



Geometrijsko mesto točk s programom dinamične geometrije

Finding the geometric locus of points using a dynamic geometry programme

Σ Povzetek

V prispevku je predstavljen primer uporabe programa za dinamično geometrijo pri delu z nadarjenimi učenci. Ti učenci so s programom GeoGebra raziskovali geometrijsko mesto točk. Opisani primeri uporabe so namenjeni delu in raziskovanju z učenci v osnovni šoli. Informacijsko-komunikacijsko tehnologijo (IKT) sem izkoristila kot motivacijsko sredstvo za učence. Vemo, da IKT vedno bolj prodira na številna področja, tudi v izobraževanje. Učitelj naj bi bil tisti, ki zna presoditi o smiselni uporabi IKT. Poleg pravilne presoje o uporabi mora učitelj IKT v pouk tudi smiselno vpeljati. V članku zato navajam tudi razloge za uporabo IKT pri pouku matematike. Iz učnega načrta sem izpisala sklope, pri katerih naj bi bila uporaba IKT smiselna. Kot sem že omenila, so z GeoGebro raziskovali nadarjeni učenci, zato sem nekaj besed namenila tudi njim. Predvsem sem se osredotočila na matematično nadarjene učence..

Ključne besede: računalnik, dinamična geometrija, nadarjeni učenci, geometrijsko mesto točk, informacijsko-komunikacijska tehnologija.

Mojca Pev

Osnovna šola
Draga Bajca Vipava

Σ Abstract

The paper presents an example of how to use the programme for dynamic geometry at work with gifted students. These students examined the geometric locus of points with the GeoGebra program. The cases of usage described are designed for work and re-

search with pupils in elementary school. As a motivational tool for pupils, I took Information and communication technology (ICT). We know that ICT is increasingly penetrating many areas, including education. The teacher should be the one to judge what constitutes appropriate use of ICT. In addition to a proper assessment of what constitutes the appropriate use of ICT, the teacher must be also able to reasonably incorporate the ICT into instructions. This is why I also give the reasons why we must use ICT in teaching mathematics in this article. I've also outlined the topics from the curriculum in treating of which the use of ICT would be sensible. I've already mentioned the explorations performed with GeoGebra by gifted pupils, who are the also focus of my article, which is why I conclude by dedicating a few words to them.

Key words: *computer, dynamic geometry, gifted pupils, geometric locus of points, Information and communications technology*

α Uvod

Živimo v času, v katerem je še kako pomembno, da posameznik pozna in pravilno uporablja določeno programsko opremo. Brez nje si resnično ne moremo več zamisliti vsakdana. Tehnologija nas spremlja tako rekoč povsod (v trgovini, na bankomatu, pri telefoniranju ...) in ravno zaradi potrebe po normalnem funkcioniranju v družbi in opravljanju določenega poklica je človek hote ali nehote prisiljen uporabljati IKT.

V prispevku bom opisala raziskovalno delo z nadarjenimi učenci s pomočjo IKT. V skupini je bilo 10 nadarjenih devetošolcev. Učenci so si dejavnosti izbirali glede na njihova zanimanja. Torej v skupini niso bili samo učenci, nadarjeni izključno le na matematičnem področju. Prav prepletanje raziskovanja z omenjeno tehnologijo je po mojem mnenju ključna sestavina dela z nadarjenimi učenci. Uporabo IKT spodbuja tudi prenovljeni Učni načrt za matematiko (2011). V njem je navedeno, da naj pouk matematike učence usposobi za uporabo tehnologije.

Učitelj lahko IKT uporabi kot pripomoček pri predstavi geometrijskih pojmov ter kot demonstracijsko in raziskovalno orodje. Ker Učni načrt za matematiko (2011) pri določenih vsebinah predvideva uporabo sodobne tehnologije, učitelj nima več

možnosti izbire. V prispevku se bom osredotočila na uporabo programa dinamične geometrije pri matematiki.

Za tretje vzgojno-izobraževalno obdobje navajam sklope, pri katerih lahko uporabimo program dinamične geometrije.

Sklopi (Učni načrt za matematiko v osnovni šoli, 2011):

- geometrijski pojmi,
- transformacije,
- funkcija,
- matematični problemi in problemi z življenjskimi situacijami,
- izkušnje s slučajnimi dogodki.

Poleg naštetega lahko učitelj uporabi program dinamične geometrije tudi pri drugih vsebinah, kjer je dinamičnost nekoliko manj izražena (npr. demonstracija seštevanja in odštevanja celih števil).

Mislím, da je uporaba IKT smiselna takrat, ko pri učencih dosežemo boljše rezultate, vizualiziramo zakonitosti in izreke ter motiviramo učence za nadaljnje delo. Zelo si želim, da bi čim več učiteljev izkusilo smiselnost uporabe IKT in jo v pouk tudi pravilno vpeljalo.

Skoraj zagotovo sodi GeoGebra med najpogostejše uporabljane programe pri pouku matematike. Uvrščamo jo med programe za dinamično geometrijo. Ti nam omogočajo konstrukcijo geometrijskih elementov, manipulacija z njimi pa jim doda dinamični pridih. Manipulacijo dosežemo:

- s premikanjem elementov po risalni površini,
- s spreminjanjem dolžin daljic, obsegov,
- preverimo vsoto notranjih kotov v trikotniku,
- preverimo uporabnost Pitagorovega izreka v različnih trikotnikih in
- raziskujemo geometrijska mesta točk.

Če poučujemo samo s kredo in tablo (statistično poučevanje), omenjene dinamičnosti ne moremo doseči. Manipulacijo objektov in dinamičnost nam omogoča prav uporaba IKT. Uporabnost programa GeoGebra vidim prav v možnosti spreminjanja in preoblikovanja konstrukcij. Pri pouku velikokrat postavim vprašanja, kot so:

- Kaj se zgodi, če pri konstrukciji spremenim določen parameter?
- Kolikokrat se spremeni obseg kvadrata, če stranico n -krat povečamo? Kolikokrat se spremeni ploščina?

Zanimivo je ugotavljati, ali se vsota notranjih kotov spremeni, če spremenimo obliko trikotnika.

Med pomembnejše stvari, ki jih lahko počnemo s programom dinamične geometrije, je določanje geometrijskega mesta točk. To je množica točk, ki zadoščajo nekemu pogoju. Tudi sama sem se odločila, da bom z nadarjenimi učenci raziskovala geometrijsko mesto točk. Pri omenjenih nalogah ne uporabljamo matematičnih dokazov, temveč le vizualne prikaze.

β Nadarjeni učenci in matematika

Nadarjeni učenci so bili prvič opredeljeni v 11. členu Zakona o osnovni šoli (2006). Oktobra 2011 je prišlo do sprememb Zakona o osnovni šoli (2006). V Zakonu o osnovni šoli (2011) nadarjeni učenci ne sodijo več med učence s posebnimi potrebami. Opredeljeni so kot učenci, ki izkazujejo nadpovprečne sposobnosti in izjemne dosežke na posameznih učnih ali drugih področjih. Šola jim mora prilagoditi vsebine, metode in oblike dela. Sem mnenja, da je nova utemeljitev primernejša, saj nadarjenih otrok ne more-

mo obravnavati enako kot otroke z učnimi težavami.

Nagel (1987) navaja značilnosti nadarjenih učencev. Povzela sem le tiste značilnosti, ki veljajo za matematično nadarjene učence.

Značilnosti matematično nadarjenih učencev lahko razdelimo po naslednjih področjih:

- učne značilnosti: hitro spoznajo načela, na katerih temeljijo stvari, mislijo jasno in precizno, kritično presojajo podatke in dokaze, hitro si zapomnijo dejstva, iščejo skupne značilnosti in razlike, hitro analizirajo različne vsebine in probleme;
- motivacija: prizadevajo si, da bi nalogo vedno rešili, radi delajo neodvisno, določenim problemom se povsem predajo, ob rutinskih nalogah se dolgočasijo, če jih naloga zanima, ne potrebujejo nobene zunanje motivacije;
- ustvarjalnost: veliko sprašujejo o različnih stvareh, svoje mnenje jasno izrazijo, pri reševanju problemov tudi tvegajo, imajo veliko idej in problemskih rešitev.

(Nagel, 1987)

Tako kot vsako nadarjenost je treba tudi matematično nadarjenost negovati in razvijati. Učitelj naj bi matematično nadarjene učence prepoznal že v otroštvu. Poleg že prej naštetih lastnosti matematično nadarjeni učenci radi merijo, opazujejo ter povezujejo določene pojave, urejajo po velikosti ter grupirajo.

Koncept odkrivanja in dela z nadarjenimi učenci v devetletni osnovni (1999) in Učni načrt za matematiko (2011) sta edina dokumenta na ravni države, ki opredeljujeta nadarjene učence. V Učnem načrtu za matematiko (2011) je pod točko 5. 2 opredeljeno,

da moramo učitelji prilagoditi pouk glede na zmožnost in druge posebnosti učenca. Prilagoditve izvajamo v vseh fazah vzgojno-izobraževalnega procesa. Posebno pozornost namenimo specifičnim skupinam, med katere spadajo tudi nadarjeni učenci. Zato mora vsak učitelj obstoječi program spremeniti v tolikšni meri, da bo ustrezal potrebam nadarjenega učenca.

Na šoli delo z nadarjenimi učenci poteka v obliki obogatitvenega programa. Učitelji v okviru aktiva pripravijo vsebine za delavnice. Nadarjeni učenci izbirajo delavnice glede na svoje želje in potrebe. Aktiv matematike izvaja delavnico Interaktivna matematike, kjer se učenci podrobno srečajo s programom GeoGebra. Pri delu z nadarjenimi učenci se trudimo uporabljati nekoliko drugačne oblike in metode dela kot pri rednem pouku. Stremimo k samostojnemu in raziskovalnemu delu. Učitelj je mentor, ki učencem poda uvodno znanje, jih med delom usmerja in jim pomaga, ko se jim pri delu zatakne. Delavnice, ki jih izvajamo, potekajo po pouku 6. in 7. šolsko uro. Števila ur nimamo vnaprej določenega. Največkrat je število ur odvisno od zanimanja in interesa vsakega nadarjenega učenca.

Zakaj geogebra

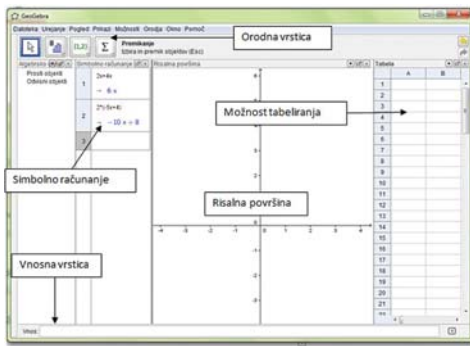
Za delo z dinamično geometrijo imamo na razpolago precej programov (Ravnilo in šestilo, Cabri 3D, Cabri II plus, The Geometer's Sketchpad, GeoGebra ...). Nekateri med njimi so zelo zmogljivi programi, a žal plačljivi. Sama sem se odločila za GeoGebro.

Navajam nekaj razlogov:

- prostodostopen in odprtokodni program,
- širok razpon uporabnosti (od osnovne šole do univerze),

- je v slovenskem jeziku,
- z njim lahko rešujemo geometrijske probleme, rišemo grafe, simbolno računamo, tabeliramo, izdelujemo dinamične delovne liste,
- konstrukcijo lahko prikažemo po korakih,
- možnost simbolnega računanja (od vključno verzije 4.2 naprej),
- enostavna uporaba.

Prav enostavna uporaba ter podpora dinamični geometriji (sledenje točk, možnost animacije geometrijskega elementa in uporaba drsnika) so trije ključni dejavniki, ki so me prepričali v pravilnost izbire.



[Slika 1] Okno programa GeoGebra 4.2

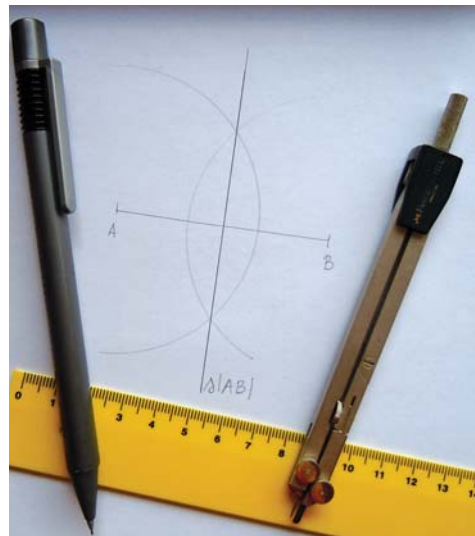
Opis delavnic z nadarjenimi učenci

GeoGebro največkrat uporabljam pri rednem pouku za demonstracijo oziroma prikaz določenih zakonitosti. Ker za raziskovanje potrebujemo več časa in manjšo skupino učencev, ostale možnosti GeoGebre odkrivamo v delavnicah z nadarjenimi učenci.

V okviru obogatitvenega programa učenecm vsako leto ponudimo delavnico Interaktivna matematika, kjer raziskujemo dinamičnost programa. Zadnja delavnica je

bila na temo geometrijskega mesta točk. Z nadarjenimi učenci se dobimo nekajkrat na leto. Delo poteka v računalniški učilnici. Že prej sem omenila nekaj prednosti dinamičnega poučevanja pred statičnim poučevanjem. Učenec pri prvem primeru postane raziskovalec. Za doseganje njegovih rezultatov je odgovoren sam.

Delavnice sem izvedla z nadarjenimi devetošolci. Želela sem, da imajo učenci dovolj predznanja, potrebnega za raziskovanje. Uvodno srečanje je bilo namenjeno spoznavanju programa. Naučili smo se uporabljati orodja v orodni vrstici, konstruirati osnovne geometrijske pojme, zrcaliti geometrijske objekte, vstavljati besedilo, skrivati objekte ipd. Pravilnost konstrukcije smo preverili s premikanjem geometrijskih objektov (npr. lege točke). Če konstrukcija po premikanju ostane nespremenjena, je le-ta pravilna (npr. trikotnik je tudi po premikanju oglišč še vedno trikotnik in ne razpade na dalji-





[Slika 2] Konstrukcija simetrale daljice z geometrijskim orodjem

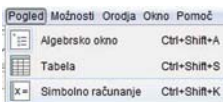
ce). Razložila sem razliko med brisanjem in skrivanjem objektov. Pri brisanju objekta se izbrišejo tudi objekti, ki so odvisni od izbranega objekta. Na drugem srečanju smo spoznali lastnost geometrijskih objektov, vnašali besedilo, uporabljali drsnike in raziskovali ostale možnosti programa. Kmalu so učenci ugotovili, da je pri reševanju matematičnih nalog nujno poznati določene matematične vsebine. Zato sem mnenja, da je GeoGebra le eden od pripomočkov pri doseganju zastavljenega cilja.



Za boljše razumevanje pojma statičnost in dinamičnost smo simetralo daljice najprej konstruirali s šestilom in ravnilom.


Konstrukcija simetrale daljice z geogebro

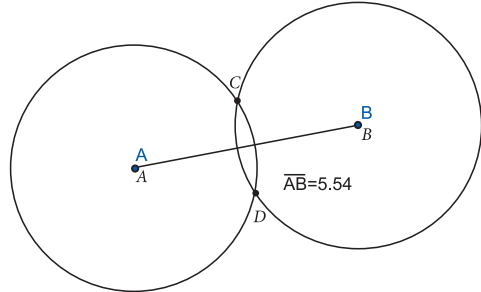
Klasično konstrukcijo simetrale daljice so učenci izvedli tudi s pomočjo GeoGebre. Simetralo so konstruirali sami, predhodno so se lahko o izbiri ukaznih gumbov pogovorili s соседom. Klasični način konstrukcije simetrale daljice v GeoGebri se nekoliko razlikuje od klasične konstrukcije na papirju, zato bom opisala korake konstrukcije.

1.  Narišemo daljico.
2.  Izmerimo dolžino daljice.
3. Dolžino daljice razpolovimo. Pomagamo si lahko s simbolnim računanjem.



4.  V krajiščih daljice narišemo krožnici s polmerom večjim od polovice dolžine daljice.
5.  Označimo presečišči krožnic.

6.  Skozi presečišči krožnic narišemo premico.



[Slika 3] Klasična konstrukcija simetrale daljice v GeoGebri

Primeri raziskovanja

Na simetrali daljice AB si izberi točko C . Ugotovi, v kakšnem razmerju sta dolžini $|AC| : |BC|$

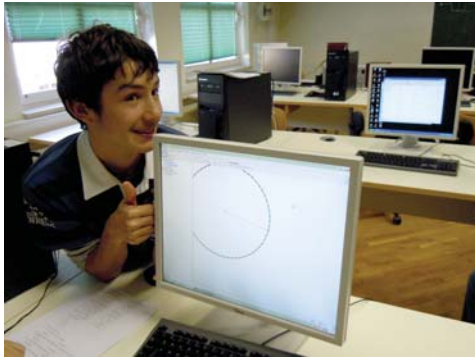
Hitro so ugotovili, da je iskanje neznanega razmerja z merjenjem zamudno. Zato so se dela lotili z GeoGebro. Imeli so že dovolj predznanja, da so do rešitve prišli le z uporabo programa. Nad možnostjo hkratnega spreminjanja lege točke in merjenja razdalje so bili navdušeni. Ugotovili so, da sta razdalji enaki, torej v razmerju $1:1$. Na naslednjih dveh



[Slika 4] Delo v računalnici

delavnicah smo raziskovali geometrijsko mesto točk.

Ker pojma geometrijskega mesta točk pri pouku ne uporabljam, sem ga najprej razložila. Učencem sem zastavila vprašanje: Kateri geometrijski pojem dobimo, če izbrano točko zavrtimo za polni kot okrog dane točke? Učenci so poznali odgovor, dobimo krožnico. Zato je krožnica geometrijsko mesto točk, ki jih vrtimo za polni kot okrog središča vrtenja.



[Slika 5] Raziskovanje z GeoGebro

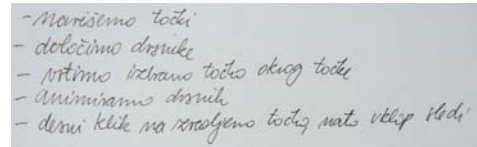
Zaradi možnosti komuniciranja (iskanja različnih poti do rešitve in usklajevanje mnenj) sem dovolila, da so učenci naloge reševali v paru. Pri reševanju so imeli na razpolago GeoGebro, svinčnik, papir, besedilo naloge, pomoč soseda in učitelja.

1. Primer:

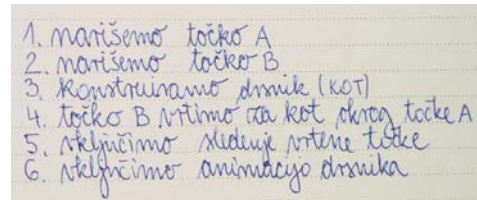
Kaj je geometrijsko mesto točk, ki so od izbrane točke oddaljene za natanko določeno razdaljo?

Ko učencem postane jasno, kaj morajo storiti, je postopek konstruiranja s programom precej enostaven in hiter. Ker so učenci morali sami ugotoviti, kaj vse je treba klikniti, da pridemo do rešitve, je reševanje naloge

vzelo nekoliko več časa. Mislim, da je bistveno bolj pomembna priprava načrta reševanja (vključuje tudi komunikacijo s sošolci) kot sama konstrukcija. Pred pričetkom izdelave konstrukcije so učenci na papir pripravili načrt za izdelavo konstrukcije.

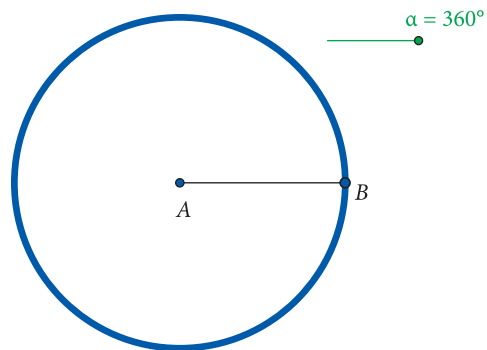


[Slika 6] Prvi algoritem za iskanje geometrijskega mesta točk



[Slika 7] Drugi algoritem za iskanje geometrijskega mesta točk

Opazimo lahko, da različne poti pripeljejo do istega cilja. Koraki reševanja se pri različnih algoritmih razlikujejo. Oba načina sta pravilna, saj je rešitev pri obeh enaka.

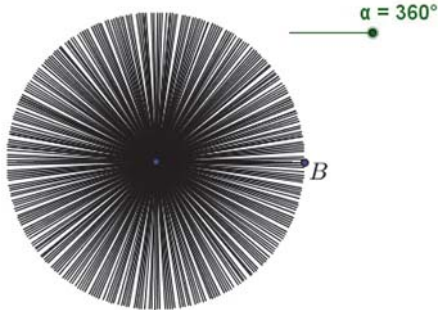


[Slika 8] Krožnica

2. Primer:

Kaj je geometrijsko mesto točk, ki so od izbrane točke oddaljene največ za izbrano razdaljo (polmer)?

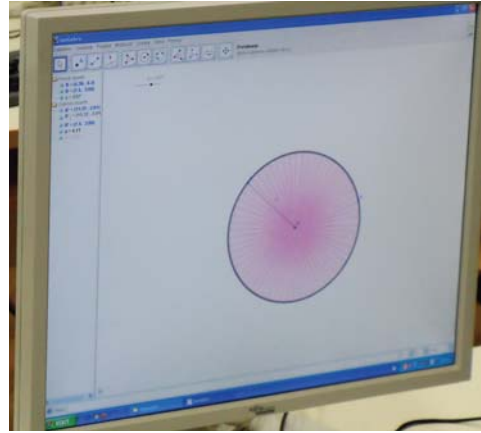
Na podlagi izkušenj, ki so jih učenci pridobili pri prvem primeru, so nekateri hitreje, drugi počasneje ugotovili, da če vrtimo in animiramo točko, dobimo kot geometrijsko mesto točk krožnico. Zato je tu treba vrteti in animirati daljico. Edino kar je učence motilo, je bilo, da se krog ni nikoli v celoti pobarval. Kot razlog so navedli prehitro potovanje daljice, kar je tudi res. Zato so malo pobrskali med nastavitvami drsnika ter upočasnili hitrost vrtenja. Izkazalo se je, da je treba tudi pri uporabi programa razmišljati. Saj v primeru, da ne bi popravili hitrosti, geometrijsko mesto točk ne bi bila notranjost kroga, ampak skupek daljic z istim krajiščem.



[Slika 9] Notranjost kroga

Nekateri učenci so popravili konstrukcijo tako, da je geometrijsko mesto točk krog. Vključili so še sledenje končne točke daljice.

Navajam še opis enostavnejše rešitve za geometrijsko mesto točk, katere rešitev je krožnica. Omenjenega primera se ni spomnil noben učenec. Konstruiramo poljubno točko. Iz te točke narišemo daljico z dano dol-



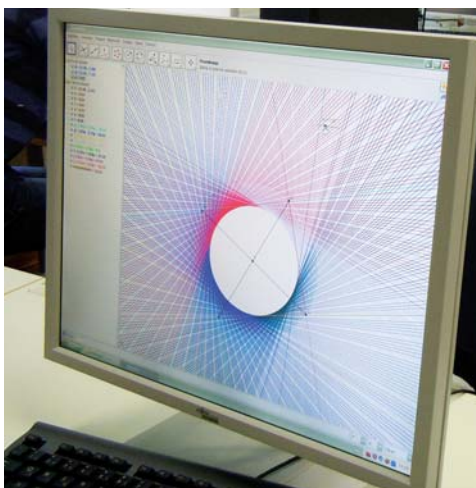
[Slika 10] Krog

žino. Nato vključimo sledenje drugega krajišča daljice. Z orodjem za premikanje vrtimo drugo krajišče. Točka pušča za sabo sled, ki jo imenujemo krožnica. Če bi želeli pokazati, da je geometrijsko mesto točk krog, bi poleg točke vključili še sledenje daljice.

3. Primer:

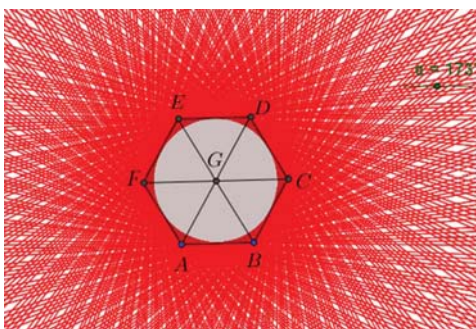
Opiši geometrijsko mesto točk, ki ga dobimo, če nosilke stranic kvadrata zavrtimo okrog presečišča diagonal kvadrata.

Omenjeni primer se je učencem zdel najbolj fascinanten. Pa ne toliko zaradi matematičnega ozadja, temveč zaradi dobljene rešitve. Med reševanjem sem jim namignila, da bo rešitev lepša, če bodo vsako zasukano premico pobarvali z drugačno barvo. Pri rešitvi je bilo nekaj polemik. Nekateri so trdili, da je geometrijsko mesto krog, drugi pa ravnina, iz katere je izrezan krog. Pri tem je bila potrebna učiteljeva usmeritev. Torej, če je bilo pri prejšnjih primerih geometrijsko mesto točk pobarvani del, je tako tudi v tem primeru. Po tej enostavni razlagi jim je bilo jasno, da je geometrijsko mesto točk ravnina, iz katere je izrezan krog.

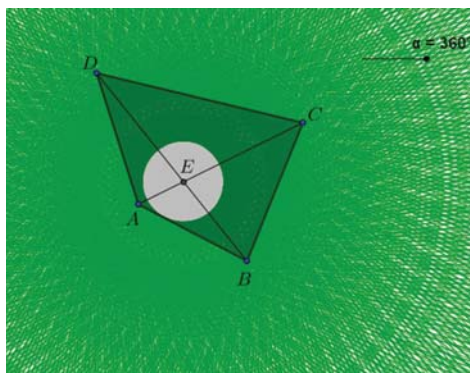


[Slika 11] Geometrijsko mesto točk nosilk stranic kvadrata, ki so zavrtene okrog presečišča diagonal kvadrata

Tudi tu so učenci ugotovili, da lahko zadnji primer spremenimo. Tako so nekateri kot rešitev dobili ravnino brez krožnice. Enemu učencu se je porodila misel, da bi poiskal geometrijsko mesto točk nosilk stranic pravilnega šestkotnika, ki so zavrtene okrog presečišča diagonal za polni kot. Po pravilno narejeni konstrukciji in zagnani animaciji je ugotovil, da je rešitev enaka kot pri kvadratu.



[Slika 12] Geometrijsko mesto točk nosilk pravilnega šestkotnika zavrnena okrog presečišča diagonal pravilnega šestkotnika



[Slika 13] Geometrijsko mesto točk nosilk šestkotnika, zavrnena okrog presečišča diagonal šestkotnika

Istega učenca je zanimalo, kako je z geometrijskim mestom točk, če začetni lik ni pravilni lik.

φ Zaključek

V današnjem času ima učitelj na voljo dovolj interaktivnih pripomočkov, s pomočjo katerih lahko obogati pouk in pritegne učencevo pozornost ter ga s tem stimulira za nadaljnje delo. Vendar moramo pred tem dobro premisliti, kdaj in na kakšen način bomo uvedli IKT v pouk matematike. Učencem se je opisani način dela zdel zelo zanimiv. Izrazili so željo, da bi se podoben način dela večkrat izvajal tudi med poukom. Veseli so bili, da so lahko spoznali tudi drugačno plat včasih njim kar preveč dolgočasnega predmeta. Prav zato sem se odločila, da bom prihodnjih interaktivnega raziskovanja vpeljala tudi v redni pouk.

Od opisanega bi lahko učitelj pri rednem pouku uporabil konstrukcijo simetrale daljice in opisani prvi primer raziskovanja. Simetralo daljice lahko uporabimo v sedmem razredu, raziskovanje geometrijskega mesta

točk (1. in 2. primer) pa v šestem razredu. Geometrijsko mesto točk lahko učitelj uporabi pri rednem pouku kot demonstracijo. Učenci so bili pri delu zelo motivirani. Prvič zato, ker so delavnice izbrali sami, in drugič zato, ker jim je bil način dela všeč. Povedali so, da radi raziskujejo in so zadovoljni, ko do rešitve pridejo sami. Delo z računalnikom jih motivira, ne zdi pa se jim smiselno, da bi bile ure rednega pouka v celoti namenjene

delu z njim. V delavnicah učenci niso bili časovno omejeni. Najbolj pomembno se mi zdi, da so raziskovali, iskali poti do rešitve in se medsebojno usklajevali.

Za izpeljavo omenjenih delavnic je poleg programske opreme potrebno tudi učiteljevo poznavanje posameznih orodij in komaj čakam, da bom lahko omenjene primere preizkusila tudi na drugačnih interaktivnih napravah, ne le na računalnikih.

δ Viri in literatura:

1. *Učni načrt za matematiko*, http://www.mizs.gov.si/fileadmin/mizs.gov.si/pageuploads/podrocje/os/prenovljeni_UN/UN_matematika.pdf, (12. 7. 2013).
2. *GeoGebra*, <http://www.geogebra.org/cms/sl/>, (12. 7. 2013).
3. W. Nagel (1987), *Spodbujanje in odkrivanje nadarjenih otrok*, Ljubljana, Državna založba Slovenije.
4. Zakon o osnovni šoli, <http://www.uradni-list.si/1/objava.jsp?urlid=200681&stevilka=3535>, (12. 7. 2013).
5. *Zakon o spremembah in dopolnitvah zakona o osnovni šoli*, <http://www.uradni-list.si/1/objava.jsp?urlid=201187&stevilka=3727>, (12. 7. 2013).
6. *Odkrivanje in delo z nadarjenimi učenci v devetletni osnovni šoli*, http://www.zrss.si/pdf/210911135740_ssd_nadarjeni20koncepto%C5%A1.pdf, (12. 7. 2013).