Igra domino

Nada Razpet

Domino je ena od družabnih iger, ki jo lahko igramo vsi, ne glede na starost. Nastala naj bi na Kitajskem kot posledica hkratnega metanja dveh igralnih kock, zato na njihovih ploščicah ni praznih polj (ničle) in nimajo delitve polj s črto. Kitajske ploščice domina so navadno izdelane iz črnega kartona. Na njih so praviloma narisane bele pike, razen v posebnih primerih, ko so z rdečo piko označene enice, štirice in polovica od šestih pik, kot kaže slika 1. Na sliki opazimo, da je 11 ploščic podvojenih. Kitajci poznajo dve vrsti ploščic: civilne (angleško civilian suit[1]) in vojaške (military suit). Vojaške ploščice poimenujejo po številu pik na njih, civilne pa imajo posebna imena kot, npr. mož, gos, zemlja, nebesa, tigrova glava.

Pravzaprav ne vemo, ali je evropska verzija nastala na podlagi kitajske ali je nastala samostojno. V Evropi se je igra pojavila v 18. stoletju v Italiji in se potem razširila v Francijo, kjer je postala zelo priljubljena. Francoski vojni ujetniki so jo zanesli v Anglijo, od koder se je kasneje razširila še v Severno in Južno Ameriko. Ploščice so bile izdelane iz ebenovine (spodnji črni del), zgornja plast pa je bila iz slonovine (bela plast). V zgornjo plast so naredili ustrezno število lukenj, zato so na teh ploščicah pike črne. Modernejši domino ima ploščice večinoma izdelane iz temnega lesa (ali plastike), vsaki vrednost pik pa je prirejena druga barva. Za otroke so izdelane tudi ploščice z različnimi slikovnimi oznakami, za učence pa so na njih zapisani »računi« oz. so ploščice prirejene za ponavljanje poštevanke, utrjevanje pretvarjanja merskih enot ali česa drugega.

[1] Angleški izraz suit bi lahko prevedli tudi kot *barvo*, saj pri igralnih kartah isti izraz pomeni križ, pik, srce ali karo.

Največkrat ima domino 28 ploščic (rečejo jim tudi *dvojna šestica*), včasih tudi 55 ploščic (*dvojna devetica*). Vsaka ploščica ima dve kvadratni polji, ki sta ločeni s črto. Obstaja več pravil za igranje. Pri klasičnih igrah je potrebno ploščice postavljati tako, da se stični polji ujemata v številu pik.

Oznake in število ploščic

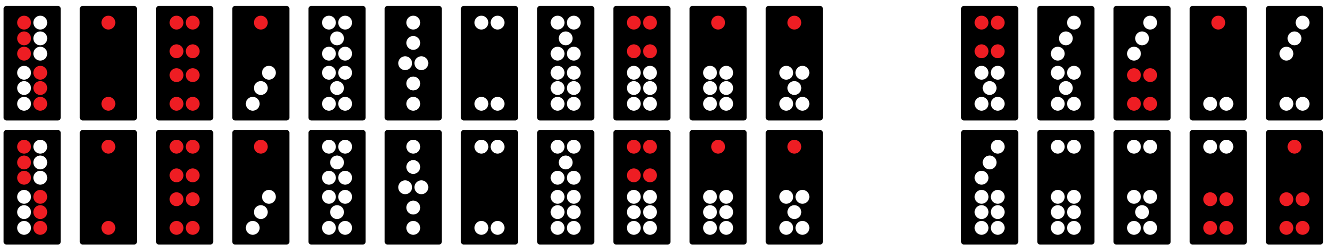
Navadno pri igranju tudi ploščicam rečemo kar *domine*. Ta izraz bomo za ploščice uporabljali tudi mi. Dogovorimo se, da bomo posamezni domino označili tako, da bomo v oklepaju pisali število pik na posameznem polju in ju ločili z vejico: $x = (2,3)$ ali splošno $x = (a,b)$, kar pomeni, da sta na enem polju dve piki (a pik), na drugem pa tri pike (b pik). Pri tem je $(a,b) = (b,a)$ saj ne vemo, katero polje je prvo in katero drugo oz. iz katere smeri gledamo ploščico.

Izračunajmo, koliko je vseh domin v *dvojni šestici*. Domin, ki imajo na poljih enako število pik ($(0,0)$, $(1,1), \dots, (6,6)$), je sedem. Domin, ki imajo na poljih različno število pik, je 21. Kako to vemo? Za prvo polje lahko izberemo od 0 do 6 pik, torej sedem možnosti. Eno od možnosti smo že uporabili, torej za drugo polje ostane še šest možnosti; skupaj 42 možnosti. Ker izbora (a,b) in (b,a) predstavljata isto domino, je vseh domin, ki imajo na poljih različno število pik, pol manj, kot smo prej izračunali, torej jih je 21. Vseh domin je zato $7 + 21 = 28$.

Poiščimo splošni izraz za izračun števila domin N v posameznem kompletu. Označimo z n največje število pik na posameznem polju, torej je lahko na njem $0, 1, \dots, n$ pik. Domin, ki imajo na obeh poljih enako število pik, je $(n+1)$. Domin, ki imajo različno število pik, pa $(n+1)n/2$, torej

$$N = (n+1) + \frac{(n+1)n}{2} = \frac{n^2 + 3n + 2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Koliko je vseh domin v *dvojni sedmici*? 36.



SLIKA 1.
Kitajski domino: na levi je civilna, na desni pa vojaška vrsta domin.

Iz kompleta domin *dvojna šestica* lahko sestavimo tudi komplete *dvojna ničla*, ki ima eno domino, *dvojna enica*, ki ima tri domine, *dvojna dvojka*, ki ima šest domin, *dvojna trojka*, ki ima deset domin, *dvojna štirica* ima 15 domin, *dvojna petica* ima 21 domin in *dvojna šestica*, ki ima 28 domin. Števila 1, 3, 6, 10, 15, 21 in 28 so trikotniška števila. Za zaporedje razlik med takimi števili velja, da tvorijo aritmetično zaporedje z razliko 1. Razlike med dvema sosednjima številoma so v našem primeru po vrsti števila: 2, 3, 4, 5, 6, 7. To pa je aritmetično zaporedje s prvim členom 2 in razliko 1.

Zapišimo domine *dvojne šestice* z dogovorjeno pisavo v tabelo 1.

$(0,0)$	$(0,1)$	$(0,2)$	$(0,3)$	$(0,4)$	$(0,5)$	$(0,6)$
	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(1,6)$
		$(2,2)$	$(2,3)$	$(2,4)$	$(2,5)$	$(2,6)$
			$(3,3)$	$(3,4)$	$(3,5)$	$(3,6)$
				$(4,4)$	$(4,5)$	$(4,6)$
					$(5,5)$	$(5,6)$
						$(6,6)$

TABELA 1.
Zapis domin *dvojne šestice.*

Preštejmo, kolikokrat v tabeli nastopa posamezno število pik. Enica je zapisana osemkrat, dvojka tudi osemkrat itd. Če je torej v kompletu največje možno število pik na posameznem polju n, potem ima $(n+2)$ polj enako število pik. Povedano drugače, $(n+2)$ polj je brez pike, $(n+2)$ polj ima eno piko, $(n+2)$ polj ima dve piki in tako naprej do $(n+2)$ polj ima n pik. Vsota vseh pik v kompletu (ničel nam seveda ni treba upoštevati) je potem

$$S = (n+2)(1+2+3+\ldots+n) = \frac{(n+2)(n+1)n}{2}. \qquad (1)$$

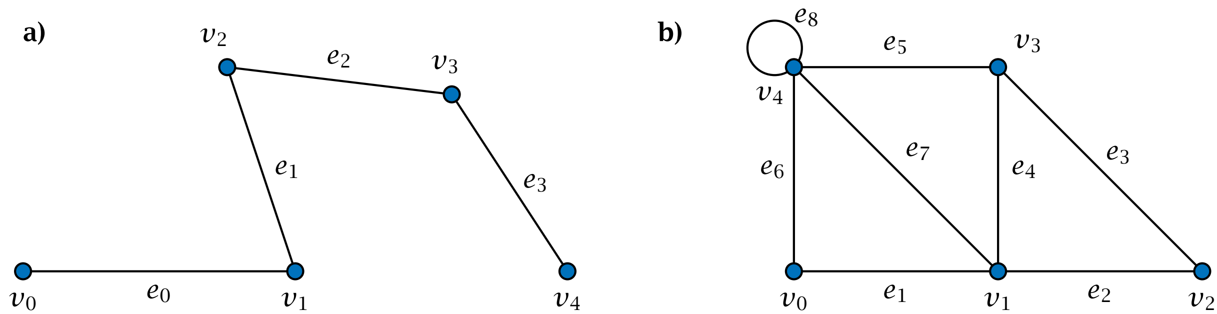
Pri tem smo vsoto aritmetičnega zaporedja $1+2+3+\ldots+n$ izračunali tako, da smo vsoto prvega in zadnjega člena pomnožili s številom členov in delili z dve.

Pri katerih kompletih od *dvojne enice* do *dvojne šestice* lahko vse domine zložimo v eno vrsto in na koliko načinov lahko to naredimo? Pri tem seveda želimo, da se stična polja ujemajo v številu pik. Pomagali si bomo s teorijo grafov.

Osnovno o grafih

Grafi so preproste matematične strukture, s katerimi lahko modeliramo relacije (odnose) med nekimi objekti. Graf G sestavljata množica *vozlišč* (običajno jih označimo z $v_0, v_1, v_2, \ldots$) in množica parov teh vozlišč, ki jim pravimo *povezave* (označimo jih z e_0, $e_1, e_2, \ldots$). Vozlišča grafa tako predstavljajo neke objekte, povezave grafa pa relacije med temi objekti. Vozliščema, ki ju neka povezava povezuje, pravimo *krajišči* te povezave. Grafe lahko ponazorimo s slikami (glej sliko 2), na katerih vozlišča grafa narišemo kot točke v ravnini, povezave grafa pa kot črte, ki povezujejo krajišča pripadajočih povezav.

V nadaljevanju bomo povezavo med vozliščema v_i in v_k zapisali kar $v_i v_k$. Stopnja vozlišča v (označimo jo z $\deg(v)$) je število povezav, ki vsebujejo to vozlišče. Povezavi, ki ima obe krajišči enaki, rečemo zanka. Zanka prispeva 2 k stopnji vozlišča.



SLIKA 2.
a) Graf brez zank. Stopnje vozlišč so: $\deg(v_0) = \deg(v_4) = 1$, $\deg(v_1) = \deg(v_2) = \deg(v_3) = 2$.
b) Graf z zanko. Stopnje vozlišč so: $\deg(v_0) = \deg(v_2) = 2$, $\deg(v_1) = 4$, $\deg(v_3) = 3$, $\deg(v_4) = 5$.

Sprehod v grafu je tako zaporedje vozlišč $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k$, da v grafu obstaja povezava $v_i v_{i+1}$ za $0 \leq i < k$. Povedano drugače, drugo krajišče povezave je vedno prvo krajišče naslednje povezave. Sprehod, pri katerem se zadnje vozlišče v sprehodu ujema s prvim, je *obhod*. Sprehod (obhod), v katerem se sicer vozlišča smejo ponavljati, povezave pa ne, se imenuje enostavni sprehod (obhod). Sprehod, na katerem so vsa vozlišča različna, je *pot*.

Koliko sprehodov ima graf? Naj ima graf G le eno povezavo. Krajišči te povezave označimo z v_1 in v_2. Zapišimo nekaj sprehodov v_1v_2, $v_1v_2v_1$, $v_1v_2v_1v_2$, ... V zapisanih sprehodih smo povezavo prehodili enkrat, dvakrat, trikrat, ... Graf ima nešteto sprehodov. Ugotovitev še zapišimo: *Grafi z vsaj eno povezavo imajo neskončno sprehodov.*

V grafu na sliki 2a velja, da za poljubno izbrani vozlišči v_i in v_j obstaja natanko ena pot od v_i do v_j. Kaj pa graf na sliki 2b? Zapišimo enega od sprehodov $v_0v_1v_2v_3v_1v_4v_4v_3v_1v_4v_0$, zapisano s povezavami: e_1, e_2, e_3, e_4, e_7, e_8, e_5, e_4, e_7, e_6. Ta sprehod ni pot (nekatera vozlišča se ponavljajo) in ni enostaven sprehod, ker gremo dvakrat po povezavah e_4 in e_7. Je obhod.

Že v preteklosti so grafe uporabljali za reševanje različnih problemov. Eden izmed njih je bil problem prehoda preko sedmih königsberških mostov. Meščane je zanimalo, ali je mogoče priti iz začetne točke nazaj v začetni točko tako, da se vsak most prečka natanko enkrat. Več o tem lahko preberete v [2]. Euler je ta problem rešil s pomočjo grafov. Da bo nadaljnje izvajanje lažje, zapišimo nekaj definicij in trditev.

Eulerjev obhod grafa G je enostaven obhod, ki vsebuje vse povezave grafa G. *Eulerjev sprehod* grafa G je enostaven sprehod, ki vsebuje vse povezave grafa G (več o tem najdete v [4]). Če ima graf Eulerjev sprehod (ali Eulerjev obhod), potem lahko graf G narišemo z eno potezo, kar pomeni, da svinčnika ne dvigamo s papirja in gremo po vseh povezavah le enkrat.

Trditev. Graf G ima Eulerjev sprehod natanko takrat, ko ima kvečjemu dve vozlišči lihe stopnje.

Z eno potezo torej lahko narišemo vse grafe, katerih vozlišča so, ali vsa sode stopnje ali pa sta le dve vozlišči lihe stopnje.

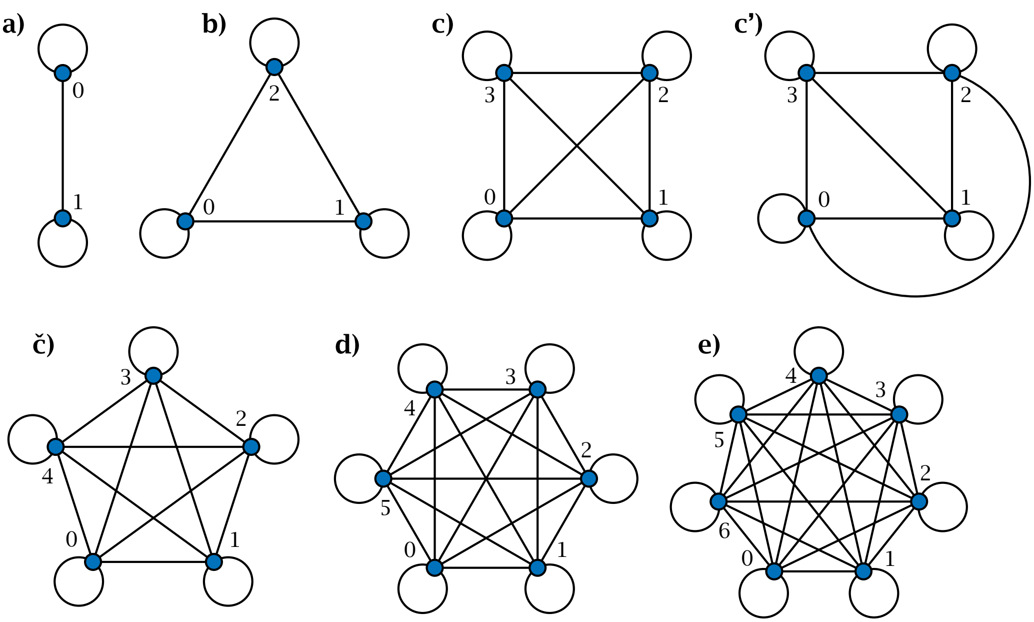
Trditev. Graf G ima Eulerjev obhod, če so vsa vozlišča sode stopnje.

Ker je imel graf, s katerim je Euler ponazoril sedem königsberških mostov štiri vozlišča lihe stopnje, je ugotovil, da mostov ni mogoče prehoditi tako, da bi šli preko vsakega le enkrat.

Domine in grafi

Komplet domin lahko predstavimo z grafom, ki ima za vsako možno število pik na polju domine po eno vozlišče, ki ga označimo kar s številom pik. V tem grafu vsaki domini ustreza po ena povezava in sicer domini (a, b) pripada povezava, ki povezuje vozlišči a in b (glej sliko 3).

Da bi ugotovili, ali lahko domine postavimo v eno samo vrsto tako, da se stična polja ujemajo, moramo za vsak komplet domin narisati ustrezni graf in ugotoviti, ali so vozlišča lihe ali sode stopnje. Pri neka-



SLIKA 3.
Grafi kompleta domin od dvojne enice (a) do dvojne šestice (e). Zanka predstavlja domino, ki ima na obeh poljih enako število pik (to so domine z dvema ničlama, dvema enicama, ...). Graf *dvojne trojke* je narisan na dva načina (c in c').

terih grafih povezav med vozlišči ne moremo risati z daljicami tako, da se med seboj ne sekajo. Ta presečišča ne predstavljajo novih vozlišč grafa. Imenujemo jih *navidezna vozlišča*. Nekaterim navideznim vozliščem se lahko izognemo, če vozlišča grafa po ravnini razporedimo drugače ali pa če povezave rišemo tudi s krivimi črtami, kot je to prikazano na sliki 3c'.

Ugotovitev. Domine bomo lahko zložili v eno vrsto, če ima ustrezni graf Eulerjev sprehod. Če pa želimo ugotoviti, na koliko načinov jih lahko zložimo v vrsto, moramo ugotoviti, koliko različnih Eulerjevih sprehodov ima graf. Domine lahko postavimo v obroč le takrat, ko ima ustrezni graf Eulerjev obhod.

Zlaganje domin v vrstice

Najenostavnejši komplet je seveda ena sama domina $(0,0)$, ampak o njej ne moremo povedati nič zanimivega.

Dvojna enica ima tri domine. Graf je na sliki 3a. Imamo domine: $(0,0)$, $(0,1)$ in $(1,1)$. Vozlišči sta lihe stopnje, torej lahko te domine postavimo v eno vrsto. Na koliko načinov? Sprehod lahko začnemo v vozlišču 0 ali pa v 1, torej **dva** načina. Vrsta se glasi: $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$ ali v obratnem vrstnem redu.

Dvojna dvojka ima šest domin (slika 3b). Vsa vozlišča so sode stopnje. Graf ima Eulerjev obhod. Skrajni dve domini lahko povežemo in dobimo obroč: $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$, $(1,2)$, $(2,2)$, $(2,0)$. Obroč lahko pretrgamo na šestih mestih (imamo šest domin), torej lahko v vrsto zložimo domine na 12 načinov (vsakega od šestih načinov tudi v obratnem vrstnem redu). To pa pomeni, da ima graf 12 Eulerjevih sprehodov.

Dvojna trojka ima deset domin (slika 3c). Graf ima štiri vozlišča lihe stopnje. Graf nima Eulerjevega sprehoda in zato vseh domin ne moremo zložiti v eno vrsto. Lahko pa sestavimo dve vrsti. Poskusite!

Dvojna štirica ima 15 domin. Vsa vozlišča grafa 3č so sode stopnje, torej lahko zložimo domine v eno vrsto. Ugotovili so [1], da je število načinov, kako te domine postavimo v vrsto enako 126.720 (vključen je tudi obratni vrstni red). Izračun načinov ni preprost. Graf ima Eulerjev obhod in iz domin lahko sestavimo obroč.

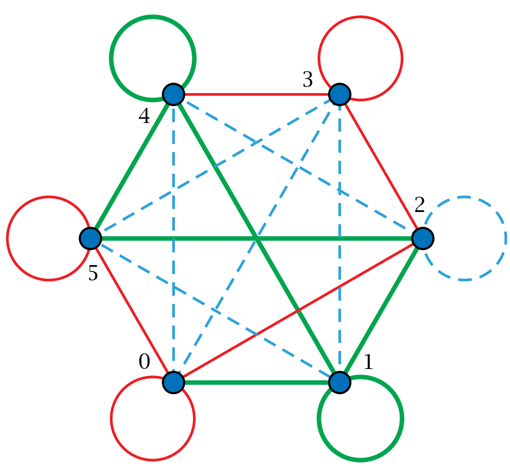
Dvojna petica (slika 3d) ima 21 domin. Vsa vozlišča grafa so lihe stopnje, graf nima Eulerjevega sprehoda, teh domin ne moremo zložiti v eno vrsto. Lahko pa jih razvrstimo v tri vrste.

Dvojna šestica (slika 3e) ima 28 domin. Vsa vozlišča grafa so sode stopnje. Graf ima Eulerjev sprehod. Te domine lahko zložimo v eno vrsto. Obstaja 7.959.229.931.520 načinov, kako to naredimo [1]. Torej je možnosti za klasično igro zares ogromno.

Na najmanj koliko vrst pa lahko zložimo domine v primeru, ko ustrezen graf nima Eulerjevega sprehoda? Grafa G, ki ima k parov vozlišč lihe stopnje, ne moremo pokriti z manj kot k takimi enostavnimi sprehodi, ki nimajo skupnih povezav. Če pa je G povezan, lahko najdemo k enostavnih sprehodov brez skupnih povezav, ki pokrijejo G.

Dvojna petica ima tri pare vozlišč lihe stopnje, torej lahko graf pokrijemo z najmanj tremi sprehodi, oz. domine razporedimo v najmanj tri vrstice. Ena od možnosti takega pokritja je na sliki 4. Sprehode smo označili z rdečo, zeleno in modro barvo. Iz označenih sprehodov preberemo zaporedje domin v posamezni vrstici:

- zelen:
  $(0,1)$, $(1,1)$, $(1,2)$, $(2,5)$, $(5,4)$, $(4,4)$, $(4,1)$;
- rdeč:
  $(5,5)$, $(5,0)$, $(0,0)$, $(0,2)$, $(2,3)$, $(3,3)$, $(3,4)$;
- moder:
  $(2,2)$, $(2,4)$, $(4,0)$, $(0,3)$, $(3,5)$, $(5,1)$, $(1,3)$.



SLIKA 4.
Graf *dvojne petice* je pokrit s tremi sprehodi.

Reševanje problemov

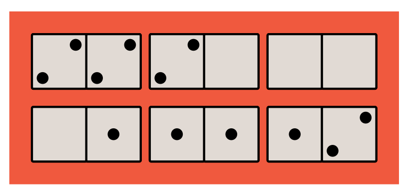
Posvetimo se še problemskim igram in jih povežimo z matematiko. Že v 18. stoletju sta se v Franciji pojavili dve vrsti problemskih iger (glej [3]). Po prvi je bilo potrebno domine sestavljati v predpisano obliko (vzorec) in se pri tem seveda držati pravila, da se stična polja ujemajo v številu pik, pri drugi vrsti problemov pa je bilo potrebno zlagati domine v vrste tako, da so imeli vse vrste enake vsote (produkte, razlike itd.) pik, pri čemer ni nujno ujemanje stičnih polj.

Iz kompleta *dvojna dvojka* sestavimo dve vrstici, tako da bo ustrezala pravilu stičnih polj in bo vsota pik v obeh vrstah enaka. Vseh domin *dvojne dvojke* je šest. Zapišimo jih: $x_1 = (0,0)$, $x_2 = (0,1)$, $x_3 = (0,2)$, $x_4 = (1,1)$, $x_5 = (1,2)$ in $x_6 = (2,2)$.

Najprej iz izraza (1) izračunamo vsoto pik v kompletu:

- $S = \dfrac{4 \cdot 3 \cdot 2}{2} = 12.$

Vsota pik v vsaki vrstici mora torej biti 6. Če za prvo domino izberemo $(2,2)$ in morajo biti v vrsti tri domine, imamo za izbor naslednjih dveh domin vedno le po eno možnost, da zadovoljimo pravilu stičnih polj in da je vsota pik v vrstici 6, to sta domini $(2,0)$ ter $(0,0)$. Potem za drugo vrsto pravilno postavimo še ostale tri domine (slika 5).



SLIKA 5.
Vsota pik v vrsticah je 6.

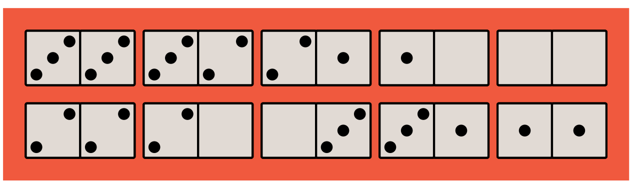
Domine iz kompleta *dvojna trojka* ima vsoto vseh pik 30. Vseh domin je 10. Naredimo dve vrstici po pet domin z vsoto pik 15.

Najprej izberimo domino $(3,3)$. Za izbor naslednje imamo tri možnosti $(3,2)$, $(3,1)$ in $(3,0)$. Če izberemo domino $(3,2)$, je vsota pik na obeh dominah 11 in potrebujemo še štiri pike na ostalih treh dominah. Naslednja domina mora imeti eno polje z dvema pikama. Zapišimo možnosti v tabelo 2.

					Vsota
$(3,3)$	$(3,2)$	$(2,0)$	$(0,0)$	$(0,1)$	14
$(3,3)$	$(3,2)$	$(2,0)$	$(0,0)$	$(0,3)$	16
$(3,3)$	$(3,2)$	$(2,0)$	$(0,1)$	$(1,1)$	16
$(3,3)$	$(3,2)$	$(2,1)$	$(1,0)$	$(0,0)$	15

TABELA 2.
Razporejanje domin *dvojne trojke* v dve vrstici. Začetni domini sta $(3,3)$ in $(3,2)$.

Rešitev je potem: $(3,3)$, $(3,2)$, $(2,1)$, $(1,0)$, $(0,0)$ in druga vrsta $(2,2)$, $(2,0)$, $(0,3)$, $(3,1)$, $(1,1)$ (slika 6). Seveda lahko pet domin v vsaki vrstici razporedimo tudi drugače. Poskusite!



SLIKA 6.
Razporejanje domin *dvojne trojke* v dve vrstici. Prva vrsta se začne z dominama $(3,3)$ in $(3,2)$; vsota pik v vsaki vrsti je 15.

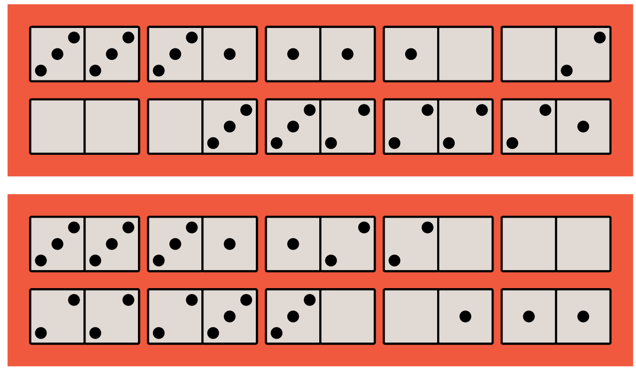
Kaj pa, če se vrsta začne z dominama $(3,3)$ in $(3,1)$? Pomagamo si s tabelo 3:

					Vsota
$(3,3)$	$(3,1)$	$(1,0)$	$(0,0)$	$(0,3)$	14
$(3,3)$	$(3,1)$	$(1,0)$	$(0,2)$	$(2,1)$	16
$(3,3)$	$(3,1)$	$(1,1)$	$(1,0)$	$(0,2)$	15
$(3,3)$	$(3,1)$	$(1,2)$	$(2,0)$	$(0,0)$	15

TABELA 3.
Razporejanje domin *dvojne trojke* v dve vrstici. Začetni domini sta $(3,3)$ in $(3,1)$.

Imamo torej dve možnosti (slika 7):

- prva vrsta: $(3,3)$, $(3,1)$, $(1,1)$, $(1,0)$, $(0,2)$;
  druga vrsta: $(0,0)$, $(0,3)$, $(3,2)$, $(2,2)$, $(2,1)$;
- prva vrsta: $(3,3)$, $(3,1)$, $(1,2)$, $(2,0)$, $(0,0)$;
  druga vrsta: $(2,2)$, $(2,3)$, $(3,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$.

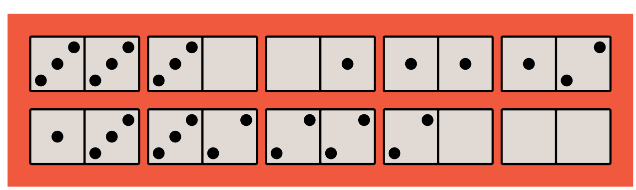


SLIKA 7.
Razporejanje domin *dvojne trojke* v dve vrstici. Prva vrsta se začne z dominama $(3,3)$ in $(3,1)$; vsota pik v vsaki vrsti je 15.

Kaj pa, če se vrsta začne z dominama $(3,3)$ in $(3,0)$? Možnosti so zapisane v tabeli 4.

					Vsota
$(3,3)$	$(3,0)$	$(0,1)$	$(1,1)$	$(1,2)$	15
$(3,3)$	$(3,0)$	$(0,1)$	$(1,2)$	$(2,0)$	15
$(3,3)$	$(3,0)$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,1)$	12
$(3,3)$	$(3,0)$	$(0,0)$	$(0,2)$	$(2,2)$	15

TABELA 4.
Dvojna trojka: začetni domini sta $(3,3)$ in $(3,0)$.



SLIKA 8.
Dvojna trojka: ena od možnosti za pričetek prve vrste z dominama $(3,3)$ in $(3,0)$.

Komplet *dvojna štirica* ima 15 domin in vsoto pik 60. Lahko naredimo tri vrstice z vsotami pik 20.

- $(4,4),(4,0),(0,1),(1,1),(1,4)$
  $(2,2),(2,4),(4,3),(3,0),(0,0)$
  $(0,2),(2,3),(3,3),(3,1),(1,2)$

Ali lahko naredite pet vrstic z vsotami pik 12? Seveda:

- $(4,4),(4,0),(0,0)$
  $(4,3),(3,0),(0,2)$
  $(3,3),(3,1),(1,1)$
  $(3,2),(2,2),(2,1)$
  $(2,4),(4,1),(1,0)$

Komplet *dvojna petica* ima 21 domin in vsoto pik 105. Lahko naredimo zopet tri vrstice z vsoto pik 35: $(5,5)$, $(5,0)$, $(0,0)$, $(0,2)$, $(2,3)$, $(3,3)$, $(3,4)$, druga $(1,4)$, $(4,4)$, $(4,5)$, $(5,2)$, $(2,1)$, $(1,1)$, $(1,0)$, tretja $(2,2)$, $(2,4)$, $(4,0)$, $(0,3)$, $(3,1)$, $(1,5)$, $(5,3)$. Ali lahko naredite sedem vrstic po tri domine z vsotami pik 15? Poskusite.

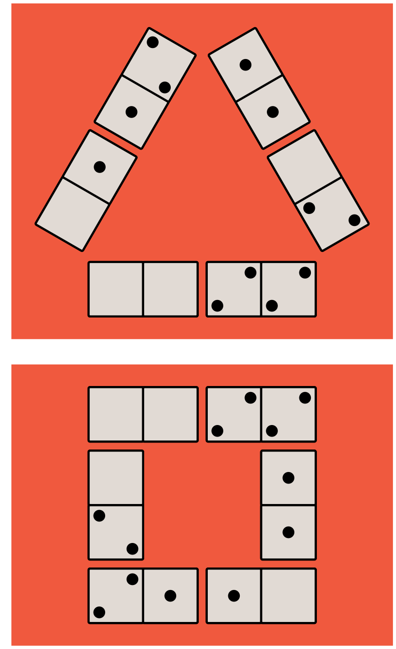
Naredite še dve vrstici iz kompleta *dvojna šestica*, ki ima 28 domin in vsoto pik 168. Poskusite še z več kot dvema vrsticama.

Trikotniki in štirikotniki

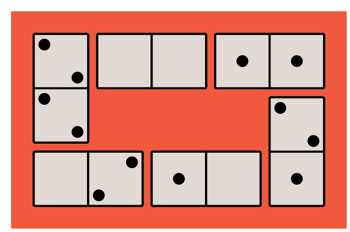
Dvojna dvojka

Iz kompleta *dvojna dvojka* sestavimo enakostranični trikotnik in kvadrat tako, da bo vsota pik po stranicah enaka. Pri tem se ni potrebno držati pravila, da se stični polji ujemata v številu pik.

- Trikotnik: vsota pik po stranicah je štiri (slika 9 zgoraj).
- Kvadrat: vsota pik po stranicah je štiri (slika 9 spodaj).
- Pravokotnik velikosti 5×3: vsota pik po stranicah je štiri (pike na poljih se ne ujemajo, slika 10).



SLIKA 9.
Enakostranični trikotnik in kvadrat iz domin *dvojne dvojke*. Vsota pik po stranicah je 4.

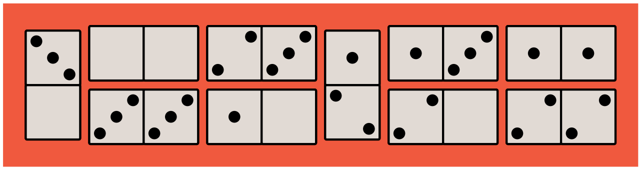


SLIKA 10.
Pravokotnik velikosti 5×3 iz domin *dvojne dvojke*. Vsota pik po stranicah je 4.

Dodatne naloge

Iz kompleta *dvojna trojka* ne moremo narediti enakostraničnega trikotnika, ker ima deset domin. Lahko pa jih postavimo v **vrsto** z dolžino deset polj. Pri tem naj bodo, ali vse domine postavljene navpično ali pa izmenično po dve navpično in po dve vodoravno. Vsota pik na zgornjih poljih mora biti enaka vsoti pik na spodnjih poljih. Tudi vsote pik po stolpcih naj bodo med seboj enake. Ena od možnih rešitev je na sliki 11.

Iz kompleta sestavite **pravokotnik** 5×4 tako, da bo vsota pik po stolpcih (z višino 4 polj) enaka, ni potrebno ujemanje polj.



SLIKA 11.
Vsota pik v zgornji vrstici je enaka vsoti pik v spodnji vrstici.

Iz desetih domin sestavite **dva pravokotnika** (v sredini je odprtina) tako, da bo vsota pik po stranicah enaka.

Dvojna štirica

Iz 15-ih domin sestavite **enakostranični trikotnik** tako, da se bodo stična polja po stranicah ujemala v številu pik.

Iz 15-ih domin sestavite **tri pravokotnike** (v sredini je odprtina) tako, da se bodo stična polja ujemala v številu pik in bo vsota pik po stranicah enaka.

Dvojna petica

Iz 21-ih domin sestavite **tri pravokotnike** tako, da bo vsota pik po stranicah vedno enaka (ni potrebno ujemanje).

Dvojna šestica

Iz 28-ih domin sestavite **sedem kvadratov** tako, da bo vsota pik po stranicah prvega kvadrata enaka 3, drugega 6, tretjega 8, četrtega in petega 9, šestega 10 in sedmega 16.

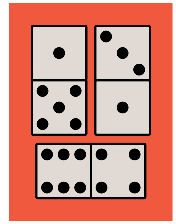
Sestavite **tri pravokotnike** tako, da bo vsota pik po posameznih stranicah pravokotnika vedno 12.

Računske operacije z dominami

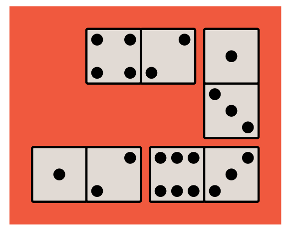
S sestavljanjem domin (kot kaže spodnji primer na sliki 12) zapišite račune seštevanja in odštevanja. Pri tem naj bodo vse domine postavljene vodoravno ali pa dve navpično in ena vodoravno.

Kaj pa množenje? Primer je na sliki 13.

Zapisali smo nekaj možnosti igranja z dominami, ki jih lahko povežemo z matematiko. Poiščite še sami nekaj zanimivih primerov in igrajte igro s spremenjenimi pravili.



SLIKA 12.
Seštevanje: $13 + 51 = 64$



SLIKA 13.
Množenje: $421 \cdot 3 = 1263$

Literatura

[1] M. Gardner, *Mathematical Circus*, Dominoes, Penguin books, 1979, Harmondsworth, 137–145.

[2] M. Vencelj, *Mala šola topologije, 4. del*, Presek **25** (1997/984), 4, str. 222, DMFA, Ljubljana.

[3] J. Botermans, P. van Delft in E. Oker, *Miselne igre vsega sveta*, Tehniška založba Slovenije, Ljubljana, 1992, 57–64.

[4] M. Juvan in P. Potočnik, *Teorija grafov in kombinatorika*, DMFA – založništvo, 2007, Ljubljana, 1–3, 27.

×××