MATEMATIKA+FIZIKA+ASTRONOMIJA+RAČUNALNIŠTVO#6

PRESEK LETNIK 46 (2018/2019) ŠTEVILKA 6

PRESEK

→ NASHEVO RAVNOVESJE

→ SAT

→ SLOVENIJA POD SKUPNIM NEBOM

→ RAČUNSKA GEOMETRIJA Z MNOGOKOTNIKI

ISSN 2630-4317
ISSN 0351-6652

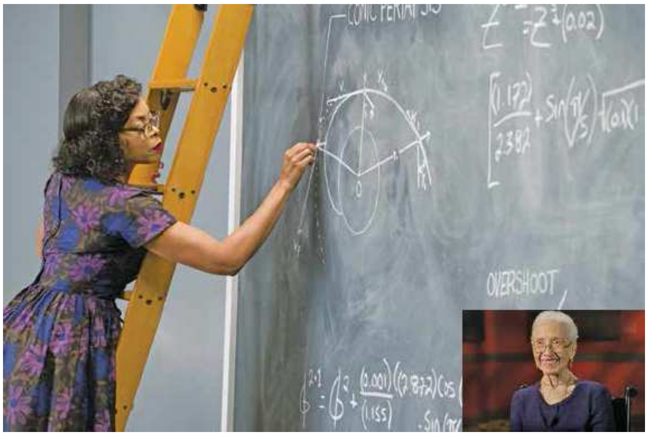
9 770351 665661

Zmagovalna zgodba

Knjiga in film z naslovom *Skriti faktorji* opisujeta zgodbo ameriških črnk, ki so pri Nasi nadomeščale računalnike na začetku vesoljskega programa. Med dogodki, ki se ti ob gledanju filma najbolj vtisnejo v spomin, je trenutek, ko Katherine Johnson (na sliki), bodoča dobitnica predsedniške medalje svobode, ugotovi, kako rešiti sistem diferencialnih enačb, ki opisuje orbito vesoljske kapsule in njen povratek v atmosfero, tako da bo pristala čim bližje želenemu cilju. S pomočjo njenih ugotovitev so tedanji stroji, ki so bili predhodniki današnjih računalnikov, natančno izračunali tir kapsule. Danes bi se s tem zgodba končala, takrat pa je astronavt John Glenn, čigar življenje je bilo odvisno od pravilnosti izračuna, vztrajal, da človeški računalnik, Katherine Johnson, ročno preveri strojne izračune. Šele potem je bil prepričan, da se lahko izstreli v vesolje in nato vrne domov.

Skriti faktorji so zmagovalna zgodba, ki pa se še ni zaključila. Še danes je delež žensk in afriških Američanov, ki se ukvarjajo z matematiko, manjši kot je ustrezni delež v celotni populaciji. To je ironija za poklic, ki daje tolikšen poudarek logičnemu mišljenju. Matematična skupnost poskuša spodbujati programe, ki bi to spremenili, tako da bi bile naslednice Katherine Johnson sestavni del poklica in ne le njegov skriti del.

Če vas zgodba zanima, vam priporočamo knjigo *Skriti faktorji* iz leta 2016, ki jo je napisala Margot Lee Shetterly.



× × ×

KOLOFON

Presek
list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
letnik 46, šolsko leto 2018/2019, številka 6

Dopisi in naročnine: DMFA–založništvo, Presek, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana, telefon (01) 4766 633, telefaks (01) 4232 460, 2517 281.

Internet: www.presek.si
Elektronska pošta: presek@dmfa.si

Naročnina za šolsko leto 2018/2019 je za posamezne naročnike 22,40 EUR – posamezno naročilo velja do preklica, za skupinska naročila učencev šol 19,60 EUR, posamezna številka 6,00 EUR, stara številka 4,00 EUR, letna naročnina za tujino pa znaša 30 EUR.

Transakcijski račun: 03100–1000018787.

List sofinancira Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih poljudno-znanstvenih periodičnih publikacij.

Založilo DMFA–založništvo

Oblikovanje Tadeja Šekoranja

Tisk Collegium Graphicum, Ljubljana

Naklada 1100 izvodov

ISSN 2630-4317 (Online)
ISSN 0351-6652 (Tiskana izd.)

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana.

NAVODILA SODELAVCEM PRESEKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Presek objavlja poljudne in strokovne članke iz matematike, fizike, astronomije in računalništva. Poleg člankov objavlja Prikaze novih knjig s teh področij in poročila z osnovnošolskih in srednješolskih tekmovanj v matematiki in fiziki. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, učencem višjih razredov osnovnih šol in srednješolcem.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev) in sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo). Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Slike v elektronski obliki morajo biti visoke kakovosti (jpeg, tiff, eps …), velikosti vsaj 8 cm pri ločljivosti 300 dpi. V primeru slabše kakovosti se slika primerno pomanjša ali ne objavi. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Zaželena velikost črk je vsaj 12 pt, razmak med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku na naslov uredništva **DMFA–založništvo, Uredništvo revije Presek, p. p. 2964, 1001 Ljubljana** ali na naslov elektronske pošte **presek@dmfa.si**.

Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki oceni primernost članka za objavo. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem uredništvo prosi avtorja za izvorne datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TeX oziroma LaTeX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

Kazalo

Slika na naslovnici: Na naslovnici je neugledna fotografija umazanega, blatnega avtomobila. Pri podrobnem pogledu opazimo vzorec blatnih kapljic. Ta nam razkriva hitrost avtomobila, ko je vzorec nastajal. Foto Aleš Mohorič

Nashevo ravnovesje

↓↓↓
Gašper in Mateja Mrmolja

→ **Svet, v katerem živimo, je zelo nepredvidljiv in včasih bi rekli, da je celo kaotičen. Velikokrat imamo morda občutek, da se ne bomo znašli ali pravilno odločili, ko bo to potrebno. Pa lahko v dani situaciji kaj predvidimo?**

Del odgovora na to vprašanje se skriva v matematični disciplini, ki ji pravimo teorija iger. Gre za relativno mlado matematično smer, katere prvi večji premik sta leta 1944 naredila John von Neumann in Oskar Morgenstern z izdajo knjige Theory of Games and Economic Behavior. V knjigi je podan matematični pristop k ekonomskim problemom skozi teorijo iger, ki se nanaša na von Neumannove raziskave v teoriji iger, objavljene v letu 1928.

Osnove

Eden bolj zanimivih sklopov teorije iger se osredotoča na preproste modele, s katerimi lahko na matematični način interpretiramo konfliktne situacije med udeleženci igre in njihovimi odločitvami glede na podana pravila. V tem pogledu z besedo igra označujemo kakršne koli interakcije (situacije) med udeleženci, katere korist posameznika ni odvisna samo od njega, ampak tudi od odločitev vseh vpletenih. V prvi vrsti torej ne gre za igre, povezane s srečo, ampak za igre, pri katerih je ob več ponovitvah pomembna strategija.

Strateško igro sestavljajo udeleženci igre (igralci), ki se odločajo istočasno, brez kakršnih koli informacij o že izvedenih odločitvah (potezah). Na koncu pa je rezultat igre vselej odvisen od vseh odločitev hkrati.

Za ilustracijo vzemimo primer igre boja med dvema spoloma, ki jo včasih najdemo tudi pod imenom Bach – Stravinsky. Igro igrata dva igralca – mož in žena, ki si želita skupaj preživeti zanimiv večer, vendar si ga predstavljata vsak po svoje. Mož si želi, da bi si skupaj ogledala nogometno tekmo, žena pa si želi, da bi skupaj nakupovala. Igro enostavno ponazorimo s spodnjo tabelo oziroma matriko.

Mož/Žena	Nogometna tekma	Nakupovanje
Nogometna tekma	2, 1	0, 0
Nakupovanje	0, 0	1, 2

TABELA 1.

Zadovoljstvo posameznika smo z vrednostmi v tabeli opisali na sledeči način:

- Če se oba odločita, da gresta na nogometno tekmo, potem bo to možu prineslo zadovoljstvo v vrednosti 2, ženi pa v vrednosti 1. Njemu se bo izpolnila želja, njej pa tudi ne bo povsem odveč, četudi ne gresta tja, kamor bi želela ona, saj bosta večer vseeno preživela skupaj. To označimo z vnosom (2, 1).
- Če se oba odločita, da gresta nakupovati, potem bo to ženi prineslo zadovoljstvo v vrednosti 2, možu pa v vrednosti 1. Njej se bo izpolnila želja, njemu pa tudi ne bo povsem odveč, četudi ne gresta tja, kamor bi želel on, saj bosta večer vseeno preživela skupaj.
- Če se nikakor ne moreta dogovoriti, potem seveda ne bosta zadovoljna, zato njunemu zadovoljstvu pripišemo vrednosti 0.

Ravnovesje

John Forbes Nash, matematik ameriškega rodu, o katerem govorita tudi roman in film z naslovom *A Bea-*

utiful Mind, je leta 1950 v svoji doktorski dizertaciji opisal primer izida igre, ki mu dandanes pravimo Nashevo ravnovesje. Gre za stanje, v katerem se nobeden od igralcev ne bi odločil za zamenjavo svoje poteze, četudi bi predhodno poznal poteze vseh ostalih.

Tako ravnovesje ne obstaja vedno. Oglejmo si primer igre kamen–škarje–papir. To je igra, kjer tekmujeta dva igralca. V vsakem krogu igre izbereta eno od treh figur (kamen, škarje ali papir), ne da bi vedela, kaj bo izbral drugi izmed njiju. V primeru, da oba izbereta enako figuro, je ta krog igre neodločen, če pa izbereta različni figuri, eden od njiju zmaga, drugi pa izgubi. Pravila so, da kamen premaga škarje, škarje premagajo papir, papir pa premaga kamen.

Tudi to igro lahko ponazorimo s tabelo (glej tabelo 2). Za poenostavitev bomo prvega igralca poimenovali oče, drugega pa sin.

Oče/Sin	Kamen	Papir	Škarje
Kamen	$0, 0$	$-1, 1$	$1, -1$
Papir	$1, -1$	$0, 0$	$-1, 1$
Škarje	$-1, 1$	$1, -1$	$0, 0$

TABELA 2.

V tabeli 2 smo za posamezni izid igre zmagovalcu dodelili vrednost 1, poražencu pa -1. Če je prišlo do neodločenega izida, smo obema dodelili vrednost 0.

Enostavno lahko vidimo, da ta igra nima Nashevega ravnovesja, saj za oba igralca velja, da bi, v primeru poraza, želela spremeniti svojo figuro. Recimo, da oče izbere papir, sin pa kamen. Izid igre bi imel vrednost $(1, -1)$. Vendar pa bi, če bi imel to možnost, sin svojo figuro raje spremenil v škarje in zmagal. Podobno velja tudi za vse neodločene izide, zato lahko vsak od njiju vedno izboljša svojo odločitev, kar potrdi, da ravnovesja ni.

Poglejmo si še en primer znane igre, ki se imenuje Zapornikova dilema. Tu imamo dva zapornika (poimenujmo ju Milan in Janez), ki ju je policija aretirala, saj sta osumljena ropa. Zaprli so ju v dve ločeni celici in jima tako preprečili, da bi na kakršen koli način komunicirala drug z drugim. Rop sta resnično zagrešila, vendar jima policija tega ne more dokazati. Policija ima sicer dovolj dokazov (posedovanje orožja, neprimerno vedenje) za dveletno zaporno kazen, vendar želijo primer zaključiti s priznanjem vsaj enega od njiju, da bi na ta način drugega lahko poslali v ječo za dlje časa.

Oba pa vesta:

- Zločin lahko priznata ali pa ne.
- Če eden od njiju prizna, drugi pa molči, potem bo tisti, ki je priznal, oproščen, drugi, ki je molčal, pa bo šel v zapor za štiri leta.
- Če oba priznata, bosta šla v zapor za tri leta.
- Če oba molčita, potem imajo policisti dovolj dokazov, da gresta oba v zapor za dve leti.

Milan/Janez	Prizna	Molči
Prizna	$3, 3$	$0, 4$
Molči	$4, 0$	$2, 2$

TABELA 3.

V razpredelnici 3 imamo zapisane vse možne izide igre. Recimo, da Janez prizna. Potem bo za Milana najbolje, če tudi on prizna, in tako dobi samo tri leta zapora – izid igre bo (3, 3). Če pa Janez molči, je bolje, če Milan prizna, saj bo v tem primeru oproščen – izid igre bo (0, 4). Enak premislek velja tudi v obratni situaciji. Nashevo ravnovesje je torej situacija, ko oba priznata, da sta zagrešila rop, in tako dobita vsak po tri leta zapora. Če bi si namreč eden od njiju premislil, drugi pa bi vztrajal pri isti odločitvi, potem bi bil igralec, ki se je odločil spremeniti odločitev, na slabšem.

Podoben razmislek o obstoju Nashevega ravnovesja lahko naredimo tudi pri igri boja med dvema spoloma, ki je bila predstavljena v prejšnjem razdelku (glej *tabelo 1*). Ugotovili bi, da za to igro obstajata celo dve ravnovesji, ko gresta oba bodisi na tekmo bodisi na nakupovanje.

Interpretacija obstoja ravnovesij

V tem razdelku si oglejmo, kaj lahko o interakcijah sklepamo glede na obstoj oziroma neobstoj ravnovesij. V igri kamen–škarje–papir ravnovesja ni, kar je tudi razlog, zakaj je ta igra zanimiva. Ne glede na racionalnost obeh igralcev namreč ni strahu, da bi se igra po nekem času stabilizirala in da bi oba igralca začela v nedogled ponavljati svojo figuro. Po drugi strani obstoj dveh ravnovesij pri primeru mož–žena nakazuje na večen konflikt med spoloma. Četudi se zakonca znajdeta v izidu, ki obema prinaša pozitiven rezultat, pa je nekdo od njiju prikrajšan, saj ve, da se je moral za ugodno situacijo žrtvovati on. Vendar pa za spremembo tega dejstva ni dovolj zgolj bojkot dogodka. Če se želi ponovno znajti v pozitivnem stanju, mora ne le odpovedati udeležbo, ampak v svojo interesno sfero prepričati tudi soigralca, kar je v vsakodnevnem življenju težko in od nas zahteva kompromise. Nazadnje je zelo zanimiva tudi dilema dveh zapornikov, ki ima eno samo ravnovesje. Več empiričnih preizkusov je pokazalo, da bodo igralci, če igrajo racionalno, v večkratni ponovitvi začeli izbirati zgolj možnost ›priznam‹, kar pa privede do zanimivega konflikta. Namreč, za oba igralca bi bilo najugodneje, da bi molčala in sprejela vsak svojo dvoletno kazen. Ker pa ju vodi pragmatičnost in želja po maksimizaciji osebnega ugodja, na koncu oba pristaneta pri triletni kazni. To lepo ilustrira dejstvo, ki ga je zelo dobro opisal tudi J. F. Nash, in sicer, da stremenje k maksimalni zadovoljitvi osebnih potreb ni nujno tudi pot k družbenemu optimumu.

Literatura

[1] J. Baez, *Game Theory*, 2015.

[2] M. Dean, *Game Theory*, Lecture Notes for Fall 2009 Introductory Microeconomics, Brown University, 2009.

[3] E. Pertovt, T. J., *Uporaba teorije iger za optimizacijo delovanja brezžičnih omrežij*, Elektronski vestnik, **78** 2011, 287–292.

[4] H. Hotz, *A Short introduction to Game Theory*.

[5] Tekmovanje ACM iz računalništva in informatike, dostopno na `rtk-info@ijs.si`, ogled 10. 4. 2019.

[6] Zapornikova dilema, dostopno na `sl.wikipedia.org/wiki/Zapornikova_dilema`, ogled 10. 4. 2019.

×××

Paposovi šestkotniki

Marko Razpet

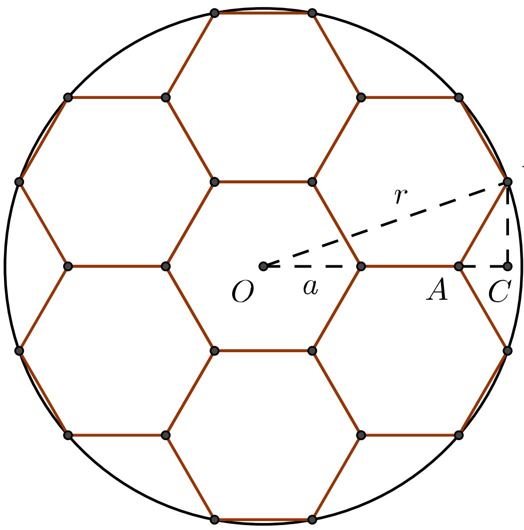
Papos Aleksandrijski, grško Πάππος ὁ Ἀλεξανδρεύς**, na kratko Papos, tudi Papus iz polatinjene oblike Pappus, je bil zadnji pomembnejši antični matematik. O njem vemo le, da je bil učitelj v Aleksandriji in da je 18. oktobra 320 tam opazoval Sončev mrk. Rodil se je okoli leta 290, umrl pa okoli leta 350 našega štetja. Njegovo najbolj znano delo je *Zbirka*, grško** Συναγωγή**, ki je nastalo okoli leta 340. Papos je pisal v grščini. V obdobju renesanse so ga prevajali v latinščino.**

V svoji *Zbirki* se Papos pretežno ukvarja z geometrijskimi problemi. Oglejmo si pobliže enega, ki je vzet iz [1] oziroma [2].

Včrtaj v dano krožnico sedem skladnih pravilnih šestkotnikov tako, da je eden okoli njenega središča, na njegovih stranicah pa sloni vsak od preostalih šestih z eno stranico, katere nasprotna stranica je tetiva krožnice.

Včrtati šestkotnike pa je dovoljeno na klasični način, to se pravi s šestilom in neoznačenim ravnilom. Predpostavimo, da je naloga že rešena. Dana krožnica naj ima središče v točki O in polmer r (slika 1). Na sliki smo označili točke A, B in C ter polmer r in stranico a. Poiščimo aritmetično zvezo med a in r. V ta namen podaljšamo daljico OA in na podaljšek skozi B postavimo pravokotnico, ki ga seka v točki C. Trikotnik OCB je pravokotni. Zanj je $|OB| = r$, $|AC| = a/2$, $|OC| = 2a + a/2 = 5a/2$, $|CB| = a\sqrt{3}/2$. Po Pitagorovem izreku velja:

- $r^2 = (5a/2)^2 + (a\sqrt{3}/2)^2 = 28a^2/4 = 7a^2$.



SLIKA 1.
Paposovi šestkotniki

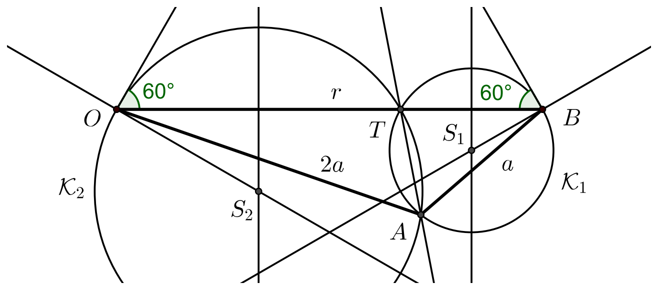
Torej je $r = a\sqrt{7}$ oziroma $a = r\sqrt{7}/7$. Daljico dolžine a je Papos znal konstruirati. Še več, znal je konstruirati trikotnik, ki je skladen s trikotnikom OAB. Kako je to naredil, je razloženo v [1]. Avtorjema [2] se zdita njegova konstrukcija in ustrezna razlaga prezapleteni, zato predlagata enostavnejšo. Ta poteka takole.

Vzamemo daljico OB dolžine r in jo s točko T razdelimo v razmerju 2 : 1 (slika 2). Nato konstruiramo krožnici $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$, s katerih vidimo daljici TB in OT pod kotom 60°. To dosežemo tako, da ob daljici OB načrtamo kota 60° z vrhovoma v O in B. Simetrali daljic TB in OT sekata spodnja kraka teh kotov v točkah S_1 in S_2. Krožnica $\mathcal{K}_1$ s središčem S_1 skozi B in krožnica $\mathcal{K}_2$ s središčem S_2 skozi O se sekata v točki A. Trikotnik ABO je iskani trikotnik, v katerem je $|AB| = a$ in $|OA| = 2a$. Premica AT razpolavlja $\sphericalangle BAO = 120°$, in po znanem izreku deli stranico OB trikotnika ABO v razmerju $|OA| : |AB|$, to pa je 2 : 1.

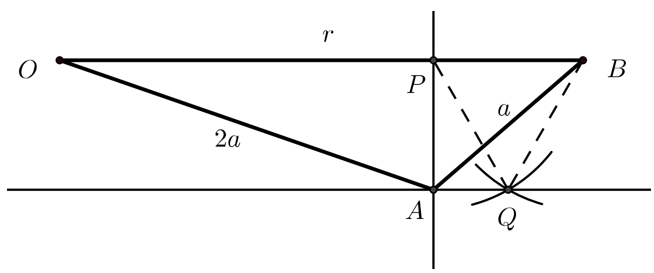
Pravilnost potrdimo še s kosinusnim izrekom za trikotnik ABO:

- $$r^2 = (2a)^2 + a^2 - 2 \cdot 2a \cdot a \cdot \cos 120° = 4a^2 + a^2 - 4a^2(-1/2) = 7a^2.$$

Druga konstrukcija trikotnika ABO nas pripelje do enakega rezultata. Vzamemo daljico OB dolžine r in jo s točko P razdelimo v razmerju 5 : 2 (slika 3). Nad manjšim odsekom PB konstruiramo enakostranični trikotnik QBP, nato pa trikotnik ABO, ki ima enako višino kot trikotnik QBP, pri tem pa je P pravokotna projekcija oglišča A na stranico OB. Hitro se lahko prepričamo, da ima trikotnik ABO stranice $|AB| = a$, $|OA| = 2a$ in $|OB| = r = a\sqrt{7}$ ter $\sphericalangle BAO = 120°$. Bralke in bralci naj to preverijo. Res ni težko.



SLIKA 2.
Prva konstrukcija stranice a



SLIKA 3.
Druga konstrukcija stranice a

Literatura

[1] T. Heath, *A History of Greek Mathematics II*, Dover Publications, 1981.

[2] A. Ostermann in G. Wanner, *Geometry by Its History*, Springer, 2012.

× × ×

Ramanujanova kvadratura kroga

Aleksander Simonič in Milena Strnad

→

Oris življenja S. Ramanujana

Pred 130 leti se je v Južni Indiji v vasici Erode blizu mesta templjev Kumbakonama v današnji državi Tamil Nadu v revni in zelo pobožni brahmanski družini rodil nenavaden matematični genij **Srinivasa Aiyangar Ramanujan** (1887–1920). Zanj je že pred njegovim rojstvom v družini veljalo prepričanje, da bo to poseben otrok, nad katerim bo po družinski prerokbi bdela in spregovorila družinska boginja Namagiri. Že v rani mladosti se je od sovrstnikov razlikoval po izrednem spominu in izjemnem daru za matematiko. Za šalo je sešteval, odšteval, množil, delil in razcepljal večmestna števila. Kot srednješolec je pomagal univerzitetnim študentom reševati matematične probleme. S tem si je med njimi pridobil občudovanje, pri večini svojih visokošolskih učiteljev, ki mu niso zmogli slediti in ga niso znali usmerjati, pa nerazumevanje.

Tako je v osami odkrival že znane matematične teorije in jih razvijal dalje. Pri tem je odkril veliko novega in tudi zelo izvirnega. Najbolj so ga pritegnili neskončne vrste, verižni ulomki in teorija števil. Geometrije se je dotaknil le poredko. Pravzaprav je njegovo najbolj znano delo na tem področju prav tema tega članka. To matematično samorastništvo brez primernega učitelja, ki ni bilo podkrepljeno niti z ustrezno literaturo, je največja razlika med Ramanujanovo genialnostjo in drugimi vélikimi matematiki.

Svoja odkritja je Ramanujan brez dokazov ali razlage pisal v zvezka, ki se danes imenujeta Prva in Druga beležka (ang. Notebook). Ti zapisi so bili in so še vedno osnova vseh raziskav in objav Ramanujanovega dela številnih odličnih matematikov. V tistem času na indijskih univerzah ni bilo mogoče študirati izključno matematike. Ramanujan zaradi nezanimanja za ostale predmete (npr. za fiziologijo), velike revščine in ne nazadnje zaradi amebne griže ni nikoli diplomiral. Matematična raziskovanja je prekinila njegova mati s tem, da ga je po indijski tradiciji leta 1909 poročila z nevesto, ki mu jo je leto pred tem sama izbrala, in ga s tem prisilila, da si je moral začeti iskati službo. Službo, ki naj bi imela matematično ozadje, je Ramanujan iskal pri raznih matematikih in jim pri tem kot priporočilo kazal svoji beležki, vendar je bil kljub občudovanju njegovega dela vse do leta 1912 povsem nerazumljen.

S svojimi odmevnimi prvimi objavami v reviji Indijskega matematičnega društva v letih 1911 in 1912 je v Indiji postal znan kot izjemen matematik. Šele leta 1912 je končno dobil službo računovodje pri ogromnem madraškem pristaniškem podjetju. Tam je bil deležen podpore in razumevanja svojih nadrejenih, direktorja in velikodušnega plemiča inženirja **Francisa Springa** (1849–1933) in matematika **S. Narayana Iyerja** (1874–1937). Oba sta potem vse do njegove smrti skrbela zanj. Iyer pa je še po smrti veliko naredil za Ramanujanova dela in njegove domače.

Leta 1913, v drugem letu službovanja, se mu je nasmehnila sreča. Na pobudo nekaterih indijskih matematikov je prišel v stik s priznanim matematikom, vodilnim mojstrom dokazovanja, **Godfreyem H. Hardyjem** (1877–1947). Ta je skupaj s svojim zvestim sodelavcem **Johnom E. Littlewoodom** (1885–1977) v njem takoj prepoznal izjemnega matematika. Močno so ju pritegnile Ramanujanove nove ideje in enačbe, čeprav sta v nekaterih odkrila nepravilnosti, ki so bile posledica Ramanujanovega pomanjkljivega formalnega znanja matematike. Toda Ramanujan, močno vpet v indijsko tradicijo verovanj, je

SLIKA 1.

to povabilo sprejel šele po dobrem letu njunih dopisovanj. Sodelovanje vseh treh matematikov velja za edinstveno v zgodovini. Plod tega sodelovanja so tudi Ramanujanovi rezultati, dopolnjeni z rigoroznimi dokazi, ki so kljub začetnemu neodobravanju ostalih profesorjev s Cambridgea postali prepoznavni in cenjeni. Po dveh letih bivanja v Angliji so Ramanujanu podelili diplomo, enakovredno današnjemu doktoratu, leto zatem so ga sprejeli za člana Londonskega matematičnega društva. Leta 1918 so ga kot drugega Indijca izvolili za člana Kraljevega društva, za člana Filozofskega društva Cambridge in kot prvega Indijca tudi za člana Trinity Collegea.

Pred Ramanujanom je bila bleščeča kariera, toda amebna griža, ki je s krajšimi prekinitvami mirovala, je ponovno izbruhnila. Napačno postavljena diagnoza, Ramanujanovo zavračanje uradne medicine, neprijazno podnebje in vojno pomanjkanje hrane so bolezen le še poslabšali. Leta 1919 se je vrnil domov v Madras, današnji Chennai, kjer je leto kasneje umrl.

V tem obdobju je napisal 138 strani novega rokopisa o lažnih funkcijah theta in ga poslal Hardyju. Ta rokopis so potem založili in je bil slučajno odkrit šele leta 1976, zato je danes poznan kot Izgubljena beležka (ang. Lost Notebook). Matematiki so v obdobju od 1985 do 1998 uredili beležki v pet knjig, Izgubljena beležka pa jih zaposluje še danes.

Število π in kvadratura kroga

Spoznanje, da je razmerje med obsegom in premerom krožnice vselej konstantno, spada med največje dosežke v zgodovini znanosti. Zato ni presenetljivo, da so se s tem razmerjem, ki ga označujemo s π, ukvarjali tudi najimenitnejši matematiki od antike dalje. Skrivnost je bila že njegova umestitev med številske množice. Pojavili sta se vprašanji: Ali je π racionalno število? Ga lahko konstruiramo z evklidskim orodjem, torej samo s šestilom in neoznačenim ravnilom? Slednje vprašanje o konstruktibilnosti so starogrški matematiki postavili v obliki problema kvadrature kroga. To sprašuje po konstrukciji stranice kvadrata, ki ima enako ploščino kot podan krog. Da je problem nerešljiv, je dokazal nemški matematik **Carl L. F. von Lindemann** (1852–1939) šele leta 1882. Jedro dokaza je izrek, da π ni ničla nobenega polinoma, katerega koeficienti so cela števila. Takim številom pravimo *transcendentna*. Iracionalnost je bila znana že leta 1761 po zaslugi **Johanna H. Lamberta** (1728–1777).

V zgodovini se je pojavilo kar nekaj približnih konstrukcij kvadrature kroga, za katere so avtorji pred Lindemannovim dokazom pogosto trdili, da predstavljajo rešitev problema. Kasnejše konstrukcije so v večini posledice izziva, da iz konstruktibilnega približka za π najdemo elegantno približno rešitev problema. Ramanujan je podal taki konstrukciji.

Prvo konstrukcijo je objavil leta 1913 v enostranskem članku v reviji Indijskega matematičnega društva in temelji na približku 355/113. Od kod ta približek? Znano je, da lahko vsako realno število zapišemo v obliki *enostavnega verižnega ulomka*:

- $$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots}}},$$

kjer je a_0 neko celo število, $a_1, a_2, \ldots$ pa neka naravna števila. Za zgornji izraz se pogosto uporablja krajši zapis

- $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$,

števila v njem pa imenujemo *verižni koeficienti*. Če je verižnih koeficientov končno mnogo, imamo opravka z enostavnim *končnim* verižnim ulomkom. V nasprotnem primeru izrazu pravimo enostaven *neskončni* verižni ulomek. Pri razvoju racionalnega števila v enostaven verižni ulomek si lahko pomagamo z Evklidovim algoritmom in ta razvoj je vedno končen. Drugače je pri iracionalnih številih, kjer je razvoj neskončen. V splošnem si moramo pri tem pomagati s približki, ki jih dobimo iz pripadajoče desetiške oblike, zapisanimi z dovoljšnjim številom decimalk. Če zapišemo število π na trinajst mest natančno, torej $\pi \approx 3,141592653590$, dobimo

- $\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, \ldots].$

Če upoštevamo samo nekaj prvih verižnih koeficientov, govorimo o *verižnih približkih*, ki so racionalna števila in zelo dobro aproksimirajo pravo vrednost. Tako je drugi verižni približek števila π Arhimedov približek $[3; 7] = 22/7$, četrti verižni približek, ki ga je Ramanujan izbral za svojo konstrukcijo, pa je

- $[3; 7, 15, 1] = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + 1}} = \dfrac{355}{113}.$

Absolutna napaka tega približka je manjša od $2,6677 \cdot 10^{-7}$.

Drugo konstrukcijo je Ramanujan objavil leta 1914 v prelomnem članku o modularnih enačbah in aproksimacijah števila π. V članku je zapisanih mnogo neskončnih vrst za $1/\pi$, med katerimi je tudi

- $\dfrac{1}{\pi} = \dfrac{2\sqrt{2}}{99^2} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!(1103 + 26390n)}{(n!)^4 396^{4n}}.$

Ta vrsta zelo hitro konvergira in je zato uporabna pri izračunu števila π na veliko decimalk. Izboljšana inačica te formule se uporablja v *algoritmu bratov Čudnovski*, s katerim še danes dosegajo rekorde v računanju števila π. Ramanujan je brez pojasnila za približek svoje konstrukcije izbral število $\sqrt[4]{9^2 + 19^2/22}$. Zelo verjetna razlaga za tako izbiro se ponovno skriva v verižnem ulomku. Velja namreč

- $\pi^4 = [97; 2, 2, 3, 1, 16539, 1, 6, 7, \ldots],$

od koder nam peti verižni približek da

- $$[97; 2, 2, 3, 1] = 97 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + 1}}} = \frac{2143}{22} = 9^2 + \frac{19^2}{22}.$$

Ta približek je za dva velikostna reda boljši od prejšnjega, saj je absolutna napaka manjša od $1,0072 \cdot 10^{-9}$.

Ramanujanovi konstrukciji

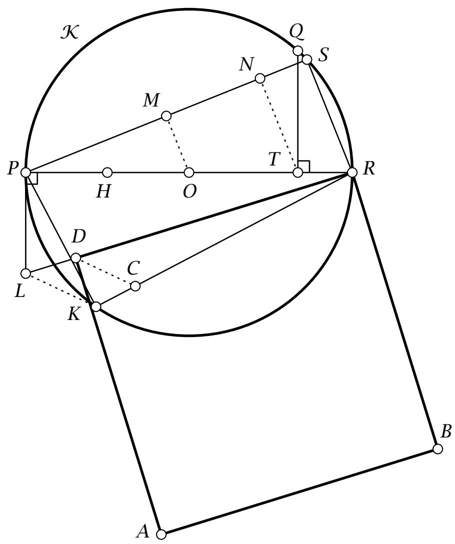
Ob spremljanju obeh Ramanujanovih konstrukcij se bomo soočili z njegovim neobičajnim načinom mišljenja in vpogleda v sam problem, ki izhaja iz njegove genialnosti, izjemnih računskih spretnosti in pomanjkljive formalne izobrazbe. Vse to od bralca zahteva posebno zbranost, ker se mu drugače lahko celo zazdi, da je Ramanujanova konstrukcija povsem naključen izbor korakov, ki nas slučajno privede do pravilnega in računsko preverljivega rezultata.

Začnimo z obravnavo prve Ramanujanove konstrukcije. Bralcu svetujemo, da ob opisu spremlja sliko 2, ki se pojavi tudi na 221. strani Druge beležke. Vzemimo krožnico $\mathcal{K}$ s središčem v O in premerom PR. Naj bo T taka točka na daljici OR, da je $|OT| = 2|TR|$. Točka Q naj bo eno od presečišč pravokotnice na PR v T s krožnico $\mathcal{K}$. Vzemimo točko $S \in \mathcal{K}$ na istem bregu premice PR kot Q, da bo $|RS| = |TQ|$. Točki M in N naj bosta zaporedoma presečišči vzporednic premici RS skozi O in T s premico PS. Na pravokotnici skozi P premice PR izberimo točko L, da bo $|PL| = |MN|$. Vzemimo točko $K \in \mathcal{K}$ na istem bregu premice PR kot L, da bo $|PK| = |PM|$. S C označimo tako točko na premici KR, da je $|RC| = |RH|$, kjer točka H razpolavlja daljico PO. Naj bo D presečišče vzporednice premici LK skozi C in premice LR. Trdimo:

- $$|RD|^2 = \frac{355}{113}|OR|^2. \qquad (1)$$

To pomeni, da je razmerje k_1 ploščin kvadrata $ABRD$ in kroga $\mathcal{K}$ enako

- $1 + 0,849 \cdot 10^{-7} < k_1 = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{355}{113} < 1 + 0.85 \cdot 10^{-7}.$



SLIKA 2.
Približna kvadratura kroga, osnovana na ulomku 355/113.

Dokažimo enakost (1). Najprej opazimo, da zaradi pravokotnosti trikotnikov $\triangle PKR$, $\triangle PRS$ in $\triangle LRP$, ki imajo skupno stranico PR, velja zveza

$$|PK|^2 + |KR|^2 = |PS|^2 + |RS|^2 = |LR|^2 - |PL|^2 = |PR|^2.$$

Po Evklidovem višinskem izreku za trikotnik $\triangle PRQ$ imamo $|RS|^2 = |TQ|^2 = |PT| \cdot |TR|$. Po definiciji točke T velja $|PT| = \frac{5}{6}|PR|$ in $|TR| = \frac{1}{6}|PR|$. Zato je $|RS|^2 = \frac{5}{36}|PR|^2$. Ker je $|PK| = |PM| = \frac{1}{2}|PS|$, sledi

$$|KR|^2 = |PS|^2 - |PK|^2 + |RS|^2 = \frac{3}{4}|PS|^2 + |RS|^2 = \frac{3}{4}\left(|PR|^2 - |RS|^2\right) + |RS|^2 = \frac{113}{12^2}|PR|^2.$$

Ker je $|PL| = |MN| = \frac{1}{3}|PS|$, sledi

$$|LR|^2 = |PR|^2 + \frac{1}{9}|PS|^2 = |PR|^2 + \frac{1}{9}\left(|PR|^2 - |RS|^2\right) = \frac{355}{18^2}|PR|^2.$$

Zaradi podobnosti trikotnikov $\triangle LKR$ in $\triangle DCR$ imamo $|RD|/|LR| = |RC|/|KR|$. Ker je $|RC| = |RH| = \frac{3}{4}|PR|$, sledi

$$|RD|^2 = |RH|^2 \frac{|LR|^2}{|KR|^2} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \left(\frac{12}{18}\right)^2 2^2 \frac{355}{113}|OR|^2 = \frac{355}{113}|OR|^2.$$

S tem je enakost (1) dokazana.

Podali bomo še drugo Ramanujanovo konstrukcijo (glej sliko 3), ki jo Ramanujan ni niti poskusil obrazložiti. Vzemimo krožnico $\mathcal{K}$ s središčem v O in premerom AB. Naj bo T taka točka na daljici AO, da je $|TO| = 2|AT|$, in C naj bo eno od presečišč pravokotnice na AB v O s krožnico $\mathcal{K}$. Naj bo N točka na daljici CB z lastnostjo $|CN| = 2|AT|$ in M naj razpolavlja daljico CN. Točka P naj bo taka točka na daljici AN, da je $|AN| = |AM|$, in točka Q naj bo taka točka na daljici AM, da sta premici PQ in BC vzporedni. Presečišče vzporednice premici OQ skozi T s premico AM označimo z R. Na pravokotnici skozi A premice AB izberemo točko S z lastnostjo $|AS| = |AR|$. Točka D naj bo taka točka na premici AB, da je $|OD| = |OS|$ in da A leži na daljici DO. Presečišče polkrožnice s premerom DB s premico OC označimo z E. Naj bo F taka točka na premici OC, da je $|FE| = 3|OE|$ in da O leži na daljici FE. Točka G pa naj bo taka točka na daljici FE, da je $|FG| = |OB|$. Presečišče polkrožnice s premerom FE s pravokotnico na FE v G označimo z H. Potem velja

$$|FH|^2 = |OB|^2 \sqrt[4]{9^2 + \frac{19^2}{22}}. \tag{2}$$

To pomeni, da je razmerje k_2 ploščin kvadrata $JIHF$ in kroga $\mathcal{K}$ enako

$$1 - 3,21 \cdot 10^{-10} < k_2 = \frac{1}{\pi}\sqrt[4]{9^2 + \frac{19^2}{22}} < 1 - 3,2 \cdot 10^{-10}.$$

Opomniti moramo, da Ramanujan ni podal konstrukcije kvadrata, temveč se je ustavil pri daljici OS.

Dokažimo enakost (2). Po Evklidovem izreku imamo $|FH|^2 = |FG| \cdot |FE| = 3|OB| \cdot |OE| = 3|OB|\sqrt{|DO| \cdot |OB|} = 3|OB|\sqrt{|SO| \cdot |OB|}$. Dokazati želimo

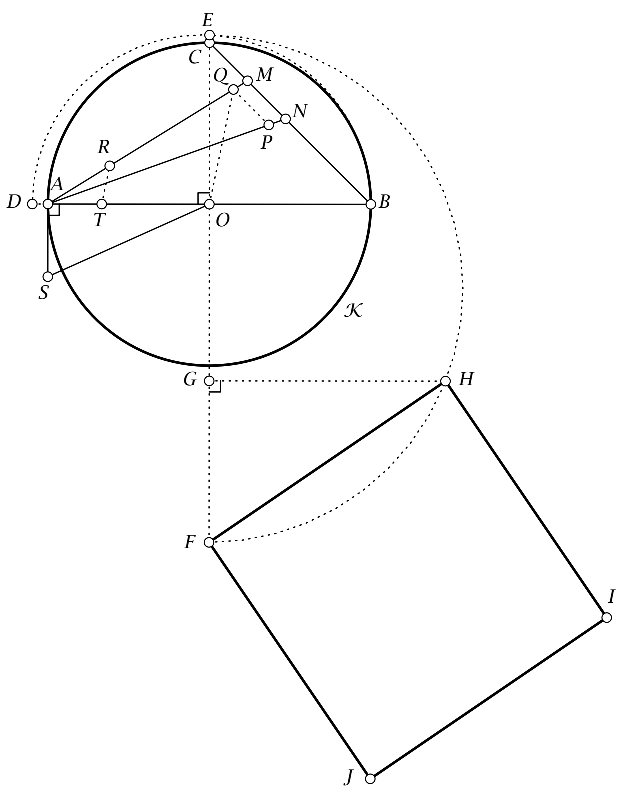
$$|SO|^2 = |OB|^2 \left(1 + \frac{1}{22}\left(\frac{19}{9}\right)^2\right). \tag{3}$$

Po Pitagorovem izreku imamo $|SO|^2 = |AR|^2 + |OB|^2$. Zaradi podobnosti trikotnikov $\triangle ATR$ in $\triangle AOQ$ imamo $|AR| = \frac{1}{3}|AQ|$. Podobnost trikotnikov $\triangle APQ$ in $\triangle ANM$ pa nam zagotavlja $|AQ| = |AM|^2/|AN|$. Torej je

- $$|SO|^2 = |OB|^2\left(1 + \frac{1}{9}\frac{|AM|^4}{|OB|^2|AN|^2}\right).$$

Enostavno izračunamo $|AM|^2 = \frac{19}{9}|OB|^2$ in $|AN|^2 = \frac{22}{9}|OB|^2$. To vstavimo v prejšnjo enakost in dobimo (3).

Ob zaključku dodajmo, da je Ramanujan tudi v svojih preostalih člankih ostajal skop s pojasnili. Številna odkritja je izrazil pogosto celo samo s končnim rezultatom, formulo ali izrekom brez kakega dokaza. Zato lažje razumemo, zakaj je študij originalnih Ramanujanovih zapisov tako zahteven.



SLIKA 3.
Približna kvadratura kroga, osnovana na številu $\sqrt[4]{9^2 + 19^2/22}$.

Naloge

Te naloge so Ramanujanove trditve iz člankov, kjer sta opisani konstrukciji. Preveri, če so resnične. Upoštevaj, da je ena milja enaka 63360 palcev (en palec meri 2,54 cm).

- Če naredimo kvadraturo kroga ploščine 140000 kvadratnih milj po prvi konstrukciji, je dolžina stranice kvadrata približno en palec večja od prave vrednosti.
- Če naredimo kvadraturo kroga premera 40 milj po prvi konstrukciji, se dolžina stranice kvadrata od prave vrednosti razlikuje za manj kot desetino palca.
- Geometrijska sredina števil $|OS|$ in $|OB|$ (glej sliko 3) se od šestine obsega kroga s premerom $|AB| = 8000$ milj razlikuje za manj kot dvanajstino palca.

× × ×

Barvni sudoku

→ V 8×8 kvadratkov moraš vpisati začetna naravna števila od 1 do 8 tako, da bo v vsaki vrstici, v vsakem stolpcu in v kvadratkih iste barve (pravokotnikih 2×4) nastopalo vseh osem števil.

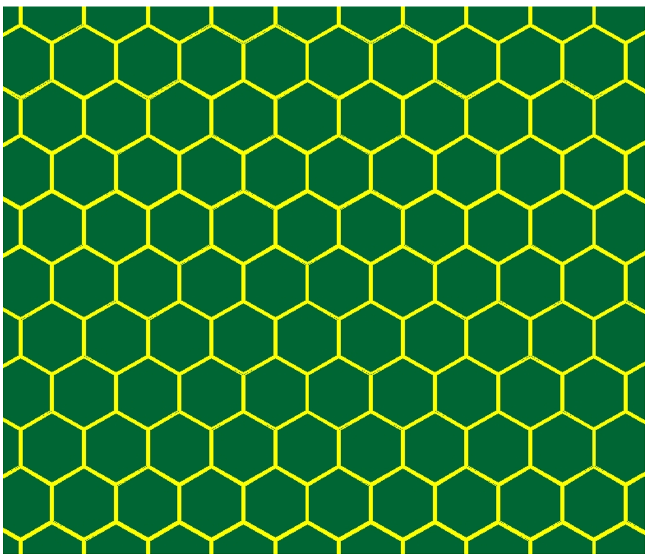
			6		5		8
4							3
1			2	6			
		6					
	5	2			7		
6		3		5			
3	4					2	
		8					4

× × ×

Sat

Andrej Likar

→ Sat je skupek voščenih celic, kamor čebele shranjujejo med, cvetni prah in zalego. Očara nas s pravilno zgradbo, saj so pravilni šestkotniki tesno zloženi drug ob drugem (glej sliko 1). Le kako se čebelam posreči zgraditi tako pravilno zgradbo?



SLIKA 1.
Celice v satu so skoraj pravilni šestkotniki.

Že od pamtiveka so ljudje slutili, da se za zgradbo sata skriva nekakšen globlji smisel. Čebelji vosek morajo čebele uporabiti čim bolj smotrno, saj ga ni lahko narediti. Vosek nastane s presnovo medu v čebeljih voskovnih žlezah. Za kilogram voska porabijo čebele 8,4 kilograma medu. Zato je misel, da je satovje zgrajeno, kar se da premišljeno, povsem razumljiva. In res, ameriški matematik Thomas Hales je nedavno tega dokazal *satno domnevo*. Sat iz pravilnih šestkotnikov je najekonomičnejši: pri dani ploščini celic P_0, s tem pa tudi pri njeni prostornini, je poraba voska pri dani debelini sten najmanjša. Sat z drugačno obliko celic pri enaki ploščini P_0 in enaki debelini sten bi bil glede voska bolj potraten. To je pomembna zmaga za čebele!

Pa poglejmo na treh primerih, kako je s to domnevo. Denimo, da bi najprej ravnino prekrili s kvadrati, kjer je ena stranica kateregakoli kvadrata hkrati stranica drugega kvadrata. Kakšno je razmerje med vsoto obsegov kvadratov v velikem delu ravnine in vsoto njihovih ploščin? Obseg enega kvadrata je v povprečju $ob_p = 2a$, kjer je a njegova stranica. Ena stranica je namreč hkrati tudi stranica sosednjega kvadrata, zato je ne smemo šteti dvojno. Če izberemo kvadratovo ploščino $P_0 = a^2$, je razmerje med povprečnim obsegom in to izbrano ploščino

- $$\frac{ob_p}{P_0} = 2\,\frac{1}{\sqrt{P_0}}\,.$$

Prekrivanje z enakostraničnimi trikotniki da

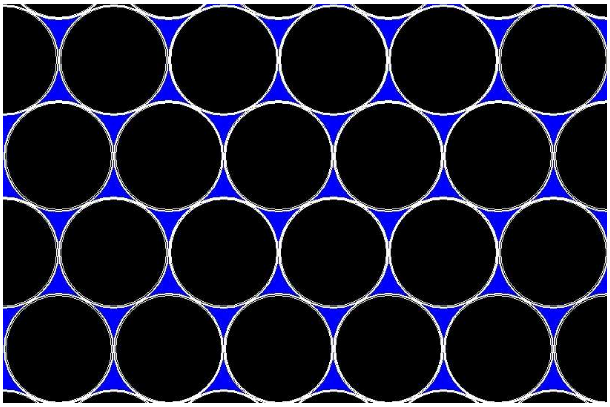
- $$\frac{ob_p}{P_0} = \sqrt[4]{27}\,\frac{1}{\sqrt{P_0}} = 2,280\,\frac{1}{\sqrt{P_0}}\,.$$

Ti dve vrednosti primerjajmo s prekrivanjem v obliki sata:

- $$\frac{ob_p}{P_0} = \sqrt[4]{12}\,\frac{1}{\sqrt{P_0}} = 1,861\,\frac{1}{\sqrt{P_0}}\,.$$

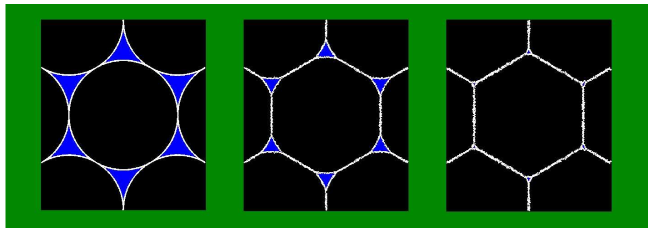
Najbolj ekonomično prekrivanje od teh je zadnje, saj je koeficient pred $\frac{1}{\sqrt{P_0}}$ tu najmanjši. Hales je dokazal, da je to najmanjši koeficient med vsemi možnimi prekrivanji s poljubnimi liki enake ploščine. →

Čebelja »pamet« nas sicer lahko očara, a smo vseeno v dvomih; ničesar ne vemo o debelini sten. So tudi te optimalno izbrane? Ekonomičnost bi se izboljšala, če bi čebele delale nekoliko večje celice. Ali je velikost celic tudi kako optimirana? O tem *satna domneva* nič ne pove.



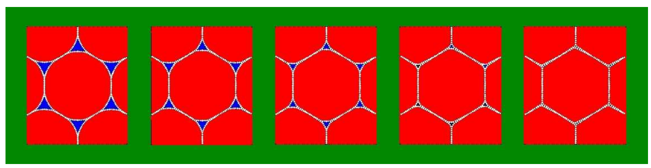
SLIKA 2.
Prvotne celice v satu so okrogle, med njimi je precej praznega prostora (modro).

Velikost celic je določena z velikostjo same čebele. Kako gradijo čebele sat? Vosek z usti pregnetejo in okoli sebe zgradijo sprva okrogle celice, ki jih naslonijo na dve že zgrajeni. Sat iz okroglih celic bi imel prav slabo ekonomijo, saj je koeficient pri njem kar 3,54 v primeri z najmanjšim 1,861. Nastane tudi precej praznega prostora med celicami (glej sliko 2). Kmalu zatem pa čebele zapolnijo prazne prostore z naključnim brcanjem v stene sprva okroglih celic. Čebele vosek s telesi segrejejo na temperaturo okrog 35 °C. Tedaj je mehak in gnetljiv ter se brcam zlahka vdaja. Brcanje ja lahko povsem naključno, ni nujno, da je usmerjeno proti vrzelim v prvotnem satu. Brcanje pripelje do sata s celicami v obliki pravilnih šestkotnikov. Da bi to trditev podprl, sem napisal računalniški program, kjer začnem z okroglo celico, potem pa z naključnimi radialnimi sunki po malem celico preoblikujem. Vsak sunek nekoliko premakne steno celice. V praznem prostoru, kamor čebele ne morejo, ni sunkov v nasprotni smeri, v sosednjih celicah pa čebele, ki so tam, poskrbijo za nasprotne sunke. S tem se širjenje sten ustavi. O pravilnih šestkotnikih čebele ne vedo ničesar, pojavijo se sami od sebe. Preobrazba iz krožne celice v šestkotno je prikazana na sliki 3. Na levi je originalna celica, ki jo čebele naredijo najprej, potem pa se z majhnimi, naključno velikimi sunki, celica preoblikje v pravilni šestkotnik.



SLIKA 3.
Tudi z naključnimi sunki v radialni smeri se sprva okrogla celica preobrazi v šestkotno, prazni prostori (modro) se zapolnijo.

Preoblikovanje v šestkotnike opazimo tudi pri drugih pojavih. Če gruči enako velikih vodnih balonov omejimo širjenje, se pri polnjenju začno preoblikovati v šestkotnike in se postavijo kot celice v satu. V programu prikažemo polnjenje balonov z vodo z enakomernimi sunki (glej sliko 4). Tudi prsti na rokah, ki jih z vrhovi blazinic staknemo in vtisnemo ene proti drugim, tvorijo značilne kote 120 (glej sliko 5). Stisnjene paličice, ovite z vato, so prav tako podobne satu (glej sliko 6).

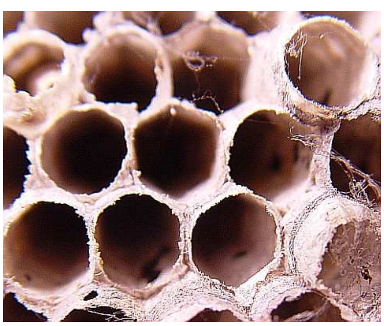


SLIKA 4.
Sprva okrogli baloni postopno dobivajo v prerezu obliko šestkotnikov.

Izjemne lastnosti voska torej pomagajo čebelam priti do najbolj ekonomičnega sata. Vosek je gnetljiv in voljan pri višji temperaturi in zelo trden pri nižji, kar omogoča zanesljivo hrambo medu in cvetnega prahu ter dobro zaščito zaroda. Osja gnezda imajo nekoliko bolj okrogle celice (glej sliko 7), čeprav tudi tu najdemo predele zelo podobne satu. Pri osah je gradivo podobno papirju, ki nima lastnosti voska. Izdelava takega gradiva pa stane ose precej manj, kot stane čebele izdelava voska.

SLIKA 5.
Blazinice prstov na rokah se pri tesnem stiku postavijo pod značilnim kotom 120°.

SLIKA 6.
Tudi stisnjene vatirane paličice so podobne satu.



SLIKA 7.
Zapuščeno osje gnezdo – celice so skoraj okrogle.

×××

Križne vsote

↓↓↓

→ Naloga reševalca je, da izpolni bele kvadratke s števkami od 1 do 9 tako, da bo vsota števk v zaporednih belih kvadratkih po vrsticah in po stolpcih enaka številu, ki je zapisano v sivem kvadratku na začetku vrstice (stolpca) nad (pod) diagonalo. Pri tem morajo biti vse števke v posamezni vrstici (stolpcu) različne.

■	↓15	↓14	■	■	■	■	■
→12			■	■	■	↓17	↓8
→16			↓10	■	↓8 →9		
■	→3			↓5 →17			
■	■	→17				■	■
■	■	■	→3			■	■

↓↓↓

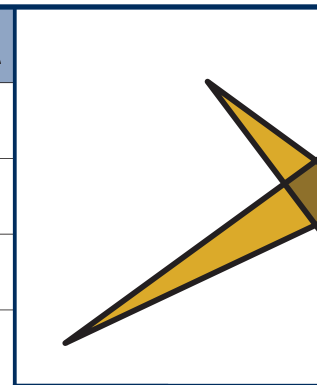
REŠITEV KRIŽNE VSOTE

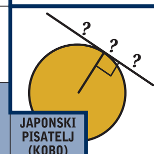
■	↓15	↓14	■	■	■	■	■
→12	8	4	■	■	■	↓17	↓8
→16	7	9	↓10	■	↓8 →9	8	1
■	→3	1	2	↓5 →17	1	9	7
■	■	→17	8	4	5	■	■
■	■	■	→3	1	2	■	■

×××

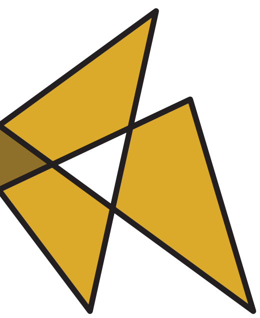
↓↓↓

Nagradna križanka

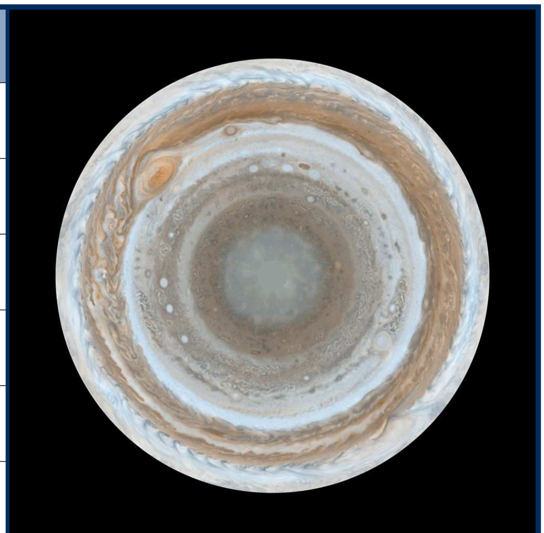




AVTOR MARKO BOKALIČ
OPTIČNI POJAV V OZRAČJU, ZRAČNO SLEPILO
NENASIČENI OGLJIKOVODIKI, ALKENI
PRODIRANJE V PODLAGO ZARADI TEŽE
NAPOVED PROTI KONTRI PRI KARTANJU
HRVAŠKI ARHITEKT (DRAGO)
DOLBENJE POVRŠJA ZARADI DELOVANJA VODE
GLAVNO MESTO MAROKA
FRANCOSKI MATEMATIK IN FIZIK (JOSEPH; VRSTE)
8
PODROČJE MATEMATIKE
FURLANSKA REKA, NAJVEČJI DESNI PRITOK SOČE
MED ŽOGE PREK NASPROTNIKA
TOŽILEC (ROBERT)
OPUŠČANJE ZAČETNEGA GLASU ALI ZLOGA V BESEDI
9
NAŠ NEKDANJI VESLAČ (DAVOR)
ČASOVNA ENOTA, KI IZHAJA IZ LUNINIH MEN
TRG V STAROGRŠKIH MESTIH
SVETOPIS. OSEBA, JUDOV SIN
PARNOST ŠTEVIL
JOULE
SILA NA TELESA V TEKOČINI
BAJESLOVNA ŽIVAL Z ROGOM NA ČELU
JAPONSKI PISATELJ (KOBO)
EKSPERT ZA STARI EGIPT
GRŠKA POKRAJINA
GRAFIČNO OBLIKOVANJE MATEVŽ BOKALIČ
PREGLEDNICE LEG NEBESNIH TELES
VEDA O SERUMIH
LESEN NOSILEC V GRADBENIH KONSTRUKCIJAH
VRSTA TROBILA
GR. ČRKA, ZNAK ZA GOSTOTO
PREGRADA ZA ZADRŽEVANJE VODE
ANGEL SMRTI
TRAVA TRETJE KOŠNJE
ZABAVNA UMETNOST
KOLO ZA MERJENJE TEL. ZMOGLJIVOSTI
ESKIMI
7
ŽIVALSKI HORMONI, KI DELUJEJO NAVZVEN
GRŠKA BOGINJA LOVA
SAKSOFONIST VRHOVNIK
VELIKO FINSKO JEZERO
DUŠEVNI JAZ
OBDOBJE, DOBA
3
VAJA PRI JOGI ZA ZBRANOST
TELEVIZIJEC PUCER
DIKTAT
TEŽEK OSNOVNI DELEC
GRAFIČNI ZNAK BLAGOVNE ZNAMKE ALI FIRME
PRIMORSKI KANTAVTOR IN IGRALEC MLAKAR
VRTILNI, MAGNETNI, VZTRAJNOSTNI ?
ROKOMETNI VRATAR KASTELIC
VOHALNI ORGAN
OGEL
VODITELJ TV DNEVNIKA (DEJAN)
ANTIČNO AFRIŠKO MESTO
VOJAŠKO POROČILO
EMANUEL LASKER
DARE ULAGA
PRECEJ, DOVOLJ
KOŽNA BOLEZEN ZARADI IZGUBE PIGMENTA
14
SL. DIALEKTOLOGINJA (MARTINA)
RADIOAKT. PRVINA
REDKA, LAHKA PLATINSKA KOVINA
PALICA ZA OTEPANJE SNOPOV
AM. PEVKA (DIANA)
DOSTOJANSTVO, UGLED
NEKDANJI TURŠKI VELIKAŠ
MANEKENKA SENČAR
JAREM
GRŠKI MATEMATIK IN FIZIK
OSEBNA ŠTEVILKA
TISKANI MEDIJ
PRISLOV KRAJA
OBČUTEK TEŽKEGA DIHANJA
4
DRAŽEČA SNOV
REDKA KRVNA SKUPINA
5
BOSANSKI KNJIŽEVNIK, KI ŽIVI PRI NAS (JOSIP)
13
NAŠA SLIKARKA ŠTIH, KI ŽIVI V BOLIVIJI
LJUBITELJICA DOBRE HRANE, GURMANKA
NAŠ METEOROLOG (JOŽE)
DESNI PRITOK RONE PRI LYONU IN DEPARTMA V JV. FRANCIJI
VELIKA SOBA
LJUBITELJ TUJE LASTNINE
TEKSTILNI IZDELEK



- NEMŠKI FIZIK, PO KATEREM SE IMENUJE ENOTA ZA ELEKTRIČNO UPORNOST (GEORG SIMON)
- NAJVEČJA REKA V TURINGIJI, LEVI PRITOK LABE
- NAŠ PISATELJ IN PUBLICIST (MILOŠ)
- PRAVO IME IGRALKE ITE RINE
- URADNO POTRDILO
- PROIZVODNI IN TRGOVSKI PREDMET
- OBČASNI KMEČKI VINOTOČ V PRIMOR. OKOLJU
- PREMINULI KOROŠKI DESNIČAR. POLITIK (JÖRG)
- AVSTRIJSKI NOVOBAROČNI SLIKAR (HANS)
- ŠPORT, KI ZDRUŽUJE TEKE, SKOKE IN METE
- ZGOLJ
- NAJVEČJI PRITOK RONE V FRANCIJI
- DRUGA OSEBA EDNINE
- GRŠKA ČRKA
- STARO NASELJE PRI ZADRU
- GRAND PRIX
- MOČNIKU PODOBNA GORENJSKA JED
- ETIKA
- ZEM. JEDRO IZ NIKLJA IN ŽELEZA
- GORAN JANUS
- NAŠ NEKDANJI KOLESAR (PRIMOŽ)
- OBLIKA IMENA TILEN
- RIMSKI VOJSKOVODJA
- VRSTA ŠTEVILSKE KRIŽANKE, KRIŽANKA VSOT
- ENAKI ČRKI
- CITROENOV STARODOBNIK
- ČETRTA GRŠKA ČRKA
- VERGILOV EP
- SKRIVEN NAČRT ZA KAZNIVO DEJANJE
- TROHICA UPANJA
- STROKOVNJAKINJA ZA LIČENJE
- BOSANSKA PEVKA (NEDA)
- REZULTAT PRI SEŠTEVANJU
- GRAFIK DEBENJAK
- ADAMOVA ŽENA
- OVADBA
- SORTA JABOLK
- BRESKVI PODOBEN SADEŽ
- OZIRALNI ZAIMEK
- HITER GIB Z OČMI
- ZAŠČITNA PREVLEKA ZA PRST
- PRITOK URALA PRI ORENBURGU
- ZNAK ZA NEZNANKO
- ZADNJICA
- PRODUKT PRI PROIZVODNJI ALUMINIJA
- ŠKATLICA ALI TOK ZA OČALA
- MREŽASTA TKANINA
- SKRAJNI KONEC KOPNEGA
- NIZOZEM. MESTO OB MEJI Z NEMČIJO
- RIMSKA 4
- LJUBLJANA
- POKOJNI KANADSKI PEVEC (LEONARD)
- KOLIČNIK POTI IN ČASA
- PLEMENSKO ZNAMENJE
- ANDREJ PEČENKO
- POBUDA
- BOSANSKI LITERAT SAMOKOVLIJA
- POMLADNI NASTAVEK POGANJKA
- TRANSPORTNA KOLONA
- DELEC Z NABOJEM
- RUBIDIJ
- FIZIKALNI POJAV
- VSTOPNA ODPRTINA V TREBUŠNI PREPONI
- RIMSKA 6
- DAJALEC INFORMACIJ
- SOSEDNJI ČRKI
- AMERIŠKI JAZZOVSKI GLASBENIK (BILL)
- MEŠANEC MED BELO IN ČRNO RASO



NAGRADNI RAZPIS

→ Črke iz oštevilčenih polj vpišite skupaj z osebnimi podatki v obrazec na spletni strani

`www.presek.si/krizanka`

ter ga oddajte do **1. avgusta 2019**, ko bomo izžrebali tri nagrajence, ki bodo prejeli **knjižno nagrado**.

Slovenija pod skupnim nebom

Petek 6. september 2019

↓↓↓
Zorko Vičar

→ **Letos Mednarodna astronomska zveza (The International Astronomical Union – IAU) praznuje 100. obletnico delovanja. V spomin na ta mejnik naj bi po vsem svetu organizirali celoletno praznovanje, promocijo astronomije. Geslo praznovanja je 100 let pod skupnim nebom (100 Years Under One Sky). Slogan lahko razumemo tudi kot pod enim ali celo pod edinim nebom. Vse tri interpretacije imajo svoj globji pomen. Koledar dogodkov po državah, tudi v Sloveniji, je na naslovu: `www.iau-100.org/events`.**

Ciljev IAU100 je veliko. Navedimo le nekatere:

- povečati pomen sodelovanja tako na lokalnem kot globalnem področju,
- opozoriti na pomen tehnološkega razvoja za napredek astronomije,
- spodbujanje širokega dostopa do astronomskih znanj in opazovalnih izkušenj,
- vključevanje raznolikosti v astronomsko skupnost – sodelovanje z ostalimi vedami in različnimi socialnimi skupinami,
- ozaveščanje in razprava o morebitnih novih vznemirljivih astronomskih dogodkih,
- ohranjanje in zaščita svetovne kulturne in naravne dediščine temnega in mirnega neba.

Torej – živimo pod enim, skupnim in edinim nebom.

V resnici se osnovni cilji praktično v večini točk ujemajo s ciliji Mednarodnega leta astronomije 2009 (400 let po Galileju). Projekt MLA2009 je bil med najuspešnejšimi promocijami astronomije v svetu (še posebej v Sloveniji) po poletu na Luno in po prehodu Venere čez Sonce 2004. Leta 2009 so se društva, univerze, šole, Ministrstvo za izobraževanje, znanost in šport Republike Slovenije ter mnogi posamezniki zelo potrudili, da je mednarodno leto astronomije pustilo trajen pečat v slovenskem kulturnem prostoru. Organizirana so bila mnoga javna opazovanja (zdaleč najbolj množično v parku Tivoli v Ljubljani), predavanja, razstave astronomskih vsebin, slik po šolah in v Tivoliju, razstava o Pavlu Kunaverju, kongres Slovenija in vesolje, začelo se je državno tekmovanje iz astronomije. Večina šol je z odprtimi rokami sprejela darilo države in si tako priskrbela astronomsko opazovalno opremo, teleskope, daljnoglede, nekatere kamere in ostalo dodatno astronomsko opremo.

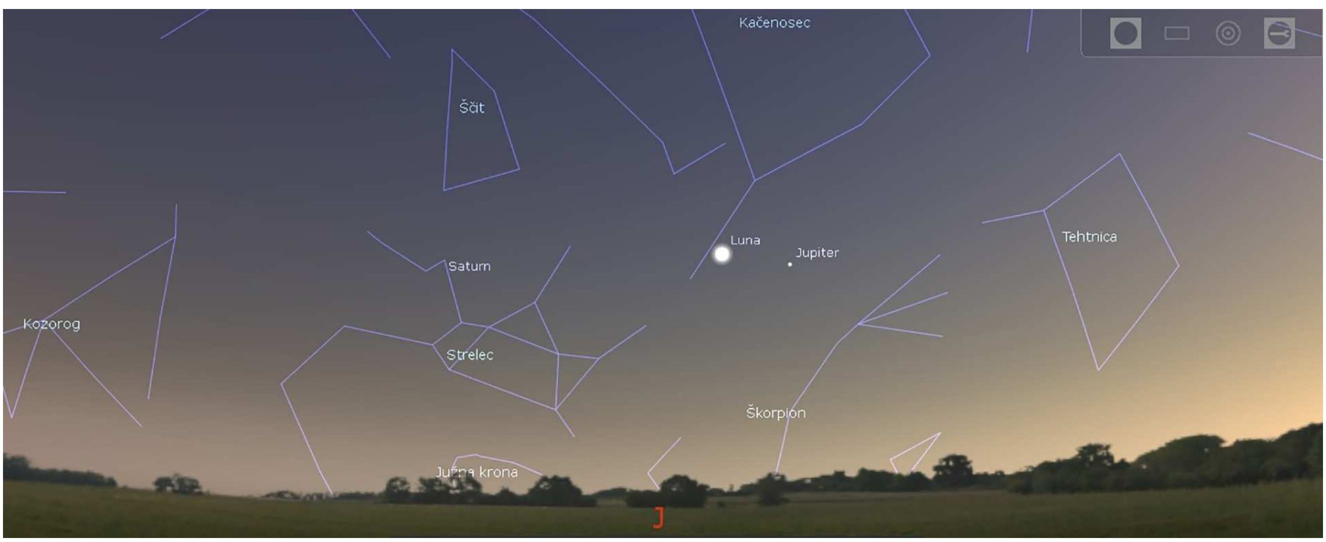
Državo smo z vztrajnim trkanjem v letih 2008/09 nekako le prepričali, da je končno sistematično pristopila k opremljanju šol z astronomsko opremo. V bistvu se je to zgodilo prvič, od kar sta Simon Marius in Galileo Galilei pred davnimi 410 leti opravila prva resna astronomska opazovanja z daljnogledom (teleskopom) in hkrati podala razlago videnega. Galilejeva opazovanja opisana v Zvezdnem slu (Sidereus nuncius iz 1610) so predstavljala velik preskok v razvoju pravilnega razumevanja nebesne mehanike, vesolja nasploh. Tudi razumevanje položaja človeka v vesolju se je začelo pospešeno spreminjati in se še danes spreminja, ostaja odprto, kot skrivnost vesolja samega. Hkrati pa se je z uvedbo teleskopov tudi izjemno povečala merilna natančnost, kar za nekaj velikostnih redov. Globina pogleda v vesolje se je zaradi teleskopov (velikih premerov objektivov) do danes povečala iz nekaj milijonov svetlobnih let na milijarde svetlobnih let, praktično skoraj do burnega rojstva vesolja. Da to dejstvo vsaj delno dojamemo, je potreben pogled skozi teleskope na, recimo, Luno, planete, na šibke kopice Rimske ceste in na oddaljene galaksije. Seveda nam fotografija razkrije še veliko več in seže še veliko dlje v globine vesolje, a izkušnjo pogleda v globoko nebo in razumevanje videnega bi morali privoščiti vsakemu učencu, učenki, Zemljanu.

Pobuda šolam v letu 2019

Če smo leta 2009 po šolah pripravljali astronomske večere, predavanja, opazovanja, pa bi tokrat lahko šole naredile majhen korak naprej, a velikega za Slovenijo. Večina šol lahko tokrat povabi praktično vso Slovenijo (vsaka svoj šolski okoliš) na astronomska opazovanja na šolsko dvorišče, šolski vrt, teraso, observatorij (če ga že ima). Izvajala bi se zgolj osnovna Galilejeva opazovanja nebesnih objektov (Luna, Saturn, Jupiter), morebiti se obiskovalcem pokaže še kakšna dvojna zvezda, kopica, galaksija, ki jih zmore poiskati praktično vsak učitelj naravoslovnih predmetov.

Zagotovo bi s primerno promocijo take povezovalne noči, na katero bi povabili vse generacije iz šolskih okolišev, naredili dodaten korak k še boljši povezanosti šol z okoljem, med samimi ljudmi, z naravo, tudi z zvezdnim nebom. Taka druženja po pravilu pomagajo k boljšemu razumevanju v lokalni skupnosti, k povečanju zanimanja za astronomijo, tudi k razumevanju krhkosti ravnovesja v naravi, pomena temnega nočnega neba. Velikokrat podobna druženja tudi spremenijo način in fokus razmišljanja, način samega bivanja, in to na bolje.

Datum, ko je predlagano astronomsko opazovanje moč izvesti v eni noči, lahko celo v uri ali dveh, seveda ob lepem vremenu, je, recimo, petek 6. september 2019. To je začetek šolskega leta, ko smo še vsi sproščeni in zbrani po poletnem dopustniškem »babilonu«. Noči so še dokaj tople, mrak pa se začne že pred 20. uro. Če šola ni vešča rokovanja z večjimi računalniško vodenimi teleskopi, so za omenjena opazovanja dovolj že namizni Dobsoni ali večji daljnogledi na stojalih. Astronomska oprema v letu 2019 ne bi smela biti večji problem.



SLIKA 1.
Južno nebo 6. septembra zvečer: Luna v Kačenoscu, Saturn v Strelcu levo od Lune, Jupiter v Kačenoscu desno od Lune. Morebiti vas bo kdo še povprašal, kako to, da sta Luna in Jupiter v Kačenoscu, ki uradno ni del zodiakalnih ozvezdij.

Opazovanja bi se lahko začela ob 19.45 (zaid Sonca je ob 19.32). Takrat je brez večjih težav mogoče na južnem nebu poiskati prvi Lunin krajec, Saturn levo (vzhodno), Jupiter desno (zahodno). Lahko pa v program opazovanj vključimo še Andromedino galaksijo M31, planetarni meglici M57, M27, razsuto kopico M11, kroglasto kopico M13, dvojni zvezdi Albireo, Gama Andromede, (M15, M81, M82, M51, M17, M20, M8, Hi-h). Na Luni lahko, recimo, pokažemo Morje tišine, območje, kjer je pristala posadka misije Apollo 11 (20. julija leta 1969), ali območje, kjer se nahaja krater Vega (Jurij). Tako kot pri Luni tudi pri ostalih objektih lahko predstavimo osnovne podatke (oddaljenost, temperatura, težni pospešek na površju). Jupitrove proge, atmosfera in lune ter Saturnovi obročki nikogar ne pustijo ravnodušnega, zanimivosti o plinskih velikanih nam ne bo zmanjkalo, ocena velikosti kraterjev na Luni pa tudi preseneti večino opazovalcev. Namen takih opazovanj seveda ni globoko razpredanje o videnem, ampak predvsem čudenje, lepota videnega, razločevanje podrobnosti, ki so kdaj v okularju veliko bolj očitne, prepričljive, kot recimo na slikah. Velja pa, da nekaj osnovnih informacij opazovalec o videnem mora dobiti.

Lepo bi bilo, če bi torej vse šole v eni noči po celotni Sloveniji za učence (tudi učitelje, starše in občane iz okolice šol, popotnike skozi naše kraje, za vse generacije, tudi ostarele) osnovna Galilejeva astronomska opazovanja izpred 410 let. Šolam bi pomagala tudi astronomska društva, univerze, posamezniki. Ali nam bo torej uspelo prebuditi astronomsko Slovenijo?

Priprava na Slovenijo pod skupnim nebom 2019

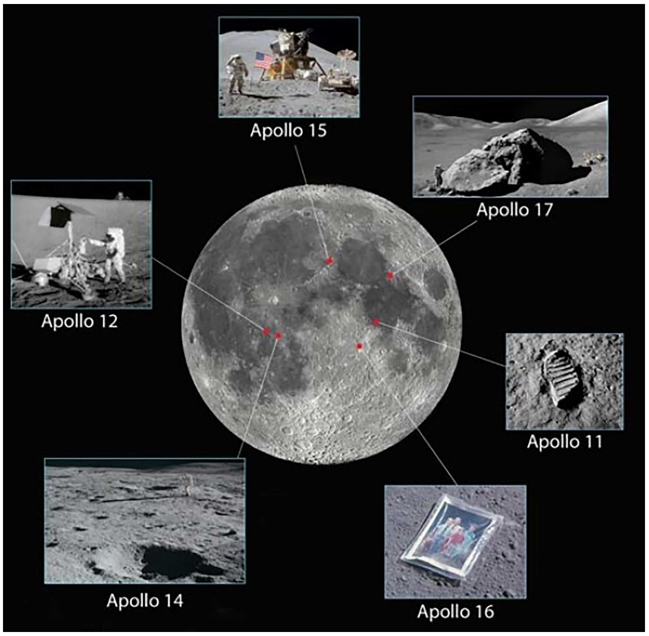
Ker letos mineva 50 let prvega pristanka človeka na Luni, bi lahko, recimo, v petek 19. julija 2019 na predvečer obletnice dogodka povabili radovedneže na šolo in si najprej skupaj ogledali planeta Saturn in Jupiter pa še kaj, nato pa Luno, ki vzide ob 22.30. Seveda bo tri dni prej še ena lepa priložnost za druženje, in sicer bo v torek 16.7.2019 delni Lunin mrk (začetek kmalu po 23. h, sredina ob 23.31).

Realno ne moremo pričakovati, da se prav vse šole odzovejo na astronomska opazovanja, recimo 6. septembra 2019, a kar nekaj šol bi ta izziv zmoglo – lahko da celo večina. Vsaka šola, ki ji bo uspelo prirediti javna opazovanja za okolico, bo na koncu bogato poplačana, malo verjetno, da z denarjem, ampak zagotovo s hvaležnostjo obiskovalcev.

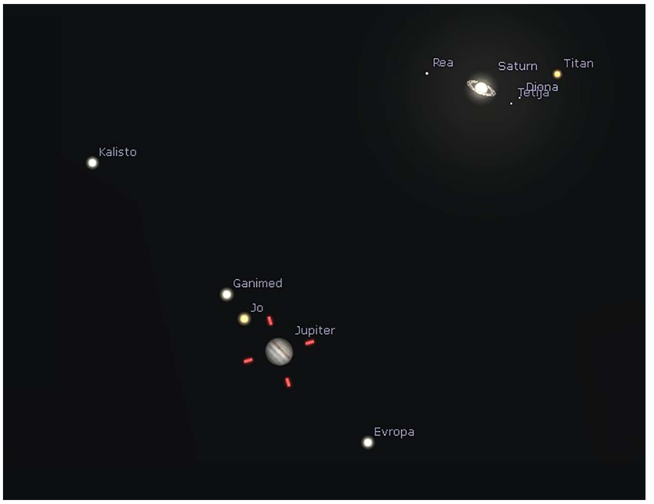
Zagotovo pa je lahko tako srečanje pod skupno veličastno zvezdno streho začetek imenitne vaje iz nebesne mehanike, in to za vse nas, tudi naključne obiskovalce našega druženja. To je lahko začetek opazovanja zbliževanja Jupitra in Saturna, ki se bo zgodilo 21. decembra (kar na zimski solsticij) 2020 v Kozorogu, ko se bosta plinasta nebesna potepuha navidezno zbližala (konjunkcija) zgolj na šest kotnih minut. Srečanja Jupitra in Saturna se sicer dogajajo približno na vsakih 20 let, a tokratno srečanje je posebej zanimivo zaradi njune izjemne bližine, ko bomo lahko v teleskopu elegantno opazovali hkrati kar oba plinasta velikana (tudi do 200-kratni povečavi). Leta 2040 in 2060 bosta planeta narazen za več kot stopinjo (več kot dve polni Luni), leta 2080 pa spet samo šest kotnih minut. Taka bližnja konjunkcija (že praktično skoraj okultacija, prekrivanje za prosto oko), ko lahko kar s prostim očesom spremljamo, kako Jupiter lovi gospodarja prstanov Saturna (Jupiter porabi za obhod okrog Sonca nekaj manj kot 12 let, Saturn pa nekaj manj kot 30 let), je veličastna vaja iz nebesne mehanike, ki jo za nas naredi vesolje. Vsakdo lahko planeta na nebu tudi slika, vsaj nekajkrat na mesec (recimo, da je Jupiter na desnem robu slike), ko je to seveda mogoče, v jeseni 2020 pa večkrat. Že preprosto gledanje zaporedja slik nam bo odprlo veličastno logiko nebesne mehanike (podobna vaja iz leta 2000 je na: `www2.arnes.si/~gljsentvid10/raz9900/ani4.htm`).

Zbliževanje planetov lahko sicer animiramo kar v Stellariumu ali kakem drugem astronomskem programu, a to ni tista primarna izkušnja, ki je pripeljala do razumevanja vesolja. To je zgolj še eno mežikanje na ekranih prenosnih telefonov ali računalnikov, ki človeku vzame bistvo čarobnosti sveta, ki pa je zagotovo pod naravnim zvezdnim nebom, med prijatelji.

Slovenija torej opazuje nočno nebo 6. septembra 2019!



SLIKA 2.
Karta področij pristanka človeških posadk na Luni. Prvi pristanek se je zgodil 20. julija 1969 ob 22. uri in 56 minut (21. julija ob 3. uri zjutraj po srednjeevropskem času), misija Apollo 11. Vir: Jason Major.



SLIKA 3.
Slovenija pod skupnim nebom 2019 je lahko tudi uvod, da vsaj nekateri obiskovalci začnejo bolj redno spremljati dinamiko na nočnem nebu. Recimo bližanje (lovljenje) Jupitra in Saturna – seveda kar s prostim očesom ali tudi navadnim fotoaparatom. Veličastna konjunkcija obeh planetov se bo namreč zgodila 21. decembra 2020, ko ju bomo pol ure po zahodu Sonca (že 16.45) lahko opazovali le okrog šest kotnih minut narazen v istem polju teleskopa, kar se zgodi zelo redko.

Letos mineva tudi 100 let potrditve Einsteinove splošne teorije relativnosti preko Sončevega mrka (na fotografijah je bil »zaznan gravitacijski« premik zvezdnega ozadja v bližini zamračenega Sonca), 50 let od pristanka človeka na Luni, 10 let od Mednarodnega leta astronomije (MLA2009), 70 let DMFA. Letos ESO (Evropski južni observatorij) praznuje 50 let delovanja (La Silla, Čile). Mineva tudi 400 let od objave izjemno pomembnega tretjega Keplerjevega zakona. Ta zakon je osnova gravitacijskega zakona (je matematično v bistvu gravitacijski zakon), je tudi temelj moderne kozmologije, vede o dinamiki vesolja, rojstvu in sestavi vesolja.

Akcijo Slovenija opazuje nebo 6. septembra bo koordiniralo Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije `www.dmfa.si`.

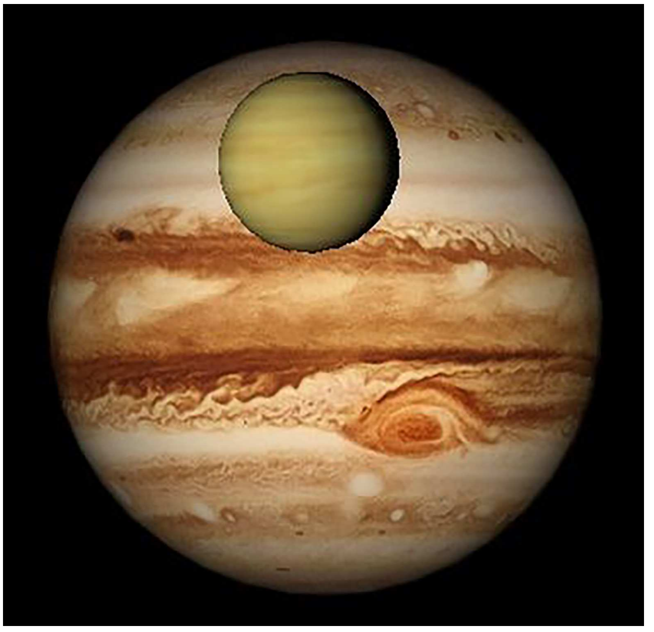
Vse informacije, aktivnosti in prijave opazovalnih mest za akcijo Slovenija opazuje nebo 6. septembra so objavljene na spletnih straneh `www.portalvvesolje.si`.

× × ×

Ocena časa trajanja središčnega navideznega prehoda Venere čez Jupiter

Marijan Prosen

→ **Z Zemlje lahko opazujemo navidezni prehod Venere čez Jupiter (glej sliko). Ocenite čas trajanja središčnega navideznega prehoda Venere čez Jupiter, ko Venera (manjši krog na sliki) navidezno prečka Jupiter tako, da gre njeno navidezno središče natančno čez središče Jupitrove navidezne okrogle ploskvice (čez središče večjega kroga na sliki). Čas trajanja središčnega navideznega prehoda navedite na minuto ali vsaj na desetinko ure natančno.**



SLIKA 1.
Navidezni prehod Venere čez Jupiter (shema), ki se je zgodil ponoči 3. 1. 1818. Nisem zasledil, da bi ga kdo opazoval. Opazovali bi ga lahko le prebivalci z nekaterih japonskih otokov. Naslednji Venerin navidezni prehod čez Jupiter bo 22. 11. 2065.

Napotek

Venera in Jupiter naj se gibljeta po krožnicah okrog Sonca. Vzamemo najpreprostejši primer (idealno situacijo, ki je v praksi neuresničljiva ali nemogoča, račun pa lahko vseeno izvedemo), in sicer tako, da ležijo Zemlja, Venera (v zgornji konjunciji s Soncem) in Jupiter (v konjunkciji s Soncem) skoraj na isti premici in da navidezno manjša okrogla Venera potuje natančno čez središče navidezno večjega krožnega Jupitra (središčni navidezni prehod).

Podatki: zorni kot Venere je 10” (najmanjši), zorni kot Jupitra je 30” (najmanjši), oddaljenost Venere od Zemlje je 1,7 ae., oddaljenost Jupitra od Zemlje je 6,2 ae., hitrost Venere na krožnem tiru je 35 km/s, hitrost Jupitra na krožnem tiru je 13 km/s, premer Venere je 12 000 km, premer Jupitra pa je 143 000 km; 1 ae. (astronomska enota) meri 150 milijonov km.

Opomba. Navidezno gibanje obeh planetov naj se odvija le v eno smer, npr. v desno pri pogledu na planeta; sicer so možne štiri smeri.)

Oceniti je treba čas trajanja središčnega navideznega prehoda Venere (manjšega kroga) čez Jupiter (večji krog) tako, da manjši krog natanko in v celoti navidezno prečka premer večjega.

V literaturi in tudi na svetovnem spletu nisem našel podatka za čas trajanja središčnega navideznega prehoda Venere čez Jupiter, čeprav bi ga lahko imeli za nekakšno konstanto v Osončju. Tako pa ostaja ta čas prehoda neznan. Iz zgoraj navedenih podatkov in napotkov lahko ugotovimo razmeroma dobro oceno za trajanje središčnega navideznega prehoda Venere preko Jupitra, čeprav je kar nekaj dela z razmišljanjem in tudi računanjem.

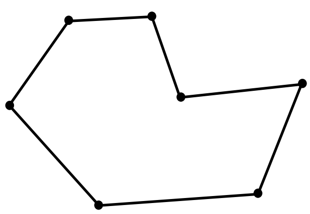
× × ×

Računska geometrija z mnogokotniki

↓↓↓
Jure Slak

→ **Računska geometrija je veda, ki se ukvarja z reševanjem geometrijskih problemov z računalnikom. Problemi, ki jih rešuje, so zelo raznovrstni (ustvarjanje modelov za animirane filme in igre, oblikovanje resničnih objektov, rekonstrukcija površin in iskanje najbližjih točk). V članku bomo ukvarjali z delom, ki razvija algoritme in podatkovne strukture za reševanje problemov z osnovnimi geometrijskimi objekti, kot so točke, daljice in geometrijski liki.**

Geometrijski problemi so zelo lahko rešljivi za človeški um, za računalnik pa so velikokrat precej težji, kot se zdi na prvi pogled. Tako že s pogledom na sliko 1 lahko hitro ugotovimo, ali je lik konveksen.



SLIKA 1.
Primer lika, za katerega človek hitro ugotovi, ali je konkaven ali konveksen.

Spomnimo se definicije konveksnega lika: *Lik je konveksen, če vsaka daljica, katere krajišči ležita znotraj lika tudi sama v celoti leži znotraj lika.*

Zgornja definicija je matematično elegantna; pove da konveksni lik ne sme imeti vbočenih delov, računsko pa ni dosti uporabna. Podobno velja za velik del Evklidske geometrije: lastnosti, definirane s pomočjo geometrijskih objektov, kot so simetrale, enaki koti, vzporednice, nam pri računalniku ne pomagajo veliko, saj z njimi ne znamo delati.

Predstavitev objektov

Prišli smo do prvega problema računske geometrije in sicer, kako predstaviti geometrijske objekte. Odgovor je dandanes relativno samoumeven, s koordinatami. Ta ideja je bila razvita precej pozno. Idejo koordinatnega sistema pripisujemo Renéju Descartesu, ki je živel v 17. stoletju. Zapis točke v ravnini s pomočjo dveh števil je omogočil sistematično povezavo med vizualno naravnano geometrijo in računsko naravnano algebro. Na enak način bomo točke predstavili tudi mi, kot par dveh decimalnih števil (x, y). To sicer ni povsem natančna predstavitev, saj točke $(\sqrt{3}, \pi)$ je bomo mogli predstaviti popolnoma natančno.

Sedaj, ko znamo predstaviti točke, se lahko lotimo predstavitve bolj zapletenih objektov: daljico npr. predstavimo kot par dveh točk, krog pa kot par središča in polmera. Mnogokotnik predstavimo kot zaporedje točk na njegovem robu. Lik na sliki 1 je v programu, v katerem je narisan, predstavljen z zaporedjem sedmih točk:

- $[(545.4688, 1628.2812), (34.1016, 900.9766), (806.8750, 37.3047), (2174.3359, 135.7812), (2549.3750, 1082.8125), (1503.8672, 969.1797), (1261.4453, 1666.1719)]$.

Takih predstavitev je več: odvisno je, pri kateri točki začnemo in v katero smer naštevamo točke. Podobno kot pri trikotnikih bomo rekli, da ima mnogokotnik pozitivno orientacijo, če jih naštevamo v nasprotni smeri urinega kazalca, sicer pa ima negativno orientacijo. Že problem skladnosti likov tako postane zanimiv. Kako lahko ugotovimo, ali predstavljata enak lik, če imamo dva seznama točk, ki predstavljata dva mnogokotnika? Ne moremo samo preveriti, ali sta seznama enaka, ampak moramo preveriti vse možne ciklične zamike prvega seznama in vse ciklične zamike obrnjenega prvega seznama, če se morda ujemajo z drugim seznamom.

Na tem mestu lahko bralec razmisli, kako bi za lik, podan samo s koordinatami preverili, ali je konveksen. Kako bi izračunal njegovo ploščino ali obseg? Algoritmi, ki jih bomo izpeljali, bodo relativno enostavni, vendar bi se brez njih marsikdo ujel v neskončno obravnavo različnih možnosti in posebnih primerov.

Obseg

Pri obsegu standardna definicija prenese tudi v računsko. Obseg mnogokotnika je vsota dolžin vseh njegovih stranic. Dolžino stranice izračunamo kot razdaljo med dvema točkama, za katero uporabimo znano formulo, ki izvira iz Pitagorovega izreka:

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}. \tag{1}$$

Izračunajmo obseg zgornjega lika s programskim jezikom Python. Točke predstavimo kar z dvema seznamoma x in y koordinat. Velikokrat se za geometrijske objekte naredi svoj razred, kar bomo za voljo enostavnosti tokrat izpustili. Lik na sliki 1 tako predstavimo s spodnjo kodo:

```
x = [545.46875, 34.101562, 806.875, 2174.335938,
     2549.375, 1503.867188, 1261.445312]
y = [1628.28125, 900.976562, 37.304688, 135.78125,
     1082.8125, 969.179688, 1666.171875]
```

Oglejmo si funkcijo, ki izračuna obseg lika:

```
from math import sqrt
def obseg(x, y):     n = len(x) # dolžina seznama x,
      predpostavimo, da je y enako dolg
   o = 0
   for i in range(n):
      j = (i+1) % n # naslednja točka
      # prištejemo dolžino trenutne stranice k
         skupnemu obsegu
      o += sqrt((x[i]-x[j])**2 + (y[i]-y[j])**2)
   return o
```

Vidimo, da je funkcija precej kratka in enostavna. Sprehodimo se po vseh točkah lika za i od 0 do $n-1$. Za i-to točko naprej ugotovimo njeno naslednjo točko j, ki je kar $i+1$, če pa je i slučajno zadnja točka, tako da bi $i+1$ gledal preko konca seznama, pa nastavimo j na 0. Posebni obravnavi zadnje točke se enostavno ognemo s pomočjo operatorja modulo (%), ki vrne ostanek pri celoštevilskem deljenju. Število n je v našem primeru 7, in ko je i 0, 1, 2, 3, 4, ali 5, je $i+1$ manjši od 7. Ostanek pri deljenju s 7 ničesar ne spremeni in je j kar enak $i+1$. Ko pa je $i+1$ enak 7, je ostanek pri deljenju 7 s 7 enak 0, kar je tudi pravilna vrednost za j. Nato k trenutnemu obsegu samo prištejemo razdaljo med točkama (vrstica 8 neposredno uporabi formulo (1)) in ga na koncu vrnemo. Ko funkcijo poženemo s koordinatami našega lika za parametra x in y, dobimo rezultat približno 6944.19.

Ploščina

Izračun ploščine je že zanimivejši od izračuna obsega. Za posebne like, kot so npr. krog ali pravokotnik, ploščino znamo izračunati po formuli. Kaj pa za splošen mnogokotnik?

Začnimo najprej s trikotniki. Osnovna formula za ploščino trikotnika je polovica produkta dolžin višine in osnovnice. V praksi ta formula ni tako dobra, saj je izračun višine težji kot izračun ploščine. To formulo pogosteje uporabimo v obratni smeri, tako da iz ploščine in stranice dobimo višino.

Druga možnost je Heronov obrazec:

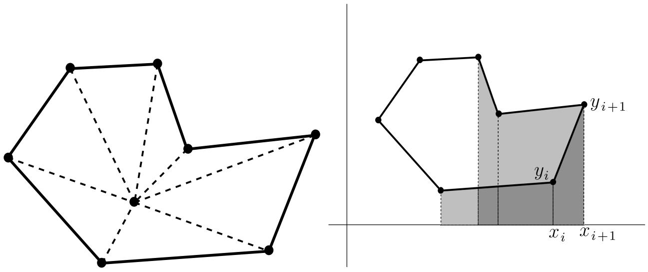
$$p = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad s = \frac{a+b+c}{2},$$

ki uporablja le dolžine stranic, toda ima nepotrebno korenjenje. Kot verjetno veste, obstaja tudi formula, ki izrazi ploščino neposredno iz koordinat trikotnika: Če imamo točke $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$, (x_3, y_3), potem velja, da je ploščina enaka

$$p = \frac{1}{2}|x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_2y_1 - x_3y_2 - x_1y_3|.$$

Kasneje se bomo kar na splošnejšem primeru mnogokotnika prepričali, da formula drži. Če spustimo absolutno vrednost, dobimo iz formule še več podatkov: predznak namreč pove tudi orientacijo trikotnika.

Znamo uporabiti znanje o ploščinah trikotnikov pri računanju ploščine mnogokotnika? Prva ideja je, da bi mnogokotnik razdelili na trikotnike, podobno kot na sliki 2 levo.



SLIKA 2.
Možni izračuni ploščine mnogokotnika

Ta ideja je za izračun ploščine odlična, toda izkaže se, da je razdelitev mnogokotnika na trikotnike precej težji problem kot izračun ploščine same, saj ne obstaja vedno točka, ki bi jo bilo možno povezati z vsemi oglišči, kot v primeru zgoraj. Taki mnogokotniki imajo celo posebno ime, imenujejo se *zvezdasti*.

Druga ideja je, da ploščino mnogokotnika zapišemo kot vsoto ploščin trapezov, kot na sliki 2 desno. Oglejmo si »navpični« trapez, ki ga dve zaporedni točki (x_i, y_i) in (x_{i+1}, y_{i+1}) tvorita z x-osjo, tj. trapez na točkah $(x_i, 0), (x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1}), (x_{i+1}, 0)$. Tak trapez ima višino $x_i - x_{i+1}$ in srednjico $\frac{y_i+y_{i+1}}{2}$, torej je njegova predznačena ploščina enaka $\frac{y_i+y_{i+1}}{2}(x_i - x_{i+1})$. Če seštejemo vse trapeze, dobimo vsoto

$$p = \frac{y_1 + y_2}{2}(x_1 - x_2) + \ldots + \frac{y_n + y_1}{2}(x_n - x_1)$$

Trapezi pod likom imajo višino negativno, medtem ko imajo zgornji trapezi višino pozitivno. Del ploščine pod likom se tako ravno odšteje. Enako velja za bolj zapletene like. Podoben sklep bi lahko naredili, tudi če bi risali trapeze po y osi ali pa če bi risali trikotnike do vsake stranice iz izhodišča – v vsakem primeru dobimo neko obliko zgornje formule. Zgornja formula je z vidika računske geometrije odlična, saj direktno poda rezultat iz osnovnih podatkov. Poleg tega je zanimiva tudi matematično; z njo namreč lahko dokažemo, da ima vsak mnogokotnik s celoštevilskimi koordinatami ploščino, ki je celoštevilska ali pa na polovici med dvema celima številoma.

Preverimo lahko tudi, da se za trikotnik splošna formula ujema s prej napisano do absolutnih vrednosti natančno:

$$\begin{aligned}
p &= \frac{y_1 + y_2}{2}(x_1 - x_2) + \frac{y_2 + y_3}{2}(x_2 - x_3) \\
&+ \frac{y_3 + y_1}{2}(x_3 - x_1) \\
&= \frac{y_1x_1}{2} + \frac{y_2x_1}{2} - \frac{y_1x_2}{2} - \frac{y_2x_2}{2} \\
&+ \frac{y_2x_2}{2} + \frac{y_3x_2}{2} - \frac{y_2x_3}{2} - \frac{y_3x_3}{2} \\
&+ \frac{y_3x_3}{2} + \frac{y_1x_3}{2} - \frac{y_3x_1}{2} - \frac{y_1x_1}{2} \\
&= \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_2y_1 - x_3y_2 - x_1y_3)
\end{aligned}$$

Ravno predznak ploščine nosi dodatno informacijo o orientaciji mnogokotnika, kar je računski odgovor na geometrijsko vprašanje.

Oglejmo si primer implementacije metode za računanje ploščine v Pythonu.

```
def ploscina(x, y):
    n = len(x) # dolžina seznama x, predpostavimo, da
        je y enako dolg
    p = 0
    for i in range(n):
        j = (i+1) % n # naslednja točka
        # prištejemo dolžino trenutne stranice k skupni
            ploščini
        p += (y[i] + y[j])*(x[i] - x[j])
    return p/2
```

Program je podoben tistemu za obseg, kjer zopet uporabimo enak trik s % za naslednika. Za naš lik program vrne približno 2508792.033, kar pove, da ima lik pozitivno orientacijo.

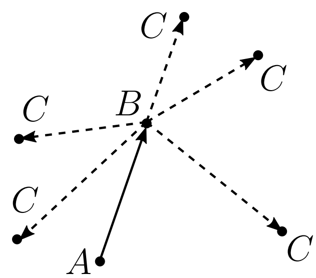
Na koncu velja dodati še opombo, da formula velja za enostavne mnogokotnike, to so mnogokotniki, ki nimajo samopresečišč, kar je velika večina mnogokotnikov v praksi, npr. geografske meje. Tudi za pravokotnike s samopresečišči obstajajo formule, vendar je potrebno najprej definirati, kaj je notranjost lika.

Konveksnost

Kot zadnji primer si oglejmo, kako preverimo, ali je mnogokotnik konveksen. Kot smo že razmislili, nam geometrijska definicija ne koristi kaj dosti, toda uporabimo lahko drugačen geometrijski opis, ki je bližje računski geometriji. Zamislimo si, da hodimo po stranicah mnogokotnika v pozitivni smeri. Vsak ovinek, ki ga naredimo, ko pridemo na novo stranico, mora biti v levo, sicer imamo »vdolbino« in s tem kršimo konveksnost. Pogoj za konveksnost je torej, da morajo biti vsi ovinki pri obhodu v levo. Ostaja samo še, kako ugotoviti, v katero smer je bil ovinek.

Ovinek v levo

Obravnavajmo situacijo na sliki 3 s pomočjo koordinat in poskusimo izpeljati zanesljiv postopek za ugotavljanje smeri ovinka. S primerjavami koordinat posameznih točk in obravnavo ogromno možnosti se morda uspemo prebiti skozi. Kot vedno pa ne želimo obravnavati posebnih primerov, ampak si želimo postopek, ki bo neodvisen od smeri in bo deloval za vse konfiguracije.



SLIKA 3.
Ugotavljanje smeri ovinka

Ideja se ponuja iz prejšnjega primera. Če si ogledamo trikotnik $\triangle ABC$ in njegovo orientacijo, vidimo, da je negativna, če C leži desno od nosilke AB, pozitivna, če C leži levo od nosilke AB, trikotnik pa je izrojen, če C leži na nosilki AB. V mislih lahko preverimo vse možne lege C, da potrdimo veljavnost zgornjega razmisleka. Orientacijo trikotnika znamo izračunati s pomočjo ploščine. Če izračunamo predznačeno ploščino p, lahko preverimo predznak in vemo, da je ovinek v levo, če je $p > 0$, v desno, če je $p < 0$, in naravnost, če je $p = 0$. Ker nas zanima samo predznak, se lahko tudi izognemo deljenju z 2. Pri iskanju konveksne ovojnice bodo ovinki naravnost šteli kot levi, kar tudi upoštevamo v spodnji funkciji:

```
def v_levo(x1, y1, x2, y2, x3, y3):
    p = x1*y2+x2*y3+x3*y1-x2*y1-x3*y2-x1*y3
    return p >= 0 # vrnemo True, če je ovinek v levo
        ali naravnost
```

Za zainteresirane velja omeniti, da obstaja operacija vektorskega produkta, ki ponuja globljo izpeljavo zgornje formule z več geometrijskega razumevanja, s pomočjo katere enostavno izpeljemo tako formulo za ploščino kot tudi odgovor na vprašanje smeri ovinka.

Preverjanje konveksnosti

Ostane nam le še, da uporabimo zgoraj naučeno, da preverimo, ali je lik konveksen. Za vsakega izmed n ovinkov preverimo, ali je ovinek v levo. V primeru desnega ovinka sporočimo, da lik ni konveksen, sicer pa, da je. To počne spodnja funkcija:

```
def je_konveksen(x, y): # predpostavimo pozitivno
    orientacijo
    n = len(x)
    for i in range(n):
        j = (i+1) % n
        k = (i+2) % n
        if not v_levo(x[i], y[i], x[j], y[j], x[k], y[k]):
            return False # če ovinek ni v levo, zaključimo
    return True
```

Predpostavka o pozitivni orientaciji lahko enostavno preverimo in po potrebi obrnemo seznam točk, preden pokličemo zgornjo funkcijo. V funkciji smo zopet uporabili trik s % za naslednika in še za drugega naslednika. Na primeru našega lika funkcija vrne `False`, saj ovinek $(2549.375, 1082.812) \rightarrow (1503.867, 969.179) \rightarrow (1261.445, 1666.171)$ ni v levo ($p = -756257.856$).

Drugi problemi

Za zainteresirane bralce lahko omenimo še dva problema podobne težavnosti. Prvi je problem presečišča dveh premic, vsaka podana z dvema točkama. Razviti je potrebno algoritem, ki vrne koordinate presečišča, ali pa pove, da se premici prekrivata ali da sta vzporedni. Tudi tu je možno doseči, da se nobenih premic ne obravnava posebej (npr. navpičnih), ampak obstaja direkten izračun. Drugi problem pa je problem presečišča dveh daljic: ali se sploh sekata in kje. Oba problema je možno rešiti s spoznanimi orodji, le pravilen pristop in dobro mero potrpljenja je potrebno imeti.

× × ×

NARAVOSLOVNA FOTOGRAFIJA

Detektiv in poševni met

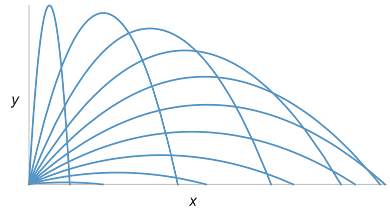
↓↓↓
Aleš Mohorič

→ **Na parkirišču sem opazoval posušene blatne kapljice na vratih avtomobila in se vprašal, ali znam iz vzorca ugotoviti, s kolikšno hitrostjo je avto peljal po blatu.**

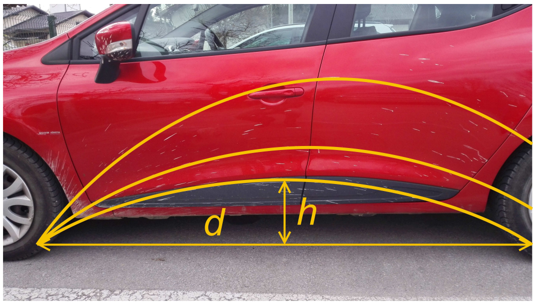
Pri poševnem metu je tirnica telesa parabola. Gibanje v vodoravni smeri je enakomerno $x = v\cos\varphi t$, v navpični pa enakomerno pospešeno s končno začetno hitrostjo $y = v\sin\varphi t - \frac{1}{2}gt^2$. Telo vržemo iz izhodišča koordinatnega sistema s hitrostjo v, ki oklepa z osjo x kot φ, g pa je težni pospešek. Oblika parabole je odvisna od začetne hitrosti in kota, pod katerim telo vržemo. Telo doseže največjo višino $h = \frac{v^2\sin^2\varphi}{2g}$, domet pa ima $d = \frac{2v^2\cos\varphi\sin\varphi}{g}$. Drug izraz kvadriramo, kvadrat kosinusa izrazimo s $\cos^2\varphi = 1 - \sin^2\varphi$ in kvadrata sinusa zamenjamo s $\sin^2\varphi = \frac{2gh}{v^2}$, ki ga dobimo iz izraza za višino. Enačbo preuredimo in dobimo zvezo med dometom in največjo višino meta:

$$d = \sqrt{\frac{8v^2h}{g} - 16h^2}. \tag{1}$$

Blatne kapljice se med vožnjo po blatu primejo dna koles in nekoliko višje, na različnih mestih nad dotikališčem kolesa s tlemi, odletavajo v loku proti zadku avtomobila (slika 2). Za voznika je videti tako, kot bi z oboda kolesa kapljice odletavale z enako hitrostjo (obodna hitrost zunanjega dela gume), toda v različnih smereh. Obodna hitrost zunanjega roba kolesa je za voznika enaka kot hitrost vozila glede na cesto. Nekatere kapljice letijo dovolj blizu vrat, da se jih oprimejo in tam posušijo. Množice kapljic tvorijo vzorec, ki mu lahko prilagodimo družino parabol, podobno tisti na sliki 1.

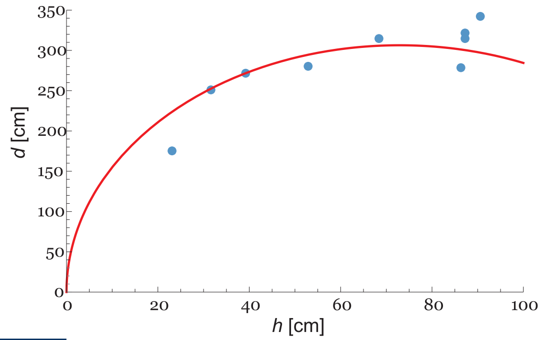


SLIKA 1.
Družina parabol, ki ustrezajo poševnim metom z enako začetno hitrostjo in pod različnimi koti.



SLIKA 2.
Vzorec posušenih blatnih kapelj na avtomobilu tvori parabolične nize. Narisanih je nekaj krivulj in označena je višina parabole ter domet.

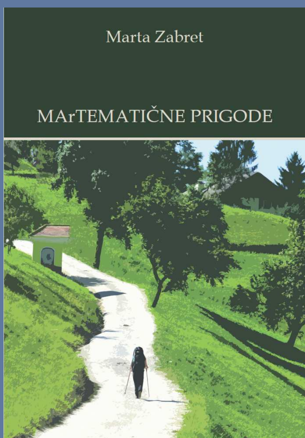
Iz vzorca na vratih poiščemo višine in ustrezne domete parabol. Podatke kaže graf na sliki 3. Iz enačbe 1 določimo začetno hitrost kapljic. Pri analizi smo privzeli, da parabole izhajajo iz iste točke, kolesa ne zdrsujejo, avto pelje s stalno hitrostjo in kapljice imajo vse enako začetno hitrost, spreminja se le kot, pod katerim odletijo. Rdeča krivulja na grafu ustreza enačbi 1, če je začetna hitrost 5,5 m/s. Torej, avto je peljal po blatu s hitrostjo 20 km/h. Dobili smo pričakovan rezultat – po blatu običajno vozimo počasi.



SLIKA 3.
Izmerjeni dometi in višine parabol ter modelska krivulja, ki ustreza začetni hitrosti 20 km/h.

×××

MaRtematične prigode



Marta Zabret

MArTEMATIČNE PRIGODE

146 strani

format 14 × 20 cm

12,50 EUR

Izšla je nova knjiga *MaRtematične prigode.* Avtorica Marta Zabret je profesorica matematike in specialistka matematičnega izobraževanja. Knjiga je množica kratkih zgodb, v katerih so strnjene mnoge izkušnje s področja poučevanja in spremljajočih aktivnosti na srednjih šolah.

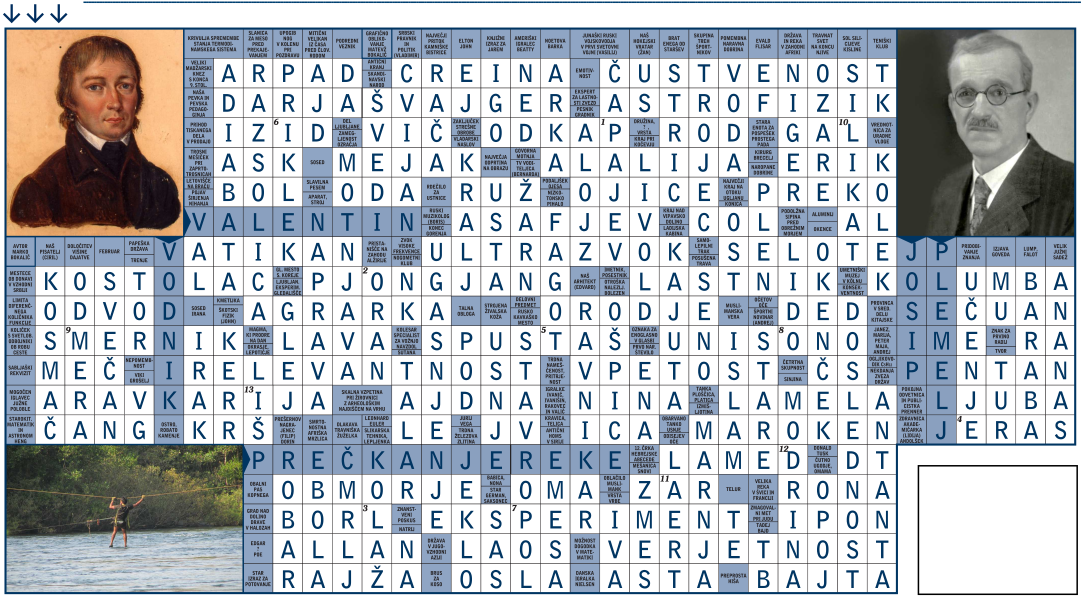
Jedro knjige so zanimivi zapisi o njenih dijakinjah in dijakih. Besedila so napisana lepo in strnjeno, v njih je tudi precej humorja. Zgodbe lahko beremo samostojno; nekatere so prav kratke. Knjiga ima tudi nekaj čisto matematične vsebine, denimo v obliki originalno predstavljenih problemov na srednješolskem nivoju.

Za lepo zunanjo in notranjo obliko knjige so poskrbele tri nekdanje Martine dijakinje: Neža Vavpetič, Ariana Godicelj in Ana Hafner.

Poleg omenjene lahko v naši ponudbi najdete še veliko drugih knjig. Podrobnejše predstavitve so na spodnjem naslovu, kjer lahko starejše knjige tudi naročite s popustom:

`http://www.dmfa-zaloznistvo.si/cenik/`

Dodatne informacije lahko dobite v uredništvu Preseka po telefonu (01) 4766 633.



REŠITEV NAGRADNE KRIŽANKE PRESEK 46/5

→ Pravilna rešitev nagradne križanke iz pete številke Preseka je **Poleti pomladi.** Izmed pravilnih rešitev so bili izžrebani Juš Gašparič iz Ljubljane, Maja Ciglar iz Petrovč in Tomaž Terčič iz Nove Gorice, ki bodo razpisane nagrade prejeli po pošti.

× × ×

↓↓↓
BOŠTJAN KUZMAN

→ **Letošnja slavnostna podelitev nagrad tekmovalcem v matematiki, fiziki in astronomiji je potekala v znamenju 70-letnice DMFA Slovenije v nedeljo, 19. maja, v Gallusovi dvorani Cankarjevega doma v Ljubljani. Povabilo na prireditev vsem prejemnikom zlatih priznanj je sicer povzročilo nekaj zmede in gneče pri rezervacijah in razdeljevanju vstopnic, toda prireditev v imenitno osvetljeni polni dvorani s 1500 sedeži je bila res praznična. Zapleti v preddverju so bili pozabljeni kmalu po začetku.**

Prireditev je z virtuozno skladbo odprla mlada pianistka **Tea Jeličić**, dijakinja 4. letnika Konservatorija za glasbo in balet ter prvonagrajenka letošnjega državnega tekmovanja mladih glasbenikov, ki smo jo na odru skupaj videli kar petkrat – dvakrat kot glasbenico, nato pa še kot nagrajenko tekmovanja v matematiki ter članico dveh ekip za mednarodna tekmovanja.

Nato sta na oder stopila voditelja **Tomaž Hudomalj**, znani športni komentator, in **Mojca Delač**, voditeljica poljudnoznanstvenih oddaj na Radiu Slovenija. Na vprašanje, ali se kdo v dvorani še spomni leta 1949, ko je bilo društvo ustanovljeno, se je iz dvorane oglasil gospod **Dušan Modic**, 92-letni profesor matematike in fizike iz Novega mesta, bržkone edini še živi ustanovni član društva. Črnobeli fotografiji dijakov pri uri matematike izpred 60 let in slavnostne prireditve DMFA izpred 40 let sta dali odlično iztočnico prof. **Draganu Mihajloviću**, ki je prišel na oder kot predsednik DMFA pozdravit goste.

Nato smo si ogledali krajši film, v katerem so bile ob izjavam posameznikov predstavljene številne dejavnosti našega društva, s poudarkom na zadnjem obdobju. Film sta pripravila **Andrej Guštin** in **Maja Pečar**. Posebna atrakcija prireditve pa je bil 15. Verižni eksperiment, v katerem je tokrat sodelovalo 10 šol in vrtcev s 15-imi napravami, ki jih je pripravilo okoli 100 ljudi. Eksperiment je že na naslovnici prireditve šaljivo napovedala avtorska ilustracija Cirila Horjaka. Med prireditvijo so bile naprave verižnega eksperimenta postavljene na oder in ko je nastopil pravi trenutek, so iz sedežev v dvorani na oder prišli učenci, ki so jih sprožili, dogajanje pa je bilo preko videa preneseno na veliko platno, da so ga lahko dobro spremljali tudi gledalci v dvorani. Zadnji člen v verižnem eksperimentu je sprožil glasbeno skrinjico, ki je zaigrala znano rojstnodnevno melodijo. Sodelujoči so se priklonili in se vrnili na sedeže v dvorano, voditelja pa sta predstavila glasovanje za najboljši eksperiment ter začela s podelitvijo.

Med podelitvijo smo opazili veliko izstopajočih dosežkov. Učenec 8. razreda OŠ Kozje **Brest Lenarčič** je osvojil tri prva mesta na tekmovanjih matematike, fizike in astronomije. Ta desežek je pri srednješolcih ponovil **Andraž Jelinčič**, dijak 4. letnika Gimnazije Bežigrad. Velik aplavz je požel tudi **Luka Horjak**, dijak 3. letnika I. gimnazije v Celju, ki je lani na Mednarodni matematični olimpijadi (MMO) osvojil srebrno medaljo, šele četrto za Slovenijo, in to z najboljšim točkovnim dosežkom doslej. Proti koncu prireditve, ki sta jo odlično usmerjala voditelja, smo si ogledali še posnetek reševanja naloge iz fizikalne olimpijade, ki ga je posnel **Marko Čmrlec**, dijak 4. letnika Gimnazije Bežigrad, ki se je lani udeležil kar štirih mednarodnih tekmovanj in na njih osvojil štiri medalje, tudi srebrno na Mednarodni olimpijadi iz astronomije in astrofizike (MOAA).

Ob koncu prireditve so bili na oder povabljeni še člani ekip za mednarodna tekmovanja. Poseben aplavz je še enkrat požela **Tea Jeličić**, ki je na lanski Evropski dekliški matematični olimpijadi (EDMO) osvojila srebrno medaljo, kar je naboljši dosežek Slovenije doslej, pa **Ana Meta Dolinar**, 4. letnik Gimnazije Bežigrad, ki je že tretjič zapored na tem tekmovanju osvojila bron. Da sta pozabila omeniti njeno medaljo, je morala voditelja kar sama opozoriti **Ema Mlinar**, 4. letnik Gimnazije Vič, ki je osvojila bron tako na letošnji EDMO in kot na lanski MOAA. Na oder so druga za drugo prišle še ekipe za MMO, Srednjeevropske matematične olimpijade (SMO), Mednarodne fizikalne olimpijade (MFO), Evropske fizikalne olimpijade (EFO) in Mednarodne olimpijade iz astronomije in astrofizike (MOAA). Ob skupinski fotografiji je dal kratko izjavo v imenu vseh olimpijcev še **Luka Horjak**.

Preostale so še tri odrske točke. Najprej sta dr. Jurij Bajc in ga. Natalija Polenec (TMS) podelila nagrade občinstva in strokovne komisije za **Verižni eksperiment**. Nato sta se voditelja zahvalila vsem mentorjem in na oder povabila avtorja prireditve in pisca teh vrstic. Zahvalil sem se vsem, ki so mi pomagali pri izvedbi prireditve, predvsem dr. Juriju Bajcu in dr. Matjažu Željku, pa Cirilu Dominku in drugim članom UO DMFA. Požel sem bučen aplavz, o tem, ali je bil upravičen ali ne, pa naj sodijo tisti, ki so se prireditve udeležili. Čisto na koncu sta se voditelja poslovila in na oder povabila vse nagrajence še za zadnjo skupinsko fotografijo.

15. Verižni eksperiment

Nagrado občinstva jubilejnega 15. Verižnega eksperimenta 2019 je prejela naprava **Astronomius**, ki so jo izdelali učenci OŠ Josipa Plemlja Bled. Strokovna komisija v sestavi prof. dr. Dragan Mihajlović, predsednik DMFA, dr. Orest Jarh, TMS, in mag. Gregor Udovč, pa je podelila še tri enakovredne nagrade napravam **Reciklirani Urban** (OŠ dr. F. Prešerna, Ribnica), **Vodni park** (OŠ Prežihovega Voranca, Jesenice) ter **Pozor, gradbišče** (OŠ Loka, Črnomelj), in še pohvalo napravi **Rekreacija pod Stolom**, ki so jo izdelali vzgojiteljici in otroci Vrtca pri OŠ Žirovnica.

Člani ekip za mednarodna tekmovanja 2019

Evropska dekliška matematična olimpijada, Kiev, Ukrajina, april 2019

- Tea Jeličić, Konservatorij za glasbo in balet Ljubljana – srebrna medalja,
- Ana Meta Dolinar, Gimnazija Bežigrad – bronasta medalja,
- Ema Mlinar, Gimnazija Vič – bronasta medalja,
- Špela Polak, I. gimnazija v Celju – pohvala.

Mednarodna matematična olimpijada, Bath, Anglija, julij 2019

- Luka Horjak, I. gimnazija v Celju,
- Jaka Vrhovnik, I. gimnazija v Celju,
- Lovro Drofenik, I. gimnazija v Celju,
- Tea Jeličić, Konservatorij za glasbo in balet Ljubljana,
- Tevž Lotrič, Gimnazija Kranj,
- Marko Čmrlec, Gimnazija Bežigrad.

Srednjeevropska matematična olimpijada, Češka, avgust 2019

- Nejc Amon, I. gimnazija v Celju,
- Gal Zmazek, Gimnazija Ptuj,
- Jan Genc, II. gimnazija Maribor,
- Juš Kocutar, II. gimnazija Maribor,
- Matija Likar, II. gimnazija Maribor,
- Urban Vesel, Šolski center Velenje, gimnazija.

Mednarodna fizikalna olimpijada, Tel Aviv, Izrael, julij 2019

- Klemen Bogataj, Gimnazija Škofja Loka,
- Sašo Domadenik, II. gimnazija Maribor,
- Aleš Globočnik, Gimnazija Kranj,
- Tevž Lotrič, Gimnazija Kranj,
- Vladimir Smrkolj, Gimnazija Bežigrad.

Evropska fizikalna olimpijada, Riga, Latvija, maj 2019

- Simon Bukovšek, Gimnazija Škofja Loka,
- Marko Čmrlec, Gimnazija Bežigrad,
- Andraž Jelinčič, Gimnazija Bežigrad,
- Tevž Lotrič, Gimnazija Kranj,
- Vladimir Smrkolj, Gimnazija Bežigrad.

Mednarodna olimpijada iz astronomije in astrofizike, Madžarska, avgust 2019

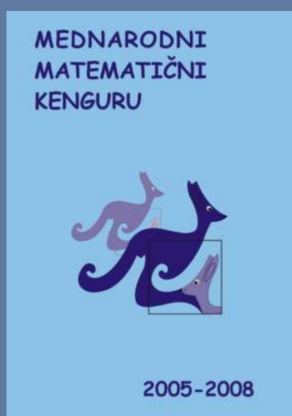
- Marko Čmrlec, Gimnazija Bežigrad,
- Jon Judež, Gimnazija Novo mesto,
- Vito Levstik, II. gimnazija Maribor,
- Matej Mali, Gimnazija in srednja šola Rudolfa Maistra Kamnik,
- Ema Mlinar, Gimnazija Vič.

× × ×

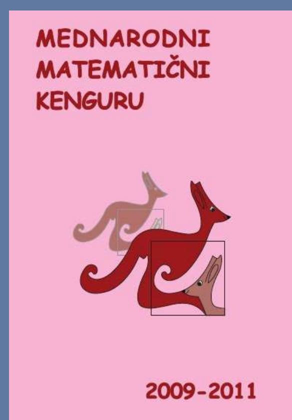
Matematični kenguru

Osnovna naloga tekmovanja Kenguru je popularizacija matematike. Zanimiv, zabaven in igriv način zastavljanja matematičnih problemov je pripomogel, da se je tekmovanje kmalu razširilo po vsej Evropi, hkrati pa so se v tekmovanje vključevali tudi otroci in mladostniki iz drugih držav sveta. Tekmovanje je preseglo evropske okvire in postalo Mednarodni matematični kenguru. Leta 2016 se ga je udeležilo več kot 6 milijonov tekmovalcev iz več kot 60 držav sveta. V Sloveniji Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije organizira tekmovanje za učence od prvega razreda osnovne šole do četrtega letnika srednje šole. Poseben izbor je pripravljen za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol, za dijake srednjih poklicnih šol ter za študente.

Naloge, zbrane v teh knjigah, so najboljše možno gradivo za pripravo na prihodnja tekmovanja. Predvsem zato, ker je vsaki nalogi dodana podrobno razložena rešitev, ki bralca vodi v logično mišljenje in spoznavanje novih strategij reševanja. Marsikatera naloga, ki je sprva na videz nerešljiva, postane tako dosegljiv iskriv matematični izziv.



18,74 EUR



14,50 EUR

23,00 EUR

Pri DMFA-založništvo je v Presekovi knjižnici izšlo že pet knjig Matematičnega kenguruja. Na zalogi so še:

- *Mednarodni matematični kenguru 2005–2008*,
- *Mednarodni matematični kenguru 2009–2011*,
- *Mednarodni matematični kenguru 2012–2016*.

Poleg omenjenih ponujamo tudi druga matematična, fizikalna in astronomska dela. Podrobnejše predstavitve so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse publikacije tudi naročite:

`http://www.dmfa-zaloznistvo.si/`

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA Slovenije, dijaki in študentje imate ob naročilu starejših zbirk nalog pri DMFA–založništvo 20 % popusta na zgornje cene – izkoristite ga!