





# Gradbeni vestnik • GLASILO ZVEZE DRUŠTEV GRADBENIH INŽENIRJEV IN

TEHNIKOV SLOVENIJE in MATIČNE SEKCIJE GRADBENIH  
INŽENIRJEV INŽENIRSKO ZBORNICE SLOVENIJE

UDK-UDC 05 : 625; ISSN 0017-2774

Ljubljana, februar 2007, letnik 56, str. 29-52

Izdajatelj:

**Zveza društev gradbenih inženirjev in tehnikov Slovenije (ZDGITS)**, Leskoškova 9e, 1000 Ljubljana, telefon 01 52 40 200; faks 01 52 40 199 v sodelovanju z **Matično sekcijo gradbenih inženirjev Inženirske zbornice Slovenije (MSG IZS)**, ob podpori **Javne agencije za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije, Fakultete za gradbeništvo in geodezijo Univerze v Ljubljani** in **Zavoda za gradbeništvo Slovenije**

Izdajateljski svet:

ZDGITS: **mag. Andrej Kerin**

izr. prof. dr. **Matjaž Mikoš**

**Jakob Presečnik**

MSG IZS: **Gorazd Humar**

**mag. Črtomir Remec**

**doc. dr. Branko Zadnik**

FGG Ljubljana: **doc. dr. Marijan Žura**

FG Maribor: **Milan Kuhta**

ZAG: **prof. dr. Miha Tomaževič**

Glavni in odgovorni urednik:

**prof. dr. Janez Duhovnik**

Sodelavec pri MSG IZS:

**Jan Kristjan Juteršek**

Lektorica:

**Alenka Raič Blažič**

Lektorica angleških povzetkov:

**Darja Okorn**

Tajnica:

**Anka Holobar**

Oblikovalska zasnova:

**Mateja Goršič**

Tehnično urejanje, prelom in tisk:

**Kočevski tisk**

Naklada:

**3000 izvodov**

Podatki o objavah v reviji so navedeni v bibliografskih bazah COBISS in ICONDA (The Int. Construction Database) ter na

<http://www.zveza-dgits.si>

Letno izide 12 števil. Letna naročnina za individualne naročnike znaša 22,95 EUR; za študente in upokojene 9,18 EUR; za družbe, ustanove in samostojne podjetnike 169,79 EUR za en izvod revije; za naročnike iz tujine 80,00 EUR. V ceni je všteti DDV.

Poslovni račun ZDGITS pri NLB Ljubljana:

SI56 0201 7001 5398 955

## Navodila avtorjem za pripravo člankov in drugih prispevkov

- Uredništvo sprejema v objavo znanstvene in strokovne članke s področja gradbeništva in druge prispevke, pomembne in zanimive za gradbeno stroko.
- Znanstvene in strokovne članke pred objavo pregleda najmanj en anonimen recenzent, ki ga določi glavni in odgovorni urednik.
- Besedilo prispevkov mora biti napisano v slovenščini.
- Besedilo mora biti izpisano z znaki velikosti 12 pik z dvojnimi presledki med vrsticami.
- Prispevki morajo imeti naslov, imena in priimke avtorjev ter besedilo prispevka.
- Besedilo člankov mora obvezno imeti: naslov članka v slovenščini (velike črke); naslov članka v angleščini (velike črke); oznako ali je članek strokoven ali znanstven; nazive, imena in priimke avtorjev ter njihove naslove; naslov POVZETEK in povzetek v slovenščini; naslov SUMMARY in povzetek v angleščini; naslov UVOD in besedilo uvoda; naslov naslednjega poglavja (velike črke) in besedilo poglavja; naslov razdelka in besedilo razdelka (neobvezno); ..., naslov SKLEP in besedilo sklepa; naslov ZAHVALA in besedilo zahvale (neobvezno); naslov LITERATURA in seznam literature; naslov DODATEK in besedilo dodatka (neobvezno). Če je dodatkov več, so dodatki označeni še z A, B, C, itn.
- Poglavlja in razdelki so lahko oštevilčeni.
- Slike, preglednice in fotografije morajo biti omenjene v besedilu prispevka, oštevilčene in opremljene s podnapisi, ki pojasnjujejo njihovo vsebino. Vse slike in fotografije v elektronski obliki (slike v običajnih vektorskih grafičnih formatih, fotografije v formatih .tif ali .jpg visoke ločljivosti) morajo biti v posebnih datotekah, običajne fotografije pa priložene.
- Enačbe morajo biti na desnem robu označene z zaporedno številko v okroglem oklepaju.
- Kot decimalno ločilo je treba uporabiti vejico.
- Uporabljena in citirana dela morajo biti navedena med besedilom prispevka z oznako v obliki: (priimek prvega avtorja, leto objave). V istem letu objavljena dela istega avtorja morajo biti označena še z oznakami a, b, c, itn.
- V poglavju LITERATURA so uporabljena in citirana dela opisana z naslednjimi podatki: priimek, ime prvega avtorja (lahko okrajšano), priimki in imena drugih avtorjev, naslov dela, način objave, leto objave.
- Način objave je opisan s podatki: knjige: založba; revije: ime revije, založba, letnik, številka, strani od do; zborniki: naziv sestanka, organizator, kraj in datum sestanka, strani od do; raziskovalna poročila: vrsta poročila, naročnik, oznaka pogodbe; za druge vrste virov: kratek opis, npr. v zasebnem pogovoru.
- Prispevke je treba poslati glavnemu in odgovornemu uredniku prof. dr. Janezu Duhovniku na naslov: FGG, Jamova 2, 1000 LJUBLJANA oz. janez.duhovnik@fgg.uni-lj.si. V spremnem dopisu mora avtor članka napisati, kakšna je po njegovem mnenju vsebina članka (pretežno znanstvena, pretežno strokovna) oziroma za katero rubriko je po njegovem mnenju prispevek primeren. Prispevke je treba poslati v enem izvodu na papirju in v elektronski obliki v formatu MS WORD in v 8. točki določenih grafičnih formatih.

Uredništvo

# Vsebina • Contents

## Jubilej

stran **30**

doc. dr. Janez Reflak – 70 let

## Članki • Papers

stran **31**

dr. Tomaž Rojc, univ. dipl. inž. grad.

### O MULTIPLIKATIVNI TEORIJ HIPERELASTO-PLASTIČNIH TELES PRI VELIKIH DEFORMACIJAH IN OBJEKTIVNOSTI NUMERIČNIH ALGORITMOV, I. DEL: TEORIJA

USE OF MULTIPLICATIVE THEORY OF HYPERELASTO-PLASTIC BODIES AT LARGE STRAINS AND OBJECTIVITY OF NUMERICAL ALGORITHMS

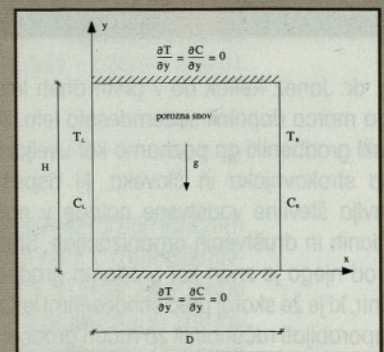
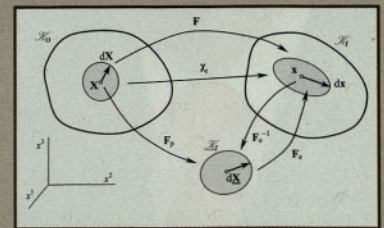
stran **45**

as. Janja Kramer, univ. dipl. inž. grad.,

izr. prof. dr. Renata Ječl, univ. dipl. inž. grad.

### NUMERIČNA REŠITEV KONVEKTIVNEGA TOKA V POROZNI KOTANJI ZARADI DVOJNE DIFUZIJE

NUMERICAL SOLUTION OF DOUBLE DIFFUSION NATURAL CONVECTION IN POROUS CAVITY



## Poročila s prireditvev

**28. zborovanje gradbenih konstruktorjev Slovenije**

## Seminarji

**SEMINARJI O EVROKODIH**

## Koledar prireditvev

J. K. Juteršek, univ. dipl. inž. grad.

Slika na naslovnici: Gradnja Puhovega mostu preko Drave na Ptuj, foto Willy Brueckner



Doc. dr. Janez Reflak bo v prvih dneh letošnjega marca dopolnil sedemdeseto leto. Slovenski gradbeniki ga poznamo kot uveljavljenega strokovnjaka in človeka, ki uspešno opravlja številne vodstvene naloge v naših poklicnih in društvenih organizacijah. Starejšim od njega je znan kot prodoren gradbeni inženir, ki je že skoraj pred štiridesetimi leti začel uporabljati računalnik za račun gradbenih konstrukcij in sodeloval pri projektiranju, reviziji in pregledih konstrukcij mostov. Nekaj mlajši od njega smo se z njim prvič srečali pri vajah iz višje matematike, ki jih je že vodil, čeprav je bil le študent – demonstrator. Številne generacije gradbenikov ga poznajo kot asistenta in učitelja pri predmetih Elastostatika in Ploskovne konstrukcije na gradbenem oddelku ljubljanske univerze, najmlajši gradbeniki pa so se z njim srečali v inženirski zbornici, kjer vodi komisijo za strokovne izpite. Poznamo ga tudi kot funkcionarja v strokovnih in športnih organizacijah.

Slavljenčeva življenjska pot ni bila vseskozi ravna in gladka. Rodil se je staršema, majhnima posestnikoma na Ribniškem Pohorju, ki

## doc. dr. Janez Reflak – 70 let

sta imela pet otrok. Ker je bila osnovna šola v Ribnici med vojno porušena, je moral štiriletno osnovno šolanje prekiniti in končati po vojni. 1948. leta se je vpisal na klasično gimnazijo v Mariboru. V gimnaziji je bil dejaven v mladinski organizaciji. Po maturi 1957. leta je odšel v vojsko, ker mu doma niso mogli priskrbeti zadosti denarja za študij. Po opravljenem služenju vojske, kjer je opravil tudi oficirsko šolo, se je jeseni 1958. leta vpisal na gradbeni oddelek FAGG ljubljanske univerze in po štirih letih in pol marca 1963. leta diplomiral. Preživel je se je s podporo staršev, s štipendijo, ki mu jo je od maja 1959. leta dajala občina v Radljah ob Dravi ter s svojim delom, saj je bil med študijem tri leta demonstrator pri matematičnih predmetih, med počitnicami pa je bil vsako leto na praksi v gradbenih podjetjih. V študentski organizaciji je bil že prvo leto član odbora združenja gradbenikov, nato pa njegov predsednik in član fakultetnega odbora.

Diplomo je opravil pri mentorju prof. Marinčku na Katedri za metalne konstrukcije. Tu se je 1963. leta sprva zaposlil honorarno, ko je bil konec tega leta izvoljen za asistenta, pa redno. Na FAGG oziroma kasneje na FGG je bil s krajšo prekinitevjo zaposlen do upokojitve leta 2001. Magistrski študij je opravil 1974. leta, doktorat pa 1990. leta. 1980. leta je bil izvoljen za višjega predavatelja, 1991. leta pa za docenta za področje Mehanika konstrukcij. Vsa leta na fakulteti je poleg obsežnega pedagoškega dela opravljal tudi številne funkcije zlasti v upravnih odborih, od 1995. do 2001. leta pa je bil prodekan za gospodarske zadeve. Deloval je tudi kot predstavnik fakultete na univerzi in drugih takratnih ustanovah. Najpomembnejše delo na fakulteti pa je opravil kot pobudnik ustanovitve in dolgoletni predstojnik Inštituta za konstrukcije, potresno inženirstvo in računalništvo, ki je nastal iz Računskega centra, in ki je še danes največja interna enota na fakulteti. V inštitutu je ustvaril

pogoje, v katerih so zrasi številni sedanji raziskovalci in učitelji na fakulteti ter drugih ustanovah. Brez njegove vztrajnosti in sposobnosti zavzemanja za uresničljive zamisli bi težko prišlo do ustanovitve, še teže pa do take rasti inštituta, ki je lansko leto slavil že 35. obletnico. V inštitutu je samostojno in s sodelavci opravil številne strokovne in raziskovalne naloge.

Uspešen je bil tudi kot direktor Inštituta za metalne konstrukcije v Ljubljani, kjer je bil zaposlen v letih 1985 do 1988.

Kot odličen organizator je prevzel predsedovanje Zveze gradbenih inženirjev in tehnikov v času velikih družbenih sprememb. Tudi njegova zasluga je, da je zveza preživela ta čas in da še vedno deluje. Danes je podpredsednik izvršnega odbora zveze, skrbi pa tudi za organizacijo pripravljajlnih seminarjev za strokovne izpite.

Bil je ustanovni član Inženirske zbornice Slovenije, kjer je opravljal številne funkcije, najpomembnejša pa je predsedovanje komisiji za strokovne izpite, ki jo vodi tudi sedaj. Sodeloval je pri vzpostavitvi sistema strokovnih izpitov in pripravi predpisov, ki urejajo to področje.

Slavljenec je znan tudi v športnih krogih, saj je bil 15 let predsednik Namiznoteniškega kluba Olimpija, dvakrat, skupaj 10 let, predsednik Namiznoteniške zveze Slovenije in eno leto predsednik Namiznoteniške zveze Jugoslavije.

Doc. dr. Janez Reflak je številne naloge opravljal z veliko zavzetostjo, za kar so se mu društvene in poklicne organizacije oddolžile z najvišjimi priznanji, širša družba pa z državnimi odlikovanji.

Slovenski gradbeniki se mu ob sedemdesetletnici za vse opravljeno delo zahvaljujemo in mu še naprej želimo vse najboljše!

Janez Duhovnik

# O MULTIPLIKATIVNI TEORIJI HIPERELASTO-PLASTIČNIH TELES PRI VELIKIH DEFORMACIJAH IN OBJEKTIVNOSTI NUMERIČNIH ALGORITMOV. I. DEL: TEORIJA

## ON MULTIPLICATIVE THEORY OF HYPERELASTO-PLASTIC BODIES AT LARGE STRAINS AND OBJECTIVITY OF NUMERICAL ALGORITHMS. PART I: THEORY

**dr. Tomaž Rojc, univ. dipl. inž. grad.**

Prijateljeva ulica 32  
1000 LJUBLJANA  
tomaz.rojc@guest.arnes.si

**Znanstveni članek**

UDK 624.044 + 539.3 + 519.61

**Povzetek** | Namen tega dela prispevka je seznaniti se s fizikalno-matematičnim pomenom mehanskih veličin v konstitutivnih enačbah, zasnovanih na t. i. multiplikativnem pristopu in hiperelastični zvezi med napetostmi in deformacijami, in sicer za potrebe drugega dela prispevka, v katerem se bomo ukvarjali s fenomenom plastičnega zmanjševanja volumna računskih modelov, temelječih na metodi končnih elemenov. Podan je krajši pregled multiplikativne teorije. Na temelju osnovnih zakonov in multiplikativni dekompoziciji totalnega deformacijskega gradienta na elastični in plastični del so izpeljane konstitutivne enačbe izotropnega hiperelasto-plastičnega materialnega modela, in sicer v obliki s Fingerjevim elastičnim deformacijskim tenzorjem v nizu glavnih konstitutivnih spremenljivk. Enačbe, ki jih je v taki obliki prvi izpeljal Simo in jih objavil v letu 1988, so z razliko tu izpeljane z uporabo kartezičnih tenzorjev. Elastični Fingerjev deformacijski tenzor je izbran na temelju principa materialne objektivnosti in posledične izotropne lastnosti konstitutivnih funkcij. Asociativno pravilo tečenja je tako kot pri Simu izpeljano iz principa največje plastične disipacije ob pomoči Kuhn-Tuckerjevega optimizacijskega pogoja. Dobljene konstitutivne enačbe so analizirane iz različnih vidikov. Tako je za izotropne materiale vpeljan manjkajoči pogoj za plastični spin, s pomočjo katerega je dobljena tudi druga oblika pravila tečenja, poznana iz klasične aditivne teorije Greena in Naghdija. Podana je analiza pravila tečenja iz vidika vpliva oblike funkcije tečenja na hitrost plastične volumenske deformacije. Predstavljene so tudi alternativne oblike konstitutivnih enačb s von Misesovo funkcijo tečenja.

**Summary** | The aim of this part of the paper is to present physical and mathematical meaning of mechanical quantities involved in constitutive equations formulated on the multiplicative approach and hyperelastic stress-strain relations. It provides a basis for the second part, where a numerical phenomenon of the plastic volume reduction of finite element models will be investigated. A brief review of the multiplicative theory is given. Based on fundamental laws and multiplicative decomposition of the total deformation gradient into an elastic and a plastic part, constitutive equations of an isotropic

hyperelasto-plastic material are developed in the form with the Finger elastic deformation tensor as one of the main constitutive variables. The equations, being first formulated by Simo in 1988, are here, differently from Simo, derived by the use of Cartesian tensor structures. The Finger elastic deformation tensor is introduced regarding the statement of isotropy, which follows from the material objectivity principle. The associative flow rule is derived from the principle of maximum plastic dissipation considering the Kuhn-Tucker optimality conditions as by Simo. The constitutive equations are then analysed from the several aspects. Thus, a need for the zero plastic spin is established as an additional condition for isotropic materials. Using the additional condition, another form of the flow rule known from the classical additive theory by Green and Naghdi is followed. In addition, an analysis of the flow rule regarding effect of the yield function form on the rate of the plastic volume change is given and, finally, other possible forms of the constitutive equations based on the von Mises yield function are presented.

## 1 • UVOD

Znano je, da imajo hidrostatične tlačne napetosti pri kovinskih materialih majhen vpliv na mejo tečenja. Drugo, prav tako znano fenomenološko dejstvo je, da ostaneje volumenske spremembe metalov majhnega velikostnega reda ne glede na velikost plastičnih deformacij. Omenjenim fenomenološkim dejstvom sledijo elasto-plastične teorije in zato lahko pričakujemo, da bodo izpolnjena tudi v primeru numeričnega reševanja problemskih enačb, ki jih nudijo te teorije. Vendar v računski praksi to ne drži vedno. V raziskovalni javnosti je bila sporočena vest, da mnogi numerični algoritmi, ki so uporabljeni za reševanje elasto-plastičnih problemov v področju velikih deformacij, ne izpolnjujejo omenjenih pričakovanj. Volumen končnih elementov se namreč v plastičnem območju stalno plastično zmanjšuje. Ta numerični fenomen bo obravnavan v drugem delu prispevka, v tem pa si bomo podrobneje ogledali teoretična izhodišča elasto-plastičnega modela kovinskih materialov prav iz vidika volumenskih sprememb. Pri tem se bomo omejili samo na multiplikativno teorijo, saj je le-ta v zadnjih dvajsetih letih zavzela vodilno mesto pri opisovanju elasto-neelastičnega obnašanja materialov v območju velikih deformacij. Kot zanimivost naj navedemo, da so elasto-plastični materialni modeli, ki so v rabi v komercialnem programu ABAQUS/Standard (ABAQUS, 2004), zasnovani prav na principu multiplikativnega pristopa.

Glede na dejstvo, da je multiplikativna teorija v našem slovenskem prostoru premalo poznana, je večji del tega prispevka namenjen krajšemu pregledu teorije in izpeljavi konstitutivnih enačb. Izhodišče teorije je multiplikativna razdelitev totalnega deformacijskega gradienta na elastični in plastični del,  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{F}_p$ . Pri predstavitvi teorije smo se oprli na originalna dela Leeja, (Lee, 1969), Greena in Naghdija ter drugih, ki

so navedeni v seznamu uporabljene literature. Pri izpeljavi konstitutivnih enačb smo uporabili dela Sima ((Simo, 1988), (Simo, 1992)), enega izmed najprofulzivnejših raziskovalcev na področju reševanja nelinearnih mehanskih problemov v začetku devetdesetih let prejšnjega stoletja. Snov v tem delu prispevka ni podana v strogo matematičnem jeziku, saj smo jo želeli predstaviti bolj s fizikalno mehanskega vidika. Temu ustrezno je prirejen simbolni zapis tenzorskih struktur in kontrakcija kartezičnih tenzorjev preko enega ali dveh indeksov, npr.  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_{ik} B_{kj} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ , in  $\mathbf{A} : \mathbf{B} = A_{ij} B_{ij}$ , ali  $\mathbf{L} : \mathbf{B} = L_{ijkl} B_{kl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ , kjer je s poševno krepko črko  $\mathbf{L}$  označen tenzor četrtega reda, s pokončno krepko črko  $\mathbf{B}$  tenzor drugega reda,  $\{\mathbf{e}_i\}$  je sistem baznih vektorjev in  $\otimes$  označuje tenzorski produkt. Vektorji, tj. tenzorji prvega reda, bodo označeni na enak način kot tenzorji drugega reda, toda z drugimi črkami. Razlika med njimi bo opisana v tekstu. Torej skalarni produkt med vektorjema  $\mathbf{X}$  in  $\mathbf{Y}$  bo zapisan takole  $\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y} = X_i Y_i$ , skalarni produkt tenzorja drugega reda z vektorjem pa  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = A_{ij} X_j \mathbf{e}_i$  (glej npr. (Kuščer, 1994) str. 328). Skalarji bodo označevani vedno s poševnimi neodebeljenimi črkami. Komponente tenzorjev v zgornjih izrazih so obravnavane kot skalarji, označeni z ustreznimi indeksi.

Prispevek smo razdelili na tri dodatne razdelke. V drugem je podan komentar k linearni zvezi med napetostmi in deformacijami, znani iz infinitezimalne, geometrijsko linearne teorije. V tretjem sledi obširnejša izpeljava in analiza konstitutivnih enačb elasto-plastičnega izotropnega modela, pri čemer so posamezne faze izpeljave, analiza dobljenih enačb in nekateri posebni primeri teh enačb predstavljeni v samostojnih podrazdelkih. Zveza z drugim delom tega prispevka pa je podana v sklepnem 4. razdelku.

## 2 • TEORIJA MAJHNIH DEFORMACIJ: LINEARNI ELASTIČNI ODZIV IN PLASTIČNE DEFORMACIJE

V običajni inženirski in tudi raziskovalni praksi je za opis izotropnega elastičnega materiala, kot posledica predpostavke o majhnih deformacijah, uporabljen klasični linearni elastični model, ki povezuje tenzor napetosti  $\boldsymbol{\sigma}$  s tenzorjem infinitezimalne specifične deformacije  $\boldsymbol{\varepsilon}$ :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} = \lambda \operatorname{tr}[\boldsymbol{\varepsilon}] \mathbf{1} + 2 \mu \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \text{ali} \quad \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} = \lambda \varepsilon_{aa} \delta_{ij} + 2 \mu \varepsilon_{ij}. \quad (1)$$

Zgoraj sta  $\lambda$  in  $\mu$  Lamjevi konstanti ( $\mu$  je strižni modul),  $\mathbf{C}$  je tenzor elastičnih modulov,  $\operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \equiv \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{1} = \varepsilon_{aa}$  je sled tenzorja malih specifičnih deformacij  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , tj.:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T), \quad \text{ali} \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2)$$

in  $\mathbf{1}$  je tenzorska enota drugega reda, katere kartezične komponente so znani Kronekerjevi simboli  $\delta_{ij}$ . V komponentnem zapisu smo uporabili sumacijski dogovor za ponovljene indekse, npr.  $\varepsilon_{00} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ , v invariantnem zapisu (2a) pa gradientni operator  $\nabla$ . Dvignjena oznaka  $\nabla \mathbf{u}$  v zadnji enačbi označuje operacijo transponiranja gradienta pomika  $\nabla \mathbf{u}$ . V nadaljevanju bomo uporabljali samo še invariantni zapis, komponentnega pa po potrebi.

Definicija (1) temelji na omejitvi  $|u_{i,j}| \ll 1$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ , kjer pomeni  $u_{i,j}$  parcialni odvod komponente vektorja pomika  $\mathbf{u} = u_i \mathbf{e}_i$  po koordinati  $x^j$  kartezičnega koordinatnega sistema. V okviru omenjene omejitve ima skalar  $\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \equiv \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{1} = \varepsilon_{00}$ , ki ga lahko označimo tudi z  $3\varepsilon_0$ , kjer je  $\varepsilon_0$  sferični del tenzorja  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , zanimiv geometrijski pomen. Predstavlja namreč linearno aproksimacijo volumenske deformacije  $\varepsilon_v$ , materialnega delca:

$$\varepsilon_v = (dv - dV) / dV = dv/dV - 1 \approx 3 \varepsilon_0, \quad (3a)$$

$$3 \varepsilon_0 = \text{tr}[\boldsymbol{\varepsilon}] = \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{1} = \varepsilon_{ij} \delta_{ij} = u_{1,1} + u_{2,2} + u_{3,3}, \quad (3b)$$

kjer sta  $dv$  in  $dV$  prostornini elementarnega dela telesa v deformirani in nedeformirani legi. Zanimiv pomen ima tudi deviatorski del tenzorja specifičnih malih deformacij, ki je definiran kot razlika med  $\boldsymbol{\varepsilon}$  in sferičnim oz. izotropnim tenzorjem  $\varepsilon_0 \mathbf{1} \equiv \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{1}$ :

$$\text{dev}[\boldsymbol{\varepsilon}] = \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{3} \text{tr}[\boldsymbol{\varepsilon}] \mathbf{1} = \boldsymbol{\varepsilon} - \varepsilon_0 \mathbf{1}. \quad (4)$$

Ker je sled tega tenzorja enaka nič, torej

$$\text{tr}[\text{dev}[\boldsymbol{\varepsilon}]] = \text{dev}[\boldsymbol{\varepsilon}] : \mathbf{1} = 0, \quad (5)$$

pomeni, da predstavlja deviatorska komponenta  $\text{dev}(\boldsymbol{\varepsilon})$  izohorični ali nestisljivi del specifične deformacije, poznan tudi kot preoblikovalni del. Če upoštevamo delitev  $\boldsymbol{\varepsilon}$  na sferični in deviatorski del, lahko elastični zakon (1) zapišemo v naslednji obliki:

$$\boldsymbol{\sigma} = \kappa \text{tr}[\boldsymbol{\varepsilon}] \mathbf{1} + 2 \mu \text{dev}[\boldsymbol{\varepsilon}] = \kappa 3\varepsilon_0 \mathbf{1} + 2 \mu \text{dev}[\boldsymbol{\varepsilon}], \quad (6)$$

kjer smo vpeljali t. i. kompresijski modul  $\kappa = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ . Sferična komponenta napetostnega tenzorja  $\sigma_0 = \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma})$  predstavlja hidrostatično napetost oz. izotropni del napetostnega tenzorja, ki ga v literaturi

označujejo s  $p$  (negativni pritisk). Zanj dobimo iz (6), ob upoštevanju definicije (5) in ocene (3a) izraz, iz katerega je razviden tudi pomen kompresijskega modula. Torej:

$$p \equiv \sigma_0 = \frac{1}{3} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{1} = \frac{1}{3} \kappa 3\varepsilon_0 \mathbf{1} : \mathbf{1} = \kappa 3\varepsilon_0 \Rightarrow p \approx \kappa \varepsilon_v, \quad (7a,b)$$

$$\text{ali } \kappa \approx p/\varepsilon_v, \quad (7c)$$

in če v (6) odštejemo zgornji hidrostatični del, dobimo zvezo med deviatorskima komponentama  $\text{dev}(\boldsymbol{\sigma})$  in  $\text{dev}(\boldsymbol{\varepsilon})$  ter strižnim modulom  $\mu$ :

$$\mathbf{s} \equiv \text{dev}[\boldsymbol{\sigma}] = \boldsymbol{\sigma} - p \mathbf{1} = \boldsymbol{\sigma} - \kappa 3\varepsilon_0 \mathbf{1} = 2 \mu \text{dev}[\boldsymbol{\varepsilon}]. \quad (8)$$

V linearni teoriji imata torej sferični in deviatorski del tenzorja specifičnih deformacij in napetosti preprosto fizikalni razlago, ki jo lahko koristno izrabimo tudi pri opisovanju elasto-plastičnih lastnosti materialov. Na primer, fizikalna narava plastičnih deformacij je pri kovinskih materialih izohorična (nestisljiva), saj so le-te posledica relativnega drsenja v atomskih ravninah kristalov. Torej imajo v linearni teoriji plastične deformacije lastnost deviatorskega tenzorja. Evolucijske enačbe za izotropni elasto-plastični material zato lahko zapišemo takole:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_e + \boldsymbol{\varepsilon}_p, \quad \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \text{dev}[\boldsymbol{\varepsilon}] = \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{3} \text{tr}[\boldsymbol{\varepsilon}] \mathbf{1}, \quad \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}_e + \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}_p, \quad (9a,b,c)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = p \mathbf{1} + \mathbf{s}, \quad p = \frac{1}{3} \text{tr}[\boldsymbol{\sigma}], \quad \dot{p} = \kappa \text{tr}[\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}], \quad \dot{\mathbf{s}} = 2 \mu (\dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} - \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}_p), \quad (9d - g)$$

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}_p = \gamma \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad (9h)$$

$$f = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{s} : \mathbf{s}} - Y(e_p), \quad f \leq 0, \quad \dot{e}_p \geq 0, \quad \dot{e}_p f = 0, \quad (9i - l)$$

kjer je  $f(\mathbf{s}, Y)$ , (9i), von Misesova funkcija tečenja, ki je neodvisna od hidrostatičnega dela napetostnega tenzorja. Prav ta, samo od deviatorske komponente  $\mathbf{s}$ , (8), odvisna funkcija tečenja pa zagotavlja v asociativnem pravilu tečenja (9h) nestisljivost plastične deformacije  $\dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}_p$ , tj.  $\text{tr}(\dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}_p) = \text{tr}(\dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}_p) = 0$ .

### 3 • LOKALNA MULTIPLIKATIVNA ELASTO-PLASTIČNA TEORIJA

#### 3.1 Definicija kinematičnih veličin v primeru velikih deformacij

Ko opazujemo neki fizikalni pojav, ki je posledica deformacije telesa, ga lahko opišemo z mehanskimi veličinami, ki jih definiramo kot polja nad 'sliko' območja deformiranega ali pa nedeformiranega – začetnega geometrijskega stanja telesa. V nadaljevanju bomo uporabljali izraza deformirana in nedeformirana konfiguracija. V primeru majhnih deformacij je razlika med omenjenima konfiguracijama zanemarljiva in zato ni potrebno razlikovati med različnimi opisi mehanskih veličin. Ta

aproksimacija pa ne velja, če telo utрпи opazne geometrijske spremembe glede na njegovo prvotno-začetno obliko. V tem primeru moramo upoštevati razlike med njegovimi konfiguracijami tudi pri opisovanju mehanskih veličin. Pri tem igra pomembno vlogo deformacijski gradient, ki ga bomo označevali s  $\mathbf{F}$ . Z njim bomo opisovali lokalno deformacijsko stanje telesa v trenutni konfiguraciji  $\mathcal{N}_t = \mathcal{N}(t)$  relativno glede na njegovo začetno (referenčno) konfiguracijo  $\mathcal{N}_0 = \mathcal{N}(t = t_0)$ , kjer  $t$  označuje čas. Če je deformacija telesa definirana

kot enolična točkovna preslikava  $\chi_t$  začetnih leg delcev telesa  $\mathbf{X}$  v trenutne lege  $\mathbf{x}$ , torej  $\mathbf{x} = \chi_t(\mathbf{X}) \equiv \chi(\mathbf{X}, t)$ , lahko vlogo  $\mathbf{F}$  predstavimo z

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}, \quad (10a)$$

$$\text{kjer je } \mathbf{F} = \partial \chi_t / \partial \mathbf{X} = \nabla_{\mathbf{X}} \chi_t(\mathbf{X}) = \mathbf{1} + \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{u}, \quad \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x} - \mathbf{X} \quad (10b, c)$$

$$\text{in } J = \det[\mathbf{F}] > 0. \quad (10d)$$

Pri tem predstavljata  $d\mathbf{x}$  in  $d\mathbf{X}$  elementarna vektorja deformiranega in nedeformiranega materialnega linijskega elementa v konfiguracijah  $\mathcal{H}_t$  in  $\mathcal{H}_0$ ,  $\mathbf{u}$  je vektor pomika in  $\nabla_{\mathbf{X}}$  gradientni operator nad poljem, definiranim v začetni konfiguraciji  $\mathcal{H}_0$ . Glede na definicijo (10a) bo deformacijski gradient obravnavan kot dvotočkovni tenzor (glej npr. (Marsden, 1983) ali na spletu dostopno razpravo (Rojc, 2005) in tam navedeno literaturo).

Deformacijski gradient vsebuje popolno lokalno informacijo o deformacijskem stanju telesa, tj. raztezek in rotacijo poljubnega lokalnega linijskega elementa, njegova determinanta  $J$  pa določa razmerje med deformiranim in začetnim volumenskim elementom,  $J = dv/dV$ . V linearni teoriji smo to razmerje ocenili z aproksimacijo (3), ki jo lahko glede na definicijo  $\mathbf{F}$ , (10b) izrazimo še takole:  $dv/dV \approx 1 + \text{tr}(\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{u}) = \text{tr}(\mathbf{F}) - 2$ . Deformacijski gradient predstavlja tudi osnovo vsem ostalim deformacijskim veličinam, ki opisujejo izključno lokalno deformacijo v materialnih točkah telesa kot npr. desnemu Cauchy-Greenovemu in Euler-Cauchyjevemu deformacijskemu tenzorju,  $\mathbf{C}$  in  $\mathbf{c}$ , ali Green-St. Venantovemu in Euler-Almansijevemu tenzorju specifične deformacije,  $\mathbf{E}$  in  $\mathbf{e}$ . (Tako kot v (Rojc, 2005) bodo z malimi črkami označeni tenzorji, katerih definicijsko območje je trenutna prostorska konfiguracija  $\mathcal{H}_t$  z velikimi pa tiste, ki so definirane v t. i. kovariantnem prostoru, po naše predstavljenem z začetno konfiguracijo  $\mathcal{H}_0$ ). Ti tenzorji so definirani kot materialna polja nad začetno konfiguracijo  $\mathcal{H}_0$ , npr.  $\mathbf{C}$  in  $\mathbf{E}$ , ali kot prostorska polja nad trenutno konfiguracijo  $\mathcal{H}_t$ , npr.  $\mathbf{c}$  in  $\mathbf{e}$ . V (Simo, 1988) so imenovani Lagrangeevi in Eulerjevi deformacijski tenzorji. Njihova definicija je naslednja (glej (Rojc, 2005)):

$$\mathbf{E}(\mathbf{X}, t) = \frac{1}{2}[\mathbf{C}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{1}(\mathbf{X})], \quad (11a)$$

$$\text{kjer je } \mathbf{C}(\mathbf{X}, t) \equiv \mathbf{C}(\mathbf{F}) = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}, \quad \mathbf{X} \in \mathcal{H}_0, \quad (11b)$$

$$\mathbf{e}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2}[\mathbf{1}(\mathbf{x}) - \mathbf{c}(\mathbf{x}, t)], \quad (11c)$$

$$\text{kjer je } \mathbf{c}(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{c}(\mathbf{F}) = \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^{-1}, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{H}_t, \quad (11d)$$

$$\text{in } \mathbf{E} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{e} \cdot \mathbf{F}, \quad (11e)$$

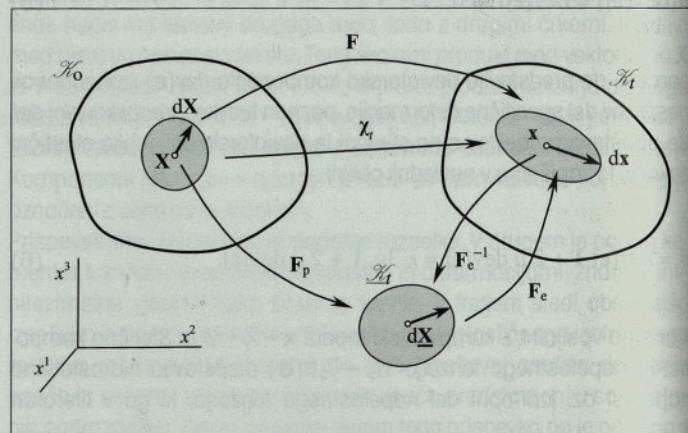
kjer sta  $\mathbf{1}(\mathbf{X})$  in  $\mathbf{1}(\mathbf{x})$  tenzorski enoti drugega reda. Omenjena temeljna lastnost deformacijskega gradienta je v preteklosti porodila idejo o elastoplastični teoriji, ki temelji na razdelitvi deformacijskega gradienta  $\mathbf{F}$  na elastični in plastični del,  $\mathbf{F}_e$  in  $\mathbf{F}_p$ , (glej (Lee, 1969)), in ne na razdelitvi deformacijskih tenzorjev  $\mathbf{C}$  ali  $\mathbf{E}$ , ki so generirani iz  $\mathbf{F}$  (glej npr. aditivno teorijo v (Green, 1965)). Pri tem je bila predlagana multiplikativna razdelitev v obliki:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{F}_p, \quad J = J_e J_p, \quad (12a, b)$$

kjer so

$$J = \det[\mathbf{F}] > 0, \quad J_e = \det[\mathbf{F}_e] > 0, \quad J_p = \det[\mathbf{F}_p] > 0, \quad (12c, d, e)$$

ki ima izvor v verižnem pravilu, (Lee, 1969), npr.  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_n \cdot \dots \cdot \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{F}_0$ . Pri tem so  $\mathbf{F}_i, i = 1, \dots, n$ , deformacijski gradienti, ki opisujejo deformacijska stanja telesa v konfiguracijah  $\mathcal{H}_i$  relativno glede na njihovo predhodno stanje v konfiguracijah  $\mathcal{H}_{i-1}$ . V tem primeru predstavljajo  $\mathcal{H}_i$  zvezne konfiguracije telesa v zaporednih trenutkih  $t_i$ , tj.  $t_n \equiv t > \dots > t_1 > \dots > t_0$ , gradienti  $\mathbf{F}_i$  pa pripadajo ustreznim časovnim inkrementom in jih zato lahko označimo z  $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}(t_i, t_{i-1})$ . V (12)  $\mathbf{F}_e$  in  $\mathbf{F}_p$  ne pripadata različnim časovnim inkrementom, temveč celotnemu časovnemu intervalu  $(t_0, t)$ , torej  $\mathbf{F}_e = \mathbf{F}_e(t, t_0)$  in  $\mathbf{F}_p = \mathbf{F}_p(t, t_0)$ . Faktorja  $\mathbf{F}_e$  in  $\mathbf{F}_p$  tudi ne predstavljata gradienta zveznih točkovnih preslikav, kot to velja za definicijo (10b) totalnega deformacijskega gradienta  $\mathbf{F}$ . Bistvo multiplikativne razdelitve (12) je, da  $\mathbf{F}_e$  predstavlja tisti del totalnega deformacijskega gradienta  $\mathbf{F}$ , ki je neposredno povezan z elastičnim odzivom telesa in temu odzivu pripadajočimi napetostmi. Zatorej operacija  $\mathbf{F}_e^{-1}$  nad okolico vsakega delca, ki v trenutku  $t$  skupaj z ostalimi sestavlja zvezno trenutno konfiguracijo  $\mathcal{H}_t$ , vodi v t. i. breznapetostno stanje (glej (Lee, 1969), (Green, 1971)). Delci telesa v omenjenem namišljenem stanju določajo t. i. breznapetostno vmesno konfiguracijo  $\mathcal{H}_i$ , ki ne predstavlja zvezne celote, temveč množico medseboj nepovezanih njihovih lokalnih breznapetostnih konfiguracij (glej sliko 1). Zato lahko definicijo (12) obravnavamo tudi kot teoretični opis fizikalnega smisla popolne mehanske razbremenitve vsakega delca telesa posebej, njihove konfiguracije v  $\mathcal{H}_i$  pa kot deformirane konfiguracije, ki so posledica samo plastičnega dela  $\mathbf{F}_p$  totalne deformacije oziroma totalnega deformacijskega gradienta  $\mathbf{F}$ .



Slika 1 • Multiplikativna dekompozicija totalnega deformacijskega gradienta  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{F}_p$ ; shematični prikaz lokalne vmesne oz. breznapetostne konfiguracije  $\mathcal{H}_i$ .

V 70 in 80 letih prejšnjega stoletja je multiplikativna teorija sprožila kar nekaj pomislov o njeni upravičenosti in splošnosti v primerjavi z aditivno teorijo, predlagano v (Green, 1965) (glej npr. (Green, 1971), (Casey, 1980), (Casey, 1981), (Nemat-Nasser, 1982), (Casey, 1987)). Eden izmed očitkov avtorjem, ki so razvoj konstitutivnih enačb temeljili na multiplikativnem izhodišču (12), je bila nedoslednost pri upoštevanju pogojev materialne objektivnosti. Fizikalni pojav moramo namreč opisati v obliki, ki ni odvisna od rotacije kartezičnih koordinatnih sistemov, ali drugače povedano, opis fizikalnega pojava mora biti neodvis-



en od vsiljenega togega gibanja (glej (Gurtin, 1981), ali definicije 1 v (Rojc, 2004)). Ta zahteva mora seveda veljati za vse fizikalne količine, torej tudi za vmesno konfiguracijo  $\mathcal{X}_i$ , ki pa so jo v preteklosti na osnovi ad hoc fenomenološkega pristopa izvzeli iz preizkusa materialne objektivnosti (Lubarda, 1981), (Lee, 1981) in privzeli simetričnost elastičnega faktorja  $\mathbf{F}_e$ , torej  $\mathbf{F}_e^T = \mathbf{F}_e$ . Tak pristop je upravičeno vzbujal dvome v splošno veljavnost multiplikativne teorije, saj je z omenjeno predpostavko že na samem začetku izključeval možnost, da bi lahko s to teorijo opisovali tudi anizotropno obnašanje materialov. Simo je v (Simo, 1988) podal izpeljavo izotropnega elastoplastičnega materiala na način, ki ne izključuje omenjene možnosti. Njegova izpeljava namreč ne temelji na aproksimaciji faktorja  $\mathbf{F}_e$  s simetričnim tenzorjem, kot je bilo predlagano v (Lubarda, 1981) in (Lee, 1981). S tem je bil v primerjavi z delom Dashnerja (Dashner, 1986) ovržen pomislek glede splošne veljavnosti multiplikativne razdelitve deformacijskega gradienta še z drugačnega vidika.

Prve raziskave na področju multiplikativnega pristopa so bile usmerjene predvsem v iskanje ustreznih deformacijskih tenzorjev za popis elastičnega in plastičnega odziva in v tej zvezi tudi v oblikovanje konstitutivnih enačb za razvoj plastičnih deformacij (glej npr. (Nemat-Nasser, 1982), (Kleiber, 1982), (Lubliner, 1984)). V tem razdelku se bomo omejili samo na izbiro ustreznih deformacijskih veličin. Če zanemarimo vpliv elastičnega dela lokalne rotacije ali spina delcev, lahko elastični odziv opišemo s funkcijo elastičnega dela deformacijskega tenzorja ali tenzorja specifičnih deformacij in nizom notranjih spremenljivk, ki zajamejo vpliv elastične anizotropije, razvoja plastičnega dela deformacij, plastične anizotropije, ki je posledica plastičnega spina, in drugih disipacijskih vplivov. Samo v tem primeru je namreč napetostni tenzor simetričen. Za področje velikih deformacij je po Hillu (Hill, 1968) na voljo množica tenzorjev specifičnih deformacij, ki so v znani funkcijski zvezi s  $\mathbf{F}$ . Zato, če poznamo vsaj enega izmed njih, lahko z njegovo pomočjo izračunamo tudi ostale. Katerega od njih bomo v konstitutivskih enačbah izbrali za opis deformacijskega stanja, pa je odvisno predvsem od definicije materialnega modela. Iz množice tenzorjev specifične deformacije obstajata dva, ki sta v najpreprostejši (direktni) funkcijski zvezi s totalnim deformacijskim gradientom  $\mathbf{F}$ . Prvi je Green-St. Venantov tenzor  $\mathbf{E}$  (11a), ki je v osnovi definiran kot materialno polje, drugi, ki predstavlja prostorsko polje, pa bo predstavljen na koncu razdelka.

Če v (11b) vstavimo namesto totalnega deformacijskega gradienta  $\mathbf{F}$  samo del  $\mathbf{F}_e$  ali  $\mathbf{F}_p$ , dobimo deformacijska tenzorja, ki opisujeta elastični ali plastični del deformacije. Na primer:

$$\mathbf{C}_e(\mathbf{X}, t) = \mathbf{F}_e^T \cdot \mathbf{F}_e \Rightarrow \mathbf{E}_e(\mathbf{X}, t) = \frac{1}{2}[\mathbf{C}_e - \mathbf{1}], \quad \mathbf{X} \in \mathcal{X}_i, \quad (13a,b)$$

$$\mathbf{C}_p(\mathbf{X}, t) = \mathbf{F}_p^T \cdot \mathbf{F}_p \Rightarrow \mathbf{E}_p(\mathbf{X}, t) = \frac{1}{2}[\mathbf{C}_p - \mathbf{1}], \quad \mathbf{X} \in \mathcal{X}_o, \quad (14a,b)$$

kjer smo definicijsko območje tenzorjev poudarili z različnimi argumenti, tj. legami istega delca  $\mathbf{X}$  in  $\mathbf{X}$ , ki pripadata konfiguracijam telesa  $\mathcal{X}_i$  in  $\mathcal{X}_o$ , in dodatno podkrepili s podčrtanim simbolom, če so tenzorji definirani nad območjem  $\mathcal{X}_i$ . (Tu moramo opozoriti, da leg  $\mathbf{X}$  in konfiguracije  $\mathcal{X}_i$  ne moremo definirati z zvezno preslikavo, kot to npr. velja za  $\mathbf{x}$  in  $\mathcal{X}_i$ .  $\mathbf{X}$  in  $\mathcal{X}_i$  sta tu namišljeni entiteti.) Ker sta tenzorja  $\mathbf{E}_e$  in  $\mathbf{E}_p$  definirana v različnih konfiguracijah,  $\mathcal{X}_i$  in  $\mathcal{X}_o$ , ne bomo pisali  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_e + \mathbf{E}_p$ , in tudi ne  $\mathbf{E}_e = \mathbf{E} - \mathbf{E}_p$ . V zapisih, kot je npr.  $\mathbf{E}_e = \mathbf{E} - \mathbf{E}_p$ , in ki so uporabljeni

v (Kleiber, 1982) ali (Nemat-Nasser, 1982), je tenzor  $\mathbf{E}_e$  določen z  $\mathbf{E}_e = \mathbf{F}_p^T \cdot \mathbf{E}_e \cdot \mathbf{F}_p$  (glej en. (15) spodaj).

Zvezo med  $\mathbf{E}_e$  in  $\mathbf{E}_p$  lahko izpeljemo v nekaj korakih, če v (11a,b) vstavimo dekompozicijo (12) in pri tem upoštevamo (13) in (14). Torej:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{X}) &= \frac{1}{2}[\mathbf{F}_p^T \cdot \mathbf{F}_e^T \cdot \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{F}_p - \mathbf{1}] = \frac{1}{2}\mathbf{F}_p^T \cdot [\mathbf{F}_e^T \cdot \mathbf{F}_e - \mathbf{F}_p^{-T} \cdot \mathbf{F}_p^{-1}] \cdot \mathbf{F}_p \\ &= \frac{1}{2}\mathbf{F}_p^T \cdot [\mathbf{C}_e - \mathbf{1} - \mathbf{F}_p^{-T} \cdot \mathbf{F}_p^{-1} + \mathbf{1}] \cdot \mathbf{F}_p = \frac{1}{2}[2 \mathbf{F}_p^T \cdot \mathbf{E}_e \cdot \mathbf{F}_p - \mathbf{1} + \mathbf{C}_p] \\ &= \mathbf{F}_p^T \cdot \mathbf{E}_e \cdot \mathbf{F}_p + \mathbf{E}_p = \mathbf{F}_p^T \cdot [\mathbf{E}_e + \mathbf{F}_p^{-T} \cdot \mathbf{E}_p \cdot \mathbf{F}_p^{-1}] \cdot \mathbf{F}_p, \end{aligned} \quad (15)$$

od koder je razvidna vloga  $\mathbf{F}_p$  in njegovega obrata  $\mathbf{F}_p^{-1}$  kot operatorja vzvrat in vrnitve tenzorjev  $\mathbf{C}_e$ ,  $\mathbf{E}_e$  in  $\mathbf{1}$  v konfiguracijo  $\mathcal{X}_o$  in tenzorjev  $\mathbf{C}_p$ ,  $\mathbf{E}_p$  in  $\mathbf{1}$  v  $\mathcal{X}_i$  (glej npr. (Rojc, 2005)). Podobne zveze lahko poiščemo tudi za Eulerjeva tenzorja  $\mathbf{e}_e$  in  $\mathbf{e}_p$ . Namesto tega preidimo raje na obravnavo deformacijskega tenzorja  $\mathbf{C}_p$  (14a), in njemu komplementarne prostorske različice  $\mathbf{c}_e = \mathbf{c}(\mathbf{F}_e) = \mathbf{F}_e^{-T} \cdot \mathbf{F}_e^{-1}$  (primerjaj z (11d)). Če v (14a) vstavimo  $\mathbf{F}_p = \mathbf{F}_e^{-1} \cdot \mathbf{F}$ , ki sledi iz (12), dobimo:

$$\mathbf{C}_p(\mathbf{X}) = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}_e^{-T} \cdot \mathbf{F}_e^{-1} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{c}_e(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{F} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{b}_e^{-1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{F}, \quad (16)$$

ali

$$\mathbf{C}_p(\mathbf{X}) = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{b}_e^{-1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{F} \quad \text{in} \quad \mathbf{b}_e = \mathbf{F} \cdot \mathbf{C}_p^{-1}(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{F}^T, \quad (17a,b)$$

kjer je  $\mathbf{b}_e$  Fingerjev tenzor elastičnega dela deformacije, katerega definicijsko območje je trenutna konfiguracija  $\mathcal{X}_i$ :

$$\mathbf{b}_e = \mathbf{c}_e^{-1} = \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{F}_e^T. \quad (18)$$

Zvezi v (17) lahko tolmačimo kot vzvrat prostorskega polja  $\mathbf{b}_e^{-1}(\mathbf{x})$  v materialno polje  $\mathbf{C}_p(\mathbf{X})$  in vrnitev  $\mathbf{C}_p^{-1}$  v  $\mathbf{b}_e$ . V nadaljevanju bomo izpuščali argumente, ki dodatno poudarjajo definicijsko območje tenzorjev.

Oglejmo si pomen Fingerjevega deformacijskega tenzorja v primeru totalne deformacije telesa iz začetne v trenutno konfiguracijo, torej  $\mathbf{b} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T$ . Začnimo z znano geometrijsko definicijo Green-St. Venantovega tenzorja specifičnih deformacij  $\mathbf{E}$ , ki jo lahko s pomočjo definicije (10a) izpeljemo iz identitete  $ds^2 - dS^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X}$  (Rojc, 2005):

$$\begin{aligned} ds^2(t) - dS^2(t_0) &= d\mathbf{X} \cdot [\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{1}] \cdot d\mathbf{X} = \\ &= d\mathbf{X} \cdot [\mathbf{C}(t) - \mathbf{1}] \cdot d\mathbf{X} = d\mathbf{X} \cdot 2\mathbf{E}(t) \cdot d\mathbf{X}. \end{aligned} \quad (19)$$

V (19) sta  $ds$  in  $dS$  dolžini deformiranega in nedeformiranega materialnega linijskega elementa, predstavljenega z elementarnima vektorjema  $d\mathbf{x}$  in  $d\mathbf{X}$  v konfiguracijah  $\mathcal{X}_i$  in  $\mathcal{X}_o$ . Če upoštevamo polarno dekompozicijo deformacijskega gradienta  $\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R}$ , (glej npr. (Eringen, 1967), (Gurtin, 1981), (Simo, 1998)), lahko enačbo (10a) zapišemo takole:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R} \cdot d\mathbf{X} = \mathbf{V} \cdot d\mathbf{y}, \quad d\mathbf{y} = \mathbf{R} \cdot d\mathbf{X}, \quad (20a,b)$$

kjer je  $\mathbf{V}$  levi 'razteznostni' tenzor,  $\mathbf{R}$  je rotacijski tenzor lastnih smeri tenzorjev  $\mathbf{U}$  ali  $\mathbf{V}$  z lastnostmi  $\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^T = \mathbf{1}$ ,  $\det(\mathbf{R}) = 1$  in z  $d\mathbf{y}$  smo označili zarotirani in v konfiguracijo  $\mathcal{N}_t$  togo premaknjeni elementarni vektor  $d\mathbf{X}$ . Rotacijski tenzor ima namreč skupaj z obratno preslikavo  $\chi_t^{-1}$  vlogo toge rotacije začetnega vektorja  $d\mathbf{X} \in \mathcal{N}_0$  v vektor  $d\mathbf{y} \in \mathcal{N}_t$  (ima torej vlogo dvotočkovnega tenzorja), tenzor  $\mathbf{V}$  pa vlogo čiste deformacije (spremembo dolžine in strižni zasuk vektorja  $d\mathbf{y}$  v vektor  $d\mathbf{x}$ ). Zato lahko zapišemo:

$$d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} = d\mathbf{y} \cdot d\mathbf{y} = dS^2 \quad (21a)$$

$$\text{in } d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = dS^2 = (\mathbf{V} \cdot d\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{V} \cdot d\mathbf{y}) = d\mathbf{y} \cdot \mathbf{V}^2 \cdot d\mathbf{y} = d\mathbf{y} \cdot \mathbf{b} \cdot d\mathbf{y}, \quad (21b)$$

pri čemer smo glede na definicijo Fingerjevega deformacijskega tenzorja, ki je v literaturi imenovan tudi levi Cauchy-Greenov deformacijski tenzor, upoštevali

$$\mathbf{b} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{V} = \mathbf{V}^2. \quad (22)$$

Identiteto  $dS^2 - dS^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X}$  lahko ob upoštevanju (21) in definicij vektorskih enot  $\mathbf{n} = d\mathbf{y}/dS$  ter  $\mathbf{N} = d\mathbf{X}/dS$  zapišemo še takole:

$$(dS^2 - dS^2)/dS^2 = \mathbf{n} \cdot [\mathbf{b}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{1}] \cdot \mathbf{n} = \mathbf{N} \cdot [\mathbf{C}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{1}] \cdot \mathbf{N}, \quad (23)$$

ali

$$(dS^2 - dS^2)/dS^2 = \mathbf{n} \cdot 2\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{N} \cdot 2\mathbf{E}(\mathbf{X}, t) \cdot \mathbf{N}, \quad (24a)$$

$$\text{kjer je } 2\mathbf{a} = \mathbf{b} - \mathbf{1}. \quad (24b)$$

Iz zgornjih zvez lahko razberemo, da je levi Cauchy-Greenov deformacijski tenzor  $\mathbf{b}$  prostorski ekvivalent k materialnemu polju desnega Cauchy-Greenovega tenzorja  $\mathbf{C}$ , tenzor  $\mathbf{a}$  pa prostorski ekvivalent k Green-St. Venantovem tenzorju specifičnih deformacij  $\mathbf{E}$ . Glede na (20b) sta  $\mathbf{b}$  in  $\mathbf{C}$  povezana z  $\mathbf{b} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{R}^T$ . Podobna zveza sledi tudi med tenzorjema  $\mathbf{a}$  in  $\mathbf{E}$ . Ob upoštevanju deformacijskega gradienta kot funkcije gradienta pomika (10b) dobita  $\mathbf{a}$  in  $\mathbf{E}$  obliko:

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(\mathbf{h} + \mathbf{h}^T + \mathbf{h} \cdot \mathbf{h}^T) \quad (25a)$$

$$\text{in } \mathbf{E}(\mathbf{X}) = \frac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \mathbf{H}^T \cdot \mathbf{H}), \quad (25b)$$

kjer sta  $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \nabla_0 \mathbf{u}(\chi_t^{-1})$  in  $\mathbf{H}(\mathbf{X}) = \nabla_0 \mathbf{u}(\mathbf{X})$ , ter  $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{H}(\mathbf{X})$ . Torej  $\mathbf{a} \neq \mathbf{E}$  in  $\mathbf{b} \neq \mathbf{C}$ , toda v en. (23) in (24) imata oba para,  $\{\mathbf{a}, \mathbf{E}\}$  in  $\{\mathbf{b}, \mathbf{C}\}$ , enak geometrijski pomen.

### 3.2 Izpeljava konstitutivnih enačb

Razvoj konstitutivnih enačb elastoplastičnih materialnih modelov ob upoštevanju multiplikativnega pristopa je še dandanes predmet mnogih raziskav. Kljub novim spoznanjem pa sta izpeljava in materialni model, ki sta podana v (Simo, 1988) ali (Simo, 1992), še vedno zanimiva, čeprav se tam avtor omejuje samo na asociativne in izotropne modele (glej (Geers, 2004)). V tem razdelku bomo izpeljavo konstitutivnih enačb iz (Simo, 1988) podali nekoliko drugače. Izognili

se bomo strukturiranju tenzorjev v krivočrtnih koordinatah in sledili delu (Simo, 1992). Pri tem bomo upoštevali preizkus objektivnosti tenzorjev glede na poljubna vsiljena toga gibanja obeh konfiguracij, tj. končne  $\mathcal{N}_t$  in vmesne lokalne  $\mathcal{N}_t$ , kot sta to predlagala Green in Naghdi (Green, 1971), ali Casey in Naghdi (Casey, 1980).

Za izhodišče izpeljave vzemimo kot v (Simo, 1988) ali (Simo, 1992), pogoj plastičnega tečenja  $f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\kappa}) = 0$ , kjer je  $f$  funkcija tečenja,  $\boldsymbol{\sigma}$  Cauchyjev napetostni tenzor in  $\boldsymbol{\kappa}$  je niz notranjih spremenljivk, t. i. karakteristik plastičnega utrjevanja, ki so povezane s pojavom plastične deformacije in točko breznapetostnega stanja opazovanega delca telesa. V napetostnem prostoru opisuje ta pogoj t. i. ploskev tečenja, ki je sklenjena in omejuje območje  $\mathbb{E}$ , praviloma konveksno (Shames, 1997), v katerem vsaka točka določa neko napetostno stanje delca. Vsaka sprememba napetostnega stanja se lahko dogodi samo v območju  $\mathbb{E}$ , ki ga definiramo z neenačbo  $f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\kappa}) \leq 0$ . Imenujmo ga *dopustno območje napetostnega odziva* ali krajše *elastično območje* (Simo, 1992). Ploskev tečenja se med plastičnim procesom lahko spreminja, kar se odraža v spremembi parametrov v nizu  $\boldsymbol{\kappa}$ . Torej spremenljivke v  $\boldsymbol{\kappa}$ , ki jih merimo z enako mersko enoto kot komponente napetostnega tenzorja  $\boldsymbol{\sigma}$ , so lahko funkcija plastičnih deformacij. V nadaljevanju se bomo omejili samo na eno *skalarno karakteristiko plastičnega utrjevanja*, ki jo bomo označevali s  $q$ .

Omenjena neenačba predstavlja eno izmed konstitutivnih enačb, ki karakterizirajo elastoplastično obnašanje materialov. Ostale bomo izpeljali s pomočjo drugega zakona termodinamike, ki ima v primeru izotermičnih oziroma čistih mehanskih procesov obliko:  $\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} - \dot{\psi} \geq 0$ , znano pod imenom *disipacijska neenačba*. V njej predstavlja  $\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} = \sigma_{ij} d_{ij}$  *napetostno moč* in  $\dot{\psi}$  *prsto energijo*, pri čemer sta obe veličini definirani na enoto trenutnega volumna. Če definiramo napetostno moč in prsto energijo na enoto začetnega volumna, lahko zapišemo

$$\mathcal{D} = \boldsymbol{\tau} : \mathbf{d} - \dot{\Psi} \geq 0, \quad (26a)$$

$$\mathbf{d} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} + \mathbf{I}^T), \quad \mathbf{I} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1}, \quad (26b,c)$$

kjer je  $\boldsymbol{\tau} = J \boldsymbol{\sigma}$  Kirchhoffov napetostni tenzor,  $\mathbf{d}$  je, tako kot v prejšnji obliki, Eulerjeva hitrost deformacije,  $\mathbf{I}$  je prostorski gradient hitrosti (glej (Rojc, 2005)) in s  $\Psi$  smo označili novo definicijo proste energije,  $\dot{\Psi} = J \dot{\psi}$ . Jasno, v  $\Psi$  je skrita tudi *masna gostota*, ki je v tej novi definiciji določena na enoto začetnega volumna. Vse naštetje veličine so definirane kot prostorska polja v  $\mathcal{N}_t$ . Skladno s posplošitvijo veljavnosti Prandtl-Reussovih enačb za velike deformacije (glej str. 606 v (McMeeking, 1975)), ki temeljijo na fenomenološkem dejstvu, da je pri polikristalnih materialih plastična deformacija izohorna, vpeljimo tako kot v (Simo, 1988) naslednjo obliko pogoja tečenja oziroma definicije elastičnega območja  $\mathbb{E}$ :

$$f(\boldsymbol{\tau}, q) \leq 0, \quad \text{kjer je } \boldsymbol{\tau} = J \boldsymbol{\sigma}. \quad (27a,b)$$

Torej  $f$  je funkcija Kirchhoffovega napetostnega tenzorja  $\boldsymbol{\tau}$  in ne Cauchyjevega. Uporaba te oblike ne posega v splošnost nadaljnjih izpeljav. Mehanski veličini  $\boldsymbol{\tau}$  in  $\Psi$  bomo namreč definirali kot funkciji *osnovnih spremenljivk stanja*, ki jih izberemo iz med seboj neodvisnih temeljnih deformacijskih veličin  $\{\mathbf{F}, \mathbf{F}_p\}$  ali  $\{\mathbf{F}, \mathbf{F}_s\}$  ali  $\{\mathbf{F}_s, \mathbf{F}_p\}$  (glej def. (12)), katerim bomo zaradi pogoja (27) dodali še utrjevalno karakteristiko  $q$ .

Glede na dejstvo, da je definicijsko območje mehanskih veličin v (26) in (27) trenutna konfiguracija  $\mathcal{N}_t$ , je smiselno za osnovne spremenljivke stanja izbrati  $\{\mathbf{F}, \mathbf{F}_e, q\}$ . Deformacijska gradienta  $\mathbf{F}$  in  $\mathbf{F}_e$  sta namreč dvotočkovna tenzorja, ki vsebujeta informacijo o lokalni deformaciji trenutne konfiguracije telesa  $\mathcal{N}_t$  in sicer  $\mathbf{F}$  relativno glede na referenčno oziroma začetno konfiguracijo  $\mathcal{N}_0$ , njegov elastični del  $\mathbf{F}_e$  pa relativno glede na vmesno, tj. breznapetostno konfiguracijo  $\mathcal{Z}_t$ . Če izvršimo preizkus materialne objektivnosti glede na vsiljeno togo gibanje vmesne in končne konfiguracije  $\mathcal{Z}_t$  in  $\mathcal{N}_t$ , dobimo naslednje transformacijske zveze (glej npr. (Green, 1971), (Casey, 1980) in (Gurtin, 1981), ali (Rojc, 2004)):

$$q^* = q, \quad \boldsymbol{\tau}^* = \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{Q}^T, \quad \mathbf{F}^* = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{F}, \quad \mathbf{F}_e^* = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{Q}^T, \quad \mathbf{F}_p^* = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{F}_p. \quad (28a-e)$$

Pri tem sta  $\mathbf{Q}(f)$  in  $\mathbf{Q}(f)$  poljubni rotaciji z lastnostmi  $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{1}$ ,  $\det(\mathbf{Q}) = 1$  (ali krajše:  $\mathbf{Q}(f), \mathbf{Q}(f) \in SO(3)$ ), prva za konfiguracijo  $\mathcal{N}_t$  in druga za  $\mathcal{Z}_t$ . Od zgornjih tenzorjev je na prvi pogled edino  $\mathbf{F}_e$  glede objektivnosti vprašljiva spremenljivka. Vse ostale se transformirajo po zakonih, ki so v literaturi splošno priznani. Toda, če bi uporabili togo rotacijo tudi za začetno – referenčno konfiguracijo, bi dobili za  $\mathbf{F}$  prav tako pravilo, kot smo ga v (28d) dobili za  $\mathbf{F}_e$ . Deformacijski gradienti so namreč obravnavani kot dvotočkovni tenzorji. Preizkus invariantnosti mehanskih veličin glede na vsiljeno togo gibanje začetne ali referenčne konfiguracije omenjajo v literaturi v zvezi s problemom vključevanja plastičnega spina v konstitutivne zveze pri simulacijah anizotropnega obnašanja ali s problemom rekristalizacije kovin itd. (Levitas, 1997). Po drugi strani uporabo preizkusa invariantnosti glede na dve konfiguraciji hkrati nekateri odločno zavračajo, še zlasti na lokalni, breznapetostni konfiguraciji  $\mathcal{Z}_t$ , ki predstavlja notranjo ali skrito entiteto (Dashner, 1986), (Gurtin, 2005). Zaradi (28a) morata skalarni funkciji  $f$  in  $\Psi$  izpolniti naslednje pogoje izotropije:

$$f(\boldsymbol{\tau}, q) = f(\boldsymbol{\tau}^*, q^*) \equiv f(\mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{Q}^T, q), \quad (29a)$$

$$\Psi(\mathbf{F}, \mathbf{F}_e, q) = \Psi(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{F}, \mathbf{Q} \cdot \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{Q}^T, q). \quad (29b)$$

Torej,  $f$  in  $\Psi$  sta lahko samo funkciji invariant njunih argumentov  $\{\boldsymbol{\tau}, q\}$  in  $\{\mathbf{F}, \mathbf{F}_e, q\}$ . Analizirajmo funkcijo  $\Psi$  in zanjo poiščimo primernejši niz osnovnih spremenljivk, ki ga bomo po pravilu 'enake prisotnosti' (Coleman, 1967), privzeli tudi za ostale funkcije, npr.  $\boldsymbol{\tau}$ . Ker sta tenzorja  $\mathbf{F}$  in  $\mathbf{F}_e$  dvotočkovna, nobeden od njiju ne more v posameznih sumandih nastopati samostojno niti ne moreta biti uporabljena v kvadratnih kombinacijah, kot so npr.  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}_e$ , ali  $\mathbf{F}_e \cdot \mathbf{F}_e$ ,  $\mathbf{F}_e^T \cdot \mathbf{F}_e$ ,  $\mathbf{F}_e^{-T} \cdot \mathbf{F}_e$  ipd. Te kombinacije namreč vodijo ali v dvotočkovne tenzorje ali pa tenzorje, katerih definicijsko območje ni trenutna konfiguracija  $\mathcal{N}_t$ . Nadalje bomo pri izračunu invariant tenzorjev 2. reda potrebovali tenzorsko enoto  $\mathbf{1}$ , ki jo v primeru kartezične tenzorske strukture lahko istovetimo z metričnim tenzorjem (Rojc, 2005). Na primer, sled napetostnega tenzorja  $\boldsymbol{\tau}$  lahko z njegovo pomočjo izračunamo takole:  $\text{tr}(\boldsymbol{\tau}) = \mathbf{1} : \boldsymbol{\tau}$ . Zaradi naštetih razlogov navedemo Cauchy-Greenovim deformacijskim tenzorjem  $\mathbf{b}_e = \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{F}_e^T$ , ki smo ga definirali v prejšnjem razdelku z en. (18), spremenljivko  $\mathbf{F}$  pa lahko uporabimo za definicijo tenzorske enote 2. reda, torej  $\mathbf{1} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T$ , ki jo lahko istovetimo z evklidskim metričnim tenzorjem  $\mathbf{1}(\mathbf{x})$  v  $\mathcal{N}_t$ . Prosto energijo bomo zato definirali kot funkcijo novih spremenljivk takole:

$$\Psi = \check{\Psi}(\mathbf{1}, \mathbf{b}_e, q) \equiv \check{\Psi}(\mathbf{b}_e, q). \quad (30)$$

Zgornji nastavek je zaradi zveze (22) enakovreden obliki  $\check{\Psi}(\mathbf{V}_e, q)$ , ki jo je uporabil Lee v (Lee, 1969), torej v delu, ki je bilo jabolko spora mnogih razprav v osemdesetih letih. Predpostavimo, da je mogoče funkcijo proste energije razdvojiti tako kot v (Simo, 1988) na dve, v katerih sta spremenljivki  $\mathbf{b}_e$  in  $q$ , ki pripadata različnim merskim enotam, med seboj ločeni:

$$\Psi(\mathbf{b}_e, q) = \underline{\Psi}(\mathbf{b}_e) + \Xi(q). \quad (31)$$

Vstavimo ta izraz v (26) in dobimo:

$$\mathcal{G} \equiv \boldsymbol{\tau} : \mathbf{d} - \partial_{\mathbf{b}_e} \underline{\Psi} : \dot{\mathbf{b}}_e - \dot{\Xi} \geq 0. \quad (32)$$

Pri izračunu materialnega odvoda  $\dot{\mathbf{b}}_e$  si pomagajmo z definicijo (17b), za  $\mathbf{C}_p^{-1}$  pa upoštevajmo inverzijo definicije tenzorja  $\mathbf{C}_p$ , (14a). V tem primeru lahko materialni odvod materialnega polja  $\mathbf{C}_p^{-1}$  zamenjamo s parcialnim odvajanjem po času, torej  $\partial_t(\mathbf{C}_p^{-1})$  (več o tem glej (Rojc, 2005) ali (Marsden, 1983)). Po izvršenem odvajanju po času  $t$  vrnemo posamezne tenzorje v trenutno konfiguracijo, pri čemer si pomagamo z zvezo  $\mathbf{F}_p^{-1} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F}_e$ , ki sledi iz definicije (12). Tako v nekaj korakih izpeljemo

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{b}}_e &= D_t(\mathbf{F} \cdot \mathbf{C}_p^{-1} \cdot \mathbf{F}^T) = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{C}_p^{-1} \cdot \mathbf{F}^T + \mathbf{F} \cdot \mathbf{C}_p^{-1} \cdot \dot{\mathbf{F}}^T + \mathbf{F} \cdot \partial_t \mathbf{C}_p^{-1} \cdot \mathbf{F}^T \\ &= \dot{\mathbf{F}} \cdot (\mathbf{F}_p^{-1} \cdot \mathbf{F}_e^T) \cdot \mathbf{F}^T + \mathbf{F} \cdot (\mathbf{F}_p^{-1} \cdot \mathbf{F}_e^T) \cdot \dot{\mathbf{F}}^T + \mathbf{F} \cdot \partial_t \mathbf{C}_p^{-1} \cdot \mathbf{F}^T \\ &= \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{F}_e^T \cdot \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^T + \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{F}_e^T \cdot \mathbf{F}^{-T} \cdot \dot{\mathbf{F}}^T \cdot \mathbf{F}^T + \mathcal{L} \mathbf{b}_e \\ &= \mathbf{1} \cdot \mathbf{b}_e + \mathbf{b}_e \cdot \mathbf{1}^T + \mathcal{L} \mathbf{b}_e, \end{aligned} \quad (33)$$

kjer smo upoštevali  $\mathbf{1} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1}$ ,  $\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}^{-T} = \mathbf{1}$ , definicijo (18) in z  $\mathcal{L} \mathbf{b}_e$  smo označili t. i. Liejev odvod tenzorja  $\mathbf{b}_e$  (Marsden, 1983), (Rojc, 2005), torej:

$$\mathcal{L} \mathbf{b}_e = \mathbf{F} \cdot \partial_t(\mathbf{C}_p^{-1}) \cdot \mathbf{F}^T. \quad (34)$$

Materialni odvod proste energije iz neenačbe (32) lahko sedaj zapišemo v razvitejši obliki:

$$\begin{aligned} d\Psi/dt &= \partial_{\mathbf{b}_e} \underline{\Psi} : [\mathbf{1} \cdot \mathbf{b}_e + \mathbf{b}_e \cdot \mathbf{1}^T + \mathcal{L} \mathbf{b}_e] + \dot{\Xi} \\ &= (2\partial_{\mathbf{b}_e} \underline{\Psi} : \mathbf{b}_e) : [\mathbf{1} + \frac{1}{2} \mathcal{L} \mathbf{b}_e \cdot \mathbf{b}_e^{-1}] + \dot{\Xi}, \end{aligned} \quad (35)$$

pri čemer smo zaradi simetrije  $\partial_{\mathbf{b}_e} \underline{\Psi}$ ,  $\mathcal{L} \mathbf{b}_e$  in  $\mathbf{b}_e$  posamezne sumande preoblikovali takole:

$$\partial_{\mathbf{b}_e} \underline{\Psi} : (\mathbf{1} \cdot \mathbf{b}_e) = (\mathbf{b}_e \cdot \mathbf{1}^T) : (\partial_{\mathbf{b}_e} \underline{\Psi})^T = (\partial_{\mathbf{b}_e} \underline{\Psi} : \mathbf{b}_e) : \mathbf{1}, \quad (36a)$$

$$\partial_{\mathbf{b}_e} \underline{\Psi} : (\mathbf{b}_e \cdot \mathbf{1}^T) = (\partial_{\mathbf{b}_e} \underline{\Psi} : \mathbf{b}_e) : \mathbf{1}, \quad (36b)$$

$$\partial_{\mathbf{b}_e} \underline{\Psi} : \mathcal{L}_v \mathbf{b}_e = [\partial_{\mathbf{b}_e} \underline{\Psi} \cdot (\mathbf{b}_e \cdot \mathbf{b}_e^{-1})] : \mathcal{L}_v \mathbf{b}_e = (\partial_{\mathbf{b}_e} \underline{\Psi} \cdot \mathbf{b}_e) : (\mathcal{L}_v \mathbf{b}_e \cdot \mathbf{b}_e^{-1}). \quad (36c)$$

V (35) razdelimo gradient hitrosti  $\mathbf{l}$  na simetrični in antisimetrični del,  $\mathbf{l} = \mathbf{d} + \mathbf{w}$ ,  $\mathbf{d} = \mathbf{d}^T$ ,  $\mathbf{w} = -\mathbf{w}^T$ , ter upoštevajmo, da zaradi izotropije funkcije  $\underline{\Psi}$  velja  $\mathbf{b}_e \cdot \partial_{\mathbf{b}_e} \underline{\Psi} = \partial_{\mathbf{b}_e} \underline{\Psi} \cdot \mathbf{b}_e$ . Torej,

$$2(\partial_{\mathbf{b}_e} \underline{\Psi} \cdot \mathbf{b}_e) : (\mathbf{d} + \mathbf{w}) = 2(\partial_{\mathbf{b}_e} \underline{\Psi} \cdot \mathbf{b}_e) : \mathbf{d}. \quad (37)$$

Vstavimo ta rezultat v (35), dobljeni izraz  $d\Psi/dt$  pa v disipacijsko neenačbo (32) in po ureditvi končno dobimo:

$$\mathcal{D} = (\boldsymbol{\tau} - 2\partial_{\mathbf{b}_e} \underline{\Psi} \cdot \mathbf{b}_e) : \mathbf{d} - 2(\partial_{\mathbf{b}_e} \underline{\Psi} \cdot \mathbf{b}_e) : (\frac{1}{2} \mathcal{L}_v \mathbf{b}_e \cdot \mathbf{b}_e^{-1}) - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \geq 0. \quad (38)$$

Ob predpostavki, da mora zgornja neenačba veljati za poljubne fizikalno sprejemljive deformacije, določene s pogojem (10d), lahko s preudarnim utemeljevanjem (glej npr. (Coleman, 1967)) iz nje dobimo konstitutivno enačbo za elastični odziv in reducirano disipacijsko neenačbo:

$$\boldsymbol{\tau} = 2\partial_{\mathbf{b}_e} \underline{\Psi} \cdot \mathbf{b}_e, \quad (39)$$

$$\mathcal{D}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{b}_e, q; \mathcal{L}_v \mathbf{b}_e, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) = -\boldsymbol{\tau} : (\frac{1}{2} \mathcal{L}_v \mathbf{b}_e \cdot \mathbf{b}_e^{-1}) - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \geq 0. \quad (40)$$

V zadnji neenačbi sta vsebovani hitrost tenzorja plastične deformacije  $\mathcal{L}_v \mathbf{b}_e = \mathbf{F} \cdot \partial_t (\mathbf{C}_p^{-1}) \cdot \mathbf{F}^T$  (glej (34)) in hitrost karakteristike plastičnega utrjevanja  $\dot{q}$  v členu  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ , ki pripadata nizu t.i. notranjih ali 'skritih' spremenljivk stanja  $\mathbf{b}_e$  in  $q$  oz.  $\mathbf{C}_p$  in  $q$ . Glede na *princip največje plastične disipacije* (glej (Lubliner, 1984)) mora funkcija  $\mathcal{D}$  za trenutno stanje veličin  $\boldsymbol{\tau}$ ,  $\mathbf{b}_e$  in  $q$ , plastično deformiranega telesa s predpisano njegovo vmesno konfiguracijo  $\mathcal{H}$  in predpisanimi hitrostmi  $\mathcal{L}_v \mathbf{b}_e$  in  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$  imeti največjo vrednost. Torej, za vsa druga napetostna stanja  $\boldsymbol{\tau}^*$  iz dopustnega območja  $\mathbf{IE}$ , definirane (27a), tj.  $f(\boldsymbol{\tau}, q) \leq 0$ , mora biti izpolnjena neenačba:

$$\mathcal{D}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{b}_e, q; \mathcal{L}_v \mathbf{b}_e) \geq \mathcal{D}(\boldsymbol{\tau}^*, \mathbf{b}_e, q; \mathcal{L}_v \mathbf{b}_e), \quad \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau}^* \in \mathbf{IE}. \quad (41)$$

S tem smo formulirali problem vezanega ekstrema, ki ga lahko s pomočjo razširjene Lagrangeeve funkcije prevedemo v niz t. i. Kuhn-Tuckerjevih pogojev. Slednji so v literaturi (glej npr. (Gill, 1981)) izpeljani za probleme minimizacije funkcije spremenljivk, vezanih z dodatnimi neenačbami. Zato da prevedemo naš problem maksimalne vrednosti na problem iskanja minimuma, funkciji  $\mathcal{D}$  spremenimo predznak in tvorimo razširjeno funkcijo, v katero vključimo  $f(\boldsymbol{\tau}, q)$  iz pogojne neenačbe (27a), pomnoženo z Lagrangeevim multiplikatorjem  $\dot{\gamma}$ . Torej:

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{\tau}, \dot{\gamma}) = \boldsymbol{\tau} : [\frac{1}{2} \mathcal{L}_v \mathbf{b}_e \cdot \mathbf{b}_e^{-1}] + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \dot{\gamma} f(\boldsymbol{\tau}, q), \quad (42)$$

kjer smo zaradi skladnosti merskih enot z disipacijsko funkcijo  $\mathcal{D}$  vpeljali multiplikator  $\dot{\gamma}$  na enoto časa. Po znanem postopku sledijo omenjeni Kuhn-Tuckerjevi pogoji:

$$\partial_{\boldsymbol{\tau}} \mathcal{F}(\boldsymbol{\tau}, \dot{\gamma}) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{l} : [\frac{1}{2} \mathcal{L}_v \mathbf{b}_e \cdot \mathbf{b}_e^{-1}] + \dot{\gamma} \partial_{\boldsymbol{\tau}} f(\boldsymbol{\tau}, q) = \mathbf{0} \Rightarrow -\mathcal{L}_v \mathbf{b}_e = 2 \dot{\gamma} \partial_{\boldsymbol{\tau}} f(\boldsymbol{\tau}, q) \cdot \mathbf{b}_e, \quad (43a)$$

$$\dot{\gamma} \geq 0, \quad f(\boldsymbol{\tau}, q) \leq 0, \quad \dot{\gamma} f(\boldsymbol{\tau}, q) = 0, \quad (43b-d)$$

kjer je  $\mathbf{l}$  tenzorska enota 4. reda. S tem je izpeljava konstitutivnih enačb elastoplastičnega materiala končana. Te sestavljajo en. (39), ki definira elastični odziv in zgornji pogoji, ki definirajo evolucijo plastičnih deformacij v točkah opazovanega telesa. Zberimo jih skupaj z vpeljanimi deformacijskimi veličinami (12), (18) oz. (22)

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{F}_p, \quad \mathbf{b}_e(\mathbf{x}) = \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{F}_e^T = \mathbf{F} \cdot \mathbf{C}_p^{-1}(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{F}^T = \mathbf{V}_e^2, \quad (44a,b)$$

$$\boldsymbol{\tau} = 2\partial_{\mathbf{b}_e} \underline{\Psi} \cdot \mathbf{b}_e, \quad (44c)$$

$$\text{pravilo tečenja: } -\mathcal{L}_v \mathbf{b}_e = \dot{\gamma} 2 \partial_{\boldsymbol{\tau}} f(\boldsymbol{\tau}, q) \cdot \mathbf{b}_e, \quad (44d)$$

$$\dot{\gamma} \geq 0, \quad f(\boldsymbol{\tau}, q) \leq 0, \quad \dot{\gamma} f(\boldsymbol{\tau}, q) = 0. \quad (44e,f,g)$$

Zgoraj sta  $\underline{\Psi}(\mathbf{b}_e)$  in  $f(\boldsymbol{\tau}, q)$  ustrezni funkciji invariant podanih argumentov,  $\mathcal{L}_v \mathbf{b}_e$  in  $\dot{\gamma}$  predstavljata dodatni spremenljivki problema, ki sta bili uvedeni z novima enačbama (44d) in (44g),  $\mathbf{V}_e$  v (44b) pa je levi elastični 'razteznostni' tenzor. Iz definicije (44c) je razvidno, da je Kirchhoffov napetostni tenzor  $\boldsymbol{\tau}$  funkcija samo levega elastičnega deformacijskega tenzorja  $\mathbf{b}_e$ .

Izpeljava enačb je v delu (Simo, 1988) izvršena po principu prostorske kovariance (glej (Marsden, 1983)) in strukturiranju tenzorjev glede na poljubne konvektne koordinatne sisteme. Preizkus objektivnosti tenzorjev glede na poljubno vsiljeno togo gibanje je Simo zamenjal s preizkusom glede na poljubno diferenciable prostorsko preslikavo (difeomorfizem), ki vodi v vzporedno (kovariantno) formulacijo vseh tenzorjev in enačb v dveh opisih (ali kovariantnih prostorih), tj. materialnem (konvektivnem) in prostorskem opisu. V naši izpeljavi so enačbe podane samo v prostorskem opisu s tenzorskimi polji (prostorskimi polji) nad območjem trenutne konfiguracije telesa  $\mathcal{H}_t$ . Z uporabo deformacijskega gradienta  $\mathbf{F}$  in obrata preslikave  $\boldsymbol{\chi}$ , lahko vsa prostorska polja transformiramo v materialna polja nad območjem začetne konfiguracije  $\mathcal{H}_0$ . Torej, če prostorski opis mehanskih veličin s pomočjo operacije vzvrata izrazimo s t. i. materialnimi ekvivalenti (glej npr. (Rojc, 2005)), dobimo materialni opis, ki ga lahko tolmačimo tudi kot zapis tenzorjev (in enačb) glede na posebni krivočrtni (materialni) koordinatni sistem, ki je bil vtisnjen v telo, ko je le-to bilo v začetni konfiguraciji  $\mathcal{H}_0$ , in ki se je pri gibanju telesa v trenutno konfiguracijo  $\mathcal{H}_t$  deformiral v kartezični koordinatni sistem (v (Rojc, 2005) smo npr. obravnavali take konvektne sisteme, ki so bili v  $\mathcal{H}_0$  kartezični v  $\mathcal{H}_t$  pa krivočrtni). Na primer, v (44b)

je podana zveza med prostorskim poljem  $\mathbf{b}_e(\mathbf{x})$  in njegovim materialnim ekvivalentom  $\mathbf{C}_p^{-1}(\mathbf{X})$ , pred en. (30) pa smo vpeljali definicijo vektorske enote ali kartezičnega metričnega tenzorja  $\mathbf{1} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1}$ . Če uporabimo ti dve zvezi v izrazu prve invariante tenzorja  $\mathbf{b}_e$ , tj.  $I_1(\mathbf{b}_e) = \text{tr}(\mathbf{b}_e) = \mathbf{b}_e : \mathbf{1}$ , lahko izpeljemo kovarianten izraz (materialni opis), v katerem je definicijsko območje tenzorjev začetna konfiguracija  $\mathcal{X}_0$ , torej:

$$I_1(\mathbf{b}_e) = \text{tr}[\mathbf{b}_e] = \mathbf{b}_e : \mathbf{1} = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{C}_p^{-1} \cdot \mathbf{F}^T) : \mathbf{1} = (\mathbf{1} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{C}_p^{-1}) : \mathbf{F} = (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}) : \mathbf{C}_p^{-1} = \mathbf{C} : \mathbf{C}_p^{-1} \quad (45a)$$

$$\Rightarrow I_1(\mathbf{b}_e) = I_1(\mathbf{C}_p^{-1}), \text{ kjer je } I_1(\mathbf{C}_p^{-1}) = \text{tr}[\mathbf{C}_p^{-1}] = \mathbf{C}_p^{-1} : \mathbf{C}. \quad (45b)$$

V zadnjem izrazu (45b) ima desni deformacijski tenzor  $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$  vlogo metričnega tenzorja konvektivnega sistema v  $\mathcal{X}_0$ . Na podoben način bi lahko izpeljali kovariantne izraze drugih mehanskih veličin, s pomočjo temeljne definicije (12) pa tudi kovariantne izraze v breznapetostni konfiguraciji  $\mathcal{X}_t$ .

### 3.3 Analiza konstitutivnih enačb

Sestava konstitutivnih enačb (44) je klasična. Zveza med napetostmi in elastičnimi deformacijami je podobno kot v aditivni teoriji Greena in Naghdija (Green, 1965), podana s potencialno funkcijo elastičnega dela deformacij, evolucijske enačbe za plastične deformacije pa so zapisane v hitrostni obliki. To tudi ne more biti drugače, saj je razvoj plastičnih deformacij in posledično tudi elastičnih odvisen od zgodovine obremenjevanja. Če je v danem trenutku znana hitrost plastične deformacije  $\mathbf{d}_p$ , hitrost totalne deformacije pa je v vsakem primeru definirana z Eulerjevo hitrostjo  $\mathbf{d}$ , potem je razlika med njima lahko samo hitrost elastične deformacije. Pri tem mora biti plastična komponenta  $\mathbf{d}_p$  definirana prav tako v trenutni konfiguraciji kot hitrost  $\mathbf{d}$ . Torej velja aditivna razdelitev Eulerjeve hitrosti deformacije na elastični in plastični del (glej en. (46)) tudi v primeru multiplikativne teorije. Seveda ta razdelitev ni enaka tisti, ki je uporabljena v aditivni teoriji. Razlika med obema teorijama je namreč v tem, da je v multiplikativni teoriji vpeljana definicija breznapetostne konfiguracije  $\mathcal{X}_t$  in s tem tudi izhodiščna baza za definicijo hitrosti elastičnih in posredno tudi plastičnih deformacij, medtem ko je v aditivni teoriji za hitrost totalne deformacije in obe njeni komponenti,  $\mathbf{d}_e$  in  $\mathbf{d}_p$ , baza skupna in je po Hillu vedno predstavljena z geometrijo telesa v trenutni konfiguraciji  $\mathcal{X}_t$  (glej npr. (Nemat-Nasser, 1979)).

Ker je totalna hitrost deformacije  $\mathbf{d}$ , ki je aditivno razdeljena na  $\mathbf{d}_e$  in  $\mathbf{d}_p$ , definirana kot simetrični del gradienta hitrosti  $\mathbf{l}$ , torej:

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}_e + \mathbf{d}_p, \quad \mathbf{d} = \frac{1}{2} (\mathbf{l} + \mathbf{l}^T) \Rightarrow \mathbf{l} = \mathbf{l}_e + \mathbf{l}_p, \quad (46a,b,c)$$

definicija slednjega pa je podana z (26c), lahko aditivno razdelitev tenzorjev  $\mathbf{d}$  in  $\mathbf{l}$  na elastični in plastični del izrazimo v multiplikativni teoriji ob upoštevanju definicije (12) ali (44a) takole:

$$\mathbf{l} = \mathbf{F}_e \cdot (\mathbf{F}_e^{-1} \cdot \dot{\mathbf{F}}_e + \dot{\mathbf{F}}_p \cdot \mathbf{F}_p^{-1}) \cdot \mathbf{F}_e^{-1} = \mathbf{l}_e + \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{l}_p \cdot \mathbf{F}_e^{-1} = \mathbf{l}_e + \mathbf{l}_p, \quad (47a,b,c)$$

kjer so

$$\mathbf{l}_e = \dot{\mathbf{F}}_e \cdot \mathbf{F}_e^{-1}, \quad \mathbf{l}_p = \mathbf{F}_e \cdot \dot{\mathbf{l}}_p \cdot \mathbf{F}_e^{-1} \quad \text{in} \quad \mathbf{l}_p = \dot{\mathbf{F}}_p \cdot \mathbf{F}_p^{-1}. \quad (48a,b,c)$$

V multiplikativni teoriji sta torej komponenti hitrosti deformacije  $\mathbf{d}_e$  in  $\mathbf{d}_p$  v (46a) merjeni na različni bazi, kar je razvidno iz (48a) in (48c). Komponenta  $\mathbf{l}_p$ , ki je definirana v (48b), predstavlja v smislu konvektivnih sistemov prostorski ekvivalent tenzorja  $\mathbf{l}_p$ , vpeljanega v breznapetostni konfiguraciji  $\mathcal{X}_t$ .

Zanimivo je, da je Lee v (Lee, 1969) na osnovi izraza (47b) postavil trditve, da je aditivna teorija napačna, ker je sodil, da člen  $\mathbf{F}_e \cdot \mathbf{l}_p \cdot \mathbf{F}_e^{-1}$  ne more predstavljati plastične komponente totalnega gradienta hitrosti. Po njegovem sta komponenti gradienta hitrosti lahko samo veličini  $\mathbf{l}_e$  in  $\mathbf{l}_p$ , ki sta tako kot  $\mathbf{l}$  definirani po enakem pravilu (primerjaj (48a), (48c) in (26c)). Nadalje je trdil, da predstavlja aditivna razdelitev gradienta hitrosti (46c) in posledično hitrosti deformacije,  $\mathbf{d} = \mathbf{d}_e + \mathbf{d}_p$ , aproksimacijo, po njegovem, točnega izraza:  $\mathbf{d} = \text{sim}(\mathbf{l}) = \text{sim}(\mathbf{l}_e + \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{l}_p \cdot \mathbf{F}_e^{-1})$  (glej (47b)), ki je dopustna samo v primeru infinitezimalno majhnih elastičnih deformacij ( $\text{sim}(\bullet)$  označuje simetrični del izraza v oklepaju). V tem primeru namreč velja ocena  $\mathbf{F}_e \approx \mathbf{1}$  in od tod  $\mathbf{l} \approx \mathbf{l}_e + \mathbf{l}_p$ , ter  $\mathbf{d}_p \approx \frac{1}{2} (\mathbf{l}_p + \mathbf{l}_p^T)$ . Seveda je prva trditev sporna in je v 1970 in 1980 letih sprožila mnogo kritik in nasprotovanj, zlasti s strani zagovornikov aditivnega pristopa (glej npr. (Nemat-Nasser, 1979 in 1982)). Obravnavani člen (48b) namreč dokazuje samo različnost merskih baz v definiciji hitrosti elastične in plastične komponente deformacije. Posledica tega so lahko razlike le v hitrostih deformacij po eni ali drugi teoriji predvsem v področju deformacij, kjer sta hitrosti elastičnega in plastičnega dela enakega velikostnega reda. Te razlike seveda izginejo, ko postanejo hitrosti elastične deformacije majhne v primerjavi s plastičnimi.

Dandanes je aditivna teorija izgubila svojo prepričljivost predvsem zaradi nepopolne definicije elastičnega odziva. Obe teoriji sta v osnovnih izhodiščih sicer enakovredni. Po obeh teorijah je namreč napetost definirana kot potencialna funkcija elastičnega dela deformacij (hiperelastična zveza), razvoj plastičnega dela pa je voden s pravilom tečenja v hitrostni obliki in Kuhn-Tuckerjevimi pogoji obremenjevanja in razbremenjevanja delcev telesa (Naghdi, 1990). V multiplikativni teoriji je elastični del deformacije s pomočjo multiplikativne razdelitve deformacijskega gradienta definiran relativno glede na breznapetostno in nezvezno konfiguracijo telesa, medtem ko je v aditivni teoriji (Green, 1965) elastični del deformacije definiran posredno preko deformacijskih tenzorjev specifične deformacije  $\mathbf{E}$  in  $\mathbf{E}_p$  in parametrov utrjevanja  $\kappa$  (Naghdi, 1990). Taka posredna definicija elastičnega odziva pa je v preteklosti povzročala velike težave pri numeričnem reševanju konstitutivnih enačb. Zato numeričnih algoritmov, ki temeljijo na aditivni teoriji in hiperelastični definiciji napetosti, ne bomo našli v starejši literaturi. Enega smo zasledili v (Papadopoulos, 1998). Pred več kot petnajstimi leti so v računski praksi namesto hiperelastične definicije napetosti uporabljali hipoelastično zvezo med ustrezno materialno objektivno hitrostjo napetostnega tenzorja in hitrostjo elastičnega dela deformacij  $\mathbf{d}_e$  ali  $\mathbf{E}_e$ . Taka definicija je z vidika elastičnosti sporna, saj ne zagotavlja pravilne obravnave elastične lastnosti materiala, tj. popolne povračljivosti v izhodiščno stanje (glej npr. (Bernstein, 1960)). Poleg tega se pri tem soočamo tudi s problemom izbire t. i. materialno objektivne hitrosti napetostnega tenzorja (glej npr. (Rojc, 2004 in 2005)). Te pomanjkljivosti odpravlja multiplikativna teorija.

S teoretičnega stališča predstavljajo konstitutivne enačbe (44) izhodišče za izpeljavo neposredne zveze med napetostjo in totalno deforma-

cijo v elastoplastičnem območju. Zaradi odvisnosti napetostnega odziva od zgodovine obremenjevanja pa je ta zveza običajno lahko izražena samo v hitrostni obliki. Pri tem je postopek njene izpeljave standarden. Iz enačb (44) je potrebno najprej določiti parameter  $\dot{\gamma}$ , nato diferencirati po času hiperelastično konstitutivno enačbo (44c), pri čemer v izrazu za hitrost  $\mathbf{b}_e$ , (33) zamenjamo Liejev odvod  $\mathcal{L}_{\mathbf{v}}\mathbf{b}_e$  z izrazom, ki ga dobimo iz pravila tečenja (44d). Za določitev parametra  $\dot{\gamma}$  uporabimo dodatno enačbo, ki jo dobimo iz enačbe (44g). Slednja je namreč v primeru plastičnega stanja izpolnjena samo, če je tudi  $\dot{f}(\boldsymbol{\tau}, q) = 0$ , kar predstavlja omenjeno dodatno enačbo oziroma t. i. *konsistentni pogoj*. V našem primeru je funkcija tečenja  $f$  definirana v napetostnem prostoru in je zato potrebno že v tej fazi uporabiti konstitutivno zvezo (44c) in pravilo tečenja (44d). Torej:

$$\dot{f}(\boldsymbol{\tau}, q) \equiv \partial_{\boldsymbol{\tau}} f : 2\partial_{\mathbf{b}_e}(\partial_{\mathbf{b}_e} \underline{\Psi} \cdot \mathbf{b}_e) : (\mathbf{1} \cdot \mathbf{b}_e + \mathbf{b}_e \cdot \mathbf{1}^T + \mathcal{L}_{\mathbf{v}}\mathbf{b}_e) + \partial_q f \dot{q} = 0, \Rightarrow$$

$$\dot{\gamma} [\partial_{\boldsymbol{\tau}} f : \mathbf{m} : \partial_{\boldsymbol{\tau}} f - \partial_q f h] = \partial_{\boldsymbol{\tau}} f : \mathbf{m} : \mathbf{d}, \quad (49a)$$

$$\text{kjer je } \mathbf{m} = 4\partial_{\mathbf{b}_e}(\partial_{\mathbf{b}_e} \underline{\Psi} \cdot \mathbf{b}_e) \cdot \mathbf{b}_e \quad (49b)$$

$$\text{in } h = \dot{q} / \dot{\gamma} \quad (50)$$

je zakon utrjevanja, ki mora biti predpisan za konkretni material. V primeru von Misesove funkcije tečenja je  $h$  običajno podan z odvodom krivulje tečenja  $q(\dot{\gamma})$  enosnega preizkusa po parametru  $\dot{\gamma}$ . Skalarja  $q$  in  $\dot{\gamma}$  imata pri tem vlogo napetosti tečenja in ekvivalentne plastične deformacije. Namen zgornje izpeljave je bil predvsem opozoriti na pomen parametrov  $q$  in  $\dot{\gamma}$  in njuno medsebojno zvezo, ki se odraža v zakonu utrjevanja (50).

Podrobneje analizirajmo zdaj pravilo tečenja (44d). V navedeni enačbi je to pravilo zapisano v malce neobičajni obliki, toda taki, ki je v (Simo, 1992 ali 1998) predstavljal osnovo za formiranje ustreznega postopka numerične integracije hitrosti plastične deformacije po časovnem inkrementu  $\Delta t$ . Neobičajnost je seveda v veličini  $\mathcal{L}_{\mathbf{v}}\mathbf{b}_e$ , ki je glede na definicijo (34) povezana s hitrostjo plastične deformacije  $\mathbf{C}_p$ . V nadaljevanju bomo pravilo tečenja izpeljali za plastično komponento  $\mathbf{d}_p$  Eulerjeve hitrosti deformacije  $\mathbf{d}$ , (46a,b), ki je iz vidika klasične aditivne teorije razpoznavnejša fizikalna količina. V ta namen pomnožimo pravilo tečenja z  $\mathbf{b}_e^{-1}$ , nato pa ga ob uporabi definicij (34), (44b), (44a), (14) ter ustreznega rezultata materialnega odvoda identitete  $\mathbf{F}_p \cdot \mathbf{F}_p^{-1} = \mathbf{1}$  preoblikujemo v:

$$\mathbf{F}_e \cdot \underline{\mathbf{d}}_p \cdot \mathbf{F}_e^{-1} = \dot{\gamma} \partial_{\boldsymbol{\tau}} f, \quad \text{kjer je } \underline{\mathbf{d}}_p = \frac{1}{2}(\mathbf{1}_p + \mathbf{1}_p^T) \quad (51a,b)$$

hitrost plastične deformacije v  $\mathcal{Z}_1$  (tj. simetrični del  $\mathbf{1}_p$ , (48c)). Zaradi simetrije tenzorja  $\partial_{\boldsymbol{\tau}} f$ , ki je posledica simetričnosti napetostnega tenzorja  $\boldsymbol{\tau}$ , moremo levo stran nove enačbe (51a) zamenjati tudi z njeno transponirano obliko. Če upoštevamo to dejstvo in zvezo  $\underline{\mathbf{d}}_p = \mathbf{1}_p - \underline{\mathbf{w}}_p = \mathbf{1}_p^T + \underline{\mathbf{w}}_p = \underline{\mathbf{d}}_p^T$ , kjer je  $\underline{\mathbf{w}}_p$  antisimetrični del tenzorja  $\mathbf{1}_p$ , ki je v literaturi znan kot *materialni plastični spin*, lahko pravilo tečenja zapišemo še takole:

$$\frac{1}{2}(\mathbf{F}_e \cdot \mathbf{1}_p \cdot \mathbf{F}_e^{-1} + \mathbf{F}_e^{-T} \cdot \mathbf{1}_p^T \cdot \mathbf{F}_e^T) - \frac{1}{2}(\mathbf{F}_e \cdot \underline{\mathbf{w}}_p \cdot \mathbf{F}_e^{-1} - \mathbf{F}_e^{-T} \cdot \underline{\mathbf{w}}_p \cdot \mathbf{F}_e^T) = \dot{\gamma} \partial_{\boldsymbol{\tau}} f. \quad (52)$$

Prvi del leve strani zgornje enačbe predstavlja plastično komponento  $\mathbf{d}_p$  Eulerjeve hitrosti deformacije  $\mathbf{d}$ . O tem se lahko prepričamo, če v izrazu za  $\mathbf{d}_p$ , tj.  $\mathbf{d}_p = \frac{1}{2}(\mathbf{1}_p + \mathbf{1}_p^T)$ , upoštevamo (48b). Zato prepisimo (52) v:

$$\mathbf{d}_p - \frac{1}{2}(\mathbf{F}_e \cdot \underline{\mathbf{w}}_p \cdot \mathbf{F}_e^{-1} - \mathbf{F}_e^{-T} \cdot \underline{\mathbf{w}}_p \cdot \mathbf{F}_e^T) = \dot{\gamma} \partial_{\boldsymbol{\tau}} f. \quad (53)$$

Dobljena enačba se seveda razlikuje od klasične oblike pravila tečenja, znane iz aditivne teorije, in sicer v členih, ki vsebujejo plastični spin. Enakost med obema oblikama dosežemo, če za plastični spin  $\underline{\mathbf{w}}_p$  izberemo nično vrednost, tj.:

$$\underline{\mathbf{w}}_p = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{d}_p = \dot{\gamma} \partial_{\boldsymbol{\tau}} f, \quad \underline{\mathbf{d}}_p = \mathbf{1}_p = \mathbf{1}_p^T. \quad (54a,b,c)$$

Z vprašanjem, ali predstavlja zgornji pogoj (54a) dodatno konstitutivno enačbo izotropnega elastoplastičnega materialnega modela ali le neko nedokazano omejitev multiplikativne teorije, se tu ne bomo ukvarjali. O tem tudi ne bomo dobili nobenega zadovoljivega odgovora v literaturi. Zgornjega pogoja avtorji ne prištevajo med konstitutivne enačbe, temveč ga nekateri uporabljajo kot dodatno predpostavko, potrebno pri formuliranju algoritmov za numerično reševanje konstitutivnih enačb. Tudi v najnoveši literaturi, ki se ukvarja z neelastičnim odzivom materialov predvsem iz matematičnega vidika, je omenjeni pogoj obravnavan samo kot koristen, toda nedokazan pogoj pri obravnavi izotropnih materialov (glej npr. pombo pod črto 7 v (Gurtin, 2005): "A result of this nature seems part of the folklore of plasticity theory for isotropic materials, but we are not aware of an actual proof.").

V nadaljevanju bomo predstavili še druge oblike pravila tečenja, ki jih lahko izpeljemo iz njegove prvotne, (44d) ali (51a), in klasične oblike (54b). V ta namen izrazimo oba faktorja totalnega deformacijskega gradienta s pomočjo leve oziroma desne polarne dekompozicije takole:

$$\mathbf{F}_e = \mathbf{V}_e \cdot \mathbf{R}_e, \quad \mathbf{F}_p = \mathbf{R}_p \cdot \mathbf{U}_p, \quad (55a,b)$$

in nato to upoštevajmo pri opisu vseh tenzorjev iz (46) do (48), ki so uporabljeni v (51a). Tako dobimo:

$$\mathbf{V}_e \cdot \mathbf{R}_{ep} \cdot \mathbf{D}_p \cdot \mathbf{R}_{ep}^T \cdot \mathbf{V}_e^{-1} = \dot{\gamma} \partial_{\boldsymbol{\tau}} f, \quad (56)$$

kjer sta

$$\mathbf{R}_{ep} = \mathbf{R}_e \cdot \mathbf{R}_p, \quad \mathbf{D}_p = \text{sim}(\dot{\mathbf{U}}_p \cdot \mathbf{U}_p^{-1}) = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{U}}_p \cdot \mathbf{U}_p^{-1} + \mathbf{U}_p^{-1} \cdot \dot{\mathbf{U}}_p) \quad (57a,b)$$

sestavljena notranja rotacija in korotacijska hitrost plastične deformacije, ki je predstavljena kot materialno polje. Ker je funkcija  $f(\boldsymbol{\tau}, q)$  izotropna funkcija napetosti  $\boldsymbol{\tau}$ , slednja pa je odvod izotropne funkcije  $\underline{\Psi}(\mathbf{b}_e) = \underline{\Psi}(\mathbf{V}_e)$  – glej (44a in c), je produkt odvoda  $\partial_{\boldsymbol{\tau}} f$  komutativen s spremenljivko  $\mathbf{V}_e$  ali  $\mathbf{V}_e^{-1}$ . Zato po ustreznem množenju en. (56) z omejeno spremenljivko dobimo (namreč  $\mathbf{V}_e^{-1} \cdot \partial_{\boldsymbol{\tau}} f \cdot \mathbf{V}_e = \partial_{\boldsymbol{\tau}} f$ ):

$$\mathbf{R}_e \cdot \underline{\mathbf{d}}_p \cdot \mathbf{R}_e^T = \dot{\gamma} \partial_{\boldsymbol{\tau}} f, \quad (58)$$

kjer smo glede na izhodiščno enačbo (51a) za  $\underline{\mathbf{d}}_p$  vpeljali naslednji izraz:

$$\underline{\mathbf{d}}_p = \mathbf{R}_p \cdot \mathbf{D}_p \cdot \mathbf{R}_p^T \quad (59)$$

Oblika pravila tečenja (58) skupaj z obliko (54b) in definicijama (57b) in (58) definira naslednji identiteti:

$$\underline{\mathbf{d}}_p = \mathbf{R}_e \cdot \underline{\mathbf{d}}_p \cdot \mathbf{R}_e^T, \quad \mathbf{d}_p = (\mathbf{R}_e \cdot \mathbf{R}_p) \cdot \mathbf{D}_p \cdot (\mathbf{R}_e \cdot \mathbf{R}_p)^T \quad (60a,b)$$

ki potrjujeta, da sta hitrosti  $\underline{\mathbf{d}}_p$  in  $\mathbf{d}_p$  odvisni samo od hitrosti čiste plastične deformacije  $\underline{\mathbf{U}}_p$  (glej en. (57)), zarotirane za rotacijo  $\mathbf{R}_p$  oziroma skupno rotacijo  $\mathbf{R}_{ep}$  (57a). Iz zveze (54b), (44b) in (44c) sledi, da imajo tenzorji  $\underline{\mathbf{d}}_p$ ,  $\partial_\tau f$ ,  $\boldsymbol{\tau}$ ,  $\mathbf{b}_e$  in  $\mathbf{V}_e$  iste lastne smeri, smeri tenzorjev  $\underline{\mathbf{d}}_p$  in  $\mathbf{D}_p$  pa so glede na te zarotirane z rotacijskim tenzorjem  $\mathbf{R}_e$  oziroma  $\mathbf{R}_{ep}$ .

V primeru majhnih specifičnih elastičnih deformacij  $\mathbf{a}_e$  (24b),

$$\mathbf{a}_e = \frac{1}{2} (\mathbf{b}_e - \mathbf{1}), \quad \|\mathbf{a}_e\| \ll 1 \Rightarrow \|\text{dev}[\mathbf{b}_e]\| \ll 1 \quad (61a,b,c)$$

lahko produkt  $\partial_\tau f \cdot \mathbf{b}_e$  na desni strani pravila tečenja (44d) zaradi (61c) aproksimiramo takole:

$$\partial_\tau f \cdot \mathbf{b}_e = \partial_\tau f \cdot (\frac{1}{3} \text{tr}[\mathbf{b}_e] \mathbf{1} + \text{dev}[\mathbf{b}_e]) \approx \frac{1}{3} \text{tr}[\mathbf{b}_e] \partial_\tau f \cdot \mathbf{1} = \frac{1}{3} \text{tr}[\mathbf{b}_e] \partial_\tau f, \quad (61d)$$

pravilo tečenja (44d) pa dobi naslednjo aproksimativno obliko:

$$-\mathcal{L}_\tau \mathbf{b}_e = \dot{\gamma} \frac{2}{3} \text{tr}[\mathbf{b}_e] \partial_\tau f. \quad (62)$$

Za konec tega razdelka si oglejmo, kako se s časom spreminja prostornina in oblika infinitezimalne okolice poljubnega delca telesa. Najprej se lotimo spremembe prostornine. Že v podrazdelku 3.1 (drugi odstavek) smo opozorili na geometrijski pomen determinante  $J = \det(\mathbf{F})$ , tj., da predstavlja razmerje med prostornino deformiranega in nedeformiranega-zčetnega infinitezimalno majhnega poljubnega delca telesa, dv in dV. Torej (glej tudi en. (3a)):

$$J = \frac{dV}{dV}, \quad \varepsilon_v = \frac{dV - dV}{dV} = J - 1 \Rightarrow \dot{\varepsilon}_v = \dot{J}, \quad (63a,b,c)$$

kjer je  $\varepsilon_v$  volumenska deformacija. Časovno spremembo volumenske deformacije delca,  $d\varepsilon_v/dt$ , lahko torej definiramo z materialnim odvodom determinante  $J$ :

$$\dot{J} = (J_e J_p) \dot{=} = \dot{J}_e J_p + J_e \dot{J}_p, \quad (64)$$

kjer smo uporabili zvezo (12b), tj.  $J = J_e J_p$ . Delimo zgornji izraz z  $J$  in pri tem upoštevajmo omenjeno zvezo in dobimo:

$$\dot{J}/J = \dot{J}_e/J_e + \dot{J}_p/J_p, \quad (65a)$$

$$\text{ali} \quad (\ln J) \dot{=} = (\ln J_e) \dot{=} + (\ln J_p) \dot{=} \quad (65b)$$

S pomočjo znane zveze  $\partial_\tau J = J \mathbf{F}^T$  (glej npr. (Eringen, 1967), (Gurtin, 1981), (Marsden, 1983), ali pa jo izpeljemo sami) moremo izraziti  $\dot{J}$  tudi kot funkcijo hitrosti deformacijskega gradienta  $\mathbf{F}$  ali Eulerjeve hitrosti deformacije  $\mathbf{d}$ . To lahko naredimo tudi z determinantama  $J_e$  in  $J_p$ . Torej:

$$\dot{J} = (\det[\mathbf{F}]) \dot{=} = J \mathbf{F}^T : \dot{\mathbf{F}} = J \text{tr}[\mathbf{d}], \quad (66a)$$

$$\dot{J}_e = (\det[\mathbf{F}_e]) \dot{=} = J_e \text{tr}[\mathbf{d}_e], \quad \dot{J}_p = (\det[\mathbf{F}_p]) \dot{=} = J_p \text{tr}[\mathbf{d}_p], \quad (66b,c)$$

in z upoštevanjem (65b) končno zapišimo:

$$(\ln J) \dot{=} = \text{tr}[\mathbf{d}], \quad (\ln J_e) \dot{=} = \text{tr}[\mathbf{d}_e], \quad (\ln J_p) \dot{=} = \text{tr}[\mathbf{d}_p], \quad (67a,b,c)$$

$$(\ln J) \dot{=} = \text{tr}[\mathbf{d}_e] + \text{tr}[\mathbf{d}_p]. \quad (67d)$$

Mimogrede, v aditivni teoriji lahko definiramo samo zadnjo identiteto, (67d). Če v tretji enačbi (67c) namesto  $\mathbf{d}_p$  upoštevamo izraz iz pravila tečenja (54b), dobimo:

$$(\ln J_p) \dot{=} = \text{tr}[\dot{\gamma} \partial_\tau f] \Rightarrow (\ln J_p) \dot{=} = \dot{\gamma} \text{tr}[\partial_\tau f], \quad (68)$$

ki ima zanimivo sporočilo, in sicer, da je *hitrost volumenske spremembe plastičnega delca deformacije enaka nič, če je gradient funkcije tečenja, tj.  $\partial_\tau f$ , deviatorski tenzor*. Sled deviatorja je namreč enaka nič. O tem smo razpravljali že na koncu razdelka 2 v zvezi z reševanjem elastoplastičnih nalog v področju majhnih deformacij in ob upoštevanju von Misesove funkcije tečenja.

Zdaj si oglejmo še veličino, ki izraža samo spremembo oblike delca, ne pa tudi njegove prostornine. Totalno deformacijo delca (tj. spremembo prostornine in oblike) lahko opišemo z desnim Cauchy-Greenovim deformacijskim tenzorjem  $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$ , (11b). Determinanta te veličine je  $\det(\mathbf{C}) = \det(\mathbf{F}^T) \det(\mathbf{F}) = J^2$ , kar pomeni, da je sorazmerna spremembi prostornine delca (glej (63)). Zato lahko veličino za opis samo spremembe oblike delca definiramo z *volumensko nevtralizacijo* obravnavanega tenzorja  $\mathbf{C}$ . Torej:

$$\bar{\mathbf{C}} = \bar{\mathbf{F}}^T \cdot \bar{\mathbf{F}} = J^{-2/3} \mathbf{C}, \quad (69a)$$

$$\text{kjer je} \quad \bar{\mathbf{F}} = J^{-1/3} \mathbf{F} \Rightarrow \det[\bar{\mathbf{C}}] = 1, \quad \det[\bar{\mathbf{F}}] = 1, \quad (69b,c,d)$$

od koder je razvidno, da se determinanta novega tenzorja  $\bar{\mathbf{C}}$  s časom ne spreminja. Če ga materialno odvajamo, dobimo (glej tudi en. (53) v (Rojč, 2005))

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\mathbf{C}}} &= J^{-2/3} \dot{\mathbf{C}} - \frac{2}{3} J^{-2/3} \mathbf{C} \text{divv} \\ &= 2 J^{-2/3} (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{d} \cdot \mathbf{F} - \frac{1}{3} \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \text{tr}[\mathbf{d}]) = 2 J^{-2/3} \mathbf{F}^T \cdot (\mathbf{d} - \frac{1}{3} \text{tr}[\mathbf{d}] \mathbf{1}) \cdot \mathbf{F}, \end{aligned} \quad (70a)$$

$$\text{ali} \quad \bar{\mathbf{F}}^{-T} \cdot \dot{\bar{\mathbf{C}}} \cdot \bar{\mathbf{F}}^{-1} = 2 \text{dev}[\mathbf{d}], \quad (70b)$$

kjer je  $\mathbf{v}$  vektor trenutne hitrosti delca. Z en. (67a) smo ugotovili, da je  $\text{tr}(\mathbf{d})$  povezan s hitrostjo volumenske deformacije (primerjaj (67a) z

(63c)), kar pomeni, da predstavlja  $\text{dev}(\mathbf{d}) = \mathbf{d} - \frac{1}{3}\text{tr}(\mathbf{d})\mathbf{1}$  tisti del Eulerjeve hitrosti deformacije  $\mathbf{d}$ , ki opisuje samo spremembo oblike delca in ne njegove prostornine, namreč  $\text{tr}(\text{dev}(\mathbf{d}))=0$ . Iz tega vidika je z en. (70b) pojasnjen tudi pomen materialnega odvoda  $\dot{\mathbf{C}}$ . Matematični operaciji  $\text{tr}(\bullet)$  in  $\text{dev}(\bullet)$  Eulerjeve hitrosti deformacije  $\mathbf{d}$  imata zanimiv fizikalni pomen, podobno kot v linearni teoriji (glej razdelek 2). V materialnem opisu jima ustrežata materialni odvod skalarne funkcije  $J = (\det(\mathbf{C}))^{1/2}$  in materialni odvod volumensko nevtraliziranega tenzorja  $\bar{\mathbf{C}}$ , pri čemer moramo za operator vzvrata in vrnitve upoštevati volumensko nevtralizirani deformacijski gradient  $\bar{\mathbf{F}}$  in njegov obrat  $\bar{\mathbf{F}}^{-1}$ .

### 3.4 Alternativne oblike konstitutivnih enačb s von Misesovo funkcijo tečenja

V primeru von Misesove funkcije tečenja dobijo splošne konstitutivne enačbe (44) konkretnjšo obliko. Za funkcijo tečenja upoštevajmo izraz, poznan iz geometrijsko linearne teorije (glej npr. (9i) v razdelku 2):

$$f(\boldsymbol{\tau}, Y) = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\text{dev}[\boldsymbol{\tau}]\| - Y(e_p), \quad (71a)$$

$$\|\text{dev}[\boldsymbol{\tau}]\| = (\text{dev}[\boldsymbol{\tau}]:\text{dev}[\boldsymbol{\tau}])^{1/2}, \quad \text{dev}[\boldsymbol{\tau}] = \boldsymbol{\tau} - \frac{1}{3} \text{tr}[\boldsymbol{\tau}]\mathbf{1} \quad (71b,c)$$

Zgoraj je  $Y$  napetost tečenja in  $e_p$  ekvivalentna plastična deformacija enoosnega napetostnega preizkusa. Oba parametra,  $Y$  in  $e_p$ , enakovredno nadomeščata skalarja  $q$  in  $\gamma$  iz prejšnjih podrazdelkov. Posebnost funkcije (71a) je v tem, da je njen odvod po  $\boldsymbol{\tau}$  deviatorski tenzor, ki zagotavlja nestisljivost plastičnega dela deformacij (dokaz je na koncu prejšnjega podrazdelka). Torej:

$$\partial_{\boldsymbol{\tau}} f = \sqrt{\frac{3}{2}} \mathbf{n}, \quad \mathbf{n} = \text{dev}[\boldsymbol{\tau}] / \|\text{dev}[\boldsymbol{\tau}]\| \quad (72a,b)$$

$$\Rightarrow J_p = 0, \quad \text{ali} \quad J_p = 1, \quad J = J_e. \quad (72c,d,e)$$

Čeprav je enačba (72c) (ali (72d ali e)) z obliko funkcije tečenja avtomatično izpolnjena in jo zato lahko izločimo iz niza konstitutivnih enačb elastoplastičnega materiala, ima pomembno vlogo pri formiranju računskih algoritmov. O tem se bomo prepričali v drugem delu rispevka, (Rojc, 2007).

Zaradi (72a) lahko pravilo tečenja (44d), tj.  $-\mathcal{L}_v \mathbf{b}_e = \dot{e}_p 2 \partial_{\boldsymbol{\tau}} f \cdot \mathbf{b}_e$ , zapišemo takole

$$-\mathcal{L}_v \mathbf{b}_e = \dot{e}_p \sqrt{6} \mathbf{n} \cdot \mathbf{b}_e, \quad -\mathbf{F} \cdot \partial_{\mathbf{C}} (\mathbf{C}_p^{-1}) \cdot \mathbf{F}^T = \dot{e}_p \sqrt{6} \mathbf{n} \cdot \mathbf{b}_e. \quad (73)$$

Če upoštevamo namesto (44d) drugo obliko, (54b), dobimo:

$$\mathbf{d}_p = \dot{e}_p \sqrt{\frac{3}{2}} \mathbf{n}, \quad (74)$$

iz katere zaradi  $\mathbf{n}:\mathbf{n} = 1$  sledi klasična zveza med hitrostjo ekvivalentne plastične deformacije  $e_p$  in  $\mathbf{d}_p$ , ki je poznana že iz aditivne teorije:

$$\dot{e}_p = \sqrt{\frac{3}{2}} (\mathbf{d}_p:\mathbf{d}_p)^{1/2}. \quad (75)$$

Za kovinske materiale lahko uvedemo določnejšo obliko tudi za energijsko funkcijo  $\underline{\psi}$ . Zaradi majhnih elastičnih deformacij in plastične nestisljivosti moremo zanjo privzeti strogo delitev na volumenski in deviatorski del odziva. Zato predpostavimo tako kot v (Simo, 1988), da je energijska funkcija  $\underline{\psi}$  razdvojena na volumenski in deviatorski – preoblikovalni del. V ta namen vpeljimo namesto  $\mathbf{b}_e$  novo, tj. *volumensko nevtralizirano spremenljivko*  $\bar{\mathbf{b}}_e$  (glej npr. en. (69a)), katere determinanta se s časom  $t$  ne spreminja, torej:

$$\bar{\mathbf{b}}_e = J_e^{-2/3} \mathbf{b}_e, \quad \det[\bar{\mathbf{b}}_e] = J_e^{-2} \det[\mathbf{b}_e] = J_e^{-2} J_e^2 = 1. \quad (76)$$

in definirajmo energijsko funkcijo ali tudi t. i. razdvojeno *elastično deformacijsko energijo*  $\underline{W}$  takole:

$$\underline{\psi} \equiv \underline{W}(\mathbf{b}_e) = U(J_e) + \frac{1}{2} \mu (\text{tr}[\bar{\mathbf{b}}_e] - 3), \quad (77a)$$

$$J_e = \det[\mathbf{F}_e] = \det[(\mathbf{b}_e)^{1/2}]. \quad (77b)$$

Pri tem je  $\mu$  tako kot v linearni teoriji strižni modul, kompresijski modul  $\kappa$  pa je skrit v volumenskem delu  $U$ . Zaradi privzete funkcije tečenja je plastični del determinante konstanten,  $J_p = 1$ , in zato  $J = J_e$  (glej en. (72d,e)). Torej lahko  $U$  izrazimo tudi kot funkcijo determinante  $J$  totalne deformacije. Če upoštevamo  $\underline{W}(\mathbf{b}_e)$  v (44c), dobimo za Kirchhoffov napetostni tenzor  $\boldsymbol{\tau}$  in njegovo sferično in deviatorsko komponento  $\boldsymbol{\tau}_o$  oziroma  $\text{dev}(\boldsymbol{\tau})$  naslednje izraze (Simo, 1988), (Simo, 1998):

$$\boldsymbol{\tau} = 2 \partial_{\mathbf{b}_e} \underline{W} \cdot \mathbf{b}_e = J_e U'(J_e) \mathbf{1} + \mu \text{dev}[\bar{\mathbf{b}}_e], \quad (78a)$$

$$\boldsymbol{\tau}_o = J_p = \frac{1}{3} \text{tr}[\boldsymbol{\tau}] = J_e U'(J_e), \quad \text{dev}[\boldsymbol{\tau}] = \mu \text{dev}[\bar{\mathbf{b}}_e] = J_e^{-2/3} \mu \text{dev}[\mathbf{b}_e]. \quad (78b,c)$$

S pomočjo zadnje zveze in pogoja tečenja  $f = 0$  lahko ob upoštevanju funkcije (71a) izrazimo normo  $\|\text{dev}(\mathbf{b}_e)\|$  takole:  $\|\text{dev}(\mathbf{b}_e)\| = J_e^{2/3} \sqrt{2/3} Y/\mu$ . Ker je za kovine slednji izraz reda velikosti  $10^{-3}$ , moremo v skladu z aproksimacijo (61d) v tem primeru aproksimirati tudi pravilo tečenja (73):

$$-\mathcal{L}_v \mathbf{b}_e = \dot{e}_p \sqrt{\frac{2}{3}} \text{tr}[\mathbf{b}_e] \mathbf{n}, \quad -\mathbf{F} \cdot \partial_{\mathbf{C}} (\mathbf{C}_p^{-1}) \cdot \mathbf{F}^T = \dot{e}_p \sqrt{\frac{2}{3}} \text{tr}[\mathbf{b}_e] \mathbf{n}. \quad (79)$$

Namesto razdvojene oblike elastične energije (77) je v literaturi uporabljena lahko tudi nerazdvojena energijska funkcija, npr. (Simo, 1985):

$$W(\mathbf{b}_e) = U(J_e) + \frac{1}{2} \mu (\text{tr}[\mathbf{b}_e] - 3 - 2 \ln J_e). \quad (80)$$

Sferična in deviatorska komponenta napetostnega tenzorja sta v tem primeru podani z:

$$\boldsymbol{\tau}_o = J_p = \frac{1}{3} \text{tr}[\boldsymbol{\tau}] = J_e U'(J_e) + \mu (\frac{1}{3} \text{tr}[\mathbf{b}_e] - 1), \quad (81a)$$

$$\text{dev}[\boldsymbol{\tau}] = \mu \text{dev}[\mathbf{b}_e]. \quad (81b)$$



Opazna razlika je v izrazu sferične komponente napetostnega tenzorja (primerjaj z (78b)). V (81a) je sferična komponenta sestavljena iz dveh delov: odvoda funkcije determinante  $J_e = J$  in sledi elastičnega dela deformacijskega tenzorja, tj.  $\text{tr}(\mathbf{b}_e)$ . V tej komponenti sta prisotni dve materialni konstanti: ena je že omenjeni strižni modul  $\mu$ , druga je v funkciji  $U(J_e)$  in jo označimo z  $\lambda$ , saj ne more predstavljati kompresijskega modula  $\kappa$  kot v prejšnjem primeru  $\underline{W}(\mathbf{b}_e)$ . Zanimivo je tudi, da obeh

konstant,  $\lambda$  in  $\mu$ , ne moremo združiti v eno kot npr. v geometrijsko linearni teoriji (glej en. (1) in (6)). Združitev je možna v primeru majhnih elastičnih deformacij, ko lahko determinanto  $J_e$  aproksimiramo z linearnim izrazom  $J_e \approx \frac{1}{2}(\text{tr}(\mathbf{b}_e) - 1)$ . Kljub tej možnosti, ki bi jo lahko uporabili za kovinske materiale in tudi mnoge druge, pa se bomo v drugem delu prispevka (glej (Rojc, 2007)), pri formuliranju numeričnih algoritmov tej aproksimaciji izognili.

#### 4 • SKLEP

V prispevku je podana izpeljava in analiza konstitutivnih enačb hiperelasto-plastičnega modela kovinskih materialov. Analiza je bila opravljena z vidika vpliva oblike funkcije tečenja na hitrost plastične volumenske deformacije. Posebna pozornost je bila posvečena fizikalno-mehanskemu pomenu posameznih spremenljivk, ki nastopajo v omenjenih konstitutivnih enačbah, in seveda tudi pomenu dveh

matematičnih operacij  $\text{tr}(\bullet)$  in  $\text{dev}(\bullet)$ , s katerima razdelimo tenzorske spremenljivke na sferični in deviatorski del oziroma izotropni in brezledni del (glej (Kuščer, 1994)). Fizikalni pomen omenjenih delov posameznih mehanskih veličin pa ima pomembno vlogo pri oblikovanju numeričnih postopkov za reševanje konstitutivnih enačb, ki bo predmet drugega dela prispevka.

#### 5 • LITERATURA

- ABAQUS, Inc., ABAQUS/Standard, Version 6.5, ABAQUS, Inc. J., USA, 2004.
- Bernstein, B., Hypo-Elasticity and Elasticity, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 6, 89–104, 1960.
- Casey, J., Naghdi, P., M., A Remark on the Use of the Decomposition  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \mathbf{F}_p$  in Plasticity. *J. Appl. Mech. ASME*, 47, 672–675, 1980.
- Casey, J., Naghdi, P., M., Discussion on: A Correct Definition of Elastic and Plastic Deformation and Its Computational Significance. *J. Appl. Mech. ASME*, 48, 983–985, 1981.
- Casey, J., Discussion on: Invariance Considerations in Large Strain Elasto-Plasticity, *J. Appl. Mech. ASME*, 54, 247–248, 1987.
- Coleman, B., D., Gurtin, M., E., Thermodynamics with internal state variables, *J. Chem. Phys.*, 47, 597–613, 1967.
- Dashner, P., A., Invariance considerations in large strain elasto-plasticity, *J. Appl. Mech.*, 53, 55–60, 1986.
- Eringen, A., C., Mechanics of continua, *John Wiley and Sons*, New York, 1967.
- Geers, M., G., D., Finite strain logarithmic hyperelasto-plasticity with softening: a strongly non-local implicit gradient framework, *Comput. Methods. Appl. Mech. Engng.*, 193, 3377–3401, 2004.
- Gill, P., E., Murray, W. and Wright, M., H., Practical optimisation, *Academic Press, INC.*, London, 1981.
- Green, A., E., Naghdy, P., M., A general theory of an elastic-plastic continuum. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 18, pp. 251–281, 1965.
- Green, A., E., Naghdy, P., M., Some remarks on elastic-plastic deformation at finite strain. *Int. J. Engng. Sci.*, 9, pp. 1219–1229, 1971.
- Gurtin, M., E., An Introduction to Continuum Mechanics, *Academic Press*, New York, 1981.
- Gurtin, M., E., Anand, L., The decomposition  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \mathbf{F}_p$ , material symmetry, and plastic irrotationality for solids that are isotropic-viscoplastic or amorphous, *International Journal of Plasticity*, 21, 1686–1719, 2005.
- Hill, R., On constitutive inequalities for simple materials. I and II, *J. Mech. Phys. Solids*, 16, 229–242, 1968.
- Kleiber, M., König, J., A., Sawczuk, A., Studies on plastic structures: stability, anisotropic hardening, cyclic loads, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 33, 487–556, 1982.
- Kuščer, I., Kodre, A., Matematika v fiziki in tehniki, *Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije*, Ljubljana, 1994.
- Lee, E., H., Elastic-plastic deformation at finite strains. *J. Appl. Mech.*, 36, pp. 1–6, 1969.
- Lee, E., H., Some comments on elastic-plastic analysis, *Int. J. Solids and Structures*, 17, 859–872, 1981.
- Levitas, V., I., Principle of minimum dissipation rate at time  $t + \Delta t$  for the plastic spin, *Mechanics Research Commun.*, 24, 639–648, 1997.
- Lubarda, V., A., Lee, E., H., A correct definition of elastic and plastic deformation and its computational significance, *J. Appl. Mech.*, 48, 35–40, 1981.
- Lubliner, J., A Maximum-Dissipation Principle in Generalized Plasticity. *Acta Mech.*, 52, 225–237, 1984.
- Marsden, J., E. and Hughes, T.J.R., Mathematical Foundations of Elasticity. *Prentice-Hall, Englewood Cliffs*, New York, 1983.

- McMeeking, R., M., Rice, J., R., Finite-element formulations for problems of large elastic-plastic deformation, *Int. J. Solids and Structures*, 11, 601–616, 1975.
- Naghdi, P., M., A critical review of the state of finite plasticity, *J. Appl. Math. and Physics*, 41, 315–394, 1990.
- Nemat-Nasser, S., Decomposition of strain measures and their rates in finite deformation elastoplasticity. *Int. J. Solids and Structures*, 15, 155–166, 1979.
- Nemat-Nasser, S., On finite deformation elasto-plasticity. *Int. J. Solids and Structures*, 18, 857–872, 1982.
- Papadopoulos, P., Lu, J., A general framework for the numerical solution of problems in finite elasto-plasticity, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 159, 1–18, 1998.
- Rojc, T., Integracija klasične hypoelastične konstitutivne zveze; 1. del: zvezna formulacija, *Zbornik srečanja Kuhljevi dnevi 04*, SDM, Otočec, sept. 2004, 245–252, 2004.
- Rojc, T., Štok, B., Dva pristopa k uporabi konvektivnega koordinatnega sistema v analizi deformabilnih teles pri velikih deformacijah. *Kuhljevi dnevi 05*, SDM, Podčetrtek, sept. 2005, (razširjeni članek: <http://www.km.fgg.uni-lj.si/sdm/zborniki.htm>), 2005.
- Rojc, T., O multiplikativni teoriji hiperelasto-plastičnih teles pri velikih deformacijah in objektivnosti numeričnih algoritmov. II. Del: Integracijski algoritmi, *Gradbeni vestnik*, letnik 56, marec, 2007.
- Shames, I., H., Cozzarelli, F.A., Elastic and inelastic stress analysis, *Taylor & Francis*, London, 1997.
- Simo, J., C., Ortiz, M., An unified approach to finite deformation elastoplastic analysis based on the use of hyperelastic constitutive equations, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 49, 221–245, 1985.
- Simo, J., C., A framework for finite strain elastoplasticity based on maximum plastic dissipation and the multiplicative decomposition. Part I. Continuum formulation. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 66, pp. 199–219, 1988
- Simo, J., C., Algorithms for static and dynamic multiplicative plasticity that preserve the classical return mapping schemes of the infinitesimal theory, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 69, 61–112, 1992.
- Simo, J., C., Hughes, T.J.R., Computational Inelasticity, *Springer-Verlag*, New York, 1998.

# NUMERIČNA REŠITEV KONVEKTIVNEGA TOKA V POROZNI KOTANJI ZARADI DVOJNE DIFUZIJE

## NUMERICAL SOLUTION OF DOUBLE DIFFUSION NATURAL CONVECTION IN POROUS CAVITY

as. Janja Kramer, univ. dipl. inž. grad.,

janja.kramer@uni-mb.si

izr. prof. dr. Renata Jecl, univ. dipl. inž. grad.,

renata.jecl@uni-mb.si

Fakulteta za gradbeništvo, Univerza v Mariboru,  
Smetanova 17, 2000 MARIBOR

Znanstveni članek

UDK 532.7 : 519.61

**Povzetek** | V prispevku je predstavljen problem, pri katerem tekočino v zaprti, porozni kotanji izpostavimo vertikalnim temperaturnim in snovskim gradientom. Zaradi kombinacije termičnih in snovskih vzgonskih sil, ki so posledica spremembe gostote tekočine, se sproži proces naravne konvekcije, v tem primeru imenovan naravna konvekcija zaradi dvojne difuzije. Primer je rešen z uporabo robno območne integralske metode (ROIM), ki predstavlja dopolnitev metode robnih elementov (MRE). Za modeliranje podanega prenosnega pojava so uporabljene modificirane Navier-Stokesove enačbe v obliki ohranitvenih zakonov mase, gibalne veličine, energije in snovi. Vodilne parcialne diferencialne enačbe so izpeljane z uporabo hitrostno vrtilne formulacije (HVF), z ustreznimi osnovnimi rešitvami (Greenovimi funkcijami) prevedene v integralsko obliko, zapisane v diskretni obliki in rešene z uporabo numeričnega modela. Predstavljeni so nekateri rezultati numeričnega izračuna za različne parametre, ki vplivajo na režim konvektivnega toka, podana pa je tudi primerjava z izsledki že objavljenih študij.

**Summary** | The problem where fluid in a closed porous cavity is exposed to vertical heat and mass gradients is presented. Due to the combined effects of temperature and concentration driving buoyancy forces as a result of the density gradients, the natural convection process occurs, usually named double diffusion natural convection. The problem is solved using the boundary domain integral method (BDIM) as an extension of the boundary element method (BEM). The stated transport phenomenon is modeled by the modified Navier-Stokes equations, represented in the form of conservation laws for mass, momentum, energy, and species. The governing set of partial differential equations is written according to the velocity vorticity formulation (VVF), with the use of appropriate fundamental solutions (Green functions) further transformed into integral equations, discretized and finally solved with a numerical model. Some numerical results for different governing parameters of convective flow are presented and compared with the published studies.

## 1 • UVOD

Konvektivni tok v porozni snovi, zasičeni s fluidom, je v praksi zaradi mnogih inženirskih in tehnoloških aplikacij pomemben pojav in je v zadnjih letih predmet številnih raziskav. V literaturi lahko zasledimo mnogo študij, ki obravnavajo problem naravne konvekcije, povzročene zaradi termičnih vzgonskih sil, manj pozornosti pa je posvečene problemom s sodelujočimi termičnimi in snovskimi vzgonskimi silami, tako imenovani naravni konvekciji zaradi dvojne difuzije, ki je predmet našega dela. Praktičen primer je recimo transport vlage v slojih toplotne izolacije ali pa disperzija kontaminantov v zasičenih zemljinah. V objavljenih študijah lahko zasledimo rezultate za porozno kotanjo, kjer so vertikalne stene izpostavljene temperaturnemu in koncentracijskemu gradientu, horizontalni porozni sloj ter druge geometrije. Rešitve za prenos toplote in snovi v vertikalni porozni kotanji, dobljene z uporabo Darcyjevega modela, so podane v delih (Trevisan, 1985, 1986) in (Alavyoon, 1993). Numerična rešitev dvojne difuzije za primer nasprotnih vzgonskih sil (višja temperatura na eni vertikalni steni in višja koncentracija snovi na drugi) je podana v delih (Alavyoon, 1994) in (Angirasa, 1996). Darcy-Brinkmanova for-

mulacija, ki daje fizikalno realnejše rezultate predvsem pri manj poroznih snoveh, je uporabljena v delih (Goyeau, 1996) in (Nithiarasu, 1996) s poudarkom na analizi vpliva členov dodanih Darcyjevi enačbi na skupen prenos toplote in snovi skozi kotanjo. Za reševanje osnovnih enačb so v omenjenih študijah uporabljene metoda končnih volumnov in metoda končnih razlik.

V našem prispevku je za izračun prenosa toplote in snovi po porozni kotanji uporabljena Darcy-Brinkmanova formulacija, kjer je gibalna enačba ekvivalent Navier-Stokesovi gibalni enačbi za čisto tekočino. Enačbe so zapisane na makroskopskem nivoju s povprečenjem mikroskopskih enačb za čisto tekočino preko reprezentativnega elementarnega poroznega volumna. Osnovne enačbe so rešene z uporabo ROIM, ki je izpeljanka klasične MRE. Metoda je bila v nekoliko spremenjeni obliki že uspešno uporabljena za reševanje konvektivnega toka v porozni snovi kot posledice temperaturnih gradientov (Jecl, 2000, 2001, 2003, 2005). V tem članku pa bomo podali rešitve dvojne difuzije oziroma konvektivnega toka zaradi temperaturnih in snovskih gradientov.

## 2 • OSNOVNE ENAČBE

Makroskopske enačbe ohranitve mase, gibalne veličine, energije in snovi so zapisane z upoštevanjem dejstva, da je samo del volumna, ki je izražen s poroznostjo, na voljo za tok tekočine, hkrati pa veljajo še naslednje predpostavke:

- trdna faza porozne snovi je homogena, izotropna in nedeformabilna,
- tekoča faza oziroma tekočina je nestisljiva, viskozna in newtonska,
- porozna snov je zasičena, kar pomeni, da so vse pore zapolnjene s tekočino,
- povprečni temperaturi trdne in tekoče faze sta enaki – porozna snov je v termodinamičnem ravnovesju in tako energijske spremembe ali tudi toplotno obnašanje porozne snovi zapišemo z eno samo enačbo za povprečno temperaturo.

Sistem sestavljajo kontinuitetna in gibalna enačba ter enačbi ohranitve energije in snovi v obliki:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{1}{\phi} \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{1}{\phi^2} \frac{\partial v_j v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_i} + F g_i - \frac{v}{K} v_i + \frac{v}{\phi} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [\phi(\rho c)_f + (1-\phi)(\rho c)_s] T + (\rho c)_f \frac{\partial v_j T}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \lambda_e \frac{\partial T}{\partial x_j} \right), \quad (3)$$

$$\phi \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial v_j C}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( D \frac{\partial C}{\partial x_j} \right). \quad (4)$$

Uporabljeni parametri so:  $v_i$   $i$ -ta komponenta filtracijske hitrosti,  $x_i$   $i$ -ta koordinata,  $\phi$  poroznost,  $t$  čas,  $\rho$  gostota tekočine,  $\nu$  kinematična viskoznost,  $\partial p / \partial x_i$  tlačni gradient,  $g_i$  gravitacijski pospešek in  $K$  prepustnost porozne snovi. Povezava med gostoto, temperaturo in koncentracijo je podana s funkcijo  $F$  v obliki:  $F = (\rho - \rho_0) / \rho_0 = -(\beta_T(T - T_0) + (\beta_C(C - C_0)))$ , kjer je  $\rho_0$  referenčna gostota tekočine pri temperaturi  $T_0$  in koncentraciji  $C_0$ ,  $\beta_T$  je koeficient temperaturnega volumenskega raztezka,  $\beta_C$  pa koeficient snovskega volumenskega raztezka. Nadalje sta  $(\rho c)_f$  in  $(\rho c)_s$  toplotni kapaciteti za tekočo in trdno fazo,  $T$  je temperatura,  $\lambda_e$  efektivna toplotna prevodnost porozne snovi podana kot  $\lambda_e = \phi \lambda_f + (1 - \phi) \lambda_s$ , kjer sta  $\lambda_f$  in  $\lambda_s$  toplotni prevodnosti za tekočino in trdnino. V zadnji enačbi  $C$  predstavlja koncentracijo,  $D$  pa snovsko difuzivnost. Gibalna enačba (2), imenovana tudi Darcy-Brinkmanova enačba, ima v našem primeru dva viskozna člena. Prvi viskozni je običajen Darcyjev člen (tretji na desni), drugi pa je Brinkmanov člen (četrti na desni), ki je analogen Laplaceovemu členu v Navier-Stokesovi enačbi za čisto tekočino. Z Brinkmanovo enačbo lahko zadovoljimo brezdrsnemu robnemu pogoju (no-slip boundary condition) oziroma pogoj, da je hitrost na neprepustnih robovih, ki omejujejo porozno snov, enaka nič. Pomembno je poudariti, da je ta gibalna enačba neke vrste interpolacija med Navier-Stokesovo enačbo za čisto tekočino in Darcyjevim zakonom. V limiti, ko se poroznost približuje enoti ( $\phi \rightarrow 1$ ) in gre posledično prepustnost proti neskončnosti ( $K \rightarrow \infty$ ), se namreč Brinkmanova enačba prevede v Navier-Stokesovo enačbo za čisto tekočino, ko pa se vrednost prepustnosti zmanjšuje in približuje nič ( $K \rightarrow 0$ ), postane Brinkmanov člen zanemarljivo majhen in gibalna enačba (2) se prevede v Darcyjev zakon (Bear, 1991).

### 3 • ROBNO OBMOČNA INTEGRALSKA METODA

Robno območna integralna metoda predstavlja alternativo do sedaj najpogosteje uporabljanim numeričnim metodam za reševanje sistemov nelinearnih parcialnih diferencialnih enačb, kot so metoda končnih elementov, metoda končnih razlik, metoda končnih volumnov. Klasična metoda robnih elementov se uporablja predvsem za reševanje potencialnih problemov, pri čemer rešujemo samo robne integrale oziroma neznanke samo na robu. Z robno območno integralno metodo pa lahko rešujemo tudi zapletene difuzivno-konvektivne probleme, pri katerih se kot neznanke v sistemu diskretnih enačb pojavljajo tako robne kot območne vrednosti spremenljivk – rešujemo torej tako robne kot območne integrale, kar je dalo metodi tudi novo ime. Preden uporabimo ROIM na osnovnih enačbah, jih moramo ustrezno modificirati. Viskoznost v gibalni enačbi razdelimo na konstanten in spremenljiv del  $v = \bar{v} + \bar{v}'$ , tako da se Brinkmanov člen zapiše v dveh delih in enačba (2) preoblikuje v:

$$\frac{\partial v'_i}{\partial t} + v'_j \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_i} + Fg_i - \frac{v\phi}{K} v'_i + \bar{v} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} (2\bar{v} \dot{\epsilon}_{ij}), \quad (5)$$

kjer je  $v'_i$  modificirana hitrost  $v'_i = v_i/\phi$ ,  $\dot{\epsilon}_{ij}$  pa je deformacijski tenzor  $\dot{\epsilon}_{ij} = 1/2(\partial v'_i/\partial x_j + \partial v'_j/\partial x_i)$ . Podobno kot kinematično viskoznost razdelimo tudi termično difuzivnost  $a_p$ , ki je definirana kot  $a_p = \lambda_o/(\rho c)_r$ , in snovsko difuzivnost  $D$  na konstanten in spremenljiv del:  $a_p = \bar{a}_p + \tilde{a}_p$ ,  $D = \bar{D} + \tilde{D}$ . Če vključimo še izraz za razmerje toplotnih kapacitet  $\sigma = \phi + (1 - \phi)(\rho c)_s/(\rho c)_r$ , lahko energijsko in snovsko enačbo zapišemo kot:

$$\frac{\sigma}{\phi} \frac{\partial T}{\partial t} + v'_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = \frac{\bar{a}_p}{\phi} \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\tilde{a}_p}{\phi} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right), \quad (6)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial v'_j C}{\partial x_j} = \frac{\bar{D}}{\phi} \frac{\partial^2 C}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\tilde{D}}{\phi} \frac{\partial C}{\partial x_j} \right). \quad (7)$$

V naslednjem koraku zgoraj podane enačbe transformiramo z uporabo hitrostno-vrtinčne formulacije, tako da se računski shema razdeli na kinematični in kinetični del (Škerget, 1999). Vpeljemo vektor vrtinčnosti  $\omega_i$ , ki je po definiciji rotor hitrostnega polja  $\omega_i = e_{ijk}(\partial v_k/\partial x_j)$ , kjer je  $e_{ijk}$  permutacijski tenzor. Ker so numerični rezultati v pričujočem prispevku omejeni na dvo-dimenzionalni problem, bodo vse enačbe v nadaljevanju zapisane samo za primer ravninske geometrije. Kinematika se sedaj zapiše v obliki eliptične hitrostne vektorske enačbe kot:

$$\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + e_{ij} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} = 0. \quad (8)$$

Kinetika je podana z enačbo vrtinčnosti, energijsko in snovsko prenosno enačbo.

Transportno enačbo vrtinčnosti dobimo s transformacijo Brinkmanove gibalne enačbe (5) in se zapiše kot:

$$\frac{\partial \omega'}{\partial t} + v'_j \frac{\partial \omega'}{\partial x_j} = \bar{v} \frac{\partial^2 \omega'}{\partial x_j \partial x_j} + e_{ij} g_j \frac{\partial F}{\partial x_j} - \frac{v\phi}{K} \omega' + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \bar{v} \frac{\partial \omega'}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial f_j}{\partial x_j}, \quad (9)$$

kjer je  $\omega'$  modificirana vrtinčnost  $\omega' = \omega/\phi$ ,  $f_j$  pa prispevek zaradi učinkov spremenljivih lastnosti snovi. Enačbe (6), (7), (8) in (9) predstavljajo vodilni nelinearni sistem enačb, ki jih moramo zapisati v integralni obliki. To storimo z uporabo metode utežnih ostankov v kombinaciji z ustreznimi Greenovimi funkcijami oziroma osnovnimi rešitvami. Integralna oblika enačbe kinematike se zapiše kot:

$$c(\xi) v_i(\xi) + \int_{\Gamma} v_j q^* d\Gamma = \int_{\Omega} \frac{\partial v_i}{\partial n} u^* d\Omega + \int_{\Omega} b_i u^* d\Omega. \quad (10)$$

kjer je  $b_i$  člen telesnih sil,  $b_i = e_{ij} \partial \omega'/\partial x_j$  in  $u^*$  eliptična Laplaceova osnovna rešitev,  $q^*$  pa njen odvod,  $q^* = \partial u^*/\partial n$ . Parameter  $c(\xi)$  predstavlja geometrijski koeficient, ki je odvisen od lege izvorne točke  $\xi$ ,  $\Gamma$  pa je rob računskega območja  $\Omega$ . Z nadaljnjim preoblikovanjem (Škerget, 2005) in uporabo Gaussovega divergenčnega teorema lahko integralno obliko za kinematiko zapišemo v obliki:

$$c(\xi) v_i(\xi) + \int_{\Gamma} v_j q^* d\Gamma = e_{ij} \int_{\Gamma} v_j q_i^* d\Gamma - e_{ij} \int_{\Omega} \omega q_j^* d\Omega. \quad (11)$$

Za numerično aproksimativno rešitev moramo pripadajočo robno območno integralno enačbo zapisati v diskretni obliki, tako da robne in območne integrale aproksimiramo z vsoto integralov po posameznih robnih elementih in notranjih celicah. Po diskretizaciji računskega območja, vpeljavi vplivnih matrik in upoštevanju robnih pogojev zapišemo naslednji matrični sistem:

$$[H] \{v_i\} = e_{ij} [H_i] \{v_j\} - e_{ij} [D_j] \{\omega\}, \quad (12)$$

kjer so  $(H)$ ,  $(H_i)$  in  $(D_j)$  matrike, sestavljene iz integralov, ki predstavljajo integracijo po robnih elementih in notranjih celicah, zapisanih za vsa robna in notranja vozlišča.

Integralni zapis za enačbo vrtinčnosti, temperature in koncentracije izhaja iz nehomogene eliptične difuzivno-konvektivne enačbe (Jecl, 2003):

$$p \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial v'_j u}{\partial x_j} - \frac{u}{\Delta t} + b = 0, \quad (13)$$

kjer je  $u$  poljubna funkcija polja (vrtinčnost, temperatura, koncentracija), spremenljivka  $p$  je definirana v skladu z ohranitvenim zakonom,  $b$  pa je nehomogeni del telesnih sil. Zapišemo lahko naslednjo integralno enačbo:

$$c(\xi)u(\xi) + p \int_{\Gamma} u \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma = \int_{\Gamma} \left( p \frac{\partial u}{\partial n} - uv'_n \right) d\Gamma + \int_{\Omega} bu^* d\Omega, \quad (14)$$

kjer je  $U^*$  eliptična difuzivno-konvektivna osnovna rešitev. Glede na zgoraj zapisano enačbo sledijo sedaj izpeljane integralske enačbe za kinetiko vrtinčnosti, temperaturo in koncentracijo:

$$c(\xi)\omega'(\xi) + \int_{\Gamma} \omega' \frac{\partial U^*}{\partial n} d\Gamma = \frac{1}{\bar{v}} \int_{\Gamma} \left( v \frac{\partial \omega'}{\partial n} - \omega'v'_n + e_{ij}g_jFn_j + f_jn_j \right) U^* d\Gamma + \frac{1}{\bar{v}} \int_{\Omega} \left( \omega' \tilde{v}'_j - e_{ij}g_jF - \tilde{v} \frac{\partial \omega'}{\partial x_j} - f_j \right) \frac{\partial U^*}{\partial x_j} d\Omega + \frac{1}{\bar{v}\Delta t} \int_{\Omega} \frac{v\phi}{K} \omega'U^* d\Omega + \frac{1}{\bar{v}\Delta t} \int_{\Omega} \omega'_{F-1}U^* d\Omega \quad (15)$$

$$c(\xi)T(\xi) + \int_{\Gamma} T \frac{\partial U^*}{\partial n} d\Gamma = \frac{\phi}{\bar{\alpha}_p} \int_{\Gamma} \left( \frac{\alpha_p}{\phi} \frac{\partial T}{\partial n} - Tv'_n \right) U^* d\Gamma - \frac{\phi}{\bar{\alpha}_p} \int_{\Gamma} \left( T \tilde{v}'_j - \frac{\alpha_p}{\phi} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) \frac{\partial U^*}{\partial x_j} d\Omega + \frac{\phi}{\bar{\alpha}_p} \int_{\Omega} T_{F-1}U^* d\Omega \quad (16)$$

$$c(\xi)C(\xi) + \int_{\Gamma} C \frac{\partial U^*}{\partial n} d\Gamma = \frac{\phi}{D} \int_{\Gamma} \left( \frac{D}{\phi} \frac{\partial C}{\partial n} - Cv'_n \right) U^* d\Gamma - \frac{\phi}{D} \int_{\Omega} \left( \frac{\tilde{D}}{\phi} \frac{\partial C}{\partial x_j} - Cv'_j \right) \frac{\partial U^*}{\partial x_j} d\Omega + \frac{\phi}{D\Delta t} \int_{\Omega} C_{F-1}U^* d\Omega \quad (17)$$

kjer je  $U^*$  modificirana difuzivno-konvektivna osnovna rešitev in je  $U^* = \bar{v}U^*$  v gibalni enačbi,  $U^* = \bar{\alpha}_p/\phi U^*$  v energijski enačbi in  $U^* = \bar{D}/\phi U^*$  v snovski enačbi. V naslednjem koraku pripadajoče robno območje integralske enačbe zapišemo v diskretizirani obliki tako, da robne in območne integrale aproksimiramo z vsoto integralov po posameznih robnih elementih in notranjih celicah. Sledi matrična oblika za vrtinčno, temperaturno in koncentracijsko kinetiko:

$$[H]\{\omega'\} = \frac{1}{\bar{v}} [G] \left\{ v \frac{\partial \omega'}{\partial n} - \omega'v'_n + e_{ij}g_jFn_j + f_jn_j \right\} + \frac{1}{\bar{v}} [D_j] \left\{ \omega' \tilde{v}'_j - e_{ij}g_jF - \tilde{v} \frac{\partial \omega'}{\partial x_j} - f_j \right\} + \frac{1}{\bar{v}\Delta t} [B] \left\{ \frac{v\phi}{K} \omega'U^* + \omega'_{F-1} \right\} \quad (18)$$

$$[H]\{T\} = \frac{\phi}{\bar{\alpha}_p} [G] \left\{ \frac{\alpha_p}{\phi} \frac{\partial T}{\partial n} - Tv'_n \right\} - \frac{\phi}{\bar{\alpha}_p} [D_j] \left\{ T \tilde{v}'_j - \frac{\alpha_p}{\phi} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right\} + \frac{1}{\bar{\alpha}_p\Delta t} [B]\{T\}_{F-1} \quad (19)$$

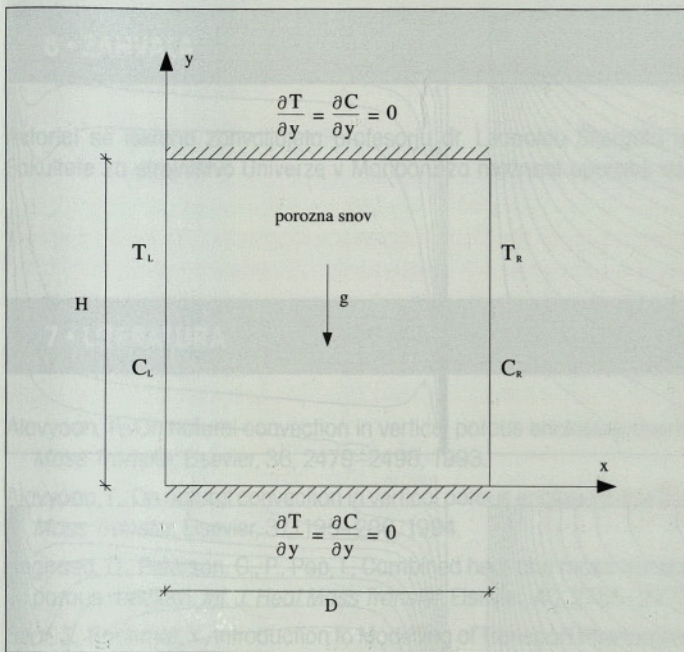
$$[H]\{C\} = \frac{\phi}{D} [G] \left\{ \frac{D}{\phi} \frac{\partial C}{\partial n} - Cv'_n \right\} - \frac{\phi}{D} [D_j] \left\{ \frac{\tilde{D}}{\phi} \frac{\partial C}{\partial x_j} - Cv'_j \right\} + \frac{\phi}{D\Delta t} [B]\{C\}_{F-1} \quad (20)$$

Sistem diskretiziranih enačb (12), (18), (19) in (20) se reši kot vezani sistem kinetike in kinematike z upoštevanjem ustreznih robnih pogojev. Dobljen implicitni sistem enačb je hkrati zapisan za vsa robna in območna vozlišča, kar rezultira v polni sistemski matriki, ki vsebuje tako vplive difuzije kot konvekcije. Numerična shema je stabilna in natančna, vendar za reševanje potrebuje veliko računalniškega spomina in časa. Zaradi tega se uporabi tehnika podobmočij, kjer se celotno območje izračuna razdeli na podobmočja, kar bistveno skrajša računski čas. Končni sistem enačb se dobi z združevanjem sistemov enačb za posamezno podobmočje ob upoštevanju ustreznih kontinuitetnih pogojev na vmesnih robovih. Sistemski matrika je tako bolj prazna in primernejša za iterativni izračun. V podanem primeru je vsako podobmočje sestavljeno iz štirih nezveznih 3-točkovnih kvadratnih robnih elementov in ene zvezne 9-točkovne kvadratne območne celice (Jecl, 2003).

#### 4 • NUMERIČNI PRIMER

Učinkovitost in pravilnost opisane numerične metode se je testirala na primeru naravne konvekcije v kvadratni kotanji zapolnjeni s porozno snovjo, ki je ob straneh izpostavljena različnim vrednostim temperature  $T$  in koncentracije  $C$  ( $T_L$  in  $C_L$  na levi steni ter  $T_R$  in  $C_R$  na desni strani), horizontalne stene pa so toplotno in snovsko neprevodne. Predpostavimo, da je porozna snov homogena in nedeformabilna ter v celoti zasičena s tekočino. Nadaljnje predpostavke so še, da sta poroznost in prepustnost porozne snovi konstantni, tekočina, ki zapolnjuje pore pa je newtonska in v termičnem ravnovesju s trdo fazo. Geometrija in robni pogoji zastavljenega problema so razvidni iz slike 1.

Izračun je opravljen za kvadratno kotanjo z razmerjem stranic  $A = H/D = 1$  pri različnih vrednostih Darcyjevega števila  $Da = \Lambda(K/H^2)$ , kjer je  $\Lambda = 1/\phi$  in modificiranega termičnega Rayleighovega števila  $Ra_T = Ra_T Da \lambda$ ,  $Ra_T = g\beta_T D^3 \Delta T / \nu a_t$ , kjer je  $a_t$  termična difuzivnost tekočinske faze,  $\lambda$  pa razmerje toplotne prevodnosti tekočinske faze in efektivne toplotne prevodnosti definirane v poglavju 2,  $\lambda = \lambda_t/\lambda_e$ . Ostali parametri problema so še Lewisovo število  $Le = Sc/Pr$ , kjer je  $Sc$  Schmidtovo število,  $Sc = \nu/D$ , ki predstavlja razmerje med kinematično viskoznostjo in snovsko difuzivnostjo, Prandtlovo število  $Pr$ ,  $Pr = \nu/a$ , ki je razmerje med kinematično viskoznostjo in termično difuzivnostjo ter



Slika 1 • Geometrija kotelje ter robni pogoji

vzgonski koeficient  $N$ , ki pove razmerje med vplivom termičnih in snovskih vzgonskih sil definiran kot  $N = \beta_c \Delta C / \beta_T \Delta T$ . Zaradi poenostavitve izračuna smo upoštevali vrednosti razmerja toplotnih prevodnosti in toplotnih kapacitet  $\lambda = \sigma = 1$ , za vrednost poroznosti pa  $\phi = 0.5$ . Uporabljena je neekvidistantna računrska mreža velikosti  $20 \times 20$  podobmočij z zgostitvami na robovih, pri čemer je razmerje med najkrajšo in najdaljšo stranico  $r = 6$ . Skupen prenos toplote in snovi skozi koteljo podajata Nusseltovo in Sherwoodovo število, ki sta definirani kot:

$$Nu = - \int_0^1 \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0} dy, \quad Sh = - \int_0^1 \left( \frac{\partial C}{\partial x} \right)_{x=0} dy. \quad (21)$$

Da		10 <sup>-1</sup>	10 <sup>-2</sup>	10 <sup>-3</sup>	10 <sup>-4</sup>	10 <sup>-5</sup>
Ra* = 100	sedanji rezultati	1.08	1.70	2.43	2.83	2.99
	ref. (Jecl, 2003)	1.086	1.695	2.414	2.847	2.995
	ref. (Lauriat, 1989)	-	1.70	2.41	2.84	3.02
Ra* = 500	sedanji rezultati	1.704	3.20	5.35	7.32	8.38
	ref. (Jecl, 2003)	1.681	3.145	5.235	7.185	8.428
	ref. (Lauriat, 1989)	-	3.30	5.42	7.35	8.41

Preglednica 1 • Povprečno Nusseltovo število za  $N = 0$ ,  $Le = 1$

Prvi izračunan primer je naravna konvekcija zaradi delovanja termičnih vzgonskih sil  $N = 0$ , za  $Le = 1$ , ter vrednosti  $Ra^* = 100$  in  $Ra^* = 500$  pri različnih Darcyjevih številih, in sicer za  $Da = 10^{-1} - 10^{-5}$ . Skupen prenos toplote je v tem primeru enak skupnemu prenosu snovi torej sta vrednosti Nusseltovega in Sherwoodovega števila identični. Re-

zultati so podani v preglednici 1 in primerjani z deli (Jecl, 2003) in (Lauriat, 1989), kjer je obravnavan problem konvektivnega toka v porozni kotelji samo zaradi termičnega gradienta.

Ra*		100	200
Nu	sedanji rezultati	3.13	5.06
	ref. (Trevisan, 1985)	3.27	5.61
	ref. (Goyeau, 1996)	3.11	4.96
Sh	sedanji rezultati	14.26	22.25
	ref. (Trevisan, 1985)	15.61	23.23
	ref. (Goyeau, 1996)	13.25	19.86

Preglednica 2 • Povprečno Nusseltovo in Sherwoodovo število za  $Da = 10^{-7}$ ,  $Le = 10$ ,  $N = 0$

V preglednici 2 so zbrani rezultati za primer skupnega prenosa toplote in snovi za Darcyjev model ( $Da = 10^{-7}$ ), pri vrednostih  $Le = 10$ ,  $N = 0$ , ter  $Ra^* = 100$  in  $Ra^* = 200$ . Še vedno gre za konvekcijo izključno zaradi termičnih vzgonskih sil, ki povzroči tudi prenos snovi po kotelji. Zaradi večje vrednosti Lewisovega števila je pri določenem Rayleighovem številu prenos snovi večji od prenosa toplote. Sherwoodovo število tako narašča z vrednostmi  $Le$  in  $Ra^*$ , medtem ko Nusseltovo število v primeru  $N = 0$  ni odvisno od Lewisovega števila pri določenem  $Ra^*$ . Iz primerjalnih preglednic je razvidno, da so rezultati, dobljeni po opisani metodi, primerljivi z objavljenimi, dobljenimi z uporabo drugačnih modelov in postopkov reševanja, kar potrjuje pravilnost zastavljene numerične sheme.

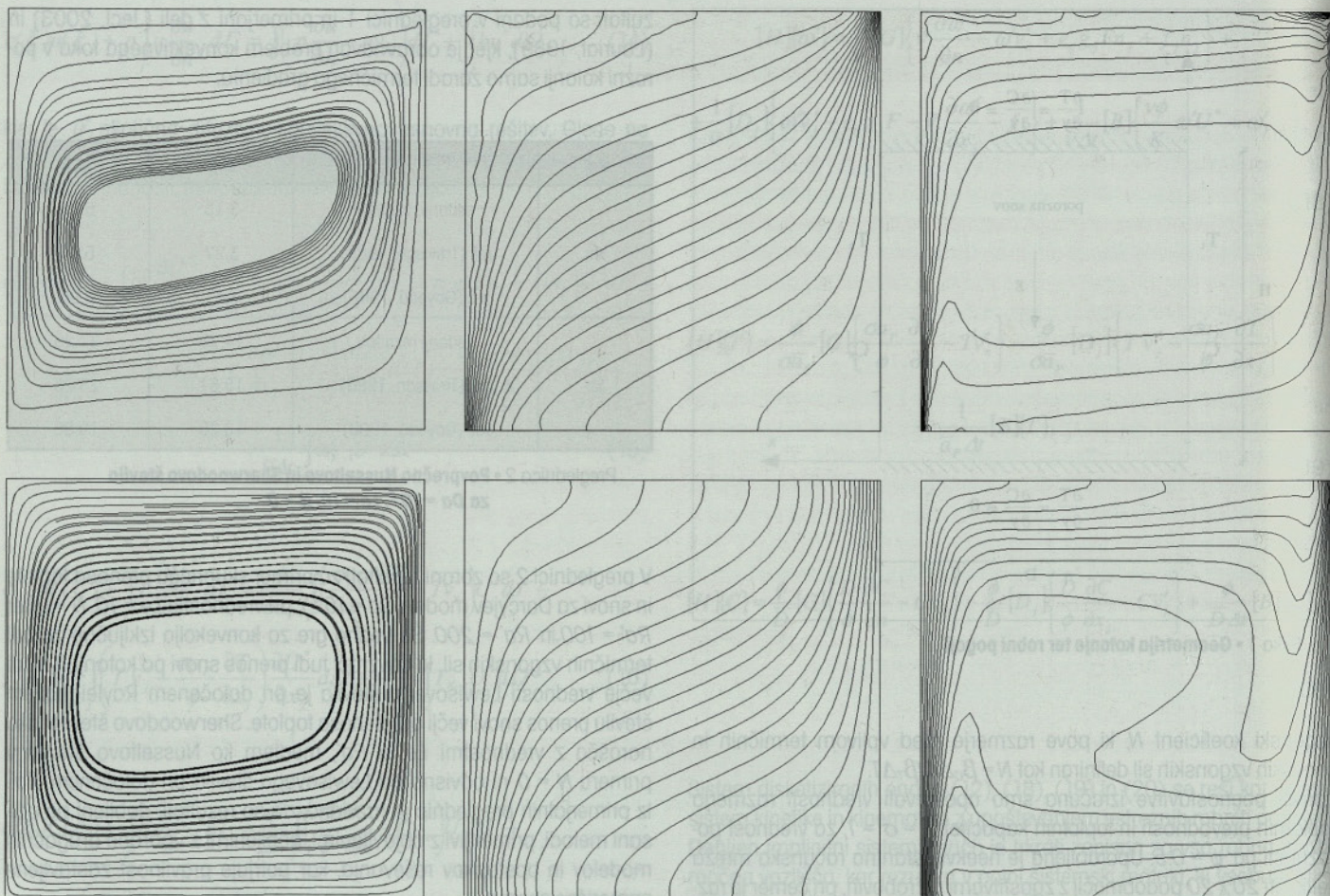
Naslednji izračunani primer, katerega rezultati so podani v preglednici 3 je konvekcija zaradi sodelovanja termičnih in snovskih vzgonskih sil za vrednost koeficienta  $N = 1$ , pri  $Ra^* = 100$  in  $Da = 10^{-1}$ ,  $Da = 10^{-3}$  in  $Da = 10^{-7}$ . Vzgonski sili tokrat delujeta z enakim vplivom.

Da	10 <sup>-1</sup>	10 <sup>-3</sup>	10 <sup>-7</sup>
Nu	1.04	2.58	3.75
Sh	2.37	10.08	21.40

Preglednica 3 • Povprečno Nusseltovo in Sherwoodovo število za  $Ra^* = 100$ ,  $Le = 10$ ,  $N = 1$

Struktura toka, potek temperaturnega in koncentracijskega polja za primer dvojne difuzije za vrednosti  $Da = 10^{-7}$  (Darcyjev model) in  $Da = 10^{-3}$  (tipičen Darcy-Brinkmanov model) so prikazani na sliki 2.

Opazimo lahko, da so tokovnice za  $Da = 10^{-7}$  najbolj gosto razporejene blizu vertikalnih robov, kar nakazuje, da se tam pojavljajo najvišje hitrosti. Tak rezultat je pričakovan zaradi osnovne lastnosti uporabljene Brinkmanove enačbe, ki za majhne vrednosti prepustnosti (in s tem povezanega Darcyjevega števila) daje vrednosti, kot bi jih dobili z uporabo klasične Darcyjeve gibalne enačbe, po kateri velja, da je hitrost največja prav na robu (enačba namreč ne more zadostiti brezdrsnemu robnemu pogoju). Za primer  $Da = 10^{-3}$  pa vidimo, da postaja vpliv robnih pogojev na hitrostno polje zaznaven, viskozni Brinkmanov člen



Slika 2 • Tokovnice, izoterme in črte koncentracijskega polja za  $Ra' = 100$ ,  $Le = 10$ ,  $N = 1$ ; zgoraj  $Da = 10^7$ , spodaj  $Da = 10^3$

postane namreč pomemben in vpliva na upočasnitev toka v bližini vertikalnih robov, prav tako pa se tudi mesto nastopa največje hitrosti pomakne proti centru kotanje.

Razporeditev izoterm kaže, da je pri majhnem Darcyjevem številu konvektivno gibanje znotraj kotanje močno, ob robovih levo spodaj in desno zgoraj nastopajo veliki temperaturni gradienti. Ko pa Darcyjevo število naraste, postanejo viskozni vplivi pomembni, kar povzroči, da postane razporeditev izoterm bolj enakomerna, kar je rezultat skupnega učinka procesov kondukcije in konvekcije.

Polje koncentracije kaže klasično plastovito strukturo, pri kateri se prav tako opazi vpliv dodatnega viskoznega člena. Pri večjem Darcyjevem številu so koncentracijski gradienti ob steni manjši, kar je vpliv povečevanja viskoznih sil, ki so zajete z Brinkmanovim členom. Prenos mase po porozni kotanji se večja z manjšanjem Darcyjevega števila ( $Da \rightarrow 0$ ), ko se vpliv viskoznega Brinkmanovega člena v gibalni enačbi zmanjšuje.

## 5 • SKLEP

V prispevku je predstavljen izračun problema naravne konvekcije zaradi dvojne difuzije v kvadratni porozni kotanji z robno območno integralno metodo. Prikazana je teoretična osnova za numerično modeliranje prenosnega pojava, izpeljan numerični algoritem pa testiran na konkretnem primeru. Rezultati so ovrednoteni posebej za vpliv termične vzgonske sile ter za vzajemni vpliv termične in snovske vzgonske sile

na skupen prenos toplote in snovi. Z uporabo Brinkmanove gibalne enačbe se lahko določa tudi vpliv Darcyjevega števila na konvektivni tok v kotanji. Povečevanje Brinkmanovega viskoznega člena vidno vpliva na strukturo toka, prenos toplote in snovi. Dobljeni rezultati se ujemajo z objavljenimi študijami, kjer so uporabljene drugačne metode reševanja, kar potrjuje pravilnost opisanega numeričnega postopka.



## 6 • ZAHVALA

Avtorici se iskreno zahvaljujeta profesorju dr. Leopoldu Škergetu iz Fakultete za strojništvo Univerze v Mariboru za možnost uporabe os-

novnega numeričnega modela, predvsem pa za mnoge pogovore in razprave ter za nesebično posredovanje znanja, izkušenj in idej.

## 7 • LITERATURA

- Alavyoon, F., On natural convection in vertical porous enclosure due to perscribed fluxes of heat and mass at the vertical boundaries, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Elsevier, 36, 2479–2498, 1993.
- Alavyoon, F., On natural convection in vertical porous enclosure due to opposing fluxes of heat and mass prescribed at the vertical walls, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Elsevier, 37, 195–206, 1994.
- Angirasa, D., Peterson, G., P., Pop, I., Combined heat and mass transfer by natural convection with opposing buoyancy effects in a fluid saturated porous medium, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Elsevier, 40, 2755–2773, 1996.
- Bear, J., Bachmat, Y., Introduction to Modelling of Transport Phenomena in Porous Media, Kluwer Academic Publishers, 1991.
- Goyeau, B., Songbe, J., P., Gobin D., Numerical study of double-diffusive natural convection in a porous cavity using the Darcy Brinkman formulation, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Elsevier, 39, 1363–1378, 1996.
- Jecl, R.: Modeliranje prenosnih pojavov v porozni snovi z robno-območno integralsko metodo. *Gradbeni vestnik*, 49, str. 26–35, 2000.
- Jecl, R., Škerget, L., Petrešin E.,: Boundary domain integral method for transport phenomena in porous media, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Wiley, 35, 39–54, 2001.
- Jecl, R., Škerget, L., Boundary element method for natural convection in non-Newtonian fluid saturated square porous cavity, *Engng. Anal. Bound. Elem.*, Elsevier, 23, 963–975, 2003.
- Jecl, R., Škerget, L., Kramer, J., Primerjava med Forcheimerjevim in Brinkmanovim modelom konvektivnega toka v porozni kotanji z robno območno integralsko metodo. *Acta hydrotechnica*, FGG Ljubljana, 23/38, 1–17, 2005.
- Lauriat, G., Prasad, V., Natural convection in a vertical porous cavity: a numerical study for Brinkman-Extended Darcy formulation, *J. Heat Transfer*, ASME, 32, 2135–2148, 1989.
- Nield, D., A., Bejan, A., Convection in porous media, Springer, Berlin, 2006.
- Nithiarasu, P., Seetharamu, K., N., Sundararajan, T., Double-diffusive natural convection in an enclosure filled with fluid-saturated porous medium: a generalized non-Darcy approach, *Numerical Heat Transfer*, Taylor & Francis, 30, 413–426, 1996.
- Škerget, L., Hriberšek, M., Kuhn, G., Computational fluid dynamics by boundary-domain integral method, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Elsevier, 46, 1291–1311, 1999.
- Škerget, L., Samec, N., BEM for the two-dimensional plane compressible fluid dynamics, *Engng. Anal. Bound. Elem.*, Elsevier, 29, 41–57, 2005.
- Trevisan, O., V., Bejan, A., Natural convection with combined heat and mass transfer buoyancy effects in a porous medium, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Elsevier, 28, 1597–1611, 1985.
- Trevisan, O., V., Bejan, A., Mass and heat transfer by natural convection in a vertical slot filled with porous medium, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Elsevier, 29, 403–415, 1986.

## 28. ZBOROVANJE GRADBENIH KONSTRUKTORJEV SLOVENIJE

Slovensko društvo gradbenih konstruktorjev je 19. in 20. oktobra 2006 na Bledu organiziralo že 28. zborovanje gradbenih konstruktorjev Slovenije. Srečanja, ki je drugič zapored potekalo v veliki konferenčni dvorani hotela Golf, se je udeležilo 143 domačih in tujih strokovnjakov s področja gradbeništva, ki so skupaj predstavili 27 prispevkov. Vsi prispevki so bili v celoti objavljeni v tiskani publikaciji zborovanja. Udeležence zborovanja so nagovorili župan občine Bled, g. Jože Antonič, dekan Fakultete za gradbeništvo in geodezijo Univerze v Ljubljani, izr. prof. dr. Bojan Majes in dr. Miroslav Pregl z Direktorata za prostor pri Ministrstvu za okolje in prostor. Na otvoritev smo povabili tudi ministra za okolje in prostor, g. Janeza Podobnika, ki se zaradi neodložljivih obveznosti zborovanja žal ni mogel udeležiti, v svojem pismu pa je poudaril, da se zaveda velikega pomena tovrstnih srečanj za razvoj stroke in izmenjavo izkušenj ter nam zaželel uspešno delo.

predstavil zasnovano in posamezne tehnične rešitve iz idejnega projekta sovprežnega mostu s poševnimi kabli preko Save v Beogradu, ki so ga izdelali na podlagi pogodbe, sklenjene po zmagi na mednarodnem natečaju. Most, izveden po tem projektu, z 200 m visokim unikatnim pilonom stožčaste oblike, bo s svojimi razponi pomenil svetovni rekord v kategoriji sovprežnih mostov z enim pilonom.

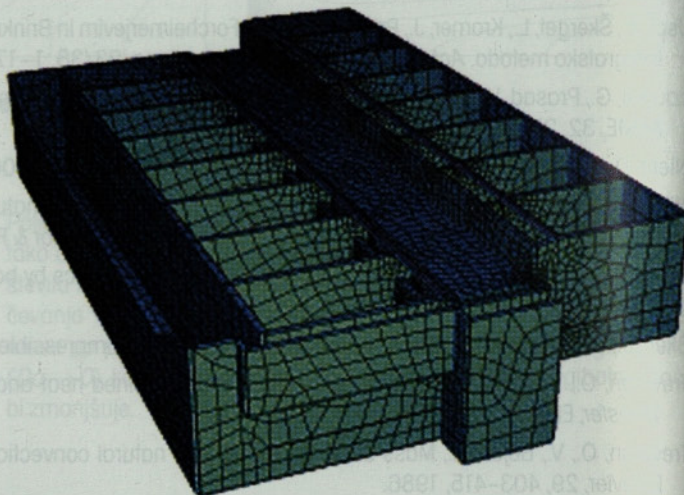
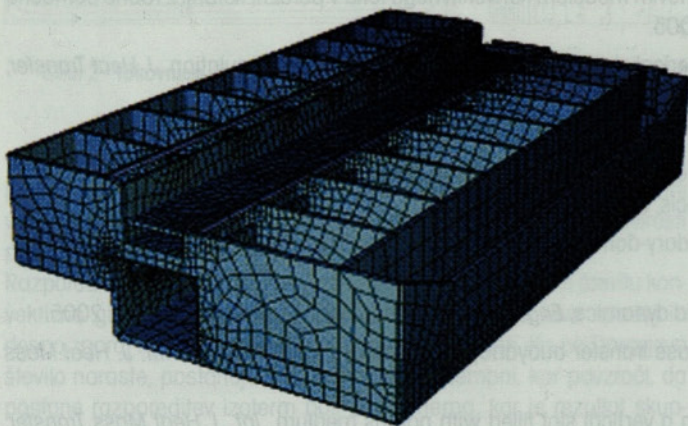
Tako kot že nekaj zadnjih let je vsebina drugih objavljenih in predstavljenih prispevkov pokrivala široko področje dela gradbenih konstruktorjev. Tematsko smo jih razdelili v naslednje sklope:

- Potresna odpornost konstrukcij,
- Mostovi,
- Konstrukcije,
- Geotehnika in
- Gradbeni materiali, preiskave materialov in konstrukcij.

Hozo Harun, univ. dipl. inž. grad.;  
 Bogomir Ipavec, univ. dipl. inž. grad.;  
 mag. Branko Kidrič, univ. dipl. inž. grad.;  
 Jože Kocjan, univ. dipl. inž. grad.;  
 dr. Jože Lopatič, univ. dipl. inž. grad.;  
 Viktor Markelj, univ. dipl. inž. grad.;  
 dr. Franc Saje, univ. dipl. inž. grad.;  
 Franc Zajamšek, univ. dipl. inž. grad.

- Nadzorni odbor:  
 Janko Mele, univ. dipl. inž. grad.;  
 dr. Miroslav Pregl, univ. dipl. inž. grad.;  
 mag. Jelena Srpič, univ. dipl. inž. grad.
- Častno razsodišče:  
 dr. Branko S. Bedenik, univ. dipl. inž. grad.;  
 dr. Darko Beg, univ. dipl. inž. grad.;  
 Ladislava Halas, univ. dipl. inž. grad.

Po prvem delovnem dnevu zborovanja smo se v večernih urah sprostili na družabnem srečanju v restavraciji hotela Golf. Tam smo se podprli z dobro hrano, spili kozarček ali



Letošnji vabljeni predavanji sta pripravila gost iz sosednje Republike Hrvaške prof. dr. Jure Radić in slovenski projektant Viktor Markelj. Prof. Jure Radić z gradbene fakultete v Zagrebu je predaval o učinkovitem upravljanju z velikimi mostovi kot ključnimi objekti na cestni infrastrukturi. Taki objekti zahtevajo glede upravljanja in vzdrževanja posebno pazljivost predvsem v smislu preventivnega vzdrževanja, saj sistemi za upravljanje z običajnimi objekti zanje niso primerni. Viktor Markelj iz Inženirskega biroja Ponting v Mariboru je

V okviru tokratnega zborovanja je potekala tudi redna skupščina društva, na kateri so bili za naslednje štiriletno obdobje izvoljeni predsednik in podpredsednik društva, člani izvršnega in nadzornega odbora ter častnega razsodišča:

- Predsednik: Viktor Markelj, univ. dipl. inž. grad.;
- Podpredsednik: dr. Jože Lopatič, univ. dipl. inž. grad.;
- Izvršni odbor društva:  
 Vukašin Ačanski, univ. dipl. inž. grad.;

dva, malo zaplesali in kar dolgo v noč prijateljsko kramljali.

Z veseljem lahko zapišemo, da priprave na naslednje zborovanje že tečejo. Splošno mnenje udeležencev je bilo, da so pogoji za organizacijo zborovanja v hotelu Golf na Bledu odlični. Zato smo se odločili, da bomo tam pripravili tudi naslednje, 29. zborovanje gradbenih konstruktorjev Slovenije, ki bo 18. in 19. oktobra 2007.

**doc. dr. Jože Lopatič, podpredsednik SDGK**

## SEMINARJI O EVROKODIH – PRVO OBVESTILO

S Pravilnikom o mehanski odpornosti in stabilnosti objektov (U. I. RS, št. 101, 11. november 2005) je določen rok, do katerega moramo vsi, ki se ukvarjamo s projektiranjem gradbenih konstrukcij, v celoti začeti upoštevati evrokode, vključno z nacionalnimi dodatki. Ker so predpisi izjemno obsežni in uvajajo na večini področij povsem nove pristope in principe izračunov in konstruiranja posameznih konstrukcijskih elementov, se je Matična sekcija gradbenih inženirjev Inženirske zbornice Slovenije (MSG IZS) odločila pomagati pri izobraževanju članov.

Glede na to, da se vedno večje število članov MSG IZS obrača na zbornico po pomoč in tolmačenje posameznih problemov v zvezi z uporabo evrokodov v praksi, je MSG IZS ustanovila delovno skupino, ki se ukvarja z aktivnostmi v zvezi z uvedbo novih standardov, med katerimi je na prvem mestu izobraževanje članov. Na podlagi pridobljenih informacij in vedenja o stanju na področju uvajanja evrokodov smo se na področju izobraževanja članov matične sekcije gradbenikov skupaj s Fakulteto za gradbeništvo in geodezijo odločili za izvedbo dveh stopenj izobraževanja:

Na **prvi stopnji** izobraževanja bodo podani splošni pregledi posameznih EC, na **drugi stopnji** pa detajlnejše predstavitve posameznega standarda.

Izobraževanja bodo izvajali sodelavci Fakultete za gradbeništvo in geodezijo Ljubljana ter Zavoda za gradbeništvo Slovenije, ki so sodelovali že pri pripravi in prevajanju evrokodov. Vsak od slušateljev bo dobil delovno gradivo, na podlagi katerega bo lahko sledil predavanjem. Po koncu izobraževanja pa bo izdan zbornik, ki bo na pregleden način povzel vse najvažnejše novice in predvsem razlike na področju projektiranja.

Kotizacija za udeležbo na izobraževanju bo objavljena pri drugem obvestilu, ki bo sledilo v kratkem.

**Prva stopnja** bo obsegala osnovno znanje z vseh področij, ki jih zajemajo evrokodi.

Tečaji prve stopnje bodo potekali v Ljubljani v prostorih IZS in v Mariboru (lokacija bo objavljena naknadno) v aprilu. Urnik še ni dokončen, detajlna obvestila in prijavnice bodo posredovane po pošti članom matične sekcije in objavljena na spletni strani IZS.

### LJUBLJANA (prostor IZS):

02. 04. 2007 16:00–19:30	SIST EN 1990 – Osnove projektiranja konstrukcij, SIST EN 1991 – Vplivi na konstrukcije SIST EN 1992 – Projektiranje betonskih konstrukcij
04. 04. 2007 16:00–19:30	SIST EN 1993 – Projektiranje jeklenih konstrukcij SIST EN 1994 – Projektiranje sovprežnih konstrukcij iz jekla in betona
11. 04. 2007 16:00–19:30	SIST EN 1995 – Projektiranje lesenih konstrukcij SIST EN 1996 – Projektiranje zidanih konstrukcij
12. 04. 2007 16:00–19:30	SIST EN 1997 – Geotehnično projektiranje SIST EN 1998 – Projektiranje potresnoodpornih konstrukcij

### MARIBOR (lokacija bo objavljena naknadno)

16. 04. 2007 16:00–19:30	SIST EN 1990 – Osnove projektiranja konstrukcij, SIST EN 1991 – Vplivi na konstrukcije SIST EN 1992 – Projektiranje betonskih konstrukcij
18. 04. 2007 16:00–19:30	SIST EN 1993 – Projektiranje jeklenih konstrukcij SIST EN 1994 – Projektiranje sovprežnih konstrukcij iz jekla in betona
23. 04. 2007 16:00–19:30	SIST EN 1995 – Projektiranje lesenih konstrukcij SIST EN 1996 – Projektiranje zidanih konstrukcij
25. 04. 2007 16:00–19:30	SIST EN 1997 – Geotehnično projektiranje SIST EN 1998 – Projektiranje potresnoodpornih konstrukcij

**Druga stopnja** bo obsegala poglobljena znanja s področja posameznih Evrokodov, kjer bo za vsak posamezen standard organizirano posebno izobraževanje. Na tej stopnji bodo poleg kratke ponovitve teoretičnih znanj organizirane tudi delavnice z aplikativnim podajanjem znanj oz. primerjavo dela po starih in novih predpisih, kjer bodo na konkretnih primerih in ob odprti diskusiji prikazane razlike in novosti pri izračunu posameznih vrst konstrukcij. Število udeležencev posameznega tečaja bo omejeno na 35. Če bo prijav več, bo izobraževanje ponovljeno.

Izobraževanje druge stopnje bo potekalo v Ljubljani v prostorih FGG v maju, juniju, septembru, oktobru in novembru 2007. Predviden obseg izobraževanja na tej stopnji je naslednji:

SIST EN 1990, SIST EN 1991 –	8 šolskih ur
SIST EN 1992	– 24 šolskih ur (skupaj z vplivom potresa na armirano-betonske zgradbe)
SIST EN 1993	– 16 šolskih ur
SIST EN 1994	– 12 šolskih ur
SIST EN 1995	– 12 šolskih ur
SIST EN 1996	– 8 šolskih ur
SIST EN 1997	– 12 šolskih ur
SIST EN 1998	– 12 šolskih ur

Obvestilo o točnih datumih bo poslano po pošti in objavljeno na internetni strani IZS.

V letu 2008 bodo organizirana še nekatera specialna izobraževanja s področja dimenzioniranja jeklenih konstrukcij na potresno obtežbo, jeklenih in betonskih mostov ter objektov v cestogradnji.

Po končanem izobraževanju bo IZS izdala potrdila v skladu s Pravilnikom o obveznem izobraževanju pooblaščenih inženirjev.

Vabimo vse inženirje, ki bodo v letu 2008 zavezani k uporabi evrokodov, da se v čim večjem številu udeležijo organiziranih izobraževanj.

**Andrej Pogačnik, univ. dipl. inž. grad.,  
vodja delovne skupine za uvajanje Evrokodov v inženirsko prakso**

# KOLENDAR PRIREDITEV

**1.- 7.3.2007**

**5th International Conference on Construction Project Management (ICCPM 2007)**

Singapur, Singapur  
[www.ntu.edu.sg/cee/iccpm\\_iccem](http://www.ntu.edu.sg/cee/iccpm_iccem)

**5.- 9.3.2007**

**COE International Advanced School on Wind Effect on Buildings and Urban Environment**

Tokio, Japonska  
[www.wind.arch.t.kougei.ac.jp](http://www.wind.arch.t.kougei.ac.jp)

**6.3.2007**

**Fachtagung Arbeitsschutz am Bau**

Berlin, Nemčija  
[www.betonverein.de/11\\_downloads/Downloads/flyer\\_ft\\_arbeitsschutz.pdf](http://www.betonverein.de/11_downloads/Downloads/flyer_ft_arbeitsschutz.pdf)

**6. ali 7.3.2007**

**Ex (eksplozivna) zaščita – pregled stanja predpisov (MSE)**

IZS, Ljubljana, Slovenija  
[www.izs.si](http://www.izs.si)

**6.- 8.3.2007**

**4th SASITS International Conference & Exhibition**

Pretoria, Južna Afrika  
[www.itsinternational.com/events](http://www.itsinternational.com/events)

**marec / april 2007**

**Simpozij na temo geodetskih načrtov (MSGeo)**

IZS, Ljubljana, Slovenija  
[www.izs.si](http://www.izs.si)

**april 2007**

**Okrogla miza o strelvodni zaščiti (MSE)**

IZS, Ljubljana, Slovenija  
[www.izs.si](http://www.izs.si)

**19.-20.4.2007**

**Deutscher Bautechnik – TAG 2007**

Mainz, Nemčija  
[www.bautechniktag.de](http://www.bautechniktag.de)

**23.- 29.4.2007**

**BAUMA 2007**

**28. Internationale Fachmesse für Baumaschinen, Baustoffmaschinen, Bergbaumaschinen, Baufahrzeuge und Baugeräte**

München, Nemčija  
[www.bauma.de](http://www.bauma.de)

**11.- 13.6.2007**

**International Conference: Sustainable Construction Materials and Technologies**

Coventry, Anglija  
[www.uwm.edu/dept/cbu/coventry.html](http://www.uwm.edu/dept/cbu/coventry.html)

**18.- 20.6.2007**

**6th ITS in Europe Congress and Exhibition**

Aalborg, Danska  
[www.ertico.com](http://www.ertico.com)

**26.- 29.6.2007**

**24th W78 Conference & 5th ITCEDU Workshop & 14th EG-ICE Workshop**

Maribor, Slovenija  
[www.w78.uni-mb.si](http://www.w78.uni-mb.si)

**4.- 6.9.2007**

**7th International Congress Concrete: Construction's Sustainable Option**

Dundee, Škotska  
[www.ctucongress.co.uk](http://www.ctucongress.co.uk)

**18.- 21.9.2007**

**The Eleventh International Conference on Civil, Structural and Environmental Engineering Computing**

St Julians, Malta  
[www.civil-comp.com/conf](http://www.civil-comp.com/conf) or contact

**19.- 21.9.2007**

**IABSE Symposium International Association for Bridge and Structural Engineering**

Weimar, Nemčija  
[www.iabse2007.de](http://www.iabse2007.de)

**24.- 27.9.2007**

**14th European Conference on Soil Mechanics and Geotechnical Engineering: Geotechnical Engineering in Urban Environments**

Madrid, Španija  
[www.ecsmge2007.org](http://www.ecsmge2007.org)

**6.- 10.10.2007**

**75th IBTTA Annual Meeting and Exposition**

Dunaj, Avstrija  
[www.ibtta.org](http://www.ibtta.org)

**30.6.- 4.7.2008**

**10th International Symposium on Landslides and Engineered Slopes**

Xi'an, Kitajska  
[www.landslide.iwhr.com](http://www.landslide.iwhr.com)

**5.- 9.10.2009**

**17th International Conference for Soil Mechanics and Geotechnical Engineering**

Alexandria, Egipt  
[www.2009icsmge-egypt.org](http://www.2009icsmge-egypt.org)

Rubriko ureja • **Jan Kristijan Juteršek**, ki sprejema predloge za objavo na e-naslov: [msg@izs.si](mailto:msg@izs.si)