

Also available at <http://amc-journal.eu>
ISSN 1855-3966 (printed edn.), ISSN 1855-3974 (electronic edn.)
Ars Mathematica Contemporanea Volume 4, Issue 1, Year 2011, Pages 29-62

How to lose as little as possible

Vittorio Addona, Stan Wagon, Herb Wilf

Abstract

Suppose Alice has a coin with heads probability q and Bob has one with heads probability $p > q$. Now each of them will toss their coin n times, and Alice will win iff she gets more heads than Bob does. Evidently the game favors Bob, but for the given p, q , what is the choice of n that maximizes Alice's chances of winning? We show that there is an essentially unique value $N(q, p)$ of n that maximizes the probability $f(n)$ that the weak coin will win, and it satisfies $\lfloor 1/2(p - q) - 1/2 \rfloor \leq N(q, p) \leq \lceil \max(1 - p, q)/(p - q) \rceil$. The analysis uses the multivariate form of Zeilberger's algorithm to find an indicator function $J_n(q, p)$ such that $J > 0$ iff $n < N(q, p)$ followed by a close study of this function, which is a linear combination of two Legendre polynomials. An integration-based algorithm is given for computing $N(q, p)$.

Keywords: Legendre polynomials, symbolic summation, probability.

Math. Subj. Class.: 60C05, 33D45, 42C05

Math Sci Net: [91A60 \(33D45 60C05\)](#)

Kako izgubiti tako malo kot je le mogoče

Povzetek

Alica ima kovanec, pri katerega metu pade cifra z verjetnostjo q , Bob pa ima kovanec, pri katerega metu je verjetnost padca cifre $p > q$. Vsak od njiju vrže kovanec n -krat. Alica zmaga natanko takrat, če vrže cifro večkrat kot Bob. Jasno je, da ima pri tej igri Bob boljše možnosti. Toda katera izbira števila metov n pri danih p in q daje Alici največje možnosti za zmago? V članku pokažemo, da obstaja v bistvu ena sama vrednost $N(q, p)$ za število metov n , ki maksimizira verjetnost $f(n)$, da bo šibkejši kovanec zmagal, in ta vrednost izpolnjuje pogoj $\lfloor 1/2(p - q) - 1/2 \rfloor \leq N(q, p) \leq \lceil \max(1 - p, q)/(p - q) \rceil$. Pri naši analizi uporabimo multivariantno obliko Zeilbergerjevega algoritma za to, da poiščemo karakteristično funkcijo $J_n(q, p)$, kjer je $J > 0$ če in samo če je $n < N(q, p)$. Nadaljujemo s podrobnim študijem te funkcije, ki se izraža kot linearna kombinacija dveh Legendreovih polinomov. Za izračun vrednosti $N(q, p)$ podamo integracijski algoritem.

Ključne besede: Legendre-ovi polinomi, simbolično seštevanje, verjetnost.

