(k + \tfrac{a}{b})(n - \tfrac{c}{d}) = k.n \qquad (5)$$

Ta enačba ima v naravnih številih ogromno rešitev. Omejimo se npr. na rešitve, pri katerih je $a = c$; ko odpravimo ulomke in uredimo, dobimo

$$n.d = k.b + a$$

Tudi ta enačba ima mnogo rešitev. Izberimo si npr. $n = 43$, $d = 7$, pa dobimo

$$301 = k.b + a$$

ta ima rešitve 150.2 + 1, 100.3 + 1, in še druge. Te nam dajo nepake

$$(150 + \tfrac{1}{2})(43 - \tfrac{1}{7}) = 150.43$$

$$(100 + \tfrac{1}{3})(43 - \tfrac{1}{7}) = 100.43$$

$$(37 + \tfrac{5}{8})(43 - \tfrac{5}{7}) = 37.43$$

Naloga: Poišči nepake oblike (5), pri katerih je $a = c = 1$!

3. Večini učiteljev matematike in tudi mnogim učencem je iz prakse pred šolsko tablo domača formula za deljenje dvočlenikov

$$\frac{a + c}{b + d} = \frac{a}{b} + \frac{c}{d}, \quad b, d > 0 \qquad (6)$$

Največkrat dobi učenec - zagovornik te formule - oceno nezadostno. Primeri kažejo, da je formula (vsaj včasih) pravilna:

$$\frac{3 - 12}{1 + 2} = \frac{3}{1} - \frac{12}{2} = -3$$

$$\frac{8 - 18}{2 + 3} = \frac{8}{2} - \frac{18}{3} = -2$$

Naloga: Pokaži, da velja pravilo (6), če je

$$a = - \frac{b^2 c}{d^2}$$

4. Tiskarne redno obiskuje tiskarski škrat, ki se rad poigra s tekstom (vprašajte v tiskarni "Dela"), posebno veselje pa ima nad številkami, ko v tiskarni stavijo in tiskajo matematične učbenike, zbirke nalog in zbirke tabel. (Kar poglejte, koliko napak je v vaših zbirkah vaj iz matematike, posebno pri rezultatih!)

Matematika se pogosto upre celo tiskarskemu škratu; ne more ji vedno do živega, kot kažejo primeri

$$2^5 \,.\, 9^2 = 2592$$

Tu je škrat eksponenta 5 in 2 spustil v višino ostalih znakov, znak za množenje pa je izgubil. A glej, leva stran je še vedno enaka desni:

$$2^5 \,.\, 9^2 = 32 \,.\, 81 = 2592 \;!$$

Na podoben način nam jo je skušal zagosti pri tehle računih:

$$11^2 \,.\, 9\tfrac{1}{3} = 1129\tfrac{1}{3}$$

$$11^2 \,.\, 93\tfrac{1}{3} = 11293\tfrac{1}{3}$$

$$11^2 \,.\, 933\tfrac{1}{3} = 112933\tfrac{1}{3}$$

$$13^2 \,.\, 7\tfrac{6}{7} = 1327\tfrac{6}{7}$$

$$3^4 \,.\, 425 = 34425$$

Njegov trud je bil zaman, saj so vse leve strani enake desnim!

Naštete nepake je zelo težko poiskati. Prav tako je težko najti nepake, pri katerih je izpuščen znak za množenje in zamenjan vrstni red številk:

$$21 \,.\, 87 = 1827$$
$$35 \,.\, 41 = 1435$$
$$86 \,.\, 251 = 21586$$

5. Podobno kot v primerih pod točko 4 nam je skušal škrat ponagajati pri tehle računih:

$$9^2 - 1^2 = 92 - 12 = 80$$
$$7^2 - 3^2 = 72 - 32 = 40$$
$$12 \,.\, 42 = 21 \,.\, 24$$
$$13 \,.\, 62 = 31 \,.\, 26$$

Oba tipa nepak se dasta rešiti povsem splošno.

Naloga: Poišči rešitve nepak zgornjih dveh tipov!

6. Pri računanju s potencami nam je dobrodošlo pravilo: če potenciramo število samo s seboj, smemo (včasih) eksponente opustiti:

$$3^3 + 4^4 + 3^3 + 5^5 = 3435$$

Res: 27 + 256 + 27 + 3125 = 3435

Pogosto smemo eksponente opustiti ali celo "krajšati"

$$12^2 + 33^2 = 1233$$
$$1^3 + 5^3 + 3^3 = 153$$
$$9^3 + 4^3 + 7^3 + 4^3 = 9474$$
$$3^3 + 7^3 + 1^3 = 371$$
$$\frac{37^3 + 13^3}{37^3 + 24^3} = \frac{37 + 13}{37 + 24}$$

Vse zgornje nepake razen zadnje je silno težko poiskati. Zadnja je enostavna, saj velja identiteta

$$\frac{a^3 + b^3}{a^3 + (a-b)^3} = \frac{a + b}{a+(a-b)}$$

Naloga: Preveri to identiteto!

7. Zamenjava vrstnega reda števil je koristna tudi pri drugih računih, ne samo pri množenju, kot smo videli v nepakah pod točko 5.

Spomnimo se, kaj pomeni zapis $a = 342_{12}$! To je število a, zapisano glede na osnovo 12. V običajni osnovi 10 imamo:

$$a = 3.12^2 + 4.12 + 2 = 482$$

Nasploh je dosti dela, če želimo pretvoriti zapis števila v dani osnovi v zapis glede na kakšno drugo osnovo. Oglejmo si sedaj dve enostavni pravili, kako to naredimo:

$$12_{73} = 21_{37}\ ,\quad 13_{82} = 31_{28}\ ,\quad 57_{64} = 75_{46}$$

ali z bolj enostavnimi zamenjavami:

$$98_{21} = 21_{98}\ ,\ 87_{32} = 32_{87}\ ,\ 41_{72} = 72_{41} \qquad (7)$$

Oba tipa nepak se zdita prav neverjetna. Kaj lahko ju rešujemo splošno. Nepaka iz prvih treh zgledov je taka:

$$(10a + b)_{(10c+d)} = (10b + a)_{(10d+c)}$$

Upoštevajmo, kaj pomenita zapisa na levi in na desni strani enačbe

$$a(10c + d) + b = b(10d + c) + a$$

ali drugače

$$a(10c + d - 1) = b(10d + c - 1)$$

Ta diofantska enačba ima ogromno rešitev. Vzemimo npr. $a = 2b$ in dobimo

$$c = \frac{8d + 1}{19}$$

S poskušanjem ugotovimo, da imamo le eno rešitev, $d = 7$, $c = 3$, za a in b pa smemo vzeti pare 1,2; 2,4; 3,6; 4,8; To nam da 4 nepake

$21_{37} = 12_{73}$, $42_{37} = 24_{73}$, $63_{37} = 36_{73}$, $84_{37} = 48_{73}$

Naloga: Poišči nekaj nepak oblike (7)!

V zabavni matematični literaturi dobimo opisane še mnoge nepake in seveda mnoge druge zanimivosti iz matematike. Za bralce, ki jih take naloge privlačijo, navajamo nekaj knjig, ki so v matematični knjižnici, Jadranska 19.

Anton Suhadolc

[1] R.A. Carman, *Mathematical Misteaks*, Mathematics Teacher 64, 109-115 (1971)

[2] M. Kraitchik, *La mathematique des jeux on recreations mathematiques* Paris, Gauthier-Villars 1955.

[3] C.S. Ogilvy, J.T. Anderson: *Zahlentheorie*, München, W. Goldmann Verlag 1970.