Ramanujanova kvadratura kroga

Aleksander Simonič in Milena Strnad

Oris življenja S. Ramanujana

Pred 130 leti se je v Južni Indiji v vasici Erode blizu mesta templjev Kumbakonama v današnji državi Tamil Nadu v revni in zelo pobožni brahmanski družini rodil nenavaden matematični genij **Srinivasa Aiyangar Ramanujan** (1887–1920). Zanj je že pred njegovim rojstvom v družini veljalo prepričanje, da bo to poseben otrok, nad katerim bo po družinski prerokbi bdela in spregovorila družinska boginja Namagiri. Že v rani mladosti se je od sovrstnikov razlikoval po izrednem spominu in izjemnem daru za matematiko. Za šalo je sešteval, odšteval, množil, delil in razcepljal večmestna števila. Kot srednješolec je pomagal univerzitetnim študentom reševati matematične probleme. S tem si je med njimi pridobil občudovanje, pri večini svojih visokošolskih učiteljev, ki mu niso zmogli slediti in ga niso znali usmerjati, pa nerazumevanje.

Tako je v osami odkrival že znane matematične teorije in jih razvijal dalje. Pri tem je odkril veliko novega in tudi zelo izvirnega. Najbolj so ga pritegnili neskončne vrste, verižni ulomki in teorija števil. Geometrije se je dotaknil le poredko. Pravzaprav je njegovo najbolj znano delo na tem področju prav tema tega članka. To matematično samorastništvo brez primernega učitelja, ki ni bilo podkrepljeno niti z ustrezno literaturo, je največja razlika med Ramanujanovo genialnostjo in drugimi vélikimi matematiki.

Svoja odkritja je Ramanujan brez dokazov ali razlage pisal v zvezka, ki se danes imenujeta Prva in Druga beležka (ang. Notebook). Ti zapisi so bili in so še vedno osnova vseh raziskav in objav Ramanujanovega dela številnih odličnih matematikov. V tistem času na indijskih univerzah ni bilo mogoče študirati izključno matematike. Ramanujan zaradi nezanimanja za ostale predmete (npr. za fiziologijo), velike revščine in ne nazadnje zaradi amebne griže ni nikoli diplomiral. Matematična raziskovanja je prekinila njegova mati s tem, da ga je po indijski tradiciji leta 1909 poročila z nevesto, ki mu jo je leto pred tem sama izbrala, in ga s tem prisilila, da si je moral začeti iskati službo. Službo, ki naj bi imela matematično ozadje, je Ramanujan iskal pri raznih matematikih in jim pri tem kot priporočilo kazal svoji beležki, vendar je bil kljub občudovanju njegovega dela vse do leta 1912 povsem nerazumljen.

S svojimi odmevnimi prvimi objavami v reviji Indijskega matematičnega društva v letih 1911 in 1912 je v Indiji postal znan kot izjemen matematik. Šele leta 1912 je končno dobil službo računovodje pri ogromnem madraškem pristaniškem podjetju. Tam je bil deležen podpore in razumevanja svojih nadrejenih, direktorja in velikodušnega plemiča inženirja **Francisa Springa** (1849–1933) in matematika **S. Narayana Iyerja** (1874–1937). Oba sta potem vse do njegove smrti skrbela zanj. Iyer pa je še po smrti veliko naredil za Ramanujanova dela in njegove domače.

Leta 1913, v drugem letu službovanja, se mu je nasmehnila sreča. Na pobudo nekaterih indijskih matematikov je prišel v stik s priznanim matematikom, vodilnim mojstrom dokazovanja, **Godfreyem H. Hardyjem** (1877–1947). Ta je skupaj s svojim zvestim sodelavcem **Johnom E. Littlewoodom** (1885–1977) v njem takoj prepoznal izjemnega matematika. Močno so ju pritegnile Ramanujanove nove ideje in enačbe, čeprav sta v nekaterih odkrila nepravilnosti, ki so bile posledica Ramanujanovega pomanjkljivega formalnega znanja matematike. Toda Ramanujan, močno vpet v indijsko tradicijo verovanj, je

SLIKA 1.

to povabilo sprejel šele po dobrem letu njunih dopisovanj. Sodelovanje vseh treh matematikov velja za edinstveno v zgodovini. Plod tega sodelovanja so tudi Ramanujanovi rezultati, dopolnjeni z rigoroznimi dokazi, ki so kljub začetnemu neodobravanju ostalih profesorjev s Cambridgea postali prepoznavni in cenjeni. Po dveh letih bivanja v Angliji so Ramanujanu podelili diplomo, enakovredno današnjemu doktoratu, leto zatem so ga sprejeli za člana Londonskega matematičnega društva. Leta 1918 so ga kot drugega Indijca izvolili za člana Kraljevega društva, za člana Filozofskega društva Cambridge in kot prvega Indijca tudi za člana Trinity Collegea.

Pred Ramanujanom je bila bleščeča kariera, toda amebna griža, ki je s krajšimi prekinitvami mirovala, je ponovno izbruhnila. Napačno postavljena diagnoza, Ramanujanovo zavračanje uradne medicine, neprijazno podnebje in vojno pomanjkanje hrane so bolezen le še poslabšali. Leta 1919 se je vrnil domov v Madras, današnji Chennai, kjer je leto kasneje umrl.

V tem obdobju je napisal 138 strani novega rokopisa o lažnih funkcijah theta in ga poslal Hardyju. Ta rokopis so potem založili in je bil slučajno odkrit šele leta 1976, zato je danes poznan kot Izgubljena beležka (ang. Lost Notebook). Matematiki so v obdobju od 1985 do 1998 uredili beležki v pet knjig, Izgubljena beležka pa jih zaposluje še danes.

Število π in kvadratura kroga

Spoznanje, da je razmerje med obsegom in premerom krožnice vselej konstantno, spada med največje dosežke v zgodovini znanosti. Zato ni presenetljivo, da so se s tem razmerjem, ki ga označujemo s π, ukvarjali tudi najimenitnejši matematiki od antike dalje. Skrivnost je bila že njegova umestitev med številske množice. Pojavili sta se vprašanji: Ali je π racionalno število? Ga lahko konstruiramo z evklidskim orodjem, torej samo s šestilom in neoznačenim ravnilom? Slednje vprašanje o konstruktibilnosti so starogrški matematiki postavili v obliki problema kvadrature kroga. To sprašuje po konstrukciji stranice kvadrata, ki ima enako ploščino kot podan krog. Da je problem nerešljiv, je dokazal nemški matematik **Carl L. F. von Lindemann** (1852–1939) šele leta 1882. Jedro dokaza je izrek, da π ni ničla nobenega polinoma, katerega koeficienti so cela števila. Takim številom pravimo *transcendentna*. Iracionalnost je bila znana že leta 1761 po zaslugi **Johanna H. Lamberta** (1728–1777).

V zgodovini se je pojavilo kar nekaj približnih konstrukcij kvadrature kroga, za katere so avtorji pred Lindemannovim dokazom pogosto trdili, da predstavljajo rešitev problema. Kasnejše konstrukcije so v večini posledice izziva, da iz konstruktibilnega približka za π najdemo elegantno približno rešitev problema. Ramanujan je podal taki konstrukciji.

Prvo konstrukcijo je objavil leta 1913 v enostranskem članku v reviji Indijskega matematičnega društva in temelji na približku 355/113. Od kod ta približek? Znano je, da lahko vsako realno število zapišemo v obliki *enostavnega verižnega ulomka*:

- $$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots}}},$$

kjer je a_0 neko celo število, $a_1, a_2, \ldots$ pa neka naravna števila. Za zgornji izraz se pogosto uporablja krajši zapis

- $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$,

števila v njem pa imenujemo *verižni koeficienti*. Če je verižnih koeficientov končno mnogo, imamo →

opravka z enostavnim *končnim* verižnim ulomkom. V nasprotnem primeru izrazu pravimo enostaven *neskončni* verižni ulomek. Pri razvoju racionalnega števila v enostaven verižni ulomek si lahko pomagamo z Evklidovim algoritmom in ta razvoj je vedno končen. Drugače je pri iracionalnih številih, kjer je razvoj neskončen. V splošnem si moramo pri tem pomagati s približki, ki jih dobimo iz pripadajoče desetiške oblike, zapisanimi z dovoljšnjim številom decimalk. Če zapišemo število π na trinajst mest natančno, torej $\pi \approx 3,141592653590$, dobimo

- $\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, \ldots].$

Če upoštevamo samo nekaj prvih verižnih koeficientov, govorimo o *verižnih približkih*, ki so racionalna števila in zelo dobro aproksimirajo pravo vrednost. Tako je drugi verižni približek števila π Arhimedov približek $[3; 7] = 22/7$, četrti verižni približek, ki ga je Ramanujan izbral za svojo konstrukcijo, pa je

- $[3; 7, 15, 1] = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + 1}} = \dfrac{355}{113}.$

Absolutna napaka tega približka je manjša od $2,6677 \cdot 10^{-7}$.

Drugo konstrukcijo je Ramanujan objavil leta 1914 v prelomnem članku o modularnih enačbah in aproksimacijah števila π. V članku je zapisanih mnogo neskončnih vrst za $1/\pi$, med katerimi je tudi

- $\dfrac{1}{\pi} = \dfrac{2\sqrt{2}}{99^2} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!(1103 + 26390n)}{(n!)^4 396^{4n}}.$

Ta vrsta zelo hitro konvergira in je zato uporabna pri izračunu števila π na veliko decimalk. Izboljšana inačica te formule se uporablja v *algoritmu bratov Čudnovski*, s katerim še danes dosegajo rekorde v računanju števila π. Ramanujan je brez pojasnila za približek svoje konstrukcije izbral število $\sqrt[4]{9^2 + 19^2/22}$. Zelo verjetna razlaga za tako izbiro se ponovno skriva v verižnem ulomku. Velja namreč

- $\pi^4 = [97; 2, 2, 3, 1, 16539, 1, 6, 7, \ldots],$

od koder nam peti verižni približek da

- $[97; 2, 2, 3, 1] = 97 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + 1}}}$

$$= \frac{2143}{22} = 9^2 + \frac{19^2}{22}.$$

Ta približek je za dva velikostna reda boljši od prejšnjega, saj je absolutna napaka manjša od $1,0072 \cdot 10^{-9}$.

Ramanujanovi konstrukciji

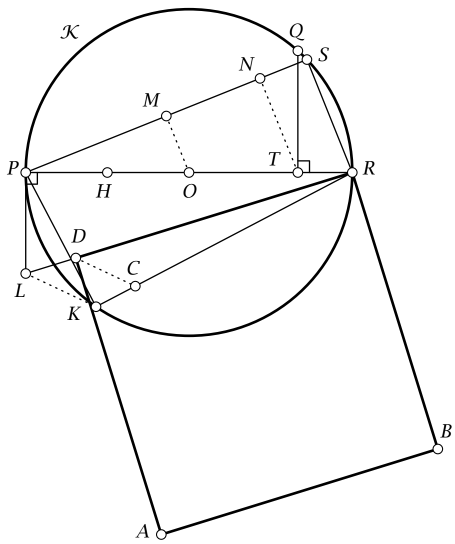
Ob spremljanju obeh Ramanujanovih konstrukcij se bomo soočili z njegovim neobičajnim načinom mišljenja in vpogleda v sam problem, ki izhaja iz njegove genialnosti, izjemnih računskih spretnosti in pomanjkljive formalne izobrazbe. Vse to od bralca zahteva posebno zbranost, ker se mu drugače lahko celo zazdi, da je Ramanujanova konstrukcija povsem naključen izbor korakov, ki nas slučajno privede do pravilnega in računsko preverljivega rezultata.

Začnimo z obravnavo prve Ramanujanove konstrukcije. Bralcu svetujemo, da ob opisu spremlja sliko 2, ki se pojavi tudi na 221. strani Druge beležke. Vzemimo krožnico $\mathcal{K}$ s središčem v O in premerom PR. Naj bo T taka točka na daljici OR, da je $|OT| = 2|TR|$. Točka Q naj bo eno od presečišč pravokotnice na PR v T s krožnico $\mathcal{K}$. Vzemimo točko $S \in \mathcal{K}$ na istem bregu premice PR kot Q, da bo $|RS| = |TQ|$. Točki M in N naj bosta zaporedoma presečišči vzporednic premici RS skozi O in T s premico PS. Na pravokotnici skozi P premice PR izberimo točko L, da bo $|PL| = |MN|$. Vzemimo točko $K \in \mathcal{K}$ na istem bregu premice PR kot L, da bo $|PK| = |PM|$. S C označimo tako točko na premici KR, da je $|RC| = |RH|$, kjer točka H razpolavlja daljico PO. Naj bo D presečišče vzporednice premici LK skozi C in premice LR. Trdimo:

- $|RD|^2 = \dfrac{355}{113}|OR|^2. \qquad (1)$

To pomeni, da je razmerje k_1 ploščin kvadrata $ABRD$ in kroga $\mathcal{K}$ enako

- $1 + 0,849 \cdot 10^{-7} < k_1 = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{355}{113} < 1 + 0.85 \cdot 10^{-7}.$



SLIKA 2.
Približna kvadratura kroga, osnovana na ulomku 355/113.

Dokažimo enakost (1). Najprej opazimo, da zaradi pravokotnosti trikotnikov $\triangle PKR$, $\triangle PRS$ in $\triangle LRP$, ki imajo skupno stranico PR, velja zveza

$$|PK|^2 + |KR|^2 = |PS|^2 + |RS|^2 = |LR|^2 - |PL|^2 = |PR|^2.$$

Po Evklidovem višinskem izreku za trikotnik $\triangle PRQ$ imamo $|RS|^2 = |TQ|^2 = |PT| \cdot |TR|$. Po definiciji točke T velja $|PT| = \frac{5}{6}|PR|$ in $|TR| = \frac{1}{6}|PR|$. Zato je $|RS|^2 = \frac{5}{36}|PR|^2$. Ker je $|PK| = |PM| = \frac{1}{2}|PS|$, sledi

$$|KR|^2 = |PS|^2 - |PK|^2 + |RS|^2 = \frac{3}{4}|PS|^2 + |RS|^2 = \frac{3}{4}\left(|PR|^2 - |RS|^2\right) + |RS|^2 = \frac{113}{12^2}|PR|^2.$$

Ker je $|PL| = |MN| = \frac{1}{3}|PS|$, sledi

$$|LR|^2 = |PR|^2 + \frac{1}{9}|PS|^2 = |PR|^2 + \frac{1}{9}\left(|PR|^2 - |RS|^2\right) = \frac{355}{18^2}|PR|^2.$$

Zaradi podobnosti trikotnikov $\triangle LKR$ in $\triangle DCR$ imamo $|RD|/|LR| = |RC|/|KR|$. Ker je $|RC| = |RH| = \frac{3}{4}|PR|$, sledi

$$|RD|^2 = |RH|^2 \frac{|LR|^2}{|KR|^2} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \left(\frac{12}{18}\right)^2 2^2 \frac{355}{113}|OR|^2 = \frac{355}{113}|OR|^2.$$

S tem je enakost (1) dokazana.

Podali bomo še drugo Ramanujanovo konstrukcijo (glej sliko 3), ki jo Ramanujan ni niti poskusil obrazložiti. Vzemimo krožnico $\mathcal{K}$ s središčem v O in premerom AB. Naj bo T taka točka na daljici AO, da je $|TO| = 2|AT|$, in C naj bo eno od presečišč pravokotnice na AB v O s krožnico $\mathcal{K}$. Naj bo N točka na daljici CB z lastnostjo $|CN| = 2|AT|$ in M naj razpolavlja daljico CN. Točka P naj bo taka točka na daljici AN, da je $|AN| = |AM|$, in točka Q naj bo taka točka na daljici AM, da sta premici PQ in BC vzporedni. Presečišče vzporednice premici OQ skozi T s premico AM označimo z R. Na pravokotnici skozi A premice AB izberemo točko S z lastnostjo $|AS| = |AR|$. Točka D naj bo taka točka na premici AB, da je $|OD| = |OS|$ in da A leži na daljici DO. Presečišče polkrožnice s premerom DB s premico OC označimo z E. Naj bo F taka točka na premici OC, da je $|FE| = 3|OE|$ in da O leži na daljici FE. Točka G pa naj bo taka točka na daljici FE, da je $|FG| = |OB|$. Presečišče polkrožnice s premerom FE s pravokotnico na FE v G označimo z H. Potem velja

$$|FH|^2 = |OB|^2 \sqrt[4]{9^2 + \frac{19^2}{22}}. \qquad (2)$$

To pomeni, da je razmerje k_2 ploščin kvadrata $JIHF$ in kroga $\mathcal{K}$ enako

$$1 - 3{,}21 \cdot 10^{-10} < k_2 = \frac{1}{\pi}\sqrt[4]{9^2 + \frac{19^2}{22}} < 1 - 3{,}2 \cdot 10^{-10}.$$

Opomniti moramo, da Ramanujan ni podal konstrukcije kvadrata, temveč se je ustavil pri daljici OS.

Dokažimo enakost (2). Po Evklidovem izreku imamo $|FH|^2 = |FG| \cdot |FE| = 3|OB| \cdot |OE| = 3|OB|\sqrt{|DO| \cdot |OB|} = 3|OB|\sqrt{|SO| \cdot |OB|}$. Dokazati želimo

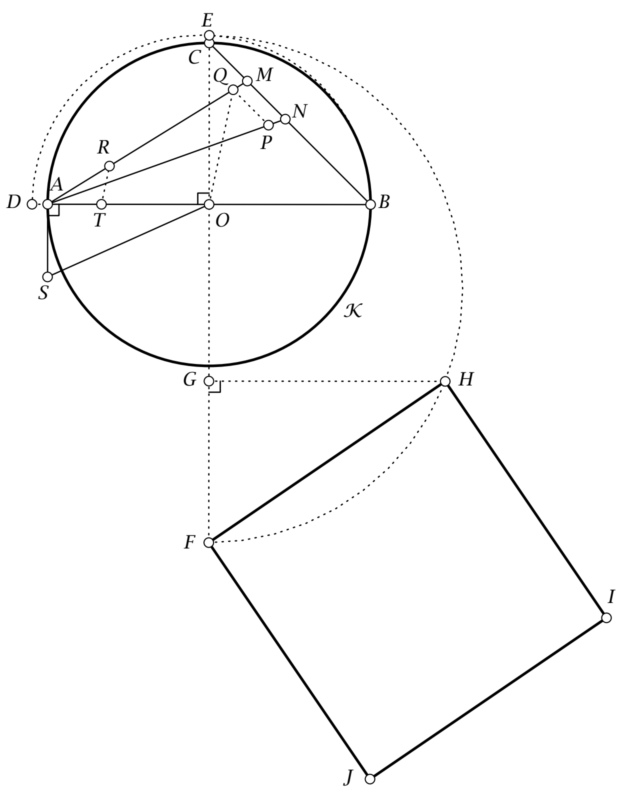
$$|SO|^2 = |OB|^2\left(1 + \frac{1}{22}\left(\frac{19}{9}\right)^2\right). \qquad (3)$$

Po Pitagorovem izreku imamo $|SO|^2 = |AR|^2 + |OB|^2$. Zaradi podobnosti trikotnikov $\triangle ATR$ in $\triangle AOQ$ imamo $|AR| = \frac{1}{3}|AQ|$. Podobnost trikotnikov $\triangle APQ$ in $\triangle ANM$ pa nam zagotavlja $|AQ| = |AM|^2/|AN|$. Torej je

- $$|SO|^2 = |OB|^2 \left(1 + \frac{1}{9}\frac{|AM|^4}{|OB|^2|AN|^2}\right).$$

Enostavno izračunamo $|AM|^2 = \frac{19}{9}|OB|^2$ in $|AN|^2 = \frac{22}{9}|OB|^2$. To vstavimo v prejšnjo enakost in dobimo (3).

Ob zaključku dodajmo, da je Ramanujan tudi v svojih preostalih člankih ostajal skop s pojasnili. Številna odkritja je izrazil pogosto celo samo s končnim rezultatom, formulo ali izrekom brez kakega dokaza. Zato lažje razumemo, zakaj je študij originalnih Ramanujanovih zapisov tako zahteven.



SLIKA 3.
Približna kvadratura kroga, osnovana na številu $\sqrt[4]{9^2 + 19^2/22}$.

Naloge

Te naloge so Ramanujanove trditve iz člankov, kjer sta opisani konstrukciji. Preveri, če so resnične. Upoštevaj, da je ena milja enaka 63360 palcev (en palec meri 2,54 cm).

- Če naredimo kvadraturo kroga ploščine 140000 kvadratnih milj po prvi konstrukciji, je dolžina stranice kvadrata približno en palec večja od prave vrednosti.
- Če naredimo kvadraturo kroga premera 40 milj po prvi konstrukciji, se dolžina stranice kvadrata od prave vrednosti razlikuje za manj kot desetino palca.
- Geometrijska sredina števil $|OS|$ in $|OB|$ (glej sliko 3) se od šestine obsega kroga s premerom $|AB| = 8000$ milj razlikuje za manj kot dvanajstino palca.

× × ×

Barvni sudoku

→ V 8 × 8 kvadratkov moraš vpisati začetna naravna števila od 1 do 8 tako, da bo v vsaki vrstici, v vsakem stolpcu in v kvadratkih iste barve (pravokotnikih 2 × 4) nastopalo vseh osem števil.

			6		5		8
4							3
1			2	6			
		6					
	5	2			7		
6		3		5			
3	4					2	
		8					4

× × ×