

# **PRESEK**

**List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje**

ISSN 0351-6652

Letnik **14** (1986/1987)

Številka **1**

Strani **8-11**

Danijel Bezek:

## **PITAGORA IN NJEGOVA ŠOLA**

Ključne besede: matematika, pitagorejci.

Elektronska verzija: <http://www.presek.si/14/800-Bezek.pdf>

© 1986 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

© 2010 DMFA - založništvo

Vse pravice pridržane. Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

# PITAGORA IN NJEGOVA ŠOLA

Glavna značilnost grške matematične misli je bil razumski pristop. Osnovna značilnost razumskega pristopa ni bilo toliko iskanje praktičnih in koristnih postopkov na podlagi empiričnih izkušenj, ampak iskanje vzročno—posledičnih zvez po logični poti. Temu pristopu je ostala zvesta večina grških filozofskih šol, ki jih je matematika zanimala. Nekatere od šol so se v okviru tega pristopa ukvarjale z bolj realnimi problemi in vprašanji (npr. sofisti), druge šole pa so se nagibale k bolj mističnim razlagam in iskanju mističnih zvez med števili in urejenostjo sveta. Med take šole spada tudi tako imenovana "šola pitagorejcev". Ime je dobila po idejnem voditelju te šole – Pitagori (gr. *πυθαγορας*, okoli 580 – 500 pr.n.št.). Nekaj nam o šoli, njenih učencih in delovanju izda v verze prelita naloga:

"Reci Pitagora srečni, potomec Modric helikonskih, tole mi zdaj odgovori: dej, koliko vrlih učencev v tvoji se hiši sedaj ubada na poti k modrosti?"  
"Tole povem Polikrat, da se matematiko krasno vseh polovica uči, nesmrtno prirodo spoznati hoče nato četrtnina. Sedmina vseh mojih učencev rada molčala bi le, besede razmišljala večne. Z njimi še žene so tri, med njimi je prva Teana. To so nasledniki vsi, kar meni so dale jih muze."

Pitagorejci so se veliko ukvarjali s števili in prišli na tem področju do vrste zanimivih odkritij. To jih je navdušilo do take mere, da so poskušali zakonitosti in lastnosti iz geometrije, kozmologije in glasbe povezati s števili in številskimi razmerji.

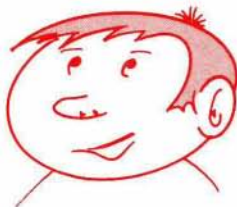
Med mnogimi primeri, ki predstavljajo povezavo med geometrijo in števili, je tudi naslednja naloga:

Za katere pravokotnike je številka vrednost obsega enaka številski vrednosti ploščine?

V smislu pitagorejskih nazorov iščemo pozitivno celoštevilsko rešitev enačbe:

$$2(a + b) = ab \quad (1)$$

V gornji enačbi ločimo količini  $a$  in  $b$ , tako da dobimo:



$$a = \frac{2b}{b-2}$$

Ker zahtevamo, da je  $a$  naravno število, mora biti števec večkratnik imenovalca ( $2b = a(b-2)$  in  $a \in \mathbb{N}$ ).

Upoštevajmo to in najdemo vse rešitve za  $a$  in  $b$ . Ni jih veliko. Zahtevano lastnost imata le dva pravokotnika. Obe rešitvi sta bili znani tudi pitagorejcem. Poišči jih!

Enačbo  $2(a+b) = ab$  lahko preoblikujemo tako, da nastopata  $a$  in  $b$  na isti strani enačbe. Tako dobimo enačbo:

$$\frac{2ab}{a+b} = 4$$

Izraz  $2(ab)/(a+b)$  imenujemo *harmonična sredina* količin  $a$  in  $b$ .

Nalogo o pravokotniku lahko zdaj povemo takole. Poišči taki naravni števili  $a$  in  $b$ , da bo njuna harmonična sredina enaka 4.

Postavimo si še splošnejšo nalogo. Poišči vse take trojice naravnih števil  $(x, a, b)$ , da bo  $x$  harmonična sredina števil  $a$  in  $b$ .

(Navodilo: Poglej, kako smo rešili posebni primer za  $x = 4$ , in tako reši naloge za ostale  $x = 1, 2, 3, \dots$ ).

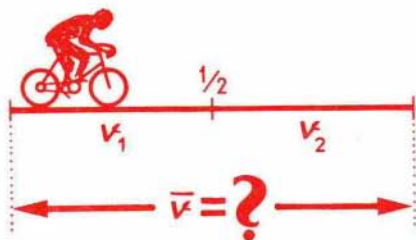
Zgodovina matematike povezuje pojem harmonične sredine z imenom Arhita iz Tarenta (gr. *Ἀρχιμήδης*, IV. stol. pr.n.št.). Poleg Pitagore je bil eden najvidnejših predstavnikov pitagorejske šole. Njemu pripisujejo tudi uvedbo pojma aritmetične sredine  $((a+b)/2)$  in geometrične sredine  $(\sqrt{ab})$  števil  $a$  in  $b$ .

Izraz za harmonično sredino  $x = 2ab/(a+b)$  lahko še nekoliko preoblikujemo:  $x(a+b) = 2ab$  in od tod  $(a+b)/2a = b/x$ , nakar vstavimo namesto  $x$  kar izraz za harmonično sredino in dobimo sorazmerje:

$$(a+b)/2 : a = b : 2ab / (a+b)$$

V dobljenem sorazmerju nastopata kot zunanja člena aritmetična in harmonična sredina. Pitagorejci so to sorazmerje imeli za višek popolnosti.

Razmišljanje o harmonični sredini in številih končajmo z nalogo:



Kolesar prevozi prvo polovico poti enakomerno s hitrostjo 8 m/s, drugo polovico poti pa s hitrostjo 12 m/s. Izračunaj povprečno hitrost vožnje.

**Rešitve:**

1. Pitagora ima 28 učencev. Matematiko raziskuje 14 učencev, narodo 7 učencev, 4 učenci se ukvarjajo s filozofijo. Med njimi so tudi 3 učenke, za katere pa ne vemo, s čim se ukvarjajo. Pri tem smo seveda predpostavili, da se nihče ne ukvarja z več kot enim področjem.

2. Celoštevilski vrednost obsega in celoštevilski vrednost ploščine sta si enaki, ko je  $2ab / (a + b) = 4$ . Brž najdemo prvo rešitev:  $a = b = 4$ . Druga rešitev pa je  $a = 6$  in  $b = 3$ , tretja pa  $a = 3$ ,  $b = 6$ . Ker  $b - 2$  deli  $2b = 2(b - 2) + 4$ , mora  $b - 2$  deliti 4, zato ni drugih rešitev v naravnih številih.

3. Trojico naravnih števil  $(x, a, b)$  poiščemo iz enačbe  $x = 2ab / (a + b)$ , oziroma iz preoblikovane enačbe:  $xa = b(2a - x)$ . Prvo rešitev že poznamo  $a = b = x$ . S sklepanjem najdemo še drugo rešitev. Če je  $x$  liho število, potem je  $2b = x + 1$  in  $a = x(x + 1) / 2$ . Če je  $x$  sodo število, potem je  $2b = x + 2$  in  $a = x(x + 2) / 4$ . Sestavimo zdaj tabelo in v njej preverimo rezultat za  $x = 4$ . Preostali del tabele izpolni sam.

REŠITEV	ŠTEVILO $x$	ŠTEVILO $a$	ŠTEVILO $b$
1. rešitev	liho ali sodo	$a = x$	$b = x$
2. rešitev	liho število	$a = x(x + 1) / 2$	$b = (x + 1) / 2$
	sodo število	$a = x(x + 2) / 4$	$b = (x + 2) / 2$
1. rešitev	1		
2. rešitev	1		
1. rešitev	2		
2. rešitev	2		
1. rešitev	3		
2. rešitev	3		
1. rešitev	4	4	4
2. rešitev	4	6	3
1. rešitev	5		
2. rešitev	5		



Opomba: Če rešiš nalogo splošno, ugotoviš med povprečno hitrostjo ( $v$ ), hitrostjo na prvi polovici poti ( $v_1$ ) ter hitrostjo na drugi polovici poti ( $v_2$ ) zanimivo zvezo. Katero?

4. Nalogo rešimo splošno. Za obe polovici poti velja  $s = v_1 t_1$  in  $s = v_2 t_2$ . Za celotno pot pa  $2s = \bar{v} (t_1 + t_2)$ . Iz prvih dveh enačb izrazimo  $t_1 = s/v_1$  in  $t_2 = s/v_2$  ter ju vstavimo v  $2s = \bar{v} (s/v_1 + s/v_2)$ . Uredimo in pokrajšamo:

$$\bar{v} = 2 v_1 v_2 / (v_1 + v_2)$$

Povprečna hitrost je harmonična sredina hitrosti na obeh polovicah poti. Od tod številčna vrednost za povprečno hitrost 9,6 m/s.

*Danijel Bezek*