

S P L O Š N A R E Š I T E V
OSNOSIMETRIČNEGA STABILITETNEGA PROBLEMA
KROŽNE STENE S CENTRIČNO KROŽNO ODPRTINO

DOKTORSKA DISERTACIJA

Mag. Marko Škerlj dipl.ing.

Fakulteta za strojništvo v Ljubljani

1967

Ljubljana

II 197058

II 197058



U 1327/1967

Tiskala Univerzitetna tiskarna v Ljubljani

19

V S E B I N A

1. UVOD	str.	1
2. NASTAVITEV STABILITETNEGA KRITERIJA ZA OSNOSI- METRIČNI PRIMER KROŽNE STENE S CENTRIČNO KROŽ- NO ODPRTINO		4
2.1. Energijska metoda in TREFFTZov stabilitetni kriterij		4
2.2. Potencialna energija krožne stene		5
2.3. Trefftzov stabilitetni kriterij apliciran na krožno steno z odprtino		9
2.3.1. Prehod k brezdimenzijski koordinati		12
2.3.2. Stabilitetni kriterij		15
2.4. Robni pogoji		17
3. SPLOŠNA REŠITEV DIFERENCIALNE ENAČBE		19
3.1. Končna oblika diferencialne enačbe		19
3.2. Analiza diferencialne enačbe		20
3.3. Reševanje diferencialne enačbe		21
4. HOMOGENO NAPETOSTNO STANJE		36
4.1. Polna krožna stena obremenjena z radialno tlačno osnosimetrično obremenitvijo		36
4.2. Krožna stena s centrično krožno odprtino, ki je obremenjena na obeh robovih z enako veli- ko radialno tlačno obremenitvijo		40

IV

5. SAMO NA ENEM ROBU OBREMENJENA STENA	str.	50
5.1. Zunanji rob obremenjen na tlak		50
5.1.1. Notranji rob popolnoma prost		53
5.1.2. Zunanji rob popolnoma prost		57
5.1.3. Ostali primeri robnih pogojev		61
5.2. Zunanji rob obremenjen na nateg		69
5.3. Notranji rob obremenjen na nateg		70
5.4. Notranji rob obremenjen na tlak		74
6. STENA Z ODPRTINO, KI JE OBREMENJENA NA ZUNANJEM ROBU S TLAČNO, NA NOTRANJEM PA Z ENAKO VELIKO NATEZNO OBREMENITVIJO		75
7. POSEBNI PRIMER $\rho = 1/\nu^2$		80
8. SPLOŠNI PRIMER		82
9. Približna rešitev stabilnosti stene z diferencialno metodo		85
9.1. Homogeno napetostno stanje		87
9.2. Splošni primer		94
10. ZAKLJUČEK		100
11. LITERATURA		102

1. U V O D

Prve rešitve stabilitetnega problema na tlak obremenjene pravokotne stene (samo v svoji lastni ravnini obremenjene plošče) je nakazal že NAVIER leta 1823. Z vključitvijo strižnih robnih obremenitev je ta problem rešil leta 1888 BRYAN in sicer s pomočjo ravnotežne in energijske metode.

V naslednjih desetletjih se je vrsta raziskovalcev ukvarjala s problemi pravokotnih, izotropnih in anizotropnih, homogenih in nehomogenih sten v elastičnem kakor tudi elastoplastičnem področju tako, da dandanes na tem področju ni več veliko neznanega in neobdelanega. Zanimivo je, da so se prvi rezultati raziskav stabilite krožnih plošč pojavili precej pozno. Kritično osnosimetrično obremenitev polne krožne stene je obravnaval prvi DINNIK leta 1910, za njim pa leta 1915 NADAY, ki je analiziral poleg osnosimetrične deformacije tudi neosnosimetrično izbočene.

Stabilitetni problem stene, ki je omejena z več kot eno samo zaključeno konturo, ni bil načrt vse do leta 1933, ko je MEISSNER objavil rešitev krožne stene s centrično krožno odprtino, ki je bila obremenjena z osnosimetrično tlačno obremenitvijo po zunanji konturi. Rešitev je zajemala samo prosto položen in pa vpet zunanji rob. To zakasnitev lahko pojasnimo z dejstvom, da povzroča že samo eksaktno reševanje diferencialnih enačb stabilitetnih problemov, ki za razliko od klasičnih elastomehanskih enačb upoštevajo dodatno še tudi vpliv deformacij na ravnotežno stanje, ponavadi velike težave. Prilagojevanje rešitev teh enačb vnaprej podanim robnim zahtevam pa pri stenah z večkrat sovisnimi območji skoraj v vseh primerih odpove že zaradi tega, ker vsebujejo rešitve premalo prostih konstant, s katerimi bi lahko zajeli vse robne pogoje. Zato je tudi razumljivo, da so se raziskovalci lotili najprej stene, ki je omejena z dvema takima zaključenima konturama, ki se matematično najlažje definirata. Tako konturo predstavlja brez dvoma krog, ki je v polarnem koordinatnem sistemu osnosimetrični lik. Če sta še obremenitev in deformacija krožne stene osnosimetrični, potem lahko definiramo tako napetostno kot tudi deformacijsko stanje poljubne točke stene z eno samo spremenljivko. Posledica tega je, da je vsak robni pogoj na krožni in osnosimetrično obremenjeni ali prav tako deformirani konturi opisan z eno samo enačbo. S tem lahko rešitev diferencialne enačbe četrtega reda s

štirimi integracijskimi konstantami prilagodimo po dvema robnima pogojeva na vsaki od dveh krožnih kontur.

Dva primera radialno po zunanjem robu obremenjene krožne stene z odprtino pri spremenljivi debelini je rešil EGGER leta 1941, prav tako steno, obremenjeno s strižnimi obremenitvami, pa FEDERHOFER leta 1943. Eggerjeva rešitev se je nanašala na steno s prostim notranjim robom, zunanji rob pa je bil prosto položen ali pa vpet. Federhoferjeva stena je imela obe konturi vpeti. Istega leta je izšla tudi razprava WILLERSa; ta je rešila stabilitetni problem prav take stene, ki je obremenjena poleg radialne tlačne obremenitve na zunanjem robu še z upogibnim momentom v ravnini stene. Zaradi matematičnih težav je bil problem rešen z diferenčno metodo.

Popolnejšo rešitev stabilitete okrogle stene z odprtino, ki je obremenjena z enako veliko radialno tlačno obremenitvijo na obeh robovih, je objavil leta 1947 SCHUBERT. V njegovih rešitvah je zapopadeno šest različnih kombinacij robnih pogojev, manjkata pa primera s popolnoma prostim notranjim robom pri vpetem in prosto položenem zunanjem robu. PFLÜGER v svoji knjigi /1/ omenja tudi delo japonskega znanstvenika YAMAKIja, ki naj bi izšlo leta 1959. Po sliki 80 priloge omenjene knjige lahko sodimo, da obravnava to zadnje delo neosnosimetrični primer izbočenja krožne stene z odprtino, ki je na zunanjem robu prosta, znotraj pa prosto položena ter obremenjena z enako veliko radialno obremenitvijo na obeh robovih. Sama razprava nam zaenkrat še ni dostopna.

Vsi navedeni avtorji, ki so se ukvarjali s temi problemi, so pri nastavljanju enačb uporabili vse tiste poenostavljajoče supozicije teorije plošč in teorije stabilnosti, ki so ravno še zadostne, da se dobijo uporabni rezultati. Osnova vseh računov je torej KIRCHHOFFova teorija, ki daje zadosti točne rezultate samo pri tenkih stenah. Pri vseh stabilitetnih problemih pa imamo tako opravka samo s takimi stenami, saj pride pri debelih prej do plastifikacije kot pa do izbočenja. Da ne dobimo samo enoličnih pomikov, da torej sploh lahko dobimo stabilitetni problem, moramo nastaviti ravnotežne enačbe seveda na deformiranem telesu in s tem zajeti še vpliv deformacij na napetostno stanje. To je tudi edina razlika med teorijo II. reda in pa teorijo I. reda, ki ta vpliv zanemarja. S tem, da zanemarimo deformacije same srednje ravnine stene (v lastni ravnini) in pa da računamo po teoriji II. reda, dobimo še vedno linearne diferencialne enačbe. Ker predpostavljajo zgornje supozicije tudi teorijo

majhnih pomikov, dobimo iz nje lahko samo velikost kritične obremenitve, ne moremo pa kvantitativno določiti pomikov.

Zgornji kratki zgodovinski pregled dokazuje, da stabilitetni problem stene, ki je omejena z več kakor eno samo zaključeno konturo, v splošnem sploh še ni obdelan. Še več, niti problem krožne stene s krožno odprtino še ni dokončno rešen. Poleg obeh primerov, ki jih Schubertova rešitev ne vsebuje, manjkajo še primeri za drugačne robne pogoje iz Meissnerjeve rešitve, manjkajo primeri obremenjenega samo notranjega roba, in končno manjkajo vsi primeri kombinacije poljubnih zunanjih in notranjih obremenitev.

Cilj te razprave naj bo razjasnitev zgornjih vprašanj.

2. NASTAVITEV STABILITETNEGA KRITERIJA ZA OSNOSIMETRIČNI PRIMER KROŽNE STENE S CENTRIČNO KROŽNO ODPRTINO

Znano je, da imamo za računanje stabilitetnih problemov na razpolago dve metodi, in sicer ravnotežno in energijsko. Druga metoda je splošnejša in bolj vsestransko uporabna glede na to, da omogoča poleg eksaktnega reševanja še aplikacijo približnih metod, ki izhajajo iz nje. Brez posebnih težav lahko iz energijskih enačb izpeljemo tudi diferencialne enačbe, ki bi jih dobili s pomočjo ravnotežne metode, medtem ko obratna pot ni možna.

2.1. Energijska metoda in Trefftzov stabilitetni kriterij

Celotni elastični potencial poljubnega elastičnega telesa lahko pišemo kot vsoto potenciala notranjih in potenciala zunanjih sil. Drugi sumand je možen seveda samo pri takih sistemih, pri katerih je delo zunanjih sil odvisno samo od začetnega in končnega stanja. Zato se bomo pri izvajanjih omejili na konzervativne sisteme.

$$U = U_n + U_z$$

Kot potrební in zadostni pogoj za ravnotežje lahko uporabimo znani princip virtualnih pomikov, ki pravi, da bo sistem v ravnotežju takrat, ko je pri variaciji deformacijskega stanja vsota virtualnega dela zunanjih in notranjih sil nična. Če sta obe deli izraženi s potencialom, bo torej

$$\delta U_n + \delta U_z = \delta U = 0$$

Stabilitetni problem je definiran za razliko od trdnostnega problema z zahtevo, da obstoja poleg osnovne ravnotežne lege vsaj še eno sosednje deformacijsko stanje, ki je tudi ravnotežno, pri

nespremenjenem napetostnem stanju. Osnovno indiferentno ravnotežno stanje bo torej definirano z enačbo

$$\delta U_0 = 0 \quad \dots (2.1)$$

sosedno stanje pa z

$$\delta U_1 = 0 \quad \dots (2.2)$$

Elastični potencial sosednjega stanja lahko napišemo

$$U_1 = U_0 + \Delta U_0 = U_0 + \delta U_0 + \frac{1}{2} \delta^2 U_0 + \dots$$

Z zanemaritvijo višjih členov in upoštevanjem izraza (2.1), bo

$$U_1 = U_0 + \frac{1}{2} \delta^2 U_0$$

Če ta izraz vstavimo v enačbo (2.2) in ponovno upoštevamo (2.1), dobimo končno TREFFTZov energijski kriterij za indiferentno ravnotežno stanje [2]

$$\delta(\delta^2 U_0) = 0 \quad \dots (2.3)$$

2.2. P o t e n c i a l n a e n e r g i j a k r o ž n e s t e n e

Celotni elastični potencial krožne stene s krožno odprtino pri prehodu iz plane v osnosimetrično izbočeno lego je sestavljen iz elastične energije sil v srednji ravnini stene in elastične energije zaradi upogibnih napetosti. Stena naj bo konstantne debeline h in omejena z notranjim radijem a ter zunanjim b .

Potencialna energija na enoto volumna zaradi sil v srednji ravnini pri variaciji deformacijskega stanja bo v polarnih koordinatah

$$\delta W_s = G_r \delta \epsilon_r + G_\varphi \delta \epsilon_\varphi$$

Če predpostavimo, da sta napetosti σ_r in σ_φ ($\bar{\tau}_{r\varphi} = 0$ zaradi osnosimetričnega stanja) enakomerno porazdeljeni po debelini, dobimo za celotni elastični potencial izraz

$$\delta U_s = h \int_0^{2\pi} \int_a^b (\sigma_r \delta \epsilon_r + \sigma_\varphi \delta \epsilon_\varphi) r dr d\varphi = h \int_0^{2\pi} \int_a^b \delta W r dr d\varphi$$

S pomočjo Hookeovega zakona

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon_r + \mu \epsilon_\varphi)$$

$$\sigma_\varphi = \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon_\varphi + \mu \epsilon_r)$$

preide zgornji izraz v

$$\delta W_s = \frac{E}{1-\mu^2} [\epsilon_r \delta \epsilon_r + \epsilon_\varphi \delta \epsilon_\varphi + \mu (\epsilon_\varphi \delta \epsilon_r + \epsilon_r \delta \epsilon_\varphi)]$$

Ker pa lahko pišemo

$$\epsilon_r \delta \epsilon_r = \delta \frac{\epsilon_r^2}{2}; \quad \epsilon_\varphi \delta \epsilon_\varphi = \delta \frac{\epsilon_\varphi^2}{2}; \quad \epsilon_\varphi \delta \epsilon_r + \epsilon_r \delta \epsilon_\varphi = \delta (\epsilon_r \epsilon_\varphi)$$

bo končno

$$\delta W_s = \frac{E}{2(1-\mu^2)} [\delta \epsilon_r^2 + \delta \epsilon_\varphi^2 + 2\mu \delta (\epsilon_r \epsilon_\varphi)]$$

Deformaciji ϵ_r in ϵ_φ pri osni simetriji seveda tudi nista odvisni od φ . Zato preide izraz za celotni elastični potencial v

$$\delta U_s = \frac{\pi h E}{1-\mu^2} \delta \int_a^b (\epsilon_r^2 + \epsilon_\varphi^2 + 2\mu \epsilon_r \epsilon_\varphi) r dr$$

Obe komponenti deformacijskega tenzorja v tem izrazu lahko zamenjamo s pomikoma u in w ($v = 0$ zaradi osne simetrije). Zaradi osne simetrije lahko tudi parcialne odvode po r označimo enostavneje s črticami.

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 = u' + \frac{1}{2} w'^2$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{u}{r}$$

Tako bo končni izraz za elastično energijo zaradi sil v srednji ravnini

$$U_s = \frac{\pi h E}{1-\mu^2} \int_a^b \left[\left(u' + \frac{1}{2} w'^2 \right)^2 + \left(\frac{u}{r} \right)^2 + 2\mu \left(\frac{u}{r} u' + \frac{u}{2r} w'^2 \right) \right] r dr \quad \dots (2.4)$$

Potencialna energija na enoto volumna zaradi upogibnih napetosti pri variaciji deformacijskega stanja je

$$\delta W_u = G_r \delta \varepsilon_r + G_\varphi \delta \varepsilon_\varphi$$

z znanimi relacijami upogibne teorije plošč

$$\varepsilon_r = -z w'' \quad ; \quad \varepsilon_\varphi = -\frac{z}{r} w' \quad ; \quad k_r = -w''$$

$$M_r = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} G_r z dz \quad ; \quad M_\varphi = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} G_\varphi z dz \quad ; \quad k_\varphi = -\frac{1}{r} w'$$

dobimo izraz za celotno elastično energijo pri upogibu

$$\delta U_u = \iint_a^b (M_r \delta k_r + M_\varphi \delta k_\varphi) r dr d\varphi$$

Z zamenjavo obeh momentov

$$M_r = D (k_r + \mu k_\varphi)$$

$$M_\varphi = D (k_\varphi + \mu k_r)$$

ter z nadomestitvijo izrazov

$$k_r \delta k_r = \delta \frac{k_r^2}{2}; \quad k_\varphi \delta k_\varphi = \delta \frac{k_\varphi^2}{2}; \quad k_\varphi \delta k_r + k_r \delta k_\varphi = \delta (k_r k_\varphi)$$

in integracijo po φ , dobimo

$$\delta U_u = D \pi \delta \int_a^b \left[w''^2 + \left(\frac{1}{r} w' \right)^2 + 2\mu \frac{1}{r} w' w'' \right] r dr$$

oziroma končni izraz za elastično energijo pri upogibu

$$U_u = D \pi \int_a^b \left[w''^2 + \left(\frac{1}{r} w' \right)^2 + 2\mu \frac{1}{r} w' w'' \right] r dr \quad \dots (2.5)$$

Celotni elastični potencial osnosimetrično obremenjene krožne stene s krožno odprtino dobimo s seštevanjem obeh izrazov (2.4) in (2.5)

$$U = \pi \int_a^b \left\{ \frac{E h}{1-\mu^2} \left[\left(u' + \frac{1}{2} w'^2 \right)^2 + \left(\frac{u}{r} \right)^2 + 2\mu \left(\frac{u}{r} u' + \frac{u}{2r} w'^2 \right) \right] + D \left[w''^2 + \left(\frac{1}{r} w' \right)^2 + 2\mu \frac{1}{r} w' w'' \right] \right\} r dr \quad \dots (2.6)$$

2.3. Trefftzov stabilitetni kriterij, apliciran na krožno steno z odprtino

Trefftzovemu stabilitetnemu kriteriju (2.3) zadostimo tako, da najprej poiščemo drugo variacijo izraza (2.6). Pri tem variiramo seveda samo pomik w , ki nam definira prehod iz osnovnega v sosedno ravnotežno stanje. Virtualni pomik naj bo dan z izrazom $z(r)$, ki je poljubna funkcija in mora zadoščati le robnim pogojem. Pomik w variiramo torej tako, da vstavimo namesto w izraz $w+z$. Če označimo prvi oglati oklepaj v (2.6) z V_1 in ga napišemo razvitega ter zanemarimo člen s četrto potenco, dobimo

$$V_1 = r u'^2 + r u' w'^2 + \frac{u^2}{r} + 2\mu u u' + \mu u w'^2$$

V tem izrazu nadomestimo pomik w z izrazom $w + z$ in dobimo

$$V_1 + \Delta V_1 = V_1 + \delta V_1 + \frac{1}{2} \delta^2 V_1 + \dots = r u'^2 + r u' w'^2 + 2r u' w' z' + \\ + r u' z'^2 + \frac{u^2}{r} + 2\mu u u' + \mu u w'^2 + 2\mu u w' z' + \mu u z'^2$$

Če od tega izraza odštejemo prvotno funkcijo V_1 in izločimo člene, ki vsebujejo funkcijo z na prvi potenci, kot prvo variacijo, nam ostane za drugo variacijo

$$\frac{1}{2} \delta^2 V_1 = r u' z'^2 + \mu u z'^2$$

oziroma

$$\delta^2 V_1 = 2 (r u' + \mu u) z'^2 \quad \dots (2.7)$$

Na podoben način določimo še drugo variacijo drugega oglatega oklepaja (2.6)

$$V_2 = rw''^2 + \frac{1}{r} w'^2 + 2\mu w' w''$$

$$V_2 + \Delta V_2 = V_2 + \delta V_2 + \frac{1}{2} \delta^2 V_2 = rw''^2 + 2rw''z'' + rz''^2 + \frac{1}{r} w'^2 + \\ + \frac{2}{r} w' z' + \frac{1}{r} z'^2 + 2\mu(w' w'' + w'' z' + w' z'' + z' z'')$$

$$\frac{1}{2} \delta^2 V_2 = rz''^2 + \frac{1}{r} z'^2 + 2\mu z' z''$$

$$\delta^2 V_2 = 2 (rz''^2 + \frac{1}{r} z'^2 + 2\mu z' z'') \quad \dots (2.8)$$

Z izrazoma (2.7) in (2.8) lahko napišemo drugo variacijo celotnega elastičnega potenciala

$$\delta^2 U = 2\pi \int_a^b \left[\frac{E h}{1-\mu^2} (ru' + \mu u) z'^2 + D (rz''^2 + \frac{1}{r} z'^2 + 2\mu z' z'') \right] dr \quad \dots (2.9)$$

V radialnem pomiku u se skriva zunanja obremenitev. Po Hookeovem zakonu lahko namreč pišemo

$$\varepsilon_r = u' = \frac{1}{E} (G_r - \mu G_\varphi)$$

Potek obeh napetosti pa je znan. Če označimo konstantno tlačno obremenitev na zunanjem robu (pri $r=b$) s p_z , na notranjem robu (pri $r=a$) pa s p_n , potem je [3]

$$\sigma_r = \frac{a^2 b^2 (p_z - p_n)}{b^2 - a^2} \frac{1}{r^2} + \frac{p_n a^2 - p_z b^2}{b^2 - a^2} \quad \dots (2.10)$$

$$\sigma_\varphi = - \frac{a^2 b^2 (p_z - p_n)}{b^2 - a^2} \frac{1}{r^2} + \frac{p_n a^2 - p_z b^2}{b^2 - a^2}$$

Označimo nadalje obe razmerji

$$\frac{a}{b} = \gamma \quad ; \quad \frac{p_n}{p_z} = \rho \quad \dots (2.11)$$

s katerima lahko napišemo obe napetosti tudi tako

$$\sigma_r = p_z \left(P \frac{1}{r^2} + R \right) \quad \dots (2.12)$$

$$\sigma_\varphi = p_z \left(-P \frac{1}{r^2} + R \right)$$

kjer pomenita

$$P = \frac{a^2 (1 - \rho)}{1 - \gamma^2} \quad \dots (2.13)$$

$$R = \frac{\rho \gamma^2 - 1}{1 - \gamma^2}$$

Z enačbama (2.12) bo Hookeov zakon prešel v

$$u' = \frac{1}{E} \left[p_z \left(P \frac{1}{r^2} + R \right) - \mu p_z \left(-P \frac{1}{r^2} + R \right) \right]$$

$$u' = \frac{p_z}{E} \left[P (1 + \mu) \frac{1}{r^2} + R (1 - \mu) \right] \quad \dots (2.14)$$

Odtod pa dobimo z integriranjem

$$u = \frac{p_z}{E} \left[-P (1 + \mu) \frac{1}{r} + R r (1 - \mu) \right] \quad \dots (2.15)$$

2.3.1. Prehod k brezdimenzijski koordinati

Iz izrazov za napetosti sledi, da ostane napetostno stanje enako, ne glede na velikost stene, če sta le obe obremenitvi enaki pri enakem razmerju γ . Iz tega se takoj vidi, da se brez dvoma spleča zamenjati koordinato r z neko brezdimenzijsko koordinato in si s tem olajšati primerjanje različnih dobljenih rezultatov. Ta brezdimenzijska koordinata, označimo jo z x , naj bo definirana z

$$r = x \cdot b$$

$$x = \frac{r}{b}$$

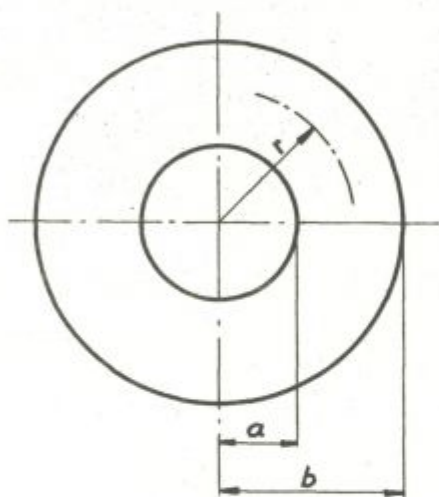
Ker je po tej definiciji

$$a = x_a \cdot b \quad ; \quad x_a = \frac{a}{b} = \gamma$$

$$b = x_b \cdot b \quad ; \quad x_b = 1$$

mora ležati koordinata x v območju

$$\gamma \leq x \leq 1$$



sl. 1

V tem primeru se spremeni izraz parametrov P in R v (2.13) in bosta oba parametra zdaj

$$P = \frac{\gamma^2 (1-\rho)}{1-\gamma^2}$$

$$R = \frac{\rho\gamma^2 - 1}{1-\gamma^2}$$

... (2.16)

Prva enačba bi se sicer morala glasiti

$$P = \frac{b^2 \gamma^2 (1-\rho)}{1-\gamma^2}$$

vendar se nam v obeh enačbah za napetosti (2.12) krajša b^2 z enako veličino, ki jo dobimo pri prehodu k brezdimenzijski koordinati v imenovalcu $1/r^2 = 1/x^2 b^2$.

Uvedba nove spremenljivke x v izraz za elastični potencial nam s pomočjo posrednih odvodov

$$\frac{du}{dr} = \frac{1}{b} \frac{du}{dx} ; \quad \frac{dz}{dr} = \frac{1}{b} \frac{dz}{dx} ; \quad \frac{d^2 z}{dr^2} = \frac{1}{b^2} \frac{d^2 z}{dx^2}$$

spremeni enačbo (2.9) v

$$\delta^2 U = 2\pi \int_0^1 \left[\frac{E h}{1-\mu^2} \left(x b \frac{1}{b} u' + \mu u \right) \frac{1}{b^2} z'^2 + D \left(x b \frac{1}{b^4} z''^2 + \frac{1}{x b} \frac{1}{b^2} z'^2 + 2\mu \frac{1}{b} z' \frac{1}{b^2} z'' \right) \right] b dx$$

oziroma v

$$\delta^2 U = 2\pi \int_0^1 \left[\frac{E h}{b(1-\mu^2)} (x u' + \mu u) z'^2 + D \frac{1}{b^2} (x z''^2 + \frac{1}{x} z'^2 + 2\mu z' z'') \right] dx \quad \dots (2.17)$$

Tudi enačbi (2.14) in (2.15) napišemo z novo spremenljivko

$$u' = \frac{b p_z}{E} \left[P(1+\mu) \frac{1}{x^2} + R(1-\mu) \right] \quad \dots (2.18)$$

$$u = \frac{b p_z}{E} \left[-P(1+\mu) \frac{1}{x} + R x (1-\mu) \right]$$

V izrazih (2.17) in (2.18) pomenijo zdaj črtice seveda odvode po x .

Zamenjava obeh izrazov (2.18) v enačbo (2.17) nam da

$$\delta^2 U = 2 \pi \int_{\mu}^1 \left\{ \frac{E h}{b(1-\mu^2)} \frac{b p_z}{E} \left[P(1+\mu) \frac{1}{x} + R x(1-\mu) - \mu P(1+\mu) \frac{1}{x} + \right. \right. \\ \left. \left. + \mu R x(1-\mu) \right] z'^2 + \frac{D}{b^2} \left(x z''^2 + \frac{1}{x} z'^2 + 2 \mu z' z'' \right) \right\} dx$$

Z vpeljavo obremenitve na enoto dolžine zunanlega roba

$$N = p_z \cdot h \quad \dots (2.19)$$

dobimo

$$\delta^2 U = \frac{2 \pi D}{b^2} \int_{\mu}^1 \left[\frac{N b^2}{D} \left(P \frac{1}{x} + R x \right) z'^2 + \left(x z''^2 + \frac{1}{x} z'^2 + 2 \mu z' z'' \right) \right] dx$$

Konstantni člen pred prvim oklepajem integranda, ki vsebuje torej zunanjo obremenitev, zamenjamo zaradi krajše pisave z

$$\alpha^2 = \frac{N b^2}{D} \quad \dots (2.20)$$

Ko uredimo prejšnjo enačbo, dobimo

$$\delta^2 U = \frac{2 \pi D}{b^2} \int_{\mu}^1 \left\{ x z''^2 + z'^2 \left[\frac{1}{x} (1 + \alpha^2 P) + \alpha^2 R x \right] + 2 \mu z' z'' \right\} dx \quad \dots (2.21)$$

2.3.2. Stabilitetni kriterij

Stabilitetni kriterij (2.3) napišimo krajše

$$\delta Q = 0 \quad ; \quad Q = \delta^2 U$$

in variirajmo izraz za Q , podan z enačbo (2.21) tako, da namesto funkcije z pišemo $z = z + t(x)$, kjer pomeni $t(x)$ spet virtualni pomik, to je poljubno funkcijo, ki zadošča geometrijskim robnim pogojem.

$$Q + \Delta Q = \frac{2\pi D}{b^2} \int_r^1 \left\{ x(z'' + t'')^2 + (z' + t')^2 \left[\frac{1}{x}(1 + \alpha^2 P) + \alpha^2 R_x \right] + 2\mu(z' + t')(z'' + t'') \right\} dx$$

$$Q + \Delta Q = \frac{2\pi D}{b^2} \int_r^1 \left\{ x(z''^2 + 2z''t'' + t''^2) + (z'^2 + 2z't' + t'^2) \left[\frac{1}{x}(1 + \alpha^2 P) + \alpha^2 R_x \right] + 2\mu(z'z'' + z''t' + z't'' + t't'') \right\} dx$$

Če od tega izraza odštejemo prvotni Q in upoštevamo samo člene, ki vsebujejo t na prvo potenco, dobimo Trefftzov kriterij

$$\delta Q = \frac{2\pi D}{b^2} \int_r^1 \left\{ 2xz''t'' + 2z't' \left[\frac{1}{x}(1 + \alpha^2 P) + \alpha^2 R_x \right] + 2\mu(z''t' + z't'') \right\} dx = 0$$

Zgornjo enačbo lahko napišemo po krajšanju tudi kot vsoto integralov

$$\int_{\mu}^1 x z'' t'' dx + (1 + \alpha^2 P) \int_{\mu}^1 \frac{1}{x} z' t' dx + \alpha^2 R \int_{\mu}^1 x z' t' dx + \mu \int_{\mu}^1 z'' t' dx + \\ + \mu \int_{\mu}^1 z' t'' dx = 0$$

Vsak člen zgornje enačbe integrirajmo per partes tako, da zmanjšamo red odvoda funkcije t (pri prvem integralu postavimo npr. $u = xz''$ in $dv = t'' dx$ itd.) ter dobimo

$$xz'' t' - \int t' (z'' + xz''') dx + (1 + \alpha^2 P) \left[\frac{1}{x} z' t - \int t \left(-\frac{1}{x^2} z' + \frac{1}{x} z'' \right) dx \right] + \\ + \alpha^2 R \left[xz' t - \int t (z' + rz'') dx \right] + \mu z'' t - \mu \int t z''' dx + \\ + \mu z' t' - \mu \int t' z'' dx = 0$$

Prvi in zadnji integral integriramo per partes še enkrat ter enačbo uredimo

$$t' (xz'' + \mu z') \Big|_{\mu}^1 + t \left\{ -xz''' - z'' + z' \left[\frac{1}{x} (1 + \alpha^2 P) + \alpha^2 R x \right] \right\} \Big|_{\mu}^1 + \\ + \int_{\mu}^1 t \left\{ xz'' + 2z''' - z'' \left[\frac{1}{x} (1 + \alpha^2 P) + \alpha^2 R x \right] + z' \left[\frac{1}{x^2} (1 + \alpha^2 P) - \right. \right. \\ \left. \left. - \alpha^2 R \right] \right\} dx = 0 \quad \dots (2.22)$$

Obe meji vseh treh členov zgornje enačbe pomenita :

$x = \mu$... notranji rob

$x = 1$... zunanji rob.

2.4. Robni pogoji

V prejšnjem poglavju smo omenili, da predstavlja funkcija $t(x)$ virtualni pomik in mora torej zadoščati geometrijskim robnim pogojem. Za vsak rob pa imamo tri mejne možnosti, in sicer je rob lahko popolnoma prost, prosto položen ali pa vpet.

- a) Prosti rob : Za funkcijo $t(x)$ ni pogojev. Da zadostimo enačbi (2.22), morajo biti zato vsi trije oklepaji nični.
- b) Prosto položen rob : Funkcija $t(x) = 0$. Prvi in tretji oklepaj enačbe (2.22) morata biti nična.
- c) Vpeti rob : Funkcija $t(x) = 0$ in njen prvi odvod $t'(x) = 0$. Enačba (2.22) zahteva torej, da bo tretji oklepaj ničen.

Vsem trem primerom je skupen pogoj, da mora biti tretji oklepaj pogojne enačbe ničen. Če tako dobljeno enačbo pomnožimo že z x^3 , dobimo diferencialno enačbo četrtega reda

$$x^4 z^{IV} + 2x^3 z''' - x^2 z'' (1 + P\alpha^2 + R\alpha^2 x^2) + xz' (1 + P\alpha^2 - R\alpha^2 x^2) = 0 \quad \dots (2.23)$$

Funkcija $z = z(x)$ predstavlja tudi pomik v smeri osi z , to je pravokotno k steni. Zato mora tudi ona ustrezati geometrijskim robnim pogojem.

Pogoj, ki ga poleg zadostitve enačbe (2.23) zahteva prosto položen rob pri $x = \mu$ ali $x = 1$

$$xz'' + \mu z' = 0 \quad \dots (2.24)$$

seveda ni nič drugega kot dinamični robni pogoj, pri katerem mora biti radialna komponenta upogibnega momenta na prosto položenem robu nična.

Prav tako pomeni pogojna enačba

$$-xz''' - z'' + z' \left[\frac{1}{x} (1 + \alpha^2 P) + \alpha^2 R x \right] = 0 \quad \dots (2.25)$$

Že znani robni pogoj, po katerem mora biti na prostem robu nična tudi prečna sila. Najlaže to uvidimo v primeru stene, ki je obremenjena z dvema enakima tlačnima obremenitvama. V tem primeru je $P = 0$ in $R = -1$. Zgornja enačba preide tedaj v

$$x^2 z''' + xz'' + z' (\alpha^2 x^2 - 1) = 0 \quad \dots (2.26)$$

Do enake enačbe pridemo, če predpostavimo majhne pomike in izenačimo znani izraz za prečno silo v polarnih koordinatah s prečno komponento obremenitve na deformiranem prostem robu.

$$-D \frac{d}{dr} \nabla^2 z = N \frac{dz}{dr}$$

$$z''' + \frac{1}{r} z'' - \frac{1}{r^2} z' = -\frac{N}{D} z'$$

Prehod k brezdimenzijski koordinati x nam da prav enačbo (2.26).

3. SPLOŠNA REŠITEV DIFERENCIALNE ENAČBE

3.1. Končna oblika diferencialne enačbe

V poglavju 2.4 dobljeno diferencialno enačbo (2.23) lahko z za-
menjavama

$$\lambda^2 = -\alpha^2 R = \alpha^2 \frac{1-\rho r^2}{1-r^2} \quad \dots (3.1)$$

$$n^2 = 1 + \alpha^2 P = 1 + \alpha^2 \frac{r^2(1-\rho)}{1-r^2}$$

napišemo v končni obliki

$$x^4 z'''' + 2x^3 z'''' + x^2 z'' (\lambda^2 x^2 - n^2) + xz' (\lambda^2 x^2 + n^2) = 0 \quad \dots (3.2)$$

Pri tej diferencialni enačbi pače takoj v oči dejstvo, da vsebu-
je samo odvođe funkcije z in sama funkcija sploh ne nastopa.
Zato je jasno, da bo eno rešitev predstavljala konstanta.

Z izrazi (3.1) preide tudi pogojna enačba za prosti rob (2.25)
v

$$x^2 z'' + xz'' + z' (\lambda^2 x^2 - n^2) = 0 \quad \dots (3.3)$$

3.2. Analiza diferencialne enačbe

Vzemimo splošno obliko Besselove diferencialne enačbe [4]

$$y'' + \frac{1-2\alpha}{x} y' + \left[(\beta r x^{r-1})^2 + \frac{\alpha^2 - p^2 r^2}{x^2} \right] y = 0 \quad \dots (3.4)$$

ki ima splošno rešitev

$$y = x^\alpha Z_p(\beta x^r)$$

in vzemimo : $\alpha = 0$, $r = 1$, $p = n$ in $\beta^2 = \lambda^2$. Po množenju z x^2 dobimo enačbo

$$x^2 y'' + xy' + (\lambda^2 x^2 - n^2) y = 0$$

z znanimi rešitvami $J_n(\lambda x)$ ter $J_{-n}(\lambda x)$ ali $N_n(\lambda x)$.

Če zgornjo enačbo enkrat odvajamo ter uredimo, dobimo

$$x^2 y''' + 3xy'' + (\lambda^2 x^2 - n^2 + 1) y' + 2\lambda^2 xy = 0$$

Iz prve enačbe lahko pišemo

$$xy'' = - \frac{xy' + (\lambda^2 x^2 - n^2) y}{x}$$

ter to vrednost zamenjamo v drugem členu odvajane enačbe. S tem dobimo

$$x^2 y''' + 2xy' - \frac{xy' + (\lambda^2 x^2 - n^2) y}{x} + (\lambda^2 x^2 - n^2 + 1) y' + 2\lambda^2 xy = 0$$

to enačbo, pomnoženo z x , lahko še uredimo ter dobimo

$$x^3 y''' + 2x^2 y'' + x(\lambda^2 x^2 - n^2) y' + (\lambda^2 x^2 + n^2) y = 0 \quad \dots (3.5)$$

Z zamenjavo $y = z'$ preide zgornja enačba prav v enačbo (3.2). Iz tega sledi, da predstavlja naša osnovna enačba (3.2) diferencialno enačbo Besselovega tipa.

3.3. Reševanje diferencialne enačbe

Znano je, da lahko izrazimo drugo rešitev y_2 linearne homogene diferencialne enačbe drugega reda z nekonstantnimi koeficienti

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

če poznamo eno partikularno rešitev y_1 s pomočjo obrazca

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int a(x) dx} dx \quad \dots (a)$$

Celotna rešitev je potem

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

Na podoben način se da s pomočjo obrazca (a) dobiti tudi tretja rešitev linearne in homogene diferencialne enačbe tretjega reda [5]

$$y''' + a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0 \quad \dots (b)$$

če poznamo dve partikularni rešitvi y_1 in y_2 .

Napišimo splošno rešitev v obliki

$$y = u y_1 \quad \dots (c)$$

in jo vstavimo v začetno enačbo (b). Po ureditvi in zamenjavi

$$u' = v \quad \dots (d)$$

dobimo diferencialno enačbo drugega reda

$$v'' y_1 + v' B + v A = 0 \quad \dots (e)$$

kjer pomenita označbi

$$A = 3y_1'' + 2ay_1' + by_1$$

$$B = ay_1 + 3y_1' \quad \dots (f)$$

S predpostavko, da je znana ena rešitev te enačbe, npr. v_2 , lahko s pomočjo obrazca (a) dobimo tudi drugo rešitev. Celotna rešitev je torej

$$v = C_3 v_1 + C_2 v_2$$

S ponovnim prehodom na spremenljivko u po (d) dobimo

$$u = C_3 u_1 + C_2 u_2 + C_1$$

S pomočjo predpostavljene rešitve (c) lahko pišemo

$$y = C_3 u_1 y_1 + C_2 u_2 y_1 + C_1 y_1$$

Splošna rešitev diferencialne enačbe (b) je sestavljena torej iz treh rešitev

$$y = C_3 y_3 + C_2 y_2 + C_1 y_1$$

od katerih pa sta dve in sicer y_1 in y_2 po predpostavki že znani. Iz zgornjega sledi

$$y_2 = u_2 y_1$$

$$u_2 = \frac{y_2}{y_1}$$

$$u_2' = v_2 = \left(\frac{y_2}{y_1}\right)'$$

Enačbo (e) lahko napišemo tudi drugače

$$v'' + \frac{B}{y_1} v' + \frac{A}{y_1} v = 0$$

Splošna rešitev te enačbe bo ob predpostavljene znani rešitvi v_2

$$v = w v_2 \quad \dots (g)$$

Z vstavljanjem v zgornjo enačbo po ureditvi dobimo

$$\frac{w''}{w'} + \frac{2v_2'}{v_2} + \frac{B}{y_1} = 0$$

oziroma z vpeljavo izraza za B po (f)

$$\frac{w''}{w'} + \frac{2v_2'}{v_2} + a + \frac{3y_1'}{y_1} = 0$$

ter po integriranju

$$\ln w' + \ln v_2^2 + \ln y_1^3 + \int a dx = \ln C_3$$

ali drugače napisano

$$\ln \frac{w' v_2^2 y_1^3}{C_3} = - \int a dx$$

ali antilogaritmirano

$$w' = \frac{C_3}{v_2^2 y_1^3} e^{-\int a dx}$$

S ponovno integracijo dobimo

$$w = \int \frac{C_3}{v_2^2 y_1^2} e^{-\int a dx} dx + C_2$$

Zamenjava v izrazu (g) nam da splošno rešitev enačbe (e)

$$v = C_2 v_2 + C_3 v_2 \int \frac{1}{y_1^3 v_2^2} e^{-\int a dx} dx$$

V tej rešitvi pomeni konstanta C_3 seveda novo konstanto. S prej izraženo znano rešitvijo v_2 bo končna splošna rešitev enačbe (e)

$$v = C_2 \left(\frac{y_2}{y_1}\right)' + C_3 \left(\frac{y_2}{y_1}\right)' \int \frac{1}{y_1^3 v_2^2} e^{-\int a dx} dx$$

Z uporabo izraza (d), dobimo z integracijo zgornje rešitve

$$u = C_2 \frac{y_2}{y_1} + C_3 \int \left(\frac{y_2}{y_1}\right)' dx \int \frac{1}{y_1^3 \left[\left(\frac{y_2}{y_1}\right)'\right]^2} e^{-\int a dx} dx + C_1$$

Tako smo našli funkcijo u in lahko zapišemo splošno rešitev začetne diferencialne enačbe (b) v obliki (c).

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3$$

V tej rešitvi pomeni y_3 tretjo rešitev, izraženo z dvema znanimi rešitvama y_1 in y_2

$$y_3 = y_1 \int \left(\frac{y_2}{y_1}\right)' dx \int \frac{1}{y_1^3 \left[\left(\frac{y_2}{y_1}\right)'\right]^2} e^{-\int a dx} dx$$

Zgornji izraz se da še nekoliko poenostaviti. Delimo ga z y_1 in integrirajmo desno stran per partes

$$\frac{y_3}{y_1} = \frac{y_2}{y_1} \int \frac{1}{y_1^3 \left[\left(\frac{y_2}{y_1}\right)'\right]^2} e^{-\int a dx} dx - \int \frac{y_2}{y_1} \frac{1}{y_1^3 \left[\left(\frac{y_2}{y_1}\right)'\right]^2} e^{-\int a dx} dx$$

Kvadrat oglatega oklepaja lahko napišemo tudi tako

$$\left[\left(\frac{y_2}{y_1}\right)'\right]^2 = \left[\frac{y_2' y_1 - y_1' y_2}{y_1^2}\right]^2 = \frac{W^2}{y_1^4}$$

kjer pomeni W Wronskijevo determinanto obeh znanih rešitev y_1 in y_2

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

Tako pridemo končno do enostavnejšega izraza za tretjo rešitev

$$y_3 = y_2 \int \frac{y_1}{w^2} e^{-\int a dx} dx - y_1 \int \frac{y_2}{w^2} e^{-\int a dx} dx \dots (3.6)$$

Rezultat (3.6) predstavlja skupaj z dvema znanima rešitvama

$$y_1 = J_n(\lambda x)$$

$$y_2 = J_{-n}(\lambda x) \text{ ali } y_2 = N_n(\lambda x)$$

splošno rešitev diferencialne enačbe (3.5). S to enačbo pa je diferencialna enačba našega problema (3.2) vezana s pomočjo relacije $y = z'$. Zato sta dve rešitvi enačbe (3.2) podani z

$$z_1 = \int J_n(\lambda x) dx$$

$$z_2 = \int J_{-n}(\lambda x) dx \text{ ali } z_2 = \int N_n(\lambda x) dx$$

Četrta rešitev je tako konstanta, kot je bilo ugotovljeno že v poglavju 3.1.

$$z_4 = K$$

Tretja rešitev pa sledi iz (3.6). Ker pomeni $a(x)$ v začetni enačbi (b) funkcijo ob y'' takrat, ko je člen y''' brez koeficienta, moramo tudi enačbo (3.5) deliti z x^3 . V našem primeru je torej

$$a(x) = \frac{2}{x}$$

S tem bo

$$e^{-\int a dx} = e^{-\int \frac{2}{x} dx} = e^{-2 \ln x} = \frac{1}{x^2}$$

Wronskijeva determinanta bo v primeru, da n ni celo število [6]

$$W = J_n(\lambda x) \cdot J_{-n}'(\lambda x) - J_n'(\lambda x) \cdot J_{-n}(\lambda x) = -\frac{\sin n\pi}{n \lambda x}$$

Za n , ki je celo število pa

$$W = J_n(\lambda x) \cdot N_n'(\lambda x) - J_n'(\lambda x) \cdot N_n(\lambda x) = \frac{2}{\pi \lambda x}$$

V obeh primerih lahko torej pišemo

$$W = \frac{C_0}{x} \quad ; \quad W^2 = \frac{C_0^2}{x^2}$$

$$\frac{1}{W^2} e^{-\int a dx} = \frac{x^2}{C_0^2} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{C_0^2}$$

S tem bo končni rezultat za tretjo rešitev

$$z_3 = \frac{1}{C_0^2} \int \left[-J_n(\lambda x) \int J_{-n}(\lambda x) dx + J_{-n}(\lambda x) \int J_n(\lambda x) dx \right] dx$$

V primeru, če je n celo število, moramo v zgornjem izrazu Besselovo funkcijo $J_{-n}(\lambda x)$ zamenjati z Neumanovo funkcijo $N_n(\lambda x)$.

V splošnem n brez dvoma ni celo število. Zato se splošna rešitev diferencialne enačbe (3.2) pojavi v obliki

$$z = A \int J_n(\lambda x) dx + B \int J_{-n}(\lambda x) dx + \\ + C \int \left[-J_n(\lambda x) \int J_{-n}(\lambda x) dx + J_{-n}(\lambda x) \int J_n(\lambda x) dx \right] dx + D \\ \dots (3.7)$$

Te rešitve v splošnem ni mogoče napisati v zaključeni obliki, pač pa lahko posamezne rešitve izrazimo s pomočjo neskončnih vrst, ki sledijo iz integralnih formul Besselovih funkcij [4].

$$z_1 = \int J_n(\lambda x) dx = \frac{2}{\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} J_{n+2k-1}(\lambda x)$$

$$z_2 = \int J_{-n}(\lambda x) dx = \frac{2}{\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} J_{-1+2k-1}(\lambda x) \quad \dots (3.8)$$

$$z_3 = \int (-z_1' \cdot z_2 + z_1 \cdot z_2') dx$$

Če konstanto pred znakom sumacije v zgornjih izrazih izpustimo, ker jo tako lahko združimo z integracijskimi konstantami, lahko obe prvi rešitvi pišemo še nekoliko drugače

$$z_1 = \sum_{k=1}^m J_{n+2k-1}(\lambda x) + \int J_{n+2m}(\lambda x) dx ; \quad z_1' = J_n(\lambda x)$$

$$z_2 = \sum_{k=1}^m J_{-n+2k-1}(\lambda x) + \int J_{-n+2m}(\lambda x) dx ; \quad z_2' = J_{-n}(\lambda x)$$

Ta dva izraza vstavimo v izraz za z_3 in dobimo

$$z_3 = \int \left[\int J_{-n}(\lambda x) \int J_{n+2m}(\lambda x) dx - J_n(\lambda x) \int J_{-n+2m}(\lambda x) dx \right] dx + \\ + \int \left[J_{-n}(\lambda x) \sum_{k=1}^m J_{n+2k-1}(\lambda x) - J_n(\lambda x) \sum_{k=1}^m J_{-n+2k-1}(\lambda x) \right] dx$$

Prvi integral limitira k nič, ko gre m proti neskončnosti. Ta integral predstavlja pravzaprav ostanek vrste, ko smo neskončno

vrsto po k prekinili pri $k = m$. Če gre torej $m \rightarrow \infty$, ostane samo še

$$z_3 = \sum_{k=1}^{\infty} \int [J_{-n}(\lambda x) J_{n+2k-1}(\lambda x) - J_n(\lambda x) J_{n+2k-1}(\lambda x)] dx$$

Ta izraz se da še spremeniti v [5]

$$z_3 = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{(\lambda x)^{2k}}{k(1^2-n^2)(3^2-n^2)\dots[(2k-1)^2-n^2]\dots}$$

Splošna rešitev diferencialne enačbe (3.2) v primeru, da n ni celo število, je torej

$$\begin{aligned} z = & A \sum_{k=1}^{\infty} J_{n+2k-1}(\lambda x) + B \sum_{k=1}^{\infty} J_{-n+2k-1}(\lambda x) + \\ & + C \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{(\lambda x)^{2k}}{k(1^2-n^2)(3^2-n^2)\dots[(2k-1)^2-n^2]\dots} + D \end{aligned} \quad \dots (3.9)$$

V primeru, ko n je celo število, lahko iz enačb (3.8) dobimo rešitve

$$\begin{aligned} z_1 &= \int J_n(\lambda x) dx = \frac{2}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} J_{n+2k+1}(\lambda x) \\ z_2 &= \int N_n(\lambda x) dx = \frac{2}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} N_{n+2k+1}(\lambda x) \end{aligned} \quad \dots (3.9a)$$

$$\begin{aligned} z_3 &= \int (-z_1' z_2 + z_1 z_2') dx = \int [N_n(\lambda x) \int J_n(\lambda x) dx - \\ & - J_n(\lambda x) \int N_n(\lambda x) dx] dx \end{aligned}$$

V posebnih primerih, če je n celo liho število, torej za $n = 2m-1$, pa se pojavijo rešitve v zaključeni obliki in sicer so izražene s končnimi vrstami.

$$z_1 = J_0(\lambda x) + 2 \sum_{k=1}^{m-1} J_{2k}(\lambda x)$$

$$z_2 = N_0(\lambda x) + 2 \sum_{k=1}^{m-1} N_{2k}(\lambda x)$$

$$z_3 = \int \left\{ \left[J_0(\lambda x) + 2 \sum_{k=1}^{m-1} J_{2k}(\lambda x) \right] N_{2m-1}(\lambda x) - \left[N_0(\lambda x) + 2 \sum_{k=1}^{m-1} N_{2k}(\lambda x) \right] J_{2m-1}(\lambda x) \right\} dx \quad \dots (3.10)$$

Končno lahko izdvojimo še prav posebni primer, ko je $n = 1$. Prvi dve rešitvi se poenostavita v (če opustimo pisanje konstant $-1/\lambda$)

$$z_1 = \int J_1(\lambda x) dx = J_0(\lambda x)$$

$$z_2 = \int N_1(\lambda x) dx = N_0(\lambda x)$$

Tretja rešitev pa postane

$$z_3 = \int \left[J_0(\lambda x) N_0'(\lambda x) - N_0(\lambda x) J_0'(\lambda x) \right] dx = \int W dx = \int \frac{1}{x} dx$$

$$z_3 = \ln(x)$$

Splošna rešitev za primer $n = 1$ bo torej

$$z = A J_0(\lambda x) + B N_0(\lambda x) + C \ln(x) + D \quad \dots (3.11)$$

Vse v tem poglavju dobljene rešitve predstavljajo rešitve diferencialne enačbe (3.2), ki je dobljena s predpostavko, da je stena obremenjena na zunanjem in notranjem robu s tlačnima obremenitvama p_z in p_n (2.10). Zato mora biti tudi vrednost α^2 v izrazu (2.20) vedno pozitivna. V nasprotnem primeru bi bilo glede na izraz (2.20)

$$N = p_z h < 0$$

kar pa je v nasprotju z začetno predpostavko. Sprememba predznaka pri α^2 nam torej nakazuje prehod iz zunanje tlačne obremenitve v natezno. Smer obremenitve na notranjem robu p_n pa je odvisna od predznaka pri razmerju ρ . Dokler je ρ pozitivno, je tudi notranja obremenitev nasprotno usmerjena zunanji, če pa je ρ negativno, imata obe obremenitvi isto smer.

Če napišemo obe enačbi (3.1) nekoliko drugače

$$\lambda^2 = -\alpha^2 R = \alpha^2 \frac{1-\rho r^2}{1-r^2} = \frac{\alpha^2}{1-r^2} - \frac{\alpha^2 r^2}{1-r^2} \rho \quad \dots (3.12)$$

$$n^2 = 1 + \alpha^2 P = 1 + \alpha^2 \frac{r^2(1-\rho)}{1-r^2} = 1 + \frac{\alpha^2 r^2}{1-r^2} - \frac{\alpha^2 r^2}{1-r^2} \rho \quad \dots (3.13)$$

torej

$$\lambda^2 = \frac{\alpha^2}{1-r^2} - m\rho$$

$$n^2 = 1 + \frac{\alpha^2 r^2}{1-r^2} - m\rho$$

kjer pomeni

$$m = \frac{\alpha^2 r^2}{1-r^2}$$

vidimo, da predstavljata oba izraza (3.12) in (3.13) enačbi dveh premic z enakim smernim koeficientom m . Predznak smernega koeficienta pa je v enačbi (3.12) odvisen od predznaka pri koeficientu R , v enačbi (3.13) pa od predznaka pri P . Iz izrazov (2.16) sledi, da se bo predznak P spremenil pri $\rho = 1$, predznak R pa pri $\rho = 1/\lambda^2$.

Da si ustvarimo jasno razmejitev vseh možnih primerov, si oglejmo še enkrat enačbo (2.23)

$$x^4 z'''' + 2x^3 z'''' - x^2 z''(1 + P\alpha^2 + R\alpha^2 x^2) + xz'(1 + P\alpha^2 - R\alpha^2 x^2) = 0$$

ki jo z zamenjavama

$$\begin{aligned} \lambda^2 &= \alpha^2 R \\ n^2 &= 1 + \alpha^2 P \end{aligned} \quad \dots (3.14)$$

lahko pretvorimo tudi v obliko

$$x^4 z'''' + 2x^3 z'''' - x^2 z''(\lambda^2 x^2 + n^2) - xz'(\lambda^2 x^2 - n^2) = 0 \quad \dots (3.15)$$

Podobno, kot smo dokazali v poglavju 3.2, da predstavlja enačba (3.2) diferencialno enačbo Besselovega tipa, ki ima za rešitve Besselove funkcije z realnim argumentom, lahko z enostavno zamenjavo v enačbi (3.4) $\beta^2 = -\lambda^2$ dokažemo, da predstavlja enačba (3.15) tudi Besselovo diferencialno enačbo, ki pa ima rešitve v obliki Besselovih funkcij s čisto imaginarnim argumentom $I_n(\lambda x)$ ali $K_n(\lambda x)$. Glede na to, da so vse funkcije I_n in K_n vedno samo monotono naraščajoče ali monotono pojemajoče in imajo samo eno ali pa nobene ničle, te funkcije tudi ne morejo predstavljati rešitve stabilitetnega problema.

Do podobnega zaključka pridemo lahko tudi z neposrednim opazovanjem izraza za λ^2 v (3.1) ali (3.14). Pri vnaprej podanem obremenitvenem primeru, to je pri podanih razmerjih ρ in λ , ima R enolično določeno predznak, α^2 pa mora biti pozitivno število. Če sedaj λ^2 spremeni predznak, pomeni to, da postane α^2 negativno in torej ne more predstavljati realne rešitve zastavljenega problema.

Iz vsega povedanega sledi, da lahko pričakujemo realne rešitve vseh problemov, pri katerih je zunanja kontura obremenjena na tlak, samo v tistih primerih, ki so podani z diferencialno enačbo (3.2), in še to samo v območjih, ko je $R < 0$, to pa je pri $\rho < 1/\mu^2$.

Zunanja in notranja natezna obremenitev nas pripelje do podobnih rezultatov. V tem primeru moramo v izrazih za napetosti (2.10) spremeniti predznak pri p_z , oziroma, kar je isto, spremeniti predznak pri α^2 v enačbi (2.23). Na ta način lahko to enačbo z zamenjavama

$$\lambda^2 = \alpha^2 R \quad \dots (3.16)$$

$$n^2 = 1 - \alpha^2 P$$

v katerih poménita P in R vrednosti po (2.16), pripeljemo do Besselove diferencialne enačbe; ki ima rešitve z realnim argumentom, ali pa z zamenjavama

$$\lambda^2 = -\alpha^2 R \quad \dots (3.17)$$

$$n^2 = 1 - \alpha^2 P$$

do rešitev z imaginarnim argumentom. Z enakim sklepanjem kot zgoraj lahko torej rečemo, da dobimo realne rešitve problemov, pri katerih je zunanja kontura obremenjena na nateg, samo v primerih, ko je $R > 0$, to pa je pri $\rho > 1/\mu^2$.

V sliki št. 2 so zajeti vsi možni primeri in prikazani grafično. Območja, ki označujejo imaginarne rešitve, so tista, v katerih do izbočenja stene sploh ne more priti. Fizikalno si to lahko razlagamo s tem, da v vseh takih obremenitvenih primerih relativno velike natezne normalne napetosti v cirkularni smeri, ki delujejo stabilizacijsko, prevladajo.

Z matematičnega stališča predstavljajo enačbe (3.1) in njim podobne ostale enačbe za λ^2 in n^2 sisteme enačb s tremi neznanjki, in sicer so to λ^2 , n^2 in α^2 . Tretjo enačbo pa predstavlja robnim pogojem prilagojena rešitev enačbe (3.2).

Iz sl. 2 lahko izluščimo karakteristične primere, ki ustrezajo posebnim vrednostim γ in ρ . Ti primeri, ki so v nadaljevanju razprave obširneje obdelani, so :

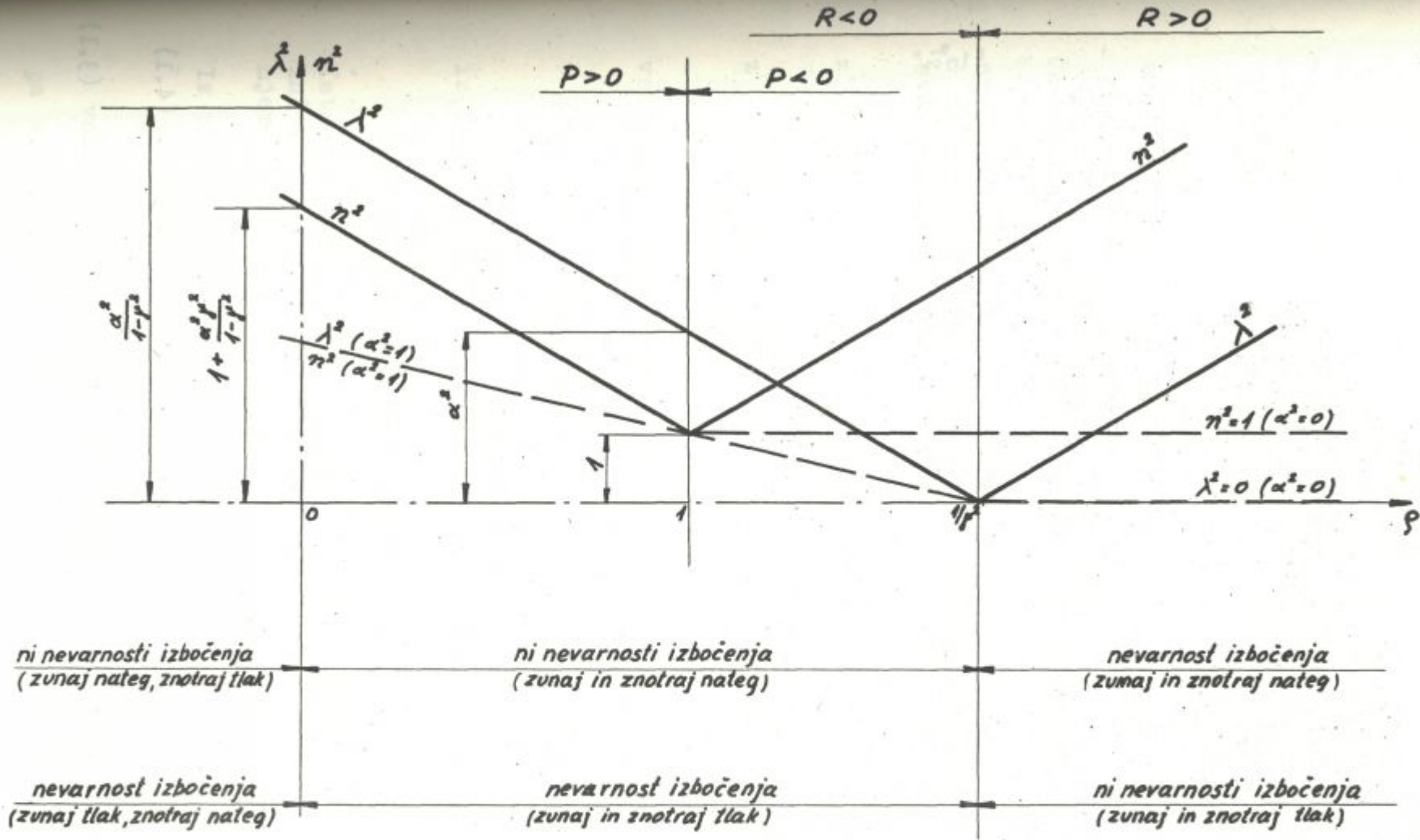
$$\gamma = 0 \quad (\text{polna stena})$$

$$\rho = 1 \quad (\text{znotraj in zunaj enaka obremenitev})$$

$$\rho = 0 \quad (\text{obremenitev samo zunaj})$$

$$\frac{1}{\rho} = 0 \quad (\text{obremenitev samo znotraj})$$

$$\rho = \frac{1}{\gamma^2}$$



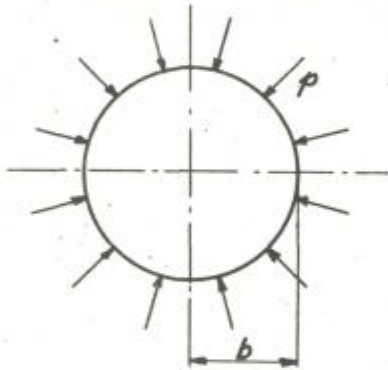
sl. 2

4. HOMOGENO NAPETOSTNO STANJE

4.1. Polna krožna stena, obremenjena z radialno tlačno osnosimetrično obremenitvijo

Polna krožna stena je pod vplivom radialne osnosimetrične obremenitve v homogenem napetostnem stanju. Obe napetosti σ_r in σ_φ sta po vsej steni enaki in odvisni samo od zunanje obremenitve.

Ker je notranji premer $a = 0$, bo po (2.11)



sl. 3

$$r = \frac{a}{b} = 0$$

ter obe konstanti (2.16)

$$P = 0 \quad ; \quad R = -1$$

in s tem obe napetosti (2.10)

$$\sigma_r = -p \quad ; \quad \sigma_\varphi = -p$$

Glede na to, da sta oba koeficienta po izrazih (3.1)

$$\lambda^2 = \alpha^2 \quad ; \quad n^2 = 1$$

je podana rešitev z enačbo (3.11)

$$z = A J_0(\alpha x) + B N_0(\alpha x) + C \ln(x) + D \quad \dots (4.1)$$

Pogojno enačbo za prečno silo (2.25) lahko s pomočjo izrazov (3.1) napišemo enostavneje

$$xz''' + z'' + z'(\alpha^2 x - \frac{1}{x}) = 0 \quad \dots (4.2)$$

Za na zunanjem robu vpeto ali pa prosto položeno steno lahko zaradi osne simetrije napišemo dva skupna robna pogoja za srednjo točko stene, torej pri $x = 0$ ($r = 0$)

$$z' = 0$$

$$xz''' + z'' + z' \left(\alpha^2 x - \frac{1}{x} \right) = 0$$

Če odvede funkcije (4.1) (zaradi krajše pisave opustimo pisanje argumentov pri Besselovih funkcijah)

$$z' = \alpha \left(-A J_1 - B N_1 + C \frac{1}{\alpha x} \right)$$

$$z'' = \alpha^2 \left[A \left(\frac{1}{\alpha x} J_1 - J_0 \right) + B \left(\frac{1}{\alpha x} N_1 - N_0 \right) - C \frac{1}{\alpha^2 x^2} \right] \quad \dots (4.3)$$

$$z''' = \alpha^3 \left\{ A \left[J_1 \left(1 - \frac{2}{\alpha^2 x^2} \right) + \frac{1}{\alpha x} J_0 \right] + B \left[N_1 \left(1 - \frac{2}{\alpha^2 x^2} \right) + \frac{1}{\alpha x} N_0 \right] + C \frac{2}{\alpha^3 x^3} \right\}$$

vstavimo v drugi pogoj, dobimo

$$\alpha^2 \left[A \left(\frac{2}{\alpha x} - \frac{2}{\alpha x} \right) J_1 + B \left(\frac{2}{\alpha x} - \frac{2}{\alpha x} \right) N_1 + C \right] = 0$$

iz česar sledi

$$C = 0$$

Isti rezultat sledi tudi že iz same funkcije (4.1), ker doseže $\ln(x)$ pri $x = 0$ neskončno vrednost in mora biti konstanta ob njem nična.

Iz prvega robnega pogoja

$$z' = \alpha \left[-A J_1(0) - B N_1(0) \right] = 0$$

pa sledi, da je tudi $B = 0$, ker je $J_1(0) = 0$ in $N_1(0) = -\infty$.

Tudi tretji robni pogoj $z = 0$ pri $x = 1$ ($r = b$) je skupen za vpeto in prosto položeno steno

$$A J_0(\alpha) + D = 0$$

$$D = -A J_0(\alpha)$$

Zadnji robni pogoj pri vpetem robu

$$z' = -A J_1(\alpha) = 0$$

nam da znano rešitev

$$\alpha = 3,8317$$

$$N_k = 14,68 \frac{D}{b^2}$$

Prav tako zahteva četrti robni pogoj pri prosto položenem robu

$$M_r = xz'' + \mu z' = 0$$

$$A \alpha^2 \left[\frac{1}{\alpha} J_1(\alpha) - J_0(\alpha) \right] + \mu \alpha [-A J_1(\alpha)] = 0$$

$$\alpha J_0(\alpha) = (1 - \mu) J_1(\alpha)$$

Ta enačba pa nam da pri $\mu = 0,3$ znano kritično obremenitev

$$N_k = 4,2 \frac{D}{b^2}$$

Končni izraz za pomik je

$$z = A J_0(\alpha x) + D = A [J_0(\alpha x) - J_0(\alpha)]$$

Glede na nedoločeno velikost konstante A je tudi pomik kvantitativno nedoločen.

V primeru natezne obremenitve moramo v označbah za σ_R in σ_φ po (2.10) spremeniti predznaka pri P in R . Zato bo zdaj

$$P = 0 \quad ; \quad R = +1$$

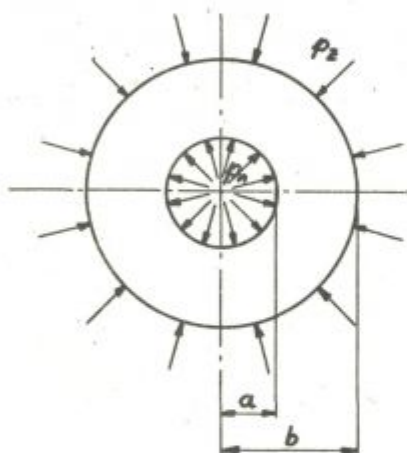
Obe napetosti sta enaki in natezni.

$$\sigma_R = p \quad ; \quad \sigma_\varphi = p$$

in zaradi tega tudi ne moremo pričakovati, da do nestabilnosti sploh lahko pride.

4.2. Krožna stena s centrično krožno odprtino, ki je obremenjena na obeh robovih z enako veliko radialno tlačno obremenitvijo

V primeru, da je krožna stena s centrično krožno odprtino obremenjena na zunanjem in notranjem robu z enako veliko enakomerno razporejeno tlačno obremenitvijo, imamo spet opravka s homogenim napetostnim stanjem.



sl. 4

$$P_n = P_z = p$$

$$\rho = \frac{P_n}{P_z} = 1$$

Obe konstanti (2.16) sta tudi v tem primeru

$$P = 0 ; R = -1$$

in sta obe napetosti (2.10)

$$\sigma_r = \sigma_\varphi = -p$$

Glede na to, da sta tudi

$$\lambda^2 = \alpha^2 ; n^2 = 1$$

je rešitev diferencialne enačbe enaka kot pri polni steni v poglavju 4.1.

$$z = A J_0(\alpha x) + B N_0(\alpha x) + C \ln(x) + D$$

Ta enačba popolnoma ustreza enačbi, s katero je A. Schubert rešil šest različnih kombinacij robnih pogojev pri taki steni [7]. Pri njegovih rešitvah pade takoj v oči dejstvo, da ne vsebujejo

še zadnjih dveh možnosti, in sicer prosto položenega ter vpete-
ga zunanjega roba pri popolnoma prostem notranjem robu. Izkaže
pa se, da lahko z vpeljavo šestih novih funkcij, ki se dajo iz-
luščiti iz vseh osmih možnih kombinacij robnih pogojev, ves pro-
blem razdelimo v dve skupini rešitev. Druga skupina vsebuje štiri
primere z enim prostim robom, prva pa štiri ostale primere.
Zamenjava vrstnega reda obeh skupin je napravljena zaradi lažje
primerjave s Schubertovimi rešitvami.

1. skupina :
- I. Zunanji in notranji rob vpeta
 - II. Zunanji rob vpet, notranji prosto položen
 - III. Zunanji rob prosto položen, notranji vpet
 - IV. Zunanji in notranji rob prosto položena
2. skupina :
- V. Zunanji rob prost, notranji vpet
 - VI. Zunanji rob prost, notranji prosto položen
 - VII. Zunanji rob vpet, notranji prost
 - VIII. Zunanji rob prosto položen, notranji prost

Za primer računanja 1. skupine vzemimo primer IV. Na vsakem ro-
bu lahko nastavimo po dva robna pogoja.

a) Zunanji rob ($x = 1$)

$$z = A J_0(\alpha) + B N_0(\alpha) + C \ln 1 + D = 0$$

$$xz'' + \mu z' = \alpha^2 \left\{ A \left[\frac{1}{\alpha} J_1(\alpha) - J_0(\alpha) \right] + B \left[\frac{1}{\alpha} N_1(\alpha) - N_0(\alpha) \right] - C \frac{1}{\alpha^2} \right\} +$$

$$\mu \alpha \left[-A J_1(\alpha) - B N_1(\alpha) + C \frac{1}{\alpha} \right] = 0$$

b) Notranji rob ($x = r$)

$$z = A J_0(\alpha r) + B N_0(\alpha r) + C \ln(r) + D = 0$$

$$xz'' + \mu z' = \gamma \alpha^2 \left\{ A \left[\frac{1}{\alpha \gamma} J_1(\alpha \gamma) - J_0(\alpha \gamma) \right] + B \left[\frac{1}{\alpha \gamma} N_1(\alpha \gamma) - N_0(\alpha \gamma) \right] - C \frac{1}{\alpha^2 \gamma^2} \right\} + \mu \alpha \left[-A J_1(\alpha \gamma) - B N_1(\alpha \gamma) + C \frac{1}{\alpha \gamma} \right] = 0$$

Stabilitetni pogoj sledi iz determinante zgornjega sistema homogenih enačb

$$\begin{vmatrix} J_0(\alpha) & N_0(\alpha) & \ln 1 & 1 \\ J_0(\alpha \gamma) & N_0(\alpha \gamma) & \ln \gamma & 1 \\ \alpha J_0(\alpha) - (1-\mu) J_1(\alpha) & \alpha N_0(\alpha) - (1-\mu) N_1(\alpha) & \frac{1}{\alpha} (1-\mu) & 0 \\ \alpha \gamma J_0(\alpha \gamma) - (1-\mu) J_1(\alpha \gamma) & \alpha \gamma N_0(\alpha \gamma) - (1-\mu) N_1(\alpha \gamma) & \frac{1}{\alpha \gamma} (1-\mu) & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Z odštevanjem prve vrstice od druge, deljenjem tretje in četrte vrstice s tretjim členom in razvijanjem po zadnjem stolpcu, dobimo determinanto tretjega reda:

$$\begin{vmatrix} \frac{J_0(\alpha \gamma) - J_0(\alpha)}{\ln \gamma} & \frac{N_0(\alpha \gamma) - N_0(\alpha)}{\ln \gamma} & 1 \\ \frac{\alpha}{1-\mu} [\alpha J_0(\alpha) - (1-\mu) J_1(\alpha)] & \frac{\alpha}{1-\mu} [\alpha N_0(\alpha) - (1-\mu) N_1(\alpha)] & 1 \\ \frac{\alpha \gamma}{1-\mu} [\alpha \gamma J_0(\alpha \gamma) - (1-\mu) J_1(\alpha \gamma)] & \frac{\alpha \gamma}{1-\mu} [\alpha \gamma N_0(\alpha \gamma) - (1-\mu) N_1(\alpha \gamma)] & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Če označimo še kombinacije Besselovih funkcij v posameznih členih s šestimi novimi funkcijami

$$\phi_0 = \frac{J_0(\alpha \gamma) - J_0(\alpha)}{\ln \gamma} \qquad \psi_0 = \frac{N_0(\alpha \gamma) - N_0(\alpha)}{\ln \gamma}$$

$$\phi_1(\alpha \gamma) = \alpha \gamma J_0(\alpha \gamma) - (1-\mu) J_1(\alpha \gamma) ; \quad \phi_1(\alpha) = \alpha J_0(\alpha) - (1-\mu) J_1(\alpha)$$

$$\psi_1(\alpha \gamma) = \alpha \gamma N_0(\alpha \gamma) - (1-\mu) N_1(\alpha \gamma) ; \quad \psi_1(\alpha) = \alpha N_0(\alpha) - (1-\mu) N_1(\alpha)$$

lahko stabilitetni pogoj napišemo z njihovo pomočjo tudi krajše.

Na podoben način lahko izrazimo tudi primere I, II in III prve skupine. Iz vseh determinant se dajo izluščiti iste funkcije (4.4) in z njimi napisati naslednji stabilitetni pogoji :

I		$\begin{vmatrix} \phi_0(\alpha r) & \psi_0(\alpha r) & 1 \\ \alpha J_1(\alpha) & \alpha N_1(\alpha) & -1 \\ \alpha r J_1(\alpha r) & \alpha r N_1(\alpha r) & -1 \end{vmatrix} = 0$
II		$\begin{vmatrix} \phi_0(\alpha r) & \psi_0(\alpha r) & 1 \\ \alpha J_1(\alpha) & \alpha N_1(\alpha) & -1 \\ \frac{\alpha r}{1-\mu} \phi_1(\alpha r) & \frac{\alpha r}{1-\mu} \psi_1(\alpha r) & 1 \end{vmatrix} = 0$
III		$\begin{vmatrix} \phi_0(\alpha r) & \psi_0(\alpha r) & 1 \\ \alpha r J_1(\alpha r) & \alpha r N_1(\alpha r) & -1 \\ \frac{\alpha}{1-\mu} \phi_1(\alpha) & \frac{\alpha}{1-\mu} \psi_1(\alpha) & 1 \end{vmatrix} = 0$
IV		$\begin{vmatrix} \phi_0(\alpha r) & \psi_0(\alpha r) & 1 \\ \frac{\alpha}{1-\mu} \phi_1(\alpha) & \frac{\alpha}{1-\mu} \psi_1(\alpha) & 1 \\ \frac{\alpha r}{1-\mu} \phi_1(\alpha r) & \frac{\alpha r}{1-\mu} \psi_1(\alpha r) & 1 \end{vmatrix} = 0$

Druga skupina, ki jo sestavljajo štiri primeri, pri katerih je en rob vedno prost, ima to skupno značilnost, da v vseh njenih primerih odpade tretji člen v rešitvi (4.1). Če vstavimo namreč odvode (4.3) rešitve v pogojno enačbo za prosti rob (4.2), dobimo enak rezultat kot v poglavju 4.1, torej

$$C = 0$$

Kot primer za računanje stabilnitete druge skupine vzemimo primer VII, to je steno, ki ima zunanji rob vpet, notranji pa prost.

a) Zunanji rob ($x = 1$)

$$z = A J_0(\alpha) + B N_0(\alpha) + D = 0$$

$$z' = A J_1(\alpha) + B N_1(\alpha) = 0$$

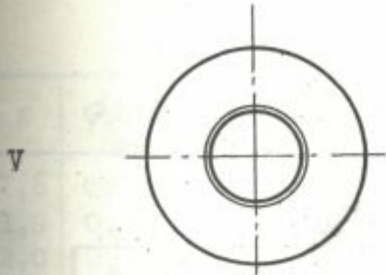
b) Notranji rob ($x = \mu$)

$$xz'' + \mu z' = \mu \alpha^2 \left\{ A \left[\frac{1}{\alpha \mu} J_1(\alpha \mu) - J_0(\alpha \mu) \right] + B \left[\frac{1}{\alpha \mu} N_1(\alpha \mu) - N_0(\alpha \mu) \right] \right\} + \mu \alpha \left[-A J_1(\alpha \mu) - B N_1(\alpha \mu) \right] = 0$$

S pomočjo izrazov (4.4) lahko zdaj napišemo stabilitetni pogoj z determinanto zgornjega sistema.

$$\begin{vmatrix} J_0(\alpha) & N_0(\alpha) & 1 \\ J_1(\alpha) & N_1(\alpha) & 0 \\ \phi_1(\alpha \mu) & \psi_1(\alpha \mu) & 0 \end{vmatrix} = 0$$

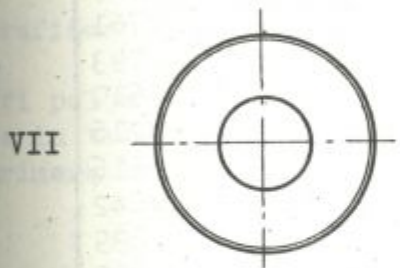
Z razvijanjem po zadnjem stolpcu lahko zgornji izraz še poenostavimo. Na podoben način izrazimo lahko tudi še primere V, VI in VIII.



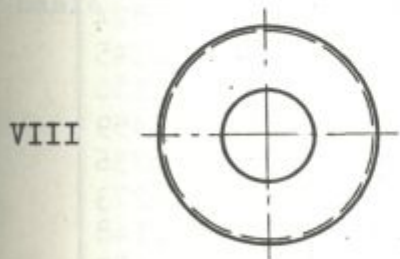
$$\psi_1(\alpha) J_1(\alpha r) - \phi_1(\alpha) N_1(\alpha r) = 0$$



$$\phi_1(\alpha r) \psi_1(\alpha) - \psi_1(\alpha r) \phi_1(\alpha) = 0$$



$$\psi_1(\alpha r) J_1(\alpha) - \phi_1(\alpha r) N_1(\alpha) = 0$$



$$\psi_1(\alpha r) \phi_1(\alpha) - \phi_1(\alpha r) \psi_1(\alpha) = 0$$

Primerjava pogojne enačbe VIII in VI pokaže, da sta obe enačbi enaki. To pomeni, da rešitev do zdaj še nerešenega problema VIII sovпада z že znano Schubertovo rešitvijo VI, kar tudi fizikalno gledano ne preseneča. Bolj presenetljivo je dejstvo, da oba še nerešena primera VII in VIII spadata v lažje rešljivo drugo skupino, ki ima splošno rešitev brez logaritmičnega člena.

V nadaljevanju sta izračunani in tabelarično podani obe funkciji $\phi_1(x)$ in $\psi_1(x)$ po (4.4), ki ju rabimo za računanje primera VII ob upoštevanem Poissonovem številu $\mu = 0,3$.

x	$\phi_1(x)$	$\psi_1(x)$	x	$\phi_1(x)$	$\psi_1(x)$	x	$\phi_1(x)$	$\psi_1(x)$
0,1	0,0648	4,3686	4,0	-1,5422	-0,3461	7,9	1,3823	1,7585
0,2	0,1283	2,1106	4,1	-1,5214	-0,4992	8,0	1,2182	1,8987
0,3	0,1895	1,3630	4,2	-1,4847	-0,6516	8,1	1,0214	2,0218
0,4	0,2470	1,0043	4,3	-1,4320	-0,8012	8,2	0,8214	2,1259
0,5	0,2996	0,8072	4,4	-1,3642	-0,9467	8,3	0,6122	2,2103
0,6	0,3465	0,6966	4,5	-1,2805	-1,0868	8,4	0,3917	2,2735
0,7	0,3865	0,6384	4,6	-1,1824	-1,2197	8,5	0,1650	2,3150
0,8	0,4189	0,6151	4,7	-1,0703	-1,3433	8,6	-0,0654	2,3341
0,9	0,4426	0,6162	4,8	-0,9450	-1,4566	8,7	-0,2975	2,3294
1,0	0,4571	0,6351	4,9	-0,8072	-1,5581	8,8	-0,5298	2,3018
1,1	0,4619	0,6671	5,0	-0,6587	-1,6460	8,9	-0,7603	2,2509
1,2	0,4565	0,7085	5,1	-0,4999	-1,7197	9,0	-0,9844	2,1761
1,3	0,4407	0,7564	5,2	-0,3333	-1,7782	9,1	-1,2019	2,0793
1,4	0,4143	0,8084	5,3	-0,1595	-1,8194	9,2	-1,4098	1,9610
1,5	0,3773	0,8622	5,4	0,0192	-1,8441	9,3	-1,6070	1,8216
1,6	0,3297	0,9160	5,5	0,2016	-1,8506	9,4	-1,7890	1,6616
1,7	0,2721	0,9677	5,6	0,3852	-1,8385	9,5	-1,9550	1,4842
1,8	0,2049	1,0159	5,7	0,5683	-1,8086	9,6	-2,1040	1,2899
1,9	0,1289	1,0590	5,8	0,7496	-1,7592	9,7	-2,2331	1,0805
2,0	0,0441	1,0957	5,9	0,9264	-1,6923	9,8	-2,3415	0,8576
2,1	-0,0479	1,1246	6,0	1,0973	-1,6067	9,9	-2,4268	0,6247
2,2	-0,1463	1,1447	6,1	1,2607	-1,5035	10,0	-2,4894	0,3824
2,3	-0,2503	1,1550	6,2	1,4136	-1,3838	10,1	-2,5278	0,1345
2,4	-0,3581	1,1546	6,3	1,5556	-1,2486	10,2	-2,5413	-0,1180
2,5	-0,4690	1,1431	6,4	1,6842	-1,0976	10,3	-2,5294	-0,3459
2,6	-0,5812	1,1195	6,5	1,7983	-0,9336	10,4	-2,4925	-0,6236
2,7	-0,6936	1,0840	6,6	1,8959	-0,7583	10,5	-2,4291	-0,8273
2,8	-0,8048	1,0361	6,7	1,9769	-0,5724	10,6	-2,3417	-1,1148
2,9	-0,9132	0,9758	6,8	2,0387	-0,3774	10,7	-2,2298	-1,3485
3,0	-1,0717	0,9034	6,9	2,0813	-0,1764	10,8	-2,0950	-1,5702
3,1	-1,1161	0,8189	7,0	2,1040	0,0306	10,9	-1,9381	-1,7793
3,2	-1,2075	0,7232	7,1	2,1060	0,2395	11,0	-1,7594	-1,9714
3,3	-1,2907	0,6165	7,2	2,0867	0,4495	11,1	-1,5622	-2,1469
3,4	-1,3641	0,4999	7,3	2,0460	0,6577	11,2	-1,3469	-2,3012
3,5	-1,4265	0,3744	7,4	1,9849	0,8623	11,3	-1,1167	-2,4349
3,6	-1,4773	0,2410	7,5	1,9026	1,0611	11,4	-0,8725	-2,5451
3,7	-1,5147	0,1009	7,6	1,8007	1,2522	11,5	-0,6187	-2,6303
3,8	-1,5388	-0,0448	7,7	1,6795	1,4337	11,6	-0,3550	-2,6912
3,9	-1,5480	-0,1942	7,8	1,5391	1,6029	11,7	-0,0859	-2,7247

x	$\phi_1(x)$	$\psi_1(x)$	x	$\phi_1(x)$	$\psi_1(x)$	x	$\phi_1(x)$	$\psi_1(x)$
11,8	0,1626	-2,7317	13,1	2,8232	-0,5947	14,4	1,4041	2,6795
11,9	0,4578	-2,7103	13,2	2,8794	-0,3119	14,5	1,1334	2,8160
12,0	0,7288	-2,6624	13,3	2,9070	-0,0249	14,6	0,8616	2,9249
12,1	0,9944	-2,5875	13,4	2,9056	0,2662	14,7	0,5567	3,0053
12,2	1,2520	-2,4863	13,5	2,8759	0,5561	14,8	0,2565	3,0570
12,3	1,4988	-2,3595	13,6	2,8161	0,8422	14,9	-0,0495	3,0765
12,4	1,7335	-2,2079	13,7	2,7285	1,1228	15,0	-0,3566	3,0677
12,5	1,9521	-2,0323	13,8	2,6125	1,3938	15,1	-0,6634	3,0258
12,6	2,1528	-1,8360	13,9	2,4705	1,6535	15,2	-0,9637	2,9548
12,7	2,3343	-1,6188	14,0	2,3020	1,8974	15,3	-1,2576	2,8541
12,8	2,4933	-1,3819	14,1	2,1095	2,1241	15,4	-1,5401	2,7235
12,9	2,6284	-1,1338	14,2	1,8941	2,3316	15,5	-1,8096	2,5639
13,0	2,7389	-0,8695	14,3	1,6581	2,5183			

Grafična predstava obeh funkcij je na sl. 5.

Pri poljubnem razmerju polmerov μ lahko s pomočjo zgornje tabele in tabel [4] izračunamo koren α , ki zadošča pogojni enačbi primera VII

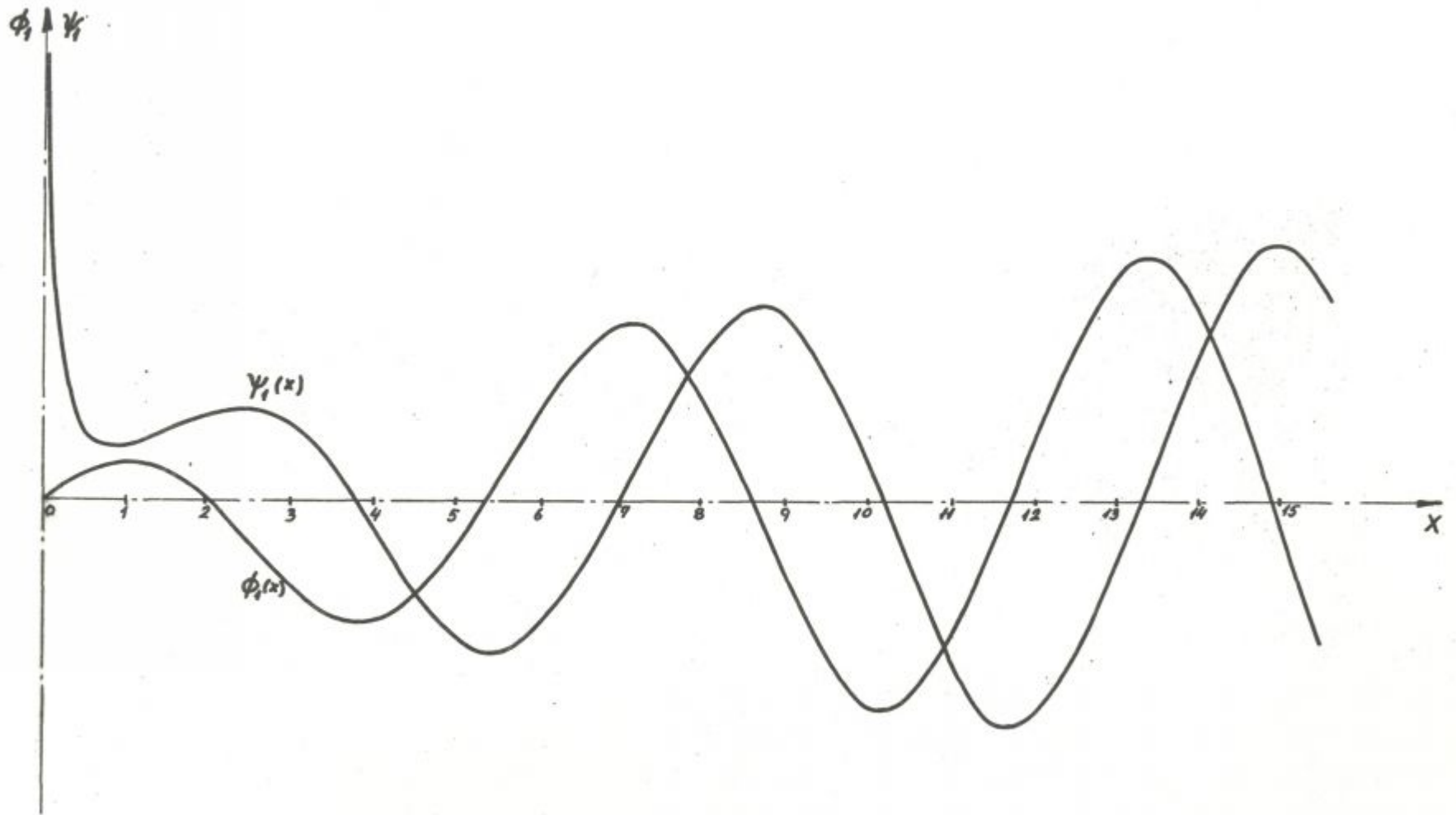
$$\psi_1(\alpha\mu) J_1(\alpha) - \phi_1(\alpha\mu) N_1(\alpha) = 0$$

V naslednji tabeli so vrednosti teh korenov za različne vrednosti μ

$$\begin{array}{cccc} \mu = & 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,4 \\ \alpha = & 3,6177 & 3,2435 & 3,1817 & 3,3104 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} \mu = & 0,5 & 0,6 & 0,7 & 0,8 & 0,9 \\ \alpha = & 3,6459 & 4,3163 & 5,5243 & 8,0734 & 16,3760 \end{array}$$

Vrednost α za $\mu = 1$, torej za neskončno tenak obroč, zraste čez vse meje. Pri $\mu = 0$, kar pomeni polno steno brez odprtine, pa do-



seže α vrednost, ki smo jo za tako steno že izračunali v poglavju 4.1 in sicer

$$\mu = 0 \quad ; \quad \alpha = 3,8317$$

Na sliki 6 je črtkano vrisanih vseh šest prvih primerov, ki jih je rešil Schubert, s polno črto pa sta vnešena še tu izračunana primera VII in VIII.

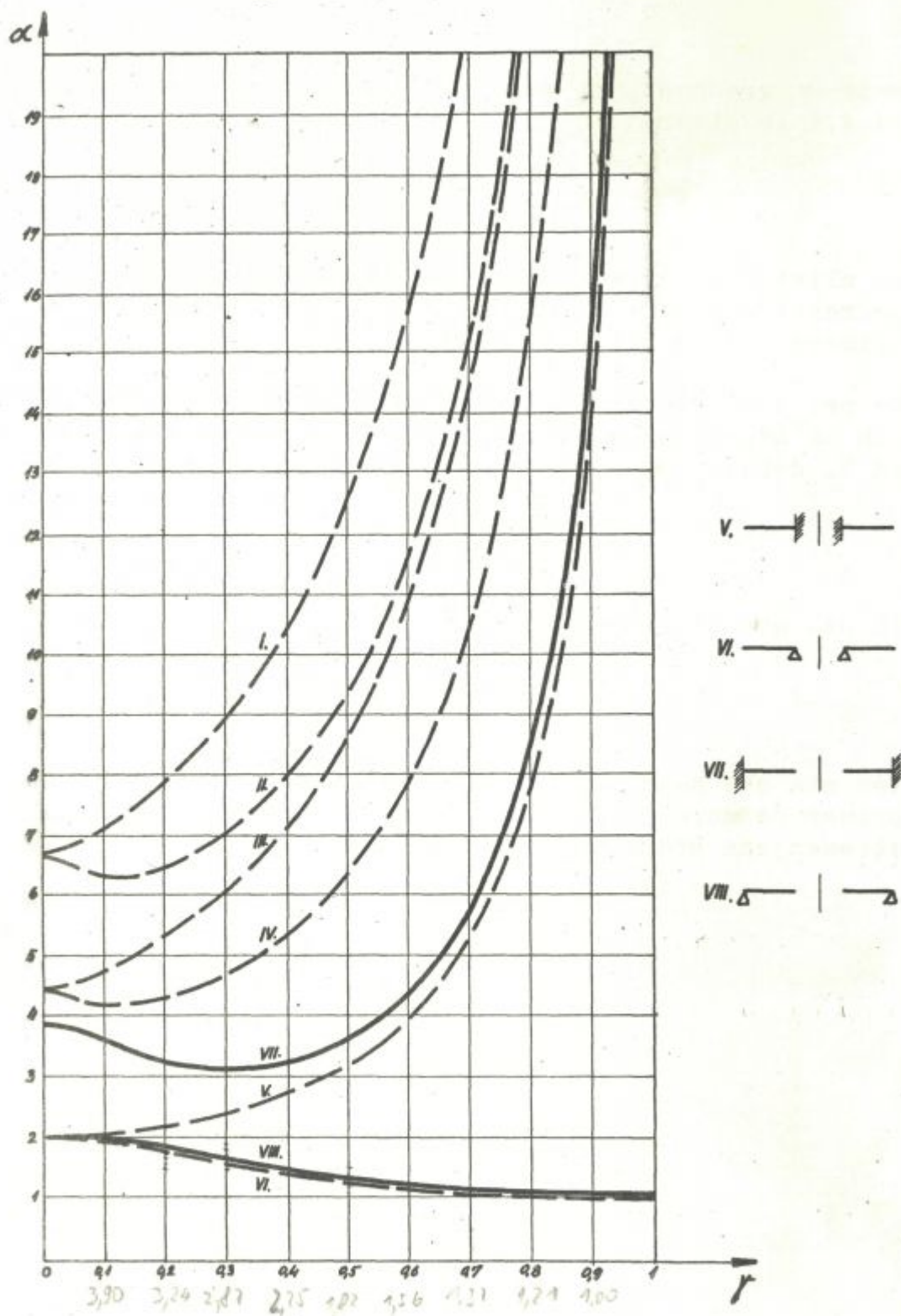
Če pri taki steni zamenjamo smeri obeh obremenitev in to v enačbah za napetosti upoštevamo tako, da spremenimo predznak pri P in R, dobimo

$$P = 0 \quad ; \quad R = + 1$$

in sta obe napetosti

$$G_r = G_y = p$$

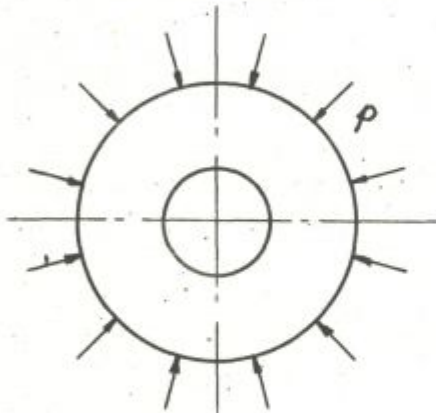
Ker sta obe napetosti ne glede na velikost μ vedno natezni, ta primer ne more predstavljati stabilitetnega problema in se tako obremenjena stena ne more izbočiti.



5. SAMO NA ENEM ROBU OBREMENJENA STENA

5.1. Zunanji rob obremenjen na tlak

Napetostno stanje krožne stene z odprtino, ki je obremenjena samo na zunanjem robu z enakomerno porazdeljeno tlačno obremenitvijo $p_z = p$ ni več homogeno.



sl. 7

Zaradi $p_n = 0$ bo $\rho = 0$ in

$$P = \frac{\lambda^2}{1 - \mu^2}$$

$$R = - \frac{1}{1 - \mu^2}$$

Obe napetosti sta zdaj

$$\sigma_r = \frac{p}{1 - \mu^2} \left(\frac{\lambda^2}{x^2} - 1 \right)$$

$$\sigma_t = - \frac{p}{1 - \mu^2} \left(\frac{\lambda^2}{x^2} + 1 \right)$$

Oba koeficienta po (3.1) sta

$$\lambda^2 = \frac{\alpha^2}{1 - \mu^2} \quad ; \quad n^2 = 1 + \frac{\alpha^2 \mu^2}{1 - \mu^2} \quad \dots (5.1)$$

Splošno rešitev diferencialne enačbe (3.2) lahko napišemo po (3.8) in (3.9)

$$z = A \int J_n(\lambda x) dx + B \int J_{-n}(\lambda x) dx + C \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{(\lambda x)^{2k}}{P_k} + D \quad \dots (5.2)$$

V zgornji enačbi pomeni

$$P_k = k(1-n^2)(3^2-n^2)\dots [(2k-1)^2-n^2] \quad \dots (5.3)$$

Za vstavljanje v robne pogoje rabimo še vse tri odvode, ki so

$$z' = A J_n'(\lambda x) + B J_{-n}'(\lambda x) + C \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{2k \lambda^{2k} x^{2k-1}}{P_k}$$

$$z'' = A \lambda \left[-\frac{n}{\lambda x} J_n(\lambda x) + J_{n-1}(\lambda x) \right] + B \lambda \left[\frac{n}{\lambda x} J_{-n}(\lambda x) + J_{-n-1}(\lambda x) \right] +$$

$$+ C \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{2k(2k-1) \lambda^{2k} x^{2k-2}}{P_k} \quad \dots (5.4)$$

$$z''' = A \lambda^2 \left[\frac{n}{\lambda^2 x^2} (1+n) J_n(\lambda x) - \frac{2n-1}{\lambda x} J_{n-1}(\lambda x) + J_{n-2}(\lambda x) \right] +$$

$$+ B \lambda^2 \left[\frac{n}{\lambda^2 x^2} (n-1) J_{-n}(\lambda x) + \frac{2n+1}{\lambda x} J_{-n-1}(\lambda x) + J_{-n-2}(\lambda x) \right] +$$

$$+ C \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{2k(2k-1)(2k-2) \lambda^{2k} x^{2k-3}}{P_k}$$

5.1.1. Notranji rob popolnoma prost

V primeru krožne plošče z odprtino, ki je obremenjena samo na zunanjem robu, njen notranji rob pa je popolnoma prost, morata biti na notranjem robu izpolnjeni enačbi (2.24) in (2.25) oziroma (3.3). Če v enačbo (3.3)

$$x^2 z''' + xz'' + z'(\lambda^2 x^2 - n^2) = 0$$

pri $x = r$ (notranji rob) vstavimo zgoraj napisane odvode, dobimo enačbo

$$\begin{aligned} & A \lambda^2 r^2 \left[\frac{n}{\lambda^2 r^2} (1+n) J_n(\lambda r) - \frac{2n-1}{\lambda r} J_{n-1}(\lambda r) + J_{n-2}(\lambda r) \right] + \\ & + B \lambda^2 r^2 \left[\frac{n}{\lambda^2 r^2} (n-1) J_{-n}(\lambda r) + \frac{2n+1}{\lambda r} J_{-n-1}(\lambda r) + J_{-n-2}(\lambda r) \right] + \\ & + C r^2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{2k(2k-1)(2k-2) \lambda^{2k} r^{2k-3}}{P_k} + \\ & + A \lambda r \left[-\frac{n}{\lambda r} J_n(\lambda r) + J_{n-1}(\lambda r) \right] + B \lambda r \left[\frac{n}{\lambda r} J_{-n}(\lambda r) + J_{-n-1}(\lambda r) \right] + \\ & + C r \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{2k(2k-1) \lambda^{2k} r^{2k-2}}{P_k} + \\ & + A \lambda^2 r^2 J_n(\lambda r) + B \lambda^2 r^2 J_{-n}(\lambda r) + C \lambda^2 r^2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{2k \lambda^{2k} r^{2k-1}}{P_k} - \\ & - A n^2 J_n(\lambda r) - B n^2 J_{-n}(\lambda r) - C n^2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{2k \lambda^{2k} r^{2k-1}}{P_k} = 0 \end{aligned}$$

Po krajšanju vrste členov ostane v zgornji enačbi še

$$\begin{aligned}
& A \left[-2n \lambda \mu J_{n-1}(\lambda \mu) + 2 \lambda \mu J_{n-1}(\lambda \mu) + \lambda^2 \mu^2 J_{n-2}(\lambda \mu) + \lambda^2 \mu^2 J_n(\lambda \mu) \right] + \\
& + B \left[2n \lambda \mu J_{-n-1}(\lambda \mu) + 2 \lambda \mu J_{-n-1}(\lambda \mu) + \lambda^2 \mu^2 J_{-n-2}(\lambda \mu) + \lambda^2 \mu^2 J_{-n}(\lambda \mu) \right] + \\
& + 2C \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{(2k-1)^2 - n^2 + \lambda^2 \mu^2}{P_k} \lambda^{2k} \mu^{2k-1} = 0
\end{aligned}$$

oziroma

$$\begin{aligned}
& A \left\{ 2 \lambda \mu (1-n) J_{n-1}(\lambda \mu) + \lambda^2 \mu^2 \left[J_{n-2}(\lambda \mu) + J_n(\lambda \mu) \right] \right\} + \\
& + B \left\{ 2 \lambda \mu (1+n) J_{-n-1}(\lambda \mu) + \lambda^2 \mu^2 \left[J_{-n-2}(\lambda \mu) + J_{-n}(\lambda \mu) \right] \right\} + \\
& + 2C \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{(2k-1)^2 - n^2 + \lambda^2 \mu^2}{P_k} \lambda^{2k} \mu^{2k-1} = 0
\end{aligned}$$

S pomočjo znane rekurenčne enačbe

$$J_{p-1}(x) + J_{p+1}(x) = \frac{2p}{x} J_p(x)$$

lahko prevedemo zgornjo enačbo še v obliko

$$\begin{aligned}
& A \left[-2 \lambda \mu m J_m(\lambda \mu) + 2 \lambda \mu m J_m(\lambda \mu) \right] + \\
& + B \left[2 \lambda \mu m J_{-m}(\lambda \mu) - 2 \lambda \mu m J_{-m}(\lambda \mu) \right] + \\
& + 2C \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{(2k-1)^2 - (m+1)^2 + \lambda^2 \mu^2}{P_k} \lambda^{2k} \mu^{2k-1} = 0
\end{aligned}$$

in tako zlahka dokažemo, da sta oba oglata oklepaja pri konstantah A in B nična. Ostane še zadnji člen, ki pa je ničen pri poljubnih vrednostih λ in μ samo, če je

$$C = 0$$

Poleg zgornjega robnega pogoja mora biti na notranjem robu izpolnjen tudi drugi pogoj (enačba 2.24). Za $x = \mu$ velja torej

$$\mu z'' + \mu z' = 0$$

Ko vstavimo ustrezni vrednosti za oba odvoda, dobimo

$$A \lambda \mu \left[-\frac{n}{\lambda \mu} J_n(\lambda \mu) + J_{n-1}(\lambda \mu) \right] + B \lambda \mu \left[\frac{n}{\lambda \mu} J_{-n}(\lambda \mu) + J_{-n-1}(\lambda \mu) \right] + \\ + \mu A J_n(\lambda \mu) + \mu B J_{-n}(\lambda \mu) = 0$$

oziroma urejeno

$$A \left[(\mu-n) J_n(\lambda \mu) + \lambda \mu J_{n-1}(\lambda \mu) \right] + B \left[(\mu+n) J_{-n}(\lambda \mu) + \lambda \mu J_{-n-1}(\lambda \mu) \right] = \\ = 0 \quad \dots (5.5)$$

V primeru vpetega zunanjšega roba lahko napišemo robni pogoj tako, da mora biti pri $x = l$ tangenta nespremenjena, torej $z' = 0$.

$$A J_n(\lambda) + B J_{-n}(\lambda) = 0 \quad \dots (5.6)$$

V primeru prosto položenega zunanjšega roba pa zahtevamo, da bo na tem robu radialna komponenta momenta nična. Iz tega sledi enačbi (5.5) podobna enačba

$$A \left[(\mu-n) J_n(\lambda) + \lambda J_{n-1}(\lambda) \right] + B \left[(\mu+n) J_{-n}(\lambda) + \lambda J_{-n-1}(\lambda) \right] = 0 \\ \dots (5.7)$$

V obeh zgornjih primerih lahko napišemo še pogoj, da mora biti na zunanjem robu pomik $z = 0$.

$$A \int J_n(\lambda x) dx + B \int J_{-n}(\lambda x) dx + D = 0 \quad \dots (5.8)$$

Iz pogoja, da mora biti nična determinanta sistema enačb (5.5), (5.6) in (5.8), dobimo stabilitetno determinanto za primer vpetega zunanjega roba

$$\begin{vmatrix} (\mu-n)J_n(\lambda\mu) + \lambda\mu J_{n-1}(\lambda\mu) & (\mu+n)J_{-n}(\lambda\mu) + \lambda\mu J_{-n-1}(\lambda\mu) & 0 \\ J_n(\lambda) & J_{-n}(\lambda) & 0 \\ \left[\int J_n(\lambda x) dx \right]_{x=1} & \left[\int J_{-n}(\lambda x) dx \right]_{x=1} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ter iz nje stabilitetno enačbo

$$J_{-n}(\lambda) \left[(\mu-n)J_n(\lambda\mu) + \lambda\mu J_{n-1}(\lambda\mu) \right] - J_n(\lambda) \left[(\mu+n)J_{-n}(\lambda\mu) + \lambda\mu J_{-n-1}(\lambda\mu) \right] = 0$$

ki jo lahko napišemo tudi tako

$$\frac{J_n(\lambda)}{J_{-n}(\lambda)} = \frac{(\mu-n) J_n(\lambda\mu) + \lambda\mu J_{n-1}(\lambda\mu)}{(\mu+n) J_{-n}(\lambda\mu) + \lambda\mu J_{-n-1}(\lambda\mu)}$$

S pomočjo znane formule

$$x J'_n(x) + n J_n(x) = x J_{n-1}(x)$$

preide zgornja enačba v

$$\frac{J_n(\lambda)}{J_{-n}(\lambda)} = \frac{\lambda\mu J'_n(\lambda\mu) + \mu J_n(\lambda\mu)}{\lambda\mu J'_{-n}(\lambda\mu) + \mu J_{-n}(\lambda\mu)} \quad \dots (5.9)$$

Na podoben način dobimo tudi iz enačb (5.5), (5.7) in (5.8)

$$\frac{\lambda J'_n(\lambda) + \mu J_n(\lambda)}{\lambda J'_{-n}(\lambda) + \mu J_{-n}(\lambda)} = \frac{\lambda \mu J'_n(\lambda \mu) + \mu J_n(\lambda \mu)}{\lambda \mu J'_{-n}(\lambda \mu) + \mu J_{-n}(\lambda \mu)} \dots (5.10)$$

Pogojna enačba (5.9) popolnoma ustreza Meissnerjevi rešitvi za primer vpetega zunanjega roba, enačba (5.10) pa njegovi rešitvi za prosto položen zunanji rob.

5.1.2. Zunanji rob popolnoma prost

Tudi v primeru krožne stene s centrično krožno odprtino, ki je obremenjena samo na zunanjem robu, podprta pa samo na notranjem, veljata oba prva robna pogoja iz prejšnjega poglavja s to razliko, da se nanašata zdaj na zunanji rob, to je na $x = 1$. Robni pogoj, ki zahteva, da mora biti na tem robu izpolnjena enačba (3.4), nam da v bistvu enako enačbo kot prej in s tem tudi

$$C = 0$$

Drugi robni pogoj z enačbo (2.24) lahko v tem primeru dobimo neposredno iz enačbe (5.5) s tem, da namesto μ pišemo 1. S tem dobimo seveda prav enačbo (5.7).

Vpeti notranji rob zahteva, da mora biti pri $x = \mu$ tangenta horizontalna, torej $z' = 0$.

$$A J_n(\lambda \mu) + B J_{-n}(\lambda \mu) = 0 \dots (5.11)$$

Prosto položeni notranji rob pa zahteva nično radialno komponento momenta; izpolnjena mora biti torej enačba (5.5).

Zadnji robni pogoj, ki velja za obe pritrditvi notranjega roba, ustreza smiselno enačbi (5.8) in je

$$A \left[\int_{x=\mu} J_n(\lambda x) dx \right] + B \left[\int_{x=\mu} J_{-n}(\lambda x) dx \right] + D = 0 \dots (5.12)$$

Stabilitetni problem obravnavane stene pri prosto položenem notranjem robu dobimo zdaj iz determinante sistema enačb (5.5), (5.7) in (5.12). Takoj pade v oči dejstvo, da je poddeterminanta k zadnjemu členu enaka kot v primeru prostega notranjega roba pri prosto položenem zunanjem robu. Enačba (5.9) predstavlja torej tudi rešitev tega primera.


Stabilitetni problem vpetega notranjega roba pa rešimo z determinanto enačb (5.6), (5.10) in (5.11). Na enak način kot v prejšnjem poglavju dobimo enačbi (5.9) podobno enačbo, v kateri sta samo zamenjana argumenta Besselovih funkcij


$$\frac{J_n(\lambda\mu)}{J_{-n}(\lambda\mu)} = \frac{\lambda J_n'(\lambda) + \mu J_n(\lambda)}{\lambda J_{-n}'(\lambda) + \mu J_{-n}(\lambda)}$$


oziroma


$$\frac{J_n(\lambda\mu)}{J_{-n}(\lambda\mu)} = \frac{(\mu-n) J_n(\lambda) + \lambda J_{n-1}(\lambda)}{(\mu+n) J_{-n}(\lambda) + \lambda J_{-n-1}(\lambda)} \quad \dots (5.13)$$

Vsi štiri obravnavani primeri so združeni v naslednjem pregledu :

I 
$$\frac{J_n(\lambda)}{J_{-n}(\lambda)} = \frac{(\mu-n) J_n(\lambda\mu) + \lambda\mu J_{n-1}(\lambda\mu)}{(\mu+n) J_{-n}(\lambda\mu) + \lambda\mu J_{-n-1}(\lambda\mu)} \quad \dots (5.14a)$$

II 
$$\frac{(\mu-n) J_n(\lambda) + \lambda J_{n-1}(\lambda)}{(\mu+n) J_{-n}(\lambda) + \lambda J_{-n-1}(\lambda)} = \frac{(\mu-n) J_n(\lambda\mu) + \lambda\mu J_{n-1}(\lambda\mu)}{(\mu+n) J_{-n}(\lambda\mu) + \lambda\mu J_{-n-1}(\lambda\mu)} \quad \dots (5.14b)$$

III 
$$\frac{(\mu-n)J_n(\lambda) + \lambda J_{n-1}(\lambda)}{(\mu+n)J_{-n}(\lambda) + \lambda J_{-n-1}(\lambda)} = \frac{(\mu-n)J_n(\lambda\mu) + \lambda\mu J_{n-1}(\lambda\mu)}{(\mu+n)J_{-n}(\lambda\mu) + \lambda\mu J_{-n-1}(\lambda\mu)}$$
 ... (5.14c)

IV 
$$\frac{J_n(\lambda\mu)}{J_{-n}(\lambda\mu)} = \frac{(\mu-n)J_n(\lambda) + \lambda J_{n-1}(\lambda)}{(\mu+n)J_{-n}(\lambda) + \lambda J_{-n-1}(\lambda)}$$
 ... (5.14d)

Enačba (5.13) je visoko transcendentna in na njeno neposredno razrešitev ni misliti. Največja težava je v tem, da nastopa neznanica α v redu Besselove funkcije n in v njenem argumentu λ , in sicer po enačbah (5.1). Kljub temu pa lahko zgornjo enačbo rešimo na podoben način, kot je to storil že Meissner z enačbo (5.9). Vnaprej si lahko izberemo neko vrednost za red funkcije n . Po (5.1) dobimo

$$\alpha^2 = \lambda^2 (1 - \mu^2) \quad \dots (5.15)$$

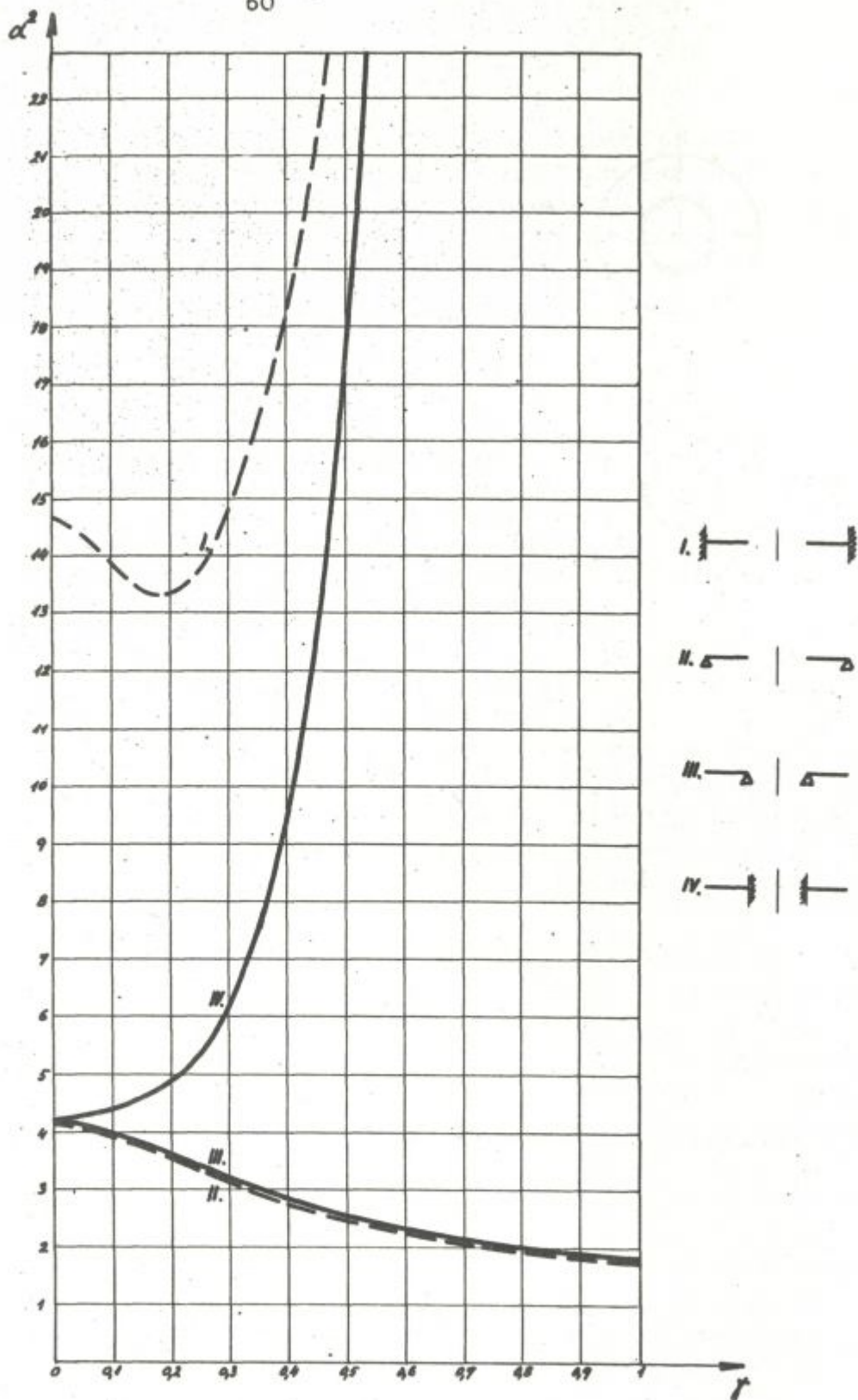
$$n^2 = 1 + \lambda^2 \mu^2$$

iz drugega izraza pa argument leve strani enačbe (5.13)

$$\lambda\mu = \sqrt{n^2 - 1} \quad \dots (5.16)$$

S to vrednostjo je levi ulomek pogojevne enačbe določen. Zdaj pa s poskušanjem določimo argument desne strani tako, da bo vrednost desnega ulomka enaka vrednosti levega.

S pomočjo enačbe (5.16) lahko zdaj dobimo ustrezno razmerje μ , iz (5.15) pa končno še α^2 . Računanje samo je precej dolgotrajnejše, kot je bilo Meissnerjevo računanje, ker je pač ulomek, ki vsebuje argument λ , v našem primeru precej bolj kompliciran.



V naslednji tabeli so rezultati zgoraj nakazanega računa. Glede na to, da so bili računi izvedeni s pomočjo log. računalna, izračunane vrednosti niso posebno natančne, vendar pa so za risanje diagrama dovolj točne.

n	$\lambda \mu$	λ	μ	α^2
1	0	2,05	0	4,2
1,05	0,32	2,17	0,147	4,6
1,2	0,663	2,34	0,283	5,6
1,5	1,12	3,00	0,374	7,7
2	1,73	3,89	0,445	12,1
3	2,83	5,40	0,524	21,2

Na sl.8 sta črtkano narisana primera I in II, ki jih je rešil že Meissner, s polno črto pa še oba tu rešena primera III in IV.

5.1.3. Ostali primeri robnih pogojev

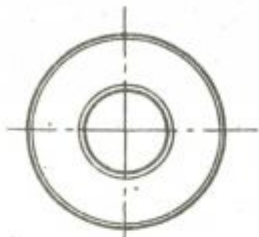
V prejšnjem poglavju obdelani štiri primeri imajo vsi to skupno značilnost, da pri njih odpade tretji člen v splošni rešitvi (5.2). Zato so bile tudi pogojne enačbe relativno enostavno rešljive, ker so se dali člani z argumentom $\lambda \mu$ ločiti od členov z argumentom λ . V vseh ostalih primerih robnih pogojev, se pravi pri stenah, ki nimajo nobenega prostega roba, pa te poenostavitve nimamo več in postane računanje veliko težje.

Če vpeljemo zaradi krajše pisave tretjega člana splošne rešitve (5.2)

$$\mathcal{Z}_k = (-1)^{k-1} \frac{(\lambda x)^{2k}}{P_k} \quad \dots (5.17)$$

lahko nastavimo z rešitvijo (5.2) in njenimi odvodi (5.4) pogojne determinante za vse štiri ostale primere.

Primer V



Robni pogoji : $x = r$: $z = 0$

$z' = 0$

$x = 1$: $z = 0$

$z' = 0$

$$\left[\int J_n(\lambda x) dx \right]_{x=r} \quad \left[\int J_{-n}(\lambda x) dx \right]_{x=r} \quad \left[\sum_{k=1}^{\infty} z_k \right]_{x=r} \quad 1$$

$$J_n(\lambda r)$$

$$J_{-n}(\lambda r)$$

$$\frac{1}{r} \left[\sum_{k=1}^{\infty} 2k z_k \right]_{x=r} \quad 0$$

$$\left[\int J_n(\lambda x) dx \right]_{x=1} \quad \left[\int J_{-n}(\lambda x) dx \right]_{x=1} \quad \left[\sum_{k=1}^{\infty} z_k \right]_{x=1} \quad 1$$

$$J_n(\lambda)$$

$$J_{-n}(\lambda)$$

$$\left[\sum_{k=1}^{\infty} 2k z_k \right]_{x=1} \quad 0$$

= 0

Primer VI

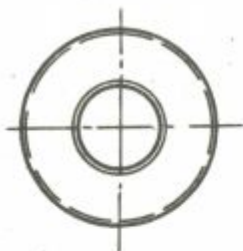


Robni pogoji : $x = r : z = 0$
 $xz'' + \mu z' = 0$
 $x = 1 : z = 0$
 $z' = 0$

$\left[\int J_n(\lambda x) dx \right]_{x=r}$	$\left[\int J_{-n}(\lambda x) dx \right]_{x=r}$	$\left[\sum_{k=1}^{\infty} z_k \right]_{x=r}$	1
$(\mu-n)J_n(\lambda r) + \lambda r J_{n-1}(\lambda r)$	$(\mu+n)J_{-n}(\lambda r) + \lambda r J_{-n-1}(\lambda r)$	$\frac{1}{r} \left[\sum_{k=1}^{\infty} 2k(2k-1+\mu) z_k \right]_{x=r}$	0
$\left[\int J_n(\lambda x) dx \right]_{x=1}$	$\left[\int J_{-n}(\lambda x) dx \right]_{x=1}$	$\left[\sum_{k=1}^{\infty} z_k \right]_{x=1}$	1
$J_n(\lambda)$	$J_{-n}(\lambda)$	$\left[\sum_{k=1}^{\infty} 2k z_k \right]_{x=1}$	0

= 0

Primer VII



Robni pogoji : $x = r$: $z = 0$

$z' = 0$

$x = 1$: $z = 0$

$xz'' + \mu z' = 0$

$$\left[\int J_n(\lambda x) dx \right]_{x=r}$$

$$J_n(\lambda r)$$

$$\left[\int J_{-n}(\lambda x) dx \right]_{x=r}$$

$$J_{-n}(\lambda r)$$

$$\left[\sum_{k=1}^{\infty} z_k \right]_{x=r}$$

$$\frac{1}{r} \left[\sum_{k=1}^{\infty} 2k z_k \right]_{x=r}$$

$$\left[\sum_{k=1}^{\infty} z_k \right]_{x=1}$$

$$\left[\sum_{k=1}^{\infty} 2k(2k-1+\mu) z_k \right]_{x=1}$$

$$\left[\int J_n(\lambda x) dx \right]_{x=1}$$

$$(\mu-n)J_n(\lambda) + \lambda J_{n-1}(\lambda)$$

$$\left[\int J_{-n}(\lambda x) dx \right]_{x=1}$$

$$(\mu+n)J_{-n}(\lambda) + \lambda J_{-n-1}(\lambda)$$

1

0

1

0

= 0

Primer VIII



Robni pogoji : $x = r : z = 0$

$$xz'' + \mu z' = 0$$

$x = 1 : z = 0$

$$xz'' + \mu z' = 0$$

$$\left[\int J_n(\lambda x) dx \right]_{x=r}$$

$$\left[\int J_{-n}(\lambda x) dx \right]_{x=r}$$

$$\left[\sum_{k=1}^{\infty} z_k \right]_{x=r}$$

1

$$(\mu - n)J_n(\lambda r) + \lambda r J_{n-1}(\lambda r)$$

$$(\mu + n)J_{-n}(\lambda r) + J_{-n-1}(\lambda r)$$

$$\frac{1}{r} \left[\sum_{k=1}^{\infty} 2k(2k-1+\mu) z_k \right]_{x=r}$$

0

= 0

$$\left[\int J_n(\lambda x) dx \right]_{x=1}$$

$$\left[\int J_{-n}(\lambda x) dx \right]_{x=1}$$

$$\left[\sum_{k=1}^{\infty} z_k \right]_{x=1}$$

1

$$(\mu - n)J_n(\lambda) + J_{n-1}(\lambda)$$

$$(\mu + n)J_{-n}(\lambda) + J_{-n-1}(\lambda)$$

$$\left[\sum_{k=1}^{\infty} 2k(2k-1+\mu) z_k \right]_{x=1}$$

0

Vse kaže, da iz zgornjih determinant ni mogoče dobiti kake prikladnejše oblike pogojnih enačb, ki bi omogočile ločitev obeh argumentov in s tem zvezano enostavnejše računanje. Numerično računanje je seveda kljub temu možno izpeljati na podoben način kot v prejšnjih primerih. Integrale Besselovih funkcij lahko s pomočjo integralne formule

$$\int J_n(\lambda x) dx = \frac{2}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} J_{n+2k+1}(\lambda x)$$

prevedemo v za računanje prikladnejšo obliko, izberemo red funkcij n , ter iz enačbe (5.16) določimo ustrezno vrednost λr . Na ta način lahko numerično izrazimo člene tistih dveh vrstic v vsaki determinanti, ki vsebujeta samo argument λr . V primeru, da vzamemo za n celo število, moramo namesto Besselovih funkcij $J_n(x)$ vzeti seveda Neumannove funkcije $N_n(x)$. S poskušanjem lahko zdaj najdemo tisto vrednost λ , ki zadošča determinanti, z njeno pomočjo pa še razmerje r . Končno dobimo po enačbi (5.15) še vrednost za α^2 . Računanje niti ni tako zamudno, ker vse vrste, razen tistih pri velikem λ , hitro konvergirajo.

Za zgled izračunajmo kritično obremenitev na zunanjem in notranjem robu vpete stene (primer V), če izberemo red funkcij $n = 1,5$. Po (5.16) bo

$$\lambda r = \sqrt{1,5^2 - 1} = 1,12$$

Pogojno determinanto lahko napišemo z okrajšavami

$$\text{Det}(\lambda) = \begin{vmatrix} \frac{2}{\lambda} \phi_1(\lambda r) & \frac{2}{\lambda} \phi_2(\lambda r) & \phi_3(\lambda r) & 1 \\ J_{1,5}(\lambda r) & J_{-1,5}(\lambda r) & \frac{1}{r} \phi_4(\lambda r) & 0 \\ \frac{2}{\lambda} \phi_1(\lambda) & \frac{2}{\lambda} \phi_2(\lambda) & \phi_3(\lambda) & 1 \\ J_{1,5}(\lambda) & J_{-1,5}(\lambda) & \phi_4(\lambda) & 0 \end{vmatrix} = 0$$

kjer pomenijo

$$\phi_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} J_{2k+2,5}(x)$$

$$\phi_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} J_{2k-0,5}(x)$$

$$\phi_3(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k}}{k(1^2-n^2)(3^2-n^2)\dots[(2k-1)^2-n^2]}$$

$$\phi_4(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{2k x^{2k}}{k(1^2-n^2)(3^2-n^2)\dots[(2k-1)^2-n^2]}$$

Glede na zadnjo tabelo v poglavju 5.1.2, v kateri smo dobili pri $n = 1,5$ vrednost $\lambda = 3$, lahko v našem primeru približno ocenimo, da bo morala biti vrednost λ nekoliko višja, ker imamo opravka z obema vpetima roboma. Zato v naslednjih računih poleg funkcij za $\lambda = 1,12$ izračunamo še vrednosti istih funkcij s predpostavljjenima vrednostima $\lambda = 4$ in $\lambda = 5$. Rezultati so

	$x = 1,12$	4	5
$\phi_1(x) =$	0,07796	0,41991	0,37586
$\phi_2(x) =$	1,14484	0,23397	0,06937
$\phi_3(x) =$	-0,91073	-4,39245	-3,15224
$\phi_4(x) =$	-0,14573	6,231	40,410

Determinanta za $\lambda = 4$ je zdaj

$$\text{Det}(4) = \begin{vmatrix} 0,038 & 0,572 & -0,911 & 1 \\ 0,329 & -1,151 & -0,520 & 0 \\ 0,210 & 0,117 & -4,392 & 1 \\ 0,116 & 0,230 & 6,231 & 0 \end{vmatrix} = +0,9762$$

za $\lambda = 5$ pa

$$\text{Det}(5) = \begin{vmatrix} 0,031 & 0,458 & -0,911 & 1 \\ 0,329 & -1,151 & -0,650 & 0 \\ 0,150 & 0,028 & -3,152 & 1 \\ -0,095 & 0,180 & 40,410 & 0 \end{vmatrix} = -0,0281$$

Oba rezultata kažeta, da bo pogojni determinanti zadostila vrednost $\lambda \approx 5$. Z interpolacijo dobimo točnejšo vrednost

$$\lambda = 4,97$$

Iz $\lambda r = 1,12$ sledi razmerje radijev

$$r = 0,225$$

in končno po (5.15) še

$$\alpha^2 = \lambda^2(1-r^2) = 24,7(1-0,051) = 23,4$$

Kritična obremenitev bo torej po (2.20)

$$N_k = p_k h = 23,4 \frac{D}{b^2}$$

5.2. Zunanji rob obremenjen na nateg

V primeru, da je stena obremenjena samo na zunanjem robu z natezno obremenitvijo, dobimo njeno napetostno stanje s spremembo predznakov pri P in R iz prejšnjega poglavja.

$$P = -\frac{r^2}{1-r^2} ; \quad R = \frac{1}{1-r^2} ; \quad \rho = 0$$

Obe napetosti sta zdaj

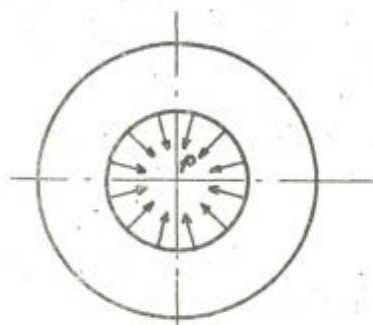
$$\sigma_r = \frac{p}{1-r^2} \left(-\frac{r^2}{x^2} + 1 \right)$$

$$\sigma_\varphi = \frac{p}{1-r^2} \left(\frac{r^2}{x^2} + 1 \right)$$

Glede na to, da je r^2 vedno pozitivno in manjše od 1, x^2 pa leži med r^2 in 1, bosta obe napetosti vedno in v vsaki točki stene pozitivni. Zato do izbočenja take stene ne more priti.

5.3. Notranji rob obremenjen na nateg

Pri steni z odprtino, ki je obremenjena z natezno obremenitvijo samo na notranjem robu, je $p_z = 0$ in $1/\rho = 0$. Zato postanejo do zdaj uporabljeni izrazi za P in R neuporabni. Računanje bo najenostavnejše, če nastavimo za ta primer posebej obe enačbi za napetosti (2.10)



$$\sigma_r = \frac{a^2 b^2 p}{b^2 - a^2} \cdot \frac{1}{r^2} - \frac{a^2 p}{b^2 - a^2}$$

$$\sigma_\varphi = \frac{a^2 b^2 p}{b^2 - a^2} \cdot \frac{1}{r^2} - \frac{a^2 p}{b^2 - a^2}$$

sl. 9

bita naslednjo obliko

ki v brezdimenzijski koordinati do-

$$\sigma_r = \frac{r^2 p}{1 - r^2} \cdot \frac{1}{x^2} - \frac{r^2 p}{1 - r^2} = p \frac{r^2}{1 - r^2} \left(\frac{1}{x^2} - 1 \right)$$

$$\sigma_\varphi = - \frac{r^2 p}{1 - r^2} \cdot \frac{1}{x^2} - \frac{r^2 p}{1 - r^2} = -p \frac{r^2}{1 - r^2} \left(\frac{1}{x^2} + 1 \right)$$

oziroma z novima označbama

$$P_1 = \frac{r^2}{1 - r^2}$$

$$R_1 = - \frac{r^2}{1 - r^2}$$

... (5.18)

preideta v krajša izraza

$$\sigma_r = p \left(P_1 \frac{1}{x^2} + R_1 \right) \quad \dots (5.19)$$

$$\sigma_\varphi = p \left(-P_1 \frac{1}{x^2} + R_1 \right)$$

Enačba (2.23) bo z označbama (5.18)

$$x^4 z'''' + 2x^2 z'''' - x^2 z'' (1 + \alpha^2 P_1 + \alpha^2 x^2 R_1) + xz' (1 + \alpha^2 P_1 - \alpha^2 x^2 R_1) = 0$$

in z novima zamenjavama

$$\lambda^2 = -\alpha^2 R_1 = \alpha^2 \frac{\mu^2}{1-\mu^2} \quad \dots (5.20)$$

$$n^2 = 1 + \alpha^2 P_1 = 1 + \alpha^2 \frac{\mu^2}{1-\mu^2}$$

prešla v znano diferencialno enačbo (3.2) z rešitvami v obliki Besselovih funkcij z realnim argumentom. Rešitev je torej tudi že znana in jo predstavlja izraz (5.2).

Glede na to, da je μ lahko samo pozitivno število in manjše od 1, je tudi po (5.18) P_1 vedno pozitivno, R_1 pa vedno negativno. S tem je λ^2 v (5.20) vedno pozitivno število in predstavlja ta obremenitveni primer vedno stabilizirni problem.

Tudi robni pogoj za popolnoma prost rob (2.25) preide v tem primeru v enačbo (3.3).

Ker so vsi dosedanji zaključki tega obremenitvenega primera formalno popolnoma enaki primeru samo na zunanem robu tlačno obremenjene stene, ki je obdelan v poglavjih 5.1.1. in 5.1.2., lahko pričakujemo tudi tu formalno enake rezultate. Vse pogojne enačbe pri notranjem ali zunanem prostem robu lahko torej privzamemo iz pregleda, ki je podan v poglavju 5.1.2., pogojne enačbe za ostale štiri kombinacije robnih pogojev pa imamo v determinatni obliki napisane že v poglavju 5.1.3.

Iz prvih štirih primerov robnih pogojev, za katere imamo v sl. 8 že narisane rešitve, lahko brez težav narišemo diagrame tudi za primer samo na notranjem robu na nateg obremenjene stene. Iskane lastnih vrednosti λ iz pogojnih enačb lahko poteka na popolnoma podoben način kot v poglavju 5.1.2. Iz drugega izraza (5.20)

$$n^2 = 1 + \alpha^2 \frac{\lambda^2}{1-\mu^2} = 1 + \lambda^2$$

lahko pri vnaprej izbranem n dobimo

$$\lambda = \sqrt{n^2 - 1}$$

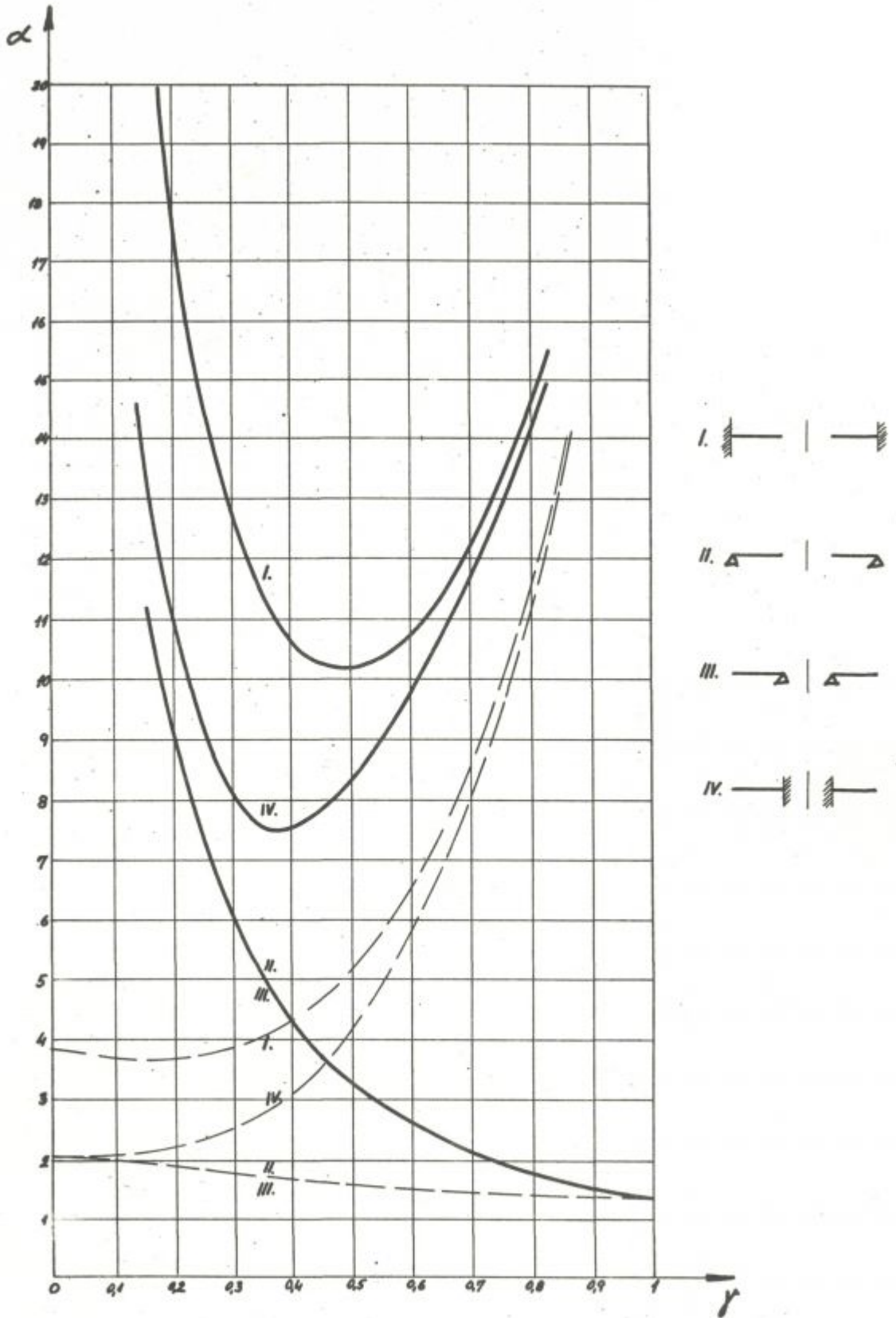
in s to vrednostjo izračunamo eno stran pogojnih enačb, in sicer tisto, v kateri nastopa v argumentu Besselovih funkcij samo λ . Potem poiščemo tisti produkt $\lambda\mu$, ki zadošča drugi strani enačbe. Iz obeh rezultatov dobimo ustrezno razmerje μ , iz prve enačbe (5.20) pa še

$$\alpha^2 = \lambda^2 \frac{1-\mu^2}{\mu^2} \quad \dots (5.21)$$

Ker so pogojne enačbe popolnoma enake že prej izvrednotenim enačbam, lahko s primerjanjem izrazov (5.15) in (5.21) dobimo nove vrednosti za α^2 enostavno s tem, da prejšnje delimo z μ^2 .

Na sl. 10 so rezultati teh računov. Črtkano so za primerjavo vrisane že znane krivulje za obremenjeno zunanjo konturo. Nove vrednosti potekajo popolnoma tako, kot smo jih fizikalno gledano lahko tudi pričakovali. Pri majhnih odprtinah so odstopanja velika, čim tanjši pa je obroč, tem bliže si ležijo ustrezne krivulje.

Zaradi zelo velikih vrednosti, ki jih α^2 dosega, so v sl. 10 narisane funkcije $\alpha = f(\mu)$ namesto $\alpha^2 = f(\mu)$.



5.4. N o t r a n j i r o b o b r e m e n j e n n a t l a k

Ta obremenitveni primer se od prejšnjega razlikuje samo po predznaku obeh napetosti. Napetosti pa spremenijo predznak, če ga spremenita P_1 in R_1 v izrazih (5.18). Torej velja za ta primer

$$P_1 = - \frac{\lambda^2}{1 - \lambda^2}$$

$$R_1 = \frac{\lambda^2}{1 - \lambda^2}$$

Enačba (2.23)

$$x^4 z'''' + 2x^3 z'''' - x^2 z'' (1 + \alpha^2 P_1 + \alpha^2 x^2 R_1) + xz' (1 + \alpha^2 P_1 - \alpha^2 x^2 R_1) = 0$$

preide z zamenjavama

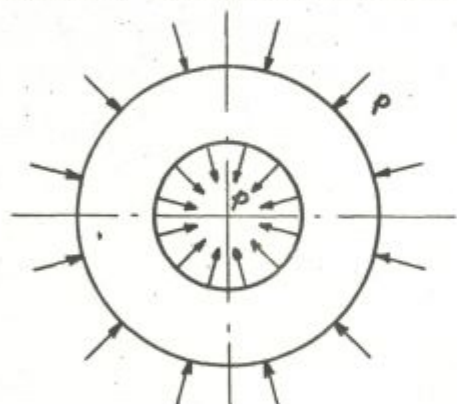
$$\lambda^2 = \alpha^2 R_1$$

$$n^2 = 1 + \alpha^2 P_1$$

v diferencialno enačbo (3.15), ki ima za rešitve Besselove funkcije z imaginarnim argumentom. Glede na končne zaključke poglavja 3.3 in glede na to, da je R_1 vedno pozitivno število, lahko trdimo, da tak obremenitveni primer nikoli ne more pripeljati do nestabilnosti stene.

6. STENA Z ODPRTINO, KI JE OBREMENJENA NA ZUNANJEM ROBU S TLAČNO, NA NOTRANJEM PA Z ENAKO VELIKO NATEZNO OBREMENITVIJO

Primer stene, ki je obremenjena na zunanjem robu s tlačno, na notranjem robu pa z natezno obremenitvijo, pravzaprav ne spada več med tiste posebne primere, ki smo jih izluščili lahko iz sl. 2. Kljub temu pa ga je vredno obravnavati posebej, če se odlikuje s karakteristiko, da je pri njem $\rho = -1$. Po (2.16) je



sl. 11

$$P = \frac{\rho r^2(1-\rho)}{1-\rho^2} = \frac{2\rho r^2}{1-\rho^2} \quad \dots (6.1)$$

$$R = \frac{\rho r^2 - 1}{1-\rho^2} = -\frac{1+\rho^2}{1-\rho^2}$$

Enačba (2.23) preide z zamenjavama (3.1) zopet v znano enačbo (3.2).

Glede na vedno negativno vrednost R bo izraz za λ^2 vedno pozitiven in predstavlja tak obremenitveni primer ne glede na velikost ρ tudi vedno stabilitetni problem. Ker ostane tudi robni pogoj (3.3) nespremenjen, bo glede na poglavje 5.1.1 pri steni, ki ima en rob popolnoma prost, iz rešitve (5.2) izpadel tretji člen zaradi

$$C = 0$$

Prav tako bo na prostem robu zaradi pogoja (2.24) pri $x = \rho$ veljala pogojna enačba (5.5), pri $x = 1$ pa enačba (5.7).

Tudi ostale pogojne enačbe (5.6), (5.8), (5.11) in (5.12) za vpeti rob lahko privzamemo iz poglavij 5.1.1 in 5.1.2. Iz vsega tega sledi, da so tudi stabilitetne enačbe za različne robne pogoje že znane in navedene v omenjenih poglavjih. Načelno torej ni nikakršne razlike od že obravnavanih primerov, razen sa-

mega računanja. Zaradi

$$\lambda^2 = \alpha^2 R = \alpha^2 \frac{1+r^2}{1-r^2} \quad \dots (6.2)$$

$$n^2 = 1 + \alpha^2 P = 1 + \alpha^2 \frac{2r^2}{1-r^2}$$

ne moremo pri vnaprej izbranem n -u več tako enostavno izračunati argumenta λ ali λr ene ali druge strani pogojne enačbe v primeru, da je eden obeh robov prost. Ista argumenta rabimo seveda tudi za računanje pogojnih determinant pri ostalih robnih pogojih.

Iz prve enačbe (6.2) lahko dobimo

$$\alpha^2 = \lambda^2 \frac{1-r^2}{1+r^2} \quad \dots (6.3)$$

s tem izrazom pa preide druga enačba v

$$n^2 = 1 + 2 \frac{\lambda^2 r^2}{1+r^2} \quad \dots (6.4)$$

iz tega pa

$$\lambda = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{n^2-1}{2} (1+r^2)} \quad \dots (6.5)$$

Zadnji izraz lahko z okrajšavo

$$c = \sqrt{\frac{n^2-1}{2} (1+r^2)}$$

napišemo še enostavneje

$$\lambda = \frac{c}{r} \quad \dots (6.6)$$

μ	c	λ	φ
0,1	1,23	12,3	-2,39
0,1375	1,24	9,0	-1,402
0,2	1,25	6,25	-1,162
0,216	1,253	5,8	-27,442
0,217	1,2536	5,777	$\mp \infty$
0,22	1,254	5,7	+8,608
0,224	1,2544	5,6	+3,857
0,23	1,255	5,46	+2,717
0,25	1,26	5,05	+1,002
0,3	1,28	4,26	+0,387
0,38	1,31	3,45	+0,0017
0,4	1,32	3,3	-0,140

iz katere je razvidno, da je rešitev zgornje enačbe

$$\mu = 0,38 \quad c = 1,31 \quad \lambda = 3,45$$

Iz tega sledi po (6.3)

$$\alpha^2 = 3,45^2 \frac{1-0,38^2}{1+0,38^2}$$

$$\alpha^2 = 8,9$$

Zgoraj navedena tabela nam tudi pokaže, da moramo biti pri računanju previdni. Prehitro sklepanje lahko pripelje do grobih napak. Če bi npr. v zgornjem računu predpostavili enkrat $\mu = 0,2$, potem pa $\mu = 0,3$, bi nas oba rezultata za φ , ki sta različnega predznaka, lahko zavedla do prenagljenega sklepa, da leži rešitev med tema dvema vrednostima, in bi nas interpolacija pripeljala do napačnega rezultata.

Obratnega primera obremenitve, torej primera, ko je stena na zunanjem robu obremenjena na nateg, na notranjem pa na tlak, glede na rezultate poglavja 3.3 sploh ni treba posebej obravnavati. Z gotovostjo lahko trdimo, da taka obremenitev sploh ne more pripeljati do nestabilnosti.

7. POSEBNI PRIMER $\rho = 1/\mu^2$

Že sl. 2 je dala slutiti, da bo v primeru, ko je stena na zunanem in notranjem robu obremenjena tlačno, razmerje obeh obremenitev pa je $\rho = 1/\mu^2$, nastopil posebni primer. Oba izraza (2.16) sta zdaj

$$P = -1$$

$$R = 0$$

in napetosti po (2.10)

$$\sigma_r = -p_z \frac{1}{x^2}$$

$$\sigma_\varphi = p_z \frac{1}{x^2}$$

Obe napetosti sta si torej v vsaki točki stene enaki, vendar različnega predznaka.

Enačba (2.23) preide v

$$x^4 z'''' + 2x^3 z'''' - x^2 z'' (1-\alpha^2) + xz' (1-\alpha^2) = 0$$

oziroma z

$$n^2 = 1 - \alpha^2 \quad \dots (7.1)$$

v

$$x^4 z'''' + 2x^3 z'''' - n^2 x^2 z'' + n^2 xz' = 0 \quad \dots (7.2)$$

To je znana Eulerjeva diferencialna enačba, ki nam da z nastavkom

$$z = x^t$$

karakteristično enačbo

$$t(t-1)(t-2)(t-3) + 2t(t-1)(t-2) - n^2t(t-1) + n^2t = 0$$

s štirimi različnimi koreni

$$t_1 = 0, \quad t_2 = 2, \quad t_3 = 1+n, \quad t_4 = 1-n$$

Rešitev diferencialne enačbe (7.2) je torej

$$z = A x^2 + B x^{1+n} + C x^{1-n} + D \quad \dots (7.3)$$

Kot vidimo, je rešitev sestavljena iz treh eksponentnih funkcij in konstante. Prav tako bodo tudi vsi odvodi, ki jih rabimo za nastavitve robnih pogojev, v obliki eksponentnih funkcij. Ker pa so te funkcije vedno samo monotono naraščajoče ali pojemajoče, pridemo tudi v tem obremenitvenem primeru do zaključka, da taka rešitev ne more predstavljati stabilitetnega problema.

Do enakega zaključka pridemo tudi, če iz prve enačbe (3.1) izrazimo α^2

$$\alpha^2 = \lambda^2 \frac{1-\rho^2}{\rho\rho^2-1}$$

Ta vrednost pa raste čez vse meje, ko gre ρ proti $1/\mu^2$.

8. SPLOŠNI PRIMER

V prejšnjih poglavjih so bili delno samo načelno, delno pa tudi numerično obdelani posebni obremenitveni primeri. Skupna značilnost za vse pa je bila izhodiščna diferencialna enačba (3.2) ter obe enačbi za dinamične robne pogoje (2.24) in (3.3). V poglavju 3.3. je bila podana splošna rešitev osnovne diferencialne enačbe. Izkazalo se je, da je red Besselovih funkcij splošne rešitve popolnoma definiran samo v primerih homogenega napetostnega stanja. V vseh ostalih primerih pa se neznanka α^2 skriva tako v argumentu kot tudi v redu Besselovih funkcij. Ker so s tem funkcije same vnaprej neznane, tudi ni moč eksplicitno izraziti neznanke in so zaradi tega vse pogojne stabilitetne enačbe visoko transcendentne. Kljub temu pa so relativno enostavno rešljivi tudi vsi splošni primeri sten, ki so na zunanjem obodu obremenjene tlačno in je razmerje obremenitev

$$\rho < \frac{1}{\mu^2}$$

in pa sten, ki so na zunanjem obodu obremenjene natezno pri

$$\rho > \frac{1}{\mu^2}$$

Obremenitveni primeri, pri katerih razmerje obremenitev ne ustreza zgornjima pogojema, po izsledkih poglavja 3.3 s stališča stabilitete niso zanimivi.

Za reševanje poljubnega primera imamo na razpolago v vseh primerih, ko za n ne vzamemo celega števila, splošno rešitev v obliki

$$z = A \int J_n(\lambda x) dx + B \int J_{-n}(\lambda x) dx + C \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k + D$$

pri čemer je

$$\gamma_k = (-1)^{k-1} \frac{(\lambda x)^{2k}}{k(1-n^2)(3^2-n^2)\dots [(2k-1)^2-n^2]}$$

V primeru, da je n celo liho število, lahko vzamemo rešitve v končni obliki (3.10), če pa je n celo sodo število, imamo na razpolago rešitve (3.9a).

V vseh primerih je računski postopek v bistvu enak. Iz prvega izraza (3.1)

$$\lambda^2 = \alpha^2 \frac{1-\rho r^2}{1-r^2} \quad \dots (8.1)$$

izrazimo

$$\alpha^2 = \lambda^2 \frac{1-r^2}{1-\rho r^2}$$

in ga vstavimo v drugo enačbo (3.1) ter dobimo

$$n^2 = 1 + \lambda^2 r^2 \frac{1-\rho}{1-\rho r^2}$$

Iz tega izraza pa izločimo

$$\lambda = \frac{c}{r} \quad \dots (8.2)$$

kjer je

$$c = \sqrt{(n^2-1) \frac{1-\rho r^2}{1-\rho}} \quad \dots (8.3)$$

Vedno moramo izbrati vnaprej red Besselove funkcije n in s tem to funkcijo tudi definirati. Pri podanem razmerju obremenitev ρ si potem izberemo vrednost r in po (8.3) izračunamo λ . Tako dobimo še argument Besselovih funkcij. Pogojni enačbi ali pa pogojni determinanti zadostimo zdaj s spreminjanjem raz-

merja ρ . Na koncu dobimo po (8.1) izbočitveni koeficient α^2 ter po (2.20) še kritično obremenitev.

Iz zgornjega sledi, da na ta način dejansko sploh ne moremo izračunati konkretnega in vnaprej podanega primera stene z odprtino. Pred koncem računanja namreč ne vemo, kateremu razmerju radijev ρ naš predpostavljeni n ustreza. Zato je edina možnost, in za prakso brez dvoma tudi najzanimivejša, da na opisani način za različna obremenitvena razmerja ρ izračunamo več vrednosti ρ in rezultate podamo tabelarično ali še boljše, v obliki diagramov tako, kot je to že storjeno za nekaj posebnih primerov v prejšnjih poglavjih. To delo bo seveda še zelo obširno, ker je potrebno za vsak obremenitveni primer računati sedem različnih kombinacij robnih pogojev. Vseh možnih kombinacij je sicer osem, vendar rešitvi za prosto položeni notranji ali pa zunanji rob sovpadata.

Pri praktičnem reševanju je omembe vredno tudi dejstvo, da vsi robni primeri razpadejo v dve večji skupini, in sicer v skupino, pri kateri je eden obeh robov popolnoma prost, ter v drugo skupino, ki prostega roba sploh nima. Prva skupina je lažja za računanje, ker pri njej odpade tretji člen splošne rešitve, kot smo to dokazali že v prejšnjih poglavjih. Red pogojne determinante se zato zniža in je računanje bistveno krajše.

Zgled za reševanje splošnega obremenitvenega primera je izdelan že v poglavju 6., kjer je bilo predpostavljeno razmerje obremenitev $\rho = -1$.

9. P R I B L I Ź N A R E Œ I T E V S T A B I L I T E T E S T E N E Z D I F E R E N Č N O M E T O D O

Vsa dosedanja razprava je temeljila na eksaktnem računskem postopku. Glede na dejstvo, da je tak postopek primeren le za računanje tabel in diagramov, pa se pri reševanju posameznega konkretnega primera še najhitreje pride do rezultata z eno od aproksimativnih metod. Iz več razlogov damo med različnimi približnimi metodami lahko prednost diferenčni metodi. Glavne prednosti diferenčne metode so : zelo enostavno nastavljanje diferenčnih enačb v obliki matrik, ki so primerne za računanje tako z relaksacijsko metodo kot z digitalnim računalnikom, poljubna natančnost rezultatov, ki je odvisna samo od števila enačb, to je od velikosti mrežne razdalje, in pa dejstvo, da ima računski center pri IMFM že izdelan program za iskanje prve lastne vrednosti na elektronskem računalniku. V primeru osne simetrije, ki jo v tej razpravi predpostavljamo, pa je uporaba diferenčne metode še toliko prikladnejša, ker se splošni dvoosni problem zreducira na enoosnega.

Izhodišče za diferenčno metodo je spet osnovna diferencialna enačba (3.2)

$$x^4 z^{(4)} + 2x^3 z^{(3)} + x^2 z'' (\lambda^2 x^2 - n^2) + xz' (\lambda^2 x^2 + n^2) = 0$$

v kateri odvode zamenjamo z diferenčnimi količniki

$$\begin{aligned} z'_i &\approx \frac{z_{i+1} - z_{i-1}}{2h} \\ z''_i &\approx \frac{z_{i+1} - 2z_i + z_{i-1}}{h^2} \\ z'''_i &\approx \frac{z_{i+2} - 2z_{i+1} + 2z_{i-1} - z_{i-2}}{2h^3} \end{aligned} \quad \dots (9.1)$$

$$z_i'' \approx \frac{z_{i+2} - 4z_{i+1} + 6z_i - 4z_{i-1} + z_{i-2}}{h^4}$$

in dobimo osnovno diferenčno enačbo za točko i

$$x_i^4 \frac{z_{i+2} - 4z_{i+1} + 6z_i - 4z_{i-1} + z_{i-2}}{h^4} + 2x_i^3 \frac{z_{i+2} - 2z_{i+1} + 2z_{i-1} - z_{i-2}}{2h^3} + \dots (9.2)$$

$$+ x_i^2 \frac{z_{i+1} - 2z_i + z_{i-1}}{h^2} (\lambda^2 x_i^2 - n^2) + x_i \frac{z_{i+1} - z_{i-1}}{2h} (\lambda^2 x_i^2 + n^2) = 0$$

v kateri pomeni h ekvidistančno razdaljo med točkami.

Prav tako pretvorimo tudi obe enačbi za dinamične robne pogoje (2.24) in (3.3)

$$xz'' + \mu z' = 0$$

$$x^2 z''' + xz'' + z'(\lambda^2 x^2 - n^2) = 0$$

v diferenčni enačbi

$$x_i \frac{z_{i+1} - 2z_i + z_{i-1}}{h^2} + \mu \frac{z_{i+1} - z_{i-1}}{2h} = 0 \quad \dots (9.3)$$

$$x_i^2 \frac{z_{i+2} - 2z_{i+1} + 2z_{i-1} - z_{i-2}}{2h^3} + x_i \frac{z_{i+1} - 2z_i + z_{i-1}}{h^2} + \frac{z_{i+1} - z_{i-1}}{2h} (\lambda^2 x_i^2 - n^2) = 0 \quad \dots (9.4)$$

9.1. Homogeno napetostno stanje

V poglavju 4.2 smo dokazali, da se v primeru krožne stene z odprtino, ki je obremenjena na obeh robovih z enako veliko tlačno obremenitvijo, poenostavita oba izraza (3.1) in sta

$$\lambda^2 = \alpha^2$$

$$n^2 = 1$$

Zato se diferenčna enačba (9.2) tudi poenostavi. To enačbo delimo še z x_i in pomnožimo z $2h$ ter dobimo

$$\begin{aligned} & 2 \frac{x_i^3}{h^3} (z_{i+2} - 4z_{i+1} + 6z_i - 4z_{i-1} + z_{i-2}) + 2 \frac{x_i^2}{h^2} (z_{i+2} - 2z_{i+1} + 2z_{i-1} - z_{i-2}) + \\ & + 2 \frac{x_i}{h} (z_{i+1} - 2z_i + z_{i-1}) \left(\frac{\alpha^2 x_i^2 h^2}{h^2} - 1 \right) + (z_{i+1} - z_{i-1}) \left(\frac{\alpha^2 x_i^2 h^2}{h^2} + 1 \right) = 0 \end{aligned}$$

Zaradi krajše pisave zamenjamo še

$$\frac{x_i}{h} = y_i \quad \dots (9.5)$$

$$\alpha^2 h^2 = X \quad \dots (9.6)$$

in dobimo končno enostavnejšo obliko diferenčne enačbe za homogeno napetostno stanje

$$\begin{aligned}
& z_{i-2}(2y_i^3 - 2y_i^2) + z_{i-1} \left[8y_i^3 + 4y_i^2 + 2y_i(Xy_i^2 - 1) - (Xy_i^2 + 1) \right] + \\
& + z_i \left[12y_i^3 - 4y_i(Xy_i^2 - 1) \right] + z_{i+1} \left[-8y_i^3 - 4y_i^2 + 2y_i(Xy_i^2 - 1) + (Xy_i + 1) \right] + \\
& + z_{i+2} (2y_i^3 + 2y_i^2) = 0 \quad \dots (9.7)
\end{aligned}$$

Tudi oba robna pogoja (9.3) in (9.4) spremenimo z obema izrazoma (9.5) in (9.6) ter z upoštevanjem Poissonovega števila $\mu = 0,3$. Da se znebimo decimalnega števila v prvem robnem pogoju, pomnožimo enačbo z 20h. Tako dobimo za popolnoma prost rob

$$z_{i-1}(20y_i - 3) - 40y_i z_i + z_{i+1}(20y_i + 3) = 0 \quad \dots (9.8)$$

in

$$\begin{aligned}
& z_{i-2}(-y_i^2) + z_{i-1} 2y_i^2 + 2y_i - (Xy_i^2 - 1) + z_i(-4y_i) + \\
& + z_{i+1} \left[-2y_i^2 + 2y_i + (Xy_i^2 - 1) \right] + z_{i+2}(y_i^2) = 0 \quad \dots (9.9)
\end{aligned}$$

Na prosto položenem robu mora biti $z_i = 0$ in zato preide enačba (9.8) v

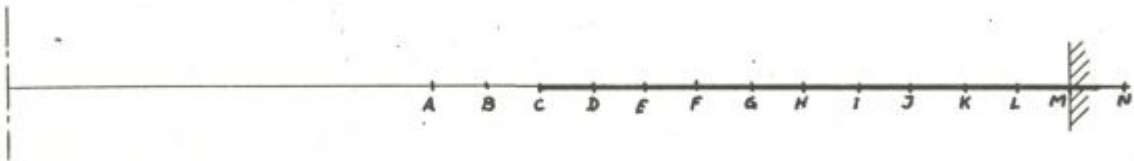
$$z_{i-1}(20y_i - 3) + z_{i+1}(20y_i + 3) = 0 \quad \dots (9.10)$$

Vpeti rob pa zahteva poleg $z_i = 0$ še $z'_i = 0$, torej po (9.10)

$$z_{i+1} = z_{i-1} \quad \dots (9.11)$$

V nadaljevanju je s pomočjo zgornjih diferenčnih enačb izračunanih nekaj primerov pri različnih razmerjih μ v poglavju 4.2 obdelanega primera VII, to je stene z vpetim zunanji in prostim notranji robom.

Za zgled vzemimo steno z razmerjem radijev $\mu = 0,5$ in jo razdelimo na deset delov, vzemimo torej $h = 1/20$. V sl.11 je narisani prerez skozi polovico stene, označene posamezne točke in ustrezne vrednosti x_i ter y_i .



	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
x_i	$\frac{10}{20}$	$\frac{11}{20}$	$\frac{12}{20}$	$\frac{13}{20}$	$\frac{14}{20}$	$\frac{15}{20}$	$\frac{16}{20}$	$\frac{17}{20}$	$\frac{18}{20}$	$\frac{19}{20}$
y_i	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19

sl. 11

Za vsako točko od C do L nastavimo diferenčno enačbo (9.7) in dobimo deset enačb z 14 neznanjkami. Iz po dveh robnih enačb za notranji in zunanji rob sledijo še štiri enačbe in je problem torej rešljiv.

Diferenčna enačba za točko C bo npr. po (9.7)

$$1800A + (-7621+1900X) B + (12040-4000X) C + (-8419+2100X) D + \\ + 2200 E = 0$$

Podobne enačbe dobimo za vse ostale točke.

Robni pogoj (9.8) za točko C

$$197 B - 400 C + 203 D = 0$$

robni pogoj (9.9) pa

$$-100 A + (221-100 X) B - 40 C + (-181+100 X) D + 100 E = 0$$

Oba robna pogoja za točko M pa sta

$$M = 0$$

$$N = L$$

Zaradi zadnjih dveh robnih pogojev imamo končno sistem dvanajstih linearnih homogenih enačb, iz katerih moramo izračunati najmanjšo lastno vrednost X. Za računanje na elektronskem računalniku je najprimernejše, če vse te enačbe napišemo v obliki dveh matrik, od katerih vsebuje prva koeficiente ob funkcijskih vrednostih, ki ne vsebujejo X-a, druga pa tiste ob X-u. Če imenujemo torej prvo matriko A, drugo pa B, lahko determinanto sistema naših dvanajstih enačb pišemo kot

$$\text{Det} = \text{Det} (A + XB)$$

Na naslednjih straneh sta napisani obe matriki, s katerima je računalnik ZUSE - Z 23 izračunal prvo lastno vrednost v obliki

$$\frac{1}{X} = 30,1607$$

S to vrednostjo pa sledi po enačbi (9.6)

$$\alpha^2 = \frac{400}{30,1607} = 13,262$$

Za ocenitev natančnosti je bil ponovljen račun še z dvakrat gostejšo mrežo, torej z $h = 1/40$. Rezultat tega računa je

$$\alpha^2 = 13,284$$

Primerjava teh dveh rezultatov kaže, da dvojno število točk po-

pravi rezultat šele v drugi decimalki. Primerjava z v poglavju 4.2 izračunano točno vrednostjo

$$\alpha^2 = 3,6459^2 = 13,2933$$

pa kaže na to, da je že prva z diferenčno metodo izračunana vrednost brez dvoma dovolj natančna. V naslednji tabeli je prikazana primerjava eksaktno izračunanih vrednosti z vrednostmi α^2 , izračunanimi po diferenčni metodi.

	$\mu = 0,3$	$\mu = 0,4$	$\mu = 0,5$	$\mu = 0,7$
točne vrednosti α^2	10,125	10,959	13,293	30,515
približne vrednosti α^2	9,981	11,365	13,262	30,506
mrežna razdalja h	1/30	1/20	1/20	1/70

Matrika A

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
0	197	-400	203	0							
-100	221	-40	-181	100							
1800	-7621	12040	-8419	2200							
	2420	-10187	16016	-11153	2904						
		3168	-13273	20784	-14423	3744					
			4056	-16927	26416	-18277	4732				
				5096	-21197	32984	-22763	5880			
					6300	-26131	40560	-27929	7200		
						7680	-31777	49216	-33823	8704	
							9248	-38183	59024	-40493	10404
								11016	-45397	70056	-47987
									12996	-53467	96824

Matrika B

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
0	0	0	0	0							
0	-100	0	100	0							
0	1900	-4000	2100	0							
	0	2541	-5324	2783	0						
		0	3312	-6912	3600	0					
			0	4225	-8788	4563	0				
				0	5292	-10976	5684	0			
					0	6525	-13500	6975	0		
						0	7936	-16384	8448	0	
							0	9537	-19652	10115	0
								0	11340	-23328	11988
									0	13357	-27436

9.2. S p l o š n i p r i m e r

V primeru poljubnega razmerja ρ lahko spet izhajamo iz splošne diferenčne enačbe (9.2), iz katere dobimo seveda nekoliko daljše končne enačbe za posamezne točke, kot pa v primeru homogenega napetostnega stanja, ker dasta oba oklepaja v tretjem in četrtem členu splošne enačbe malo bolj komplicirane izraze. Žal se nikakor ne moremo znebiti glavne in največje slabe lastnosti diferenčne metode, ki je v tem, da moramo za vsak nov primer ves sistem enačb nastavljeni znova. Vedno pa se spleča vse diferenčne enačbe prirediti tako, da koeficienti niso decimalna števila temveč cela, kot smo to storili že v prejšnjem primeru.

Za zgled vzemimo tudi zdaj steno, obremenjeno na zunanjem in notranjem robu s tlačno obremenitvijo, ki pa na obeh robovih ni enako velika, temveč je na notranjem za 20 % večja od zunanje. Vzemimo torej

$$\rho = 1,2 = \frac{6}{5}$$

Na zunanjem robu naj bo stena spet vpeta, na notranjem pa prosta, razmerje radijev pa naj bo

$$r = 0,4 = \frac{2}{5}$$

Obe vrednosti po (3.1) sta

$$\lambda^2 = \alpha^2 \frac{1 - \rho r^2}{1 - r^2} = \alpha^2 \frac{1 - \frac{6}{5} \frac{4}{25}}{1 - \frac{4}{25}} = \frac{101}{105} \alpha^2$$

$$n^2 = 1 + \alpha^2 \frac{r^2(1 - \rho)}{1 - r^2} = 1 + \alpha^2 \frac{\frac{4}{25} (1 - 1,2)}{1 - \frac{4}{25}} = 1 - \alpha^2 \frac{4}{105}$$

Z uvedbo nove zamenjave zaradi krajše pisave

$$\beta^2 = \frac{\alpha^2}{105} \quad \dots (9.12)$$

lahko napišemo oba zgornja izraza krajše

$$\lambda^2 = 101 \beta^2 \quad \dots (9.13)$$

$$n^2 = 1 - 4 \beta^2$$

s še dvema okrajšavama

$$\frac{x_i}{h} = y_i$$

$$X = \beta^2 h^2 \quad \dots (9.15)$$

preide, osnovna diferenčna enačba (9.2) v enačbi (9.7) prejšnjega primera podobno diferenčno enačbo

$$\begin{aligned} & z_{i-2}(2y_i^3 - 2y_i^2) + z_{i-1}(-8y_i^3 + 202y_i^3X + 4y_i^2 - 101y_i^2X - 2y_i + \\ & + 3200y_iX + 1600X - 1) + z_i(12y_i^3 - 404y_i^3X + 4y_i - 6400y_iX) + \\ & + z_{i-1}(-8y_i^3 + 202y_i^3X - 4y_i^2 + 101y_i^2X - 2y_i + 3200y_iX - 1600X + 1) + \\ & + z_{i+2}(2y_i^3 + 2y_i^2) = 0 \quad \dots (9.16) \end{aligned}$$

Robni pogoj na notranjem robu po (9.3) ostane enak kot v prejšnjem primeru, ker v njem ne nastopata ne λ^2 ne n^2 .

$$z_{i-1}(20y_i - 3) - 40y_i z_i + z_{i+1}(20y_i + 3) = 0$$

Drugi robni pogoj na istem robu pa bo

$$z_{i-2}(-y_i^2) + z_{i-1}(2y_i^2 - 10ly_i^2 X + 2y_i - 1600 X + 1) +$$

$$+ z_i(-4y_i) + z_{i+1}(-2y_i^2 + 10ly_i^2 X + 2y_i + 1600 X - 1) +$$

$$+ z_{i+2}(y_i^2) = 0$$

Če vzamemo mrežno razdaljo spet $h = 1/20$ in označimo posamezne točke po sl. 12



	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
x_i	$\frac{8}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{10}{20}$	$\frac{11}{20}$	$\frac{12}{20}$	$\frac{13}{20}$	$\frac{14}{20}$	$\frac{15}{20}$	$\frac{16}{20}$	$\frac{17}{20}$	$\frac{18}{20}$	$\frac{19}{20}$
y_i	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19

sl. 12

dobimo 12 diferenčnih enačb (9.16) za točke C do N, dve robni enačbi iz obeh robnih pogojev za točki A in B ter iz dveh robnih pogojev na zunanjem robu funkcijski vrednosti

$$P = 0 \quad \text{in} \quad R = N$$

Celotno determinanto tako dobljenega sistema homogenih enačb razstavimo spet v dve matriki, ki sta izpisani na naslednjih dveh straneh.

Z elektronskim računalnikom je bila izračunana prva lastna vrednost

$$X = \frac{1}{3245,8955} \approx \frac{1}{3246}$$

Matrika A

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
0	157	-320	163	0									
-64	145	-32	-113	64									
896	-3857	6176	-4367	1152									
	1296	-5527	8784	-6173	1620								
		1800	-7621	12040	-8419	2200							
			2420	-10187	16016	-11153	2904						
				3168	-13273	20784	-14423	3744					
					4056	-16927	26416	-18277	4732				
						5096	-21197	32994	-22763	5880			
							6300	-26131	40560	-27929	7200		
								7680	-31777	49216	-33823	8704	
									9248	-38183	59024	-40493	10404
									0	11016	-45397	70056	-47897
									0	0	12996	-53467	96824

Matrika B

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
0	0	0	0	0									
0	-8064	0	8064	0									
0	124160	-258048	133888	0									
	0	169477	-352116	182639	0								
		0	225500	-468000	242500	0							
			0	293441	-608124	314683	0						
				0	374512	-774912	400400	0					
					0	469925	-970788	500863	0				
						0	580892	-1198176	617284	0			
							0	708600	-1459500	750900	0		
								0	854336	-1757184	899848	0	
									0	1019237	-2093652	1074415	0
									0	0	1204540	-2471328	1226788
									0	0	0	1411457	-2892636

Iz enačbe (9.15) dobimo zdaj

$$\beta^2 = \frac{x}{h^2} = \frac{400}{3246}$$

in končno iz (9.12)

$$\alpha^2 = 105\beta^2 = \frac{105 \cdot 400}{3246}$$

še koeficient izbočenja tega primera

$$\alpha^2 = 12,94$$

Primerjava tega rezultata z rezultatom, dobljenim v poglavju 4.2 za $\mu = 0,4$ pri $\rho = 1$

$$\alpha^2 = 10,959$$

pokaže, da nam za 20 % povečani notranji tlak pri tem razmerju radijev poveča stabilnost za dobrih 18 %.

10. ZAKLJUČEK

Rešitev stabilitetnega problema krožne stene s centrično krožno odprtino je bila v tej razpravi obravnavana s temi predpostavkami in omejitvami :

- Osnova simetrija obremenitve in deformacijskega stanja
- Tenke stene s konstantno debelino
- Veljavnost Hookeovega zakona
- Teorija majhnih deformacij

Vse navedene supozicije, ki so nas pripeljale do relativno enostavnih končnih enačb, seveda pomenijo bistvene omejitve splošnosti rešitev. Taka je posebno prva predpostavka, ki zaradi omejitve na osno simetrijo obremenitve že sama po sebi močno skrči raznolikost primerov, ki bi v praksi lahko nastopili. Še večje težave pa povzroča zahteva po osni simetriji deformacijskega stanja, s katero smo dobili sicer teoretično popolnoma jasen odgovor o najmanjši kritični kakor tudi o višjih kritičnih obremenitvah, vendar pa brez odgovora na vprašanje, ali obstaja pri poljubnem razmerju radijev morda neka neosnosimetrična deformacijska oblika kot rezultat neke še manjše kritične obremenitve. Pri krožni steni brez odprtine je že dokazano [9], da najnižja kritična obremenitev ustreza osnosimetričnemu izbočenju ne glede na pritrditev konture, da pa je v cirkularni smeri valovito izbočenje tudi možno, vendar samo pri višji obremenitvi. Razmere pri izbočenju stene z odprtino se pri večanju radija notranje konture vedno bolj oddaljujejo od razmer pri polni steni in približujejo razmeram pri ozki pravokotni steni, za katero pa vemo, da se bo izbočila v več valovih. Tudi rezultati, ki jih najdemo v Pflügerjevi knjigi [1] za krožno steno z odprtino, obremenjeno na obeh konturah samo s strižno obremenitvijo, nam potrjujejo prejšnjo trditev. Neosnosimetrične razmere pri izbočenju krožnih sten z odprtinami, kaže, da še niso obdelane. Zato moramo biti pri uporabi v tej razpravi dobljenih rešitev previdni v vseh primerih velikih odprtin. Pri majhnih in srednjih odprtinah pa so rezultati brez dvoma uporabni.

Glede na uporabljeno teorijo majhnih deformacij smo dobili v rezultatih razprave samo kritične obremenitve brez kakršnihkoli kvantitativnih podatkov o velikosti pomikov. Zato uporabljena metoda tudi ne more biti osnova za študiranje obnašanja in nosilnosti stene v nadkritičnem območju. Prav tako nas supozicija preme sorazmernosti med napetostmi in deformacijami omejuje na tenke stene, pri katerih pride do izbočenja pri napetostih, ki so pod mejo proporcionalnosti.

V okviru navedenih omejitev pomeni razprava, kljub omejeni uporabnosti rezultatov, zaključeno celoto. Podala je splošno rešitev osnosimetričnega primera, ki do zdaj ni bila znana. Ta rešitev je omogočila izpopolnitev manjkajočih robnih primerov iz problemov, ki sta jih zastavila in delno rešila Schubert in Meissner, poleg tega pa je z njo možno reševanje popolnoma poljubnega osnosimetričnega obremenitvenega primera. Z nekaj zgledi smo ilustrirali računsko metodo, ki v večini primerov niti ni tako zapletena in dolgotrajna.

V zadnjem poglavju prikazana, za te primere zelo prikladna diferenčna metoda, lahko koristno rabi približnemu reševanju konkretnih primerov, vse dokler ne bodo s pomočjo splošne rešitve izdelani diagrami, ki bodo rezultate tega teoretičnega dela brez dvoma najbolj približali praksi.

V Ljubljani, dne 2. marca 1967

11. L I T E R A T U R A

1. A. PFLÜGER : Stabilitätsprobleme der Elastostatik, 1964
Springer, Berlin
2. E. TREFFTZ : Zur Theorie der Stabilität des elastischen
Gleichgewichts, ZAMM 1933
3. S. TIMOSHENKO - J.N. GOODIER : Theory of Elasticity, 1951
Mc Graw - Hill
4. JAHNKE - EMDE : Tafeln höherer Funktionen, 1960
B.G. Teubner, Leipzig
5. B. KRUŠIČ : Referat na krožku katedre za matematiko in
mehaniko fakultete za strojništvo, 1966
6. D.S. MITRINOVIĆ - D.Ž. DJOKOVIĆ : Specijalne funkcije, 1964
Gradjevinska knjiga, Beograd
7. A. SCHUBERT : Die Beullast dünner Kreisringplatten, die
am Aussen - und Innenrand gleichmässigen
Druck erfahren, ZAMM 1947
8. E. MEISSNER : Über das Knicken kreisringförmigen Schei-
ben, Schweiz. Bauzeitung, 1933
9. C.B. BIEZENO - R. GRAMMEL : Technische Dynamik, 1939
Springer, Berlin



NARODNA IN UNIVERZITETNA
KNJIŽNICA



00000056706