

# MaRS 2019



SIMON BREZOVNIK

→ Med 28. julijem in 3. avgustom 2019 je na Pohorju potekal štirinajsti zaporedni matematični tabor za srednješolce MaRS (Matematično Raziskovalno Srečanje). Udeležilo se ga je petindvajset dijakinj in dijakov iz različnih srednjih šol iz vse Slovenije. Za uspešno krmarjenje po vesolju je skrbelo deset članov posadke: Simon Brezovnik, Klara Drogenik, David Gajser, Žan Hafner Petrovski, Rok Havlas, Petra Podlogar, Jakob Jurij Snoj, Jakob Svetina, Tjaša Vrhovnik in Nejc Zajc, v oporo pa nam je bil tudi Vid Kocijan.



SLIKA 1.

Lovci, levi in blondinke

Glavni del tabora je zaznamovalo projektno delo. MaRSovci smo se na podlagi svojih interesov razdelili v skupine po dva oziroma tri člane, vsaki skupini pa je bil dodeljen eden od mentorjev. Vsak mentor je svoji skupini predstavil zanimiv matematični problem, s katerim smo se spopadali. V času bivanja na MaRSu smo se naučili uporabljati program  $\LaTeX$ , ki omogoča pregledno pisanje matematičnih besedil. S



SLIKA 2.

Del posadke na letošnjem MaRSu: Petra, Jakob Jurij, Jakob in David.

pridobljenim znanjem smo v vsaki skupini do konca tabora oblikovali kratek članek, v katerem smo predstavili svoje matematične probleme. Letos so se dijaki pri projektih ukvarjali z: maRSovsko geometrijo, konstruktibilnimi števili, eliptičnimi krivuljami, verižnimi ulomki, Cayleyjevimi izreki, Polyevovo teorijo, centralnim limitnim izrekom, teorijo grafov in teorijo odločanja.

V nadaljevanju predstavljamo nekaj nalog, ki smo jih med našim raziskovanjem uspeli rešiti. Vabimo, nadebudneže, da se z nekaterimi tudi sami spopadejo. Za dodatno pomoč si lahko pomagata z našimi članki, ki so objavljeni na spletni strani [MaRS.dmfa.si/projekti/](http://MaRS.dmfa.si/projekti/).

**Problem 1.** Že stari Grki so vedeli, da se tako težišnice kot višine in simetrale kotov sekajo v eni točki. Giovanni Ceva, italijanski matematik iz Univerze v Pisi, je po raziskovanju trikotnikov objavil izrek. Ta izrek je danes znan kot Cevov izrek, ki pravi, da imajo daljice, ki povezujejo oglišča z nasprotnimi stranicami trikotnika skupno presečišče le pod določenim pogojem. Ali morda poznate ta pogoj?



SLIKA 3.

Del posadke na letošnjem MaRSu: Klara, Tjaša, Simon in Nejc.



SLIKA 4.

Delo v Tjašini projektni skupini

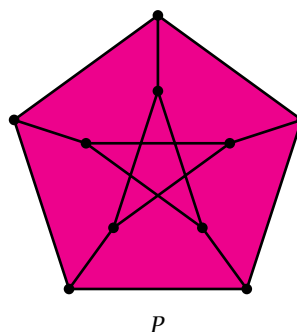
**Problem 2.** Trije matematiki potujejo po vesolju in se ustavijo na planetu, na katerem je le drevo z okusnimi sadeži in prijazen vesoljec. Pred spanjem matematiki naberejo sadeže, jih zložijo na kup in se odpravijo spat. Ob polnoči se zbudi prvi matematik, razdeli sadeže na tri enake kupe, a ostane mu en sadež, ki ga podari vesoljcu. En kup skrije, preostala dva združi v enega, ga vrne nazaj ter se odpravi spat.

Ob enih se zbudi drugi in stori enako. Ob dveh tretji in tudi on stori enako. Zjutraj vstanejo in razdelijo preostale sadeže na tri enake dele, a jim spet ostane en, ki ga podarijo vesoljcu. Kolikšno je najmanjše število sadežev, s katerimi so začeli?

**Problem 3.** Predstavljajte si, da morate naenkrat vreči 1000 kovancev. Zanima nas, kolikšna je verjetnost, da pade grb med 750 in 800-krat. Nasvet za reševanje tega problema je, da se najprej poučite o centralnem limitnem izreku.

Na MaRSu smo se ukvarjali tudi z zanimivimi problemi iz teorije grafov, natančneje z igro Lopov in policisti. Igralno polje igre je neusmerjen enostaven graf (primer takega grafa prikazuje slika 5). Igra se začne, ko prvi igralec določi vozlišča, ki jih bodo zasedli policisti. Nato drugi igralec določi vozlišče lopovu, s čimer se zaključi 0. krog. V vsakem nadaljnjem krogu se najprej premaknejo policisti in nato lopov. Policisti in lopov se lahko v vsakem krogu premaknejo na sosednje vozlišče ali pa ta krog počivajo (ostanejo na istem mestu). Za policiste velja tudi, da se lahko naenkrat premakne poljubna podmnožica policistov, prav tako pa lahko več policistov zasede isto vozlišče. Igra se konča, ko policist zasede isto vozlišče kot lopov. Če se to nikoli ne more zgoditi, pravimo, da je zmagovalec lopov.

**Problem 4.** Najmanjše število policistov, ki jih potrebujemo, da na grafu zagotovo ujamemo lopova, imenujemo policijsko število grafa. Poskusi poiskati policijsko število grafa na sliki 5.



SLIKA 5.

Neusmerjen graf  $G$ , v smislu teorije grafov



→ **Problem 5.** Astronavt želi poleteti na MaRS, kamor ga lahko pelje ena od treh vesoljskih ladij.

- Prva bo odletela čez eno uro in potrebuje dve uri, da pride do Lune. Tam bo z verjetnostjo 0,8 postanek za gorivo, ki traja pet ur. Od Lune do MaRSa gre vesoljska ladja lahko po dveh poteh. Prva je daljša in traja 15 ur, druga pa krajša in traja 10 ur. Na krajši poti obstaja 0,3 verjetnost, da bodo asteroidi, kar ladjo upočasni za 10 ur.
- Druga vesoljska ladja bo odletela čez tri ure in potrebuje do Lune enako časa kot prva. Na Luni pa bo imela postanek za gorivo z verjetnostjo 0,5, ki bo trajal štiri ure. Od Lune naprej ima enake pogoje kot prva.
- Tretja vesoljska ladja bo odletela čez pet ur. Postanek na Luni bo imela z verjetnostjo 0,1 in bo trajal pet ur. Od Lune pa bo šla do MaRSa le po krajši poti.

Na katero vesoljsko ladjo naj se astronavt vrca, če želi biti na MaRSu v čim krajšem času?

Tipičen maRSovski dan se je pričel z maRSovskim zajtrkom in telovadbo. Ob dopoldnevih smo se udeležili različnih delavnic. Dr. Primož Moravec s Fakultete za matematiko in fiziko, univerze v Ljubljani nam je v tridnevnem sklopu približal grupe. Spoznali smo definicijo grupe in nekaj osnovnih primerov grup. Govorili smo tudi o preslikavah med grupami, delovanju grup na množicah, orbitah in stabilizatorjih ter si ogledali več zgledov. Vsak dan smo MaRSovci dobili list z domačimi nalogami, kdor pa jih je naveč pravilno rešil, je dobil nagrado.

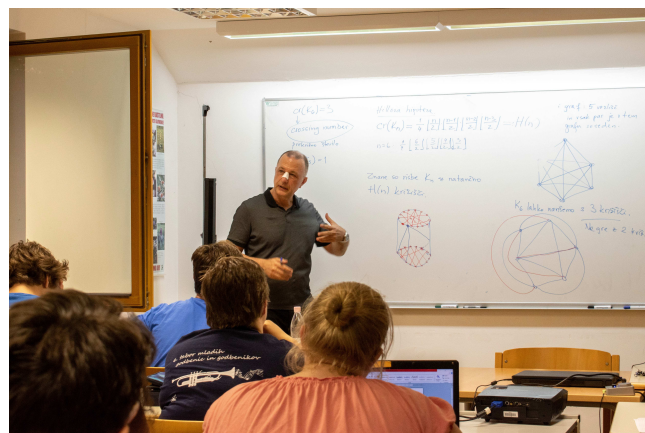
Poleg zgoraj omenjenih delavnic so potekale tudi delavnice iz programiranja in urejanja matematičnih besedil. Nejc nas je naučil osnov programskega jezika Python ter uporabe programa Latex, s katerim smo na koncu izdelali članke in predstavitve. Ob popoldnevih smo čas posvečali predvsem projektne delu.

Ob večerih smo bili deležni zanimivih predavanj odličnih profesorjev. Prvi dan se nam je preko Skype-a iz Kalifornije oglasila gostja dr. Marinka Žitnik, postdoktorska raziskovalka na Stanfordu. Predavala je o umetni inteligenci in analizi velikih podatkov, kar je tudi njeno raziskovalno področje. Razlagala nam je o strojnem učenju, predstavitvi podatkov s pomočjo omrežij in grafov ter razložila nekaj algoritmov strojnega učenja. Razlago je popestrila s kon-



**SLIKA 6.** Delavnica o grupah, ki jo je vodil dr. Moravec.

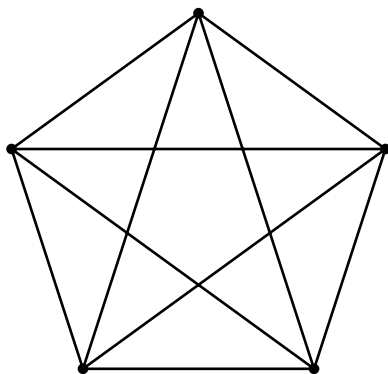
kretnimi primeri (npr. določanje potencialnih prijateljev na družbenih omrežjih, uporaba v medicini). V ponedeljek zvečer smo prisluhnili gostu dr. Bojanu Moharju z Univerze Simon Fraser v Vancouveru v Kanadi, prejemniku prestižnih matematičnih nagrad. Spregovoril nam je o risanju grafov in prekrzičnih številih.



**SLIKA 7.** Izsek iz predavanja dr. Bojana Moharja

Njegovo predavanje nas je močno pritegnilo. Enega od problemov, ki smo jih obravnavali na predavanju, objavljamo tudi tukaj.

**Problem 6.** Ali znaš narisati graf, ki ga prikazuje slika 8, tako da se povezave tega grafa sekajo največ enkrat?



$K_5$

#### SLIKA 8.

Polni graf na petih vozliščih

V četrtek zvečer smo bili priča predavanju »Odprto – zaprto?« dr. Iztoka Baniča, profesorja na Fakulteti za naravoslovje in matematiko Univerze v Mariboru. Spoznavali smo odprte in zaprte množice ter se seznanili s topologijo, pomembno matematično vejo, ki je tudi predavateljevo raziskovalno področje. Njegovo predavanje nas je navdušilo, saj je bilo v njem ves čas čutiti strast do matematike. Vsak dan je bila MaRSovcem postavljena uganka dneva. Tisti, ki je uganko prvi pravilno rešil, je prejel posebno MaRSovsko nagrado. Objavljamo nekaj ugank, ki so vam lahko v izziv naslednjih nekaj minut (ali ur).

**Problem 7.** Pet piratov je na svojem plenilskem pohodu našlo veliko skrinjo s 100 zlatniki. Pirati si bodo ta zaklad razdelili tako, da bo delitev najprej predlagal kapitan Andres. Če se bodo ostali strinjali z njim, potrdijo njegov predlog, sicer ga zavrnejo. Če se vsaj polovica piratov (šteje tudi glas kapitana) strinja s predlogom, je predlog sprejet, sicer je zavrnjen, kapitan mora v morje, nova kapitanka pa postane piratka Beatrice. Za njo bi postal kapitan Carlos, za njim Dominica, ostane še pirat Eduardo. Pirati se strinjajo s predlogom le, če nikakor ne bodo mogli dobiti več denarja; če pa bi v dveh primerih lahko dobili enako denarja, bodo izbrali možnost, pri kateri bo umrlo več piratov. Noben kapitan ne bo predlagal delitve, pri kateri bo umrl, če se temu lahko izogne.

Vsi kapitani so dobri logiki in vedo, da so to tudi ostali, poleg tega pa en drugemu ne zaupajo, zato ne sklepajo nikakršnih zavezništev med seboj. Kakšno delitev mora predlagati Andres, da ostane živ, in koliko zlata bo dobil?

**Problem 8.** Nezemljani so prišli na Zemljo, a žal niso preveč miroljubni. Po nekajtedenskem potovanju in neokusni hrani, jim ljudje zelo dišimo, vendar pa je proti njihovim načelom jesti inteligentna bitja, zato skupini desetih ljudi predstavijo nalogo: postavili jih bodo v vrsto od največjega do najmanjšega, tako da vsak vidi le vse manjše od sebe. Obračanje nazaj ni dovoljeno. Vsakemu bodo naključno dodelili belo ali črno kapo. Število belih ali črnih kap ni znano. Vsak lahko reče le BELA ali ČRNA, vsaj devet oseb pa mora uganiti barvo svoje kape. Ugibati začne najvišji, potem so na vrsti vedno nižji člani skupine. Na voljo imajo pet minut, da se dogovorijo, kako preživeti. V primeru kakršnegakoli goljufanja, umrejo vsi člani skupine. Vsak lahko reče le bela ali črna, ničesar ne sme sporočiti z načinom, kako to besedo pove (npr. da bi podaljšal kakšen zlog ali spremenil višino glasu). Kap tudi ne smejo sneti in si jih ogledati.

**Problem 9.** Tvoj bogat, malce poseben stric je umrl in napisal oporoko. Imaš še 99 drugih sorodnikov, vendar pa si bil ti edini, ki se je rad družil s stricem in prisluhnil njegovim zgodbam. Stric je želel vse svoje premoženje zapustiti tebi, vendar pa je vedel, da bi bili vsi ostali sorodniki v tem primeru zelo jezni, zato je oporoko zapisal kot uganko, pri tem pa dodal, če vsi skupaj sodelujete in odkrijete rešitev uganke, si njegovo premoženje enakomerno razdelite. Če pa kdo ugotovi rešitev uganke sam, lahko sam poskusi odpreti sef. Če mu uspe, je vse premoženje njegovo, če se zmoti, ne dobi ničesar. Na branju oporoke je odvetnik vsakemu sorodniku izročil ključ s številko od 1 do 100. Potem ste vsi skupaj odšli v skrito sobo, kjer je stric postavil 100 oštevilčenih omaric. Odvetnik je dal nadaljnja stričeva navodila. Ključ s številko 1 odpre vse omarice, ključ s številko 2 zapre vsako drugo omarico, ključ s številko 3 spremeni stanje vsake tretje omarice (zapre odpre, odpre zapre), ključ s številko 4 spremeni stanje vsake četrte omarice itd. Kodo sefa dobiš tako, da sešteješ vsa števila na omaricah, ki ostanejo odprta ob koncu odklepanja. Kakšna je koda?





Da pa so člani posadke poskrbeli tudi za našo fizično kondicijo, smo bili na taboru deležni različnih športnih dejavnosti, na primer igranja košarke in nogometa, družabnega programa in izletov. Tako smo se MaRSovci v sredo odpravili na maRSovski izlet do hotela Bellevue, kjer smo uživali ob razgledu na celoten Maribor in uživali ob kartanju in razvajanju s sladoledom.

V četrtek je sledila še maRSovska pustolovščina, ki nas je vodila po poti mimo Framskega slapu. Na pustolovščini so nas čakale različne spretnostne in miselne uganke, v nekaterih pa se lahko preizkusite tudi sami.

**Problem 10.** Poskusite najti napako v spodnjem dokazu. Dokaz, da slon tehta toliko kot komar:

- $x$  ... slonova masa,
- $y$  ... komarjeva masa.

Recimo, da je vsota obeh tež enaka  $2v$ . Potem velja

- $x + y = 2v$ ,
- $-y = x - 2v$ ;      $x = -y + 2v$ .

Pomnožimo prvo enačbo z  $x$  in drugo z  $-y$  ter izenačimo:

- $x^2 - 2vx = y^2 - 2vy$ .

Prištejemo  $v^2$ :

- $x^2 - 2vx + v^2 = y^2 - 2vy + v^2$ ,
- $(x - v)^2 = (y - v)^2$ ,
- $x - v = y - v$ ,
- $x = y$ .

**Problem 11.** V vrsto postavite osem kovancev tako, da si sledijo v zaporedju: cifra - mož - cifra - mož - cifra - mož - cifra - mož. Vaša naloga je preurediti vrstni red kovancev tako, da bodo vse cifre na eni in vsi možje na drugi strani. Kovance je dovoljeno premikati le v trojicah, in sicer tako, da hkrati zgrabite po tri sosednje in jih prestavite na začetek ali konec vrste, ne da bi pri tem njihov vrstni red zamenjali. Poskusite rečiti problem v čtirih potezah.

Vsako večer smo se MaRSovci pomerili v igranju družabnih iger, ki so kdaj pa kdaj trajale tudi ponoč. Na voljo smo imeli več kot 30 različnih vrst družabnih iger, tako da je bil izbor res težek.

Večeri so ponujali tudi priložnost za spletnje novih prijateljev in uživanje v sproščenem vzdušju.

Zadnji večer smo imeli tradicionalni maRSovski piknik. Prišli so stari MaRSovci, tako da smo skupaj pojedli kakšno dobroto iz žara in delili spomine na pretekla maRSovska potovanja.

Da smo naše potovanje zaključili v stilu, smo glavne ugotovitve svojega raziskovalnega dela predstavili tudi našim staršem in ostalim MaRSovcem.

Kot vsako leto je tudi letos tabor prehitro minil in komaj čakamo prihodnje leto, da skupaj spet vedoželjno poletimo v vesolje!



**SLIKA 9.** Ena od skupin na Klarini kontrolni točki četrtkove pustolovščine



**SLIKA 10.** Predstavitve projekta ene od skupin