PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **16** (1988/1989)
Številka 6
Strani 334–337

Janez Strnad:

ZAKAJ SO ANTENE PARABOLIČNE?

Ključne besede: matematika, krivulje.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/16/954-Strnad.pdf

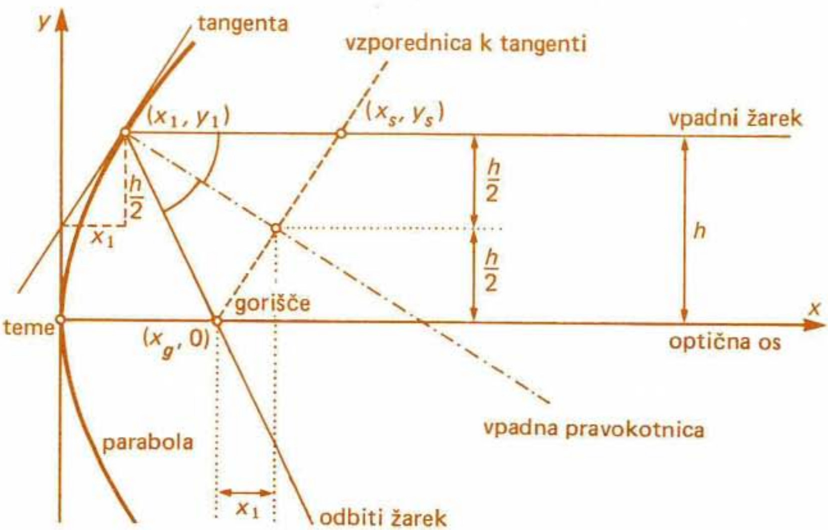
ZAKAJ SO ANTENE PARABOLIČNE?

Na naslovni strani prve številke Preseka v šolskem letu 1988/89 je videti veliko parabolično anteno radijskega teleskopa. Slika pač spremlja članka o rotacijskem paraboloidu v notranjosti številke. V enaki vlogi kot v velikem radijskem teleskopu najdemo del ploskve rotacijskega paraboloida še pri drugih napravah. Omenimo samo manjše parabolične antene za sprejem satelitske televizije in za poštne brezžične zveze, reflektorje avtomobilskih žarometov, ki jim po domače pravijo kar "parabole", in druge svetilke za osvetljevanje. Ob vrsti takih naprav se vprašamo: Zaradi katere lastnosti uporabljamo v njih rotacijske paraboloide? Poskusimo odgovoriti čim preprosteje.

Rotacijski paraboloid dobimo, ko zavrtimo parabolo okoli simetrijske osi. Pri razglabljanju se bomo lahko omejili na ravnino, zato pojdimo v nasprotni smeri in presecimo rotacijski paraboloid z ravnino, ki vsebuje os. To ravnino prenesimo na papir. Os x koordinatnega sistema usmerimo po osi parabole in postavimo izhodišče v teme (slika 1). Dobljeno parabolo opišemo z enačbo

$$y^2 = 4\,fx$$

z dano konstanto f. Na paraboloid naj pade vzporeden curek vidne svetlobe ali radijskih valov vzporedno z osjo, ki ji zdaj recimo *optična os.* Zanimajmo se



Slika 1. Vpadni žarek, vzporeden z optično osjo, se odbije na paraboli in seka optično os v gorišču.

samo za žarek v razdalji h od osi. Kako se odbije na paraboli in v kateri točki seče os?

Pomagajmo si z odbojnim zakonom, po katerem je odbojni kot enak vpadnemu. Da ležijo vpadni žarek, odbiti žarek in vpadna pravokotnica v isti ravnini, v našem primeru ni treba posebej poudarjati.
Žarek zadene parabolo v točki (x_1, y_1), kjer je $y_1 = h$ in zato $x_1 = h^2/(4f)$. *Vpadna pravokotnica* je premica, ki je pravokotna na parabolo v točki (x_1, y_1). Pravokotna na krivuljo? Ne, pač pa pravokotna na premico, ki jo v tej točki prislonimo ob krivuljo, to je na *tangento.* Poiščimo smerni koeficient k enačbe tangente.

Če točka (x_2, y_2) , $x_2 \neq x_1$ leži na paraboli, torej $x_2 = {y_2}^2/4f$, potem je smerni koeficient sekante skozi (x_1, y_1) in (x_2, y_2) enak

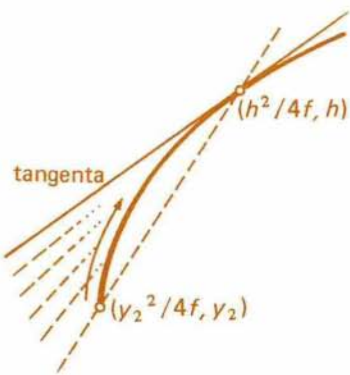
$$(y_2 - y_1)/(x_2 - x_1) = (y_2 - h)/(({y_2}^2 - h^2)/(4f)) = 4f/(y_2 + h)$$

Sekanta preide v tangento skozi točko (x_1, y_1), ko potisnemo drugo točko proti tej točki, tako da postane y_2 enak h (slika 2). Potemtakem velja $k = 2f/h$.

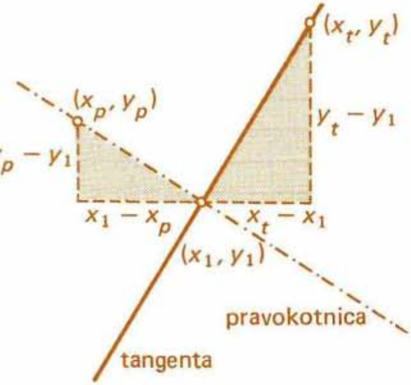
Iščemo točko $(x_g, y_g = 0)$, v kateri preseka odbiti žarek os $y = 0$. Narišimo skozi to točko vzporednico k tangenti in jo zapišimo z enačbo

$$y - 0 = (2f/h)(x - x_g)$$

Ta premica seka žarek $y = h$ v točki (x_s, y_s), zato je $x_s = x_g + h^2/(2f)$. Ker vpadna pravokotnica razpolavlja kot med vpadnim in odbitim žarkom, je točka (x_1, h) enako oddaljena od presečišča (x_s, y_s) in od točke $(x_g, 0)$, torej velja



Slika 2. Premica, ki seka parabolo v dveh točkah, preide v tangento, ko se druga točka bliža prvi in se z njo zlije.



Slika 3. Če sta pravokotnica in tangenta druga na drugo pravokotni, morata biti osenčena trikotnika podobna.

$$(x_g - x_1)^2 + h^2 = (x_s - x_1)^2$$

Upoštevajmo enakosti

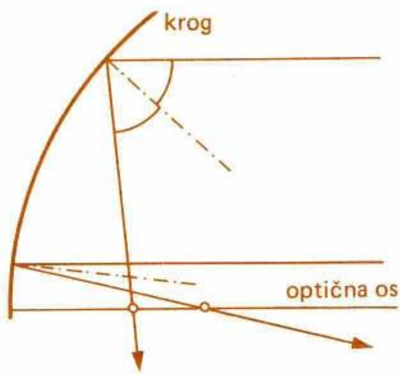
$$x_s = x_g + h^2/(2f) \text{ in } x_1 = h^2/(4f)$$

pa brž izračunamo, da je $x_g = f$.

Bilo je naporno, a zdaj smo na koncu. Odbiti žarek seka optično os v razdalji f od temena, ne glede na razdaljo vpadnega žarka od osi. Vsi vpadni žarki, vzporedni z optično osjo, se po odboju sekajo v eni točki – *gorišču*. To velja v vseh ravninah in zato tudi za rotacijski paraboloid. V gorišču rotacijskega paraboloida se zberejo vsi žarki, ki so pred odbojem vzporedni z optično osjo. Ker nismo nikoli zares upoštevali smeri žarkov, lahko trditev obrnemo: Vsi žarki, ki izvirajo iz gorišča, so po odboju vzporedni z optično osjo. Prvo izkoriščamo pri radijskih antenah, majhnih in velikih, drugo pa pri reflektorjih z drobnimi svetili vseh vrst.

Veliki astronomski daljnogledi imajo zrcalno ploskev, ki je del krogle, ne rotacijskega paraboloida. Zakaj? Pri dobrem zrcalu se mora ploskev na del valovne dolžine natančno prilegati želenemu načrtu. Valovna dolžina zelene svetlobe, na katero je oko najbolj občutljivo, meri pol tisočine milimetra, tako da odstopanje ne sme presegati nekaj stotisočin milimetra. Tako natančno je laže izdelati krogelno ploskev, ki je v vseh točkah enako ukrivljena, kot paraboloid.

Pri zbiralnem krogelnem zrcalu se vsi žarki, ki so vzporedni z optično osjo, po odboju ne sekajo v eni točki. Tisti, ki so bliže osi, sekajo optično os nekoliko dalj od temena, tisti, ki so bolj oddaljeni od osi, pa nekoliko bliže temenu (slika 4). Tej pomanjkljivosti je ime *napaka pasov.* V tem pogledu je krogelno zrcalo slabše od paraboloidnega.



Slika 4. Napaka pasov pri krogelnem zrcalu.

Toda tudi paraboloidno zrcalo ni brez 'napak'. Vzporedni žarki, ki niso vzporedni z optično osjo, se po odboju ne sekajo v eni točki. To lastnost ima sicer tudi krogelno zrcalo, a pri paraboloidnem je izrazitejša.

Zdaj že slutimo izid tekme med paraboloidnim in krogelnim zrcalom. Paraboloidno je boljše za posebno nalogo, ko želimo zbrati valovanje iz zelo oddaljenega izvira na čim manjšem območju ali dobiti iz zelo drobnega izvira čim bolj vzporeden curek valovanja. Krogelno zrcalo je boljše za raznovrstne naloge, ko želimo dobiti hkrati čim bolj ostro sliko predmetov na optični osi in zunaj nje.

Še pripomba: radioteleskop na omenjeni naslovnici ima paraboloid iz kovinske mreže. Rekli smo že, da je odločilna valovna dolžina. Pri valovni dolžini več centimetrov nekaj milimetrov velike odprtine v zrcalu ne prizadenejo znatno njegovih lastnosti.

Janez Strnad