PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **22** (1994/1995)
Številka 1
Strani 54–61

Neža Mramor:

MALO HARMONIČNE GEOMETRIJE

Ključne besede: matematika, harmonična sredina, aritmetična sredina, geometrijska sredina, geometrijske konstrukcije.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/22/1208-Mramor.pdf

MALO HARMONIČNE GEOMETRIJE

Matematika in glasba imata kar nekaj stičnih točk. Ena takih, ki morda sega najdlje nazaj v zgodovino matematike, je pojem *harmonične sredine*, saj ga je baje preučeval že slavni starogrški filozof in matematik Pitagora. V tem prispevku si bomo z različnih strani ogledali harmonične sredine in jih poskusili opisati z geometrijskimi pojmi in konstrukcijami (skratka, harmonijo bomo poskusili narisati).

Harmonična sredina h dveh pozitivnih števil a in b je recipročna vrednost povprečja (aritmetične sredine) števil $\frac{1}{a}$ in $\frac{1}{b}$:

$$\frac{1}{h}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right),$$

torej število

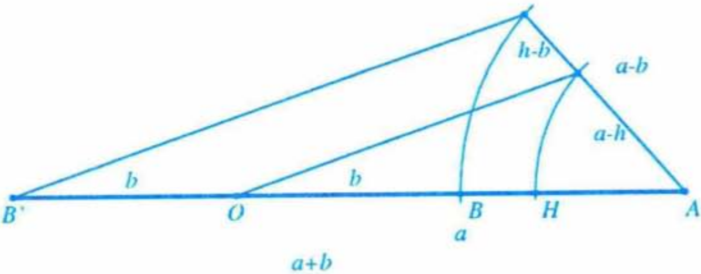
$$h=\left(\frac{a^{-1}+b^{-1}}{2}\right)^{-1}=\frac{2ab}{a+b}.$$

Med harmonično sredino in glasbeno harmonijo je lepa zveza. Legenda pravi, da je Pitagora, ki se je zanimal tudi za zakone glasbene harmonije, opazil, da je sozvočje treh enako napetih strun prav posebej prijetno za uho, če so njihove dolžine v razmerju 6 : 4 : 3. Bralec, ki ima pri roki klavir ali kakšen drug inštrument, se lahko sam prepriča, da je takšno sozvočje res blagozveneče, kajti interval med osnovnima tonoma zunanjih strun je v tem primeru ravno oktava (dolžini sta v razmerju 1:2), srednja struna pa z zunanjima določa kvinto in kvarto. Takšno je na primer sozvočje tonov c, za oktavo višjega c in vmesnega g. Morda ga bo, tako kot je Pitagoro, blagi zven navdihnil, da bo odkril kaj novega o harmoniji. Pitagora je namreč ugotovil, da med dolžinami enakih in enako napetih strun obstaja zveza, ki jo lahko na kratko povzamemo kar takole: dolžina srednje je harmonična sredina dolžin zunanjih dveh.

Harmonično sredino h števil a in b lahko geometrijsko predstavimo na več načinov. Če zgornjo enačbo preuredimo, lahko definicijo harmonične sredine na primer zapišemo takole:

$$\frac{a-h}{h-b}=\frac{a}{b}.$$

Če je a dolžina daljice OA, b dolžina daljic OB in OB', h pa je dolžina daljice OH (kot na sliki 1), deli točka H daljico BA v enakem razmerju, kot deli O daljico $B'A$.

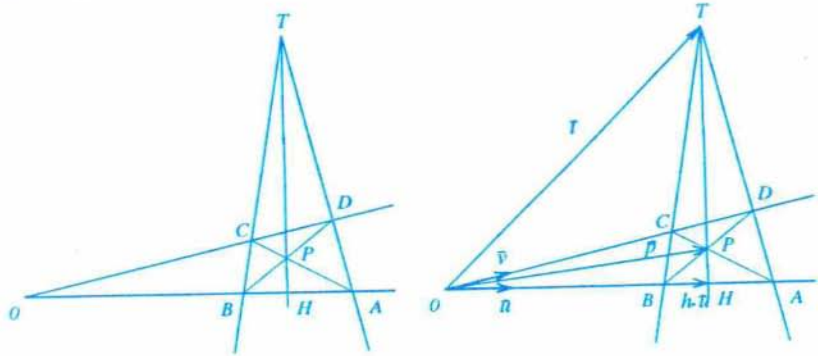


Slika 1. Konstrukcija harmonične sredine z ravnilom in šestilom

Točke A, B, O in H na sliki 1 so primer *harmoničnega niza* točk. Vsak takšen niz je določen s četverico kolinearnih točk $\{A, B; H, O\}$, za katere velja

$$\frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{HB}}{\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{HA}} = -1,$$

kjer sta v števcu in imenovalcu ulomka na levi skalarna produkta kolinearnih vektorjev. Na sliki 2 je prikazana geometrijska konstrukcija harmonične sredine. Niz treh točk $\{A, B, O\}$ lahko dopolnimo do harmoničnega niza štirih točk $\{A, B; H, O\}$ tako, da skozi vsako od točk A in B narišemo po eno premico, pazimo le na to, da nista vzporedni, presečišče pa označimo s T. Skozi točko O povlečemo tretjo premico, ki seka daljici TA in TB v točkah C in D. Presečišče daljic BD in AC označimo s P, premica skozi T in P pa seka daljico AB ravno v iskani točki H.



Slika 2. Konstrukcija harmonične sredine z ravnilom

Dokažimo, da je $h = \overrightarrow{OH}$ res harmonična sredina števil $a = \overrightarrow{OA}$ in $b = \overrightarrow{OB}$ tako, da konstrukcijo opišemo z vektorji. Večkrat bomo uporabili naslednjo zvezo med vektorji: Če leži neka točka, na primer X, na premici skozi dve drugi točki, na primer Y in Z, potem se krajevni vektor $\vec{x} = \overrightarrow{OX}$ te točke izraža s krajevnimi vektroji $\vec{y} = \overrightarrow{OY}$ in $\vec{z} = \overrightarrow{OZ}$ kot linearna kombinacija, kjer je vsota koeficientov enaka 1:

$$\vec{x} = t\vec{y} + (1-t)\vec{z}.$$

Označimo z $\vec{u}$ vektor dolžine 1 v smeri daljice OA in z $\vec{v}$ vektor dolžine 1 v smeri daljice OC na sliki. Točka P leži na premici skozi točki B in C, zato se vektor $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$ izraža kot linearna kombinacija $\vec{p} = \alpha b\vec{u} + (1-\alpha)c\vec{v}$ in po drugi strani kot linearna kombinacija $\vec{p} = \beta a\vec{u} + (1-\beta)d\vec{v}$, kjer je c dolžina daljice OC in d dolžina OD. Od tod dobimo

$$\vec{p} = ab\frac{c-d}{ac-bd}\vec{u} + cd\frac{a-b}{ac-bd}\vec{v}.$$

Na podoben način lahko vektor $\vec{t} = \overrightarrow{OT}$ izrazimo kot linearno kombinacijo vektorjev $b\vec{u}$ in $d\vec{v}$ ali pa vektorjev $a\vec{u}$ in $c\vec{v}$, od koder dobimo

$$\vec{t} = ab\frac{d-c}{ad-bc}\vec{u} + dc\frac{a-b}{ad-bc}\vec{v}.$$

In nazadnje, $h\vec{u}$ je linearna kombinacija $\gamma\vec{t} + (1-\gamma)\vec{p}$, od tod pa sledi, da je $h = \frac{2ab}{a+b}$.

Zaradi simetričnosti konstrukcije razdeli premica skozi T in P tudi daljico CD tako, da dobimo harmoničen niz točk. Pa tudi dolžina daljice AB je harmonična sredina dolžin AH in AO, ... Skratka, harmoničnih nizov je na sliki 2 kar precej.

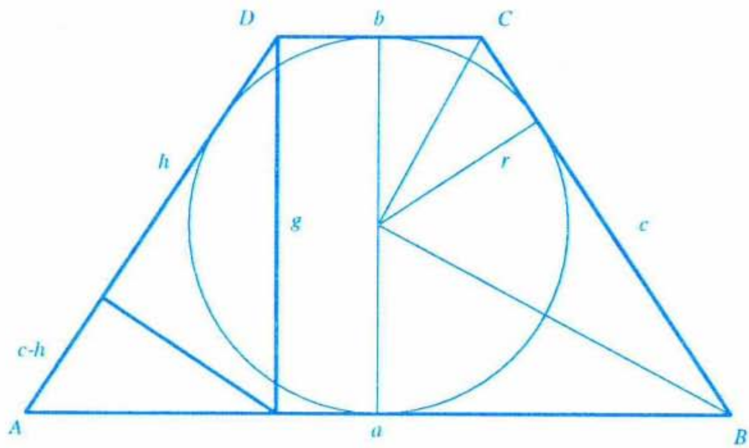
O zvezi med harmonično, aritmetično in geometrično sredino (ki sta bralcem morda še malo bolj domači) dveh ali več pozitivnih števil in njihovi uporabi je bilo v Preseku napisanega že veliko zanimivega (glej Uroš Milutinović: *Kaj so sredine in kako jih uporabljamo*, Presek, letnik 20, št. 6, 332-342), vendar vseeno poskusimo povedati še kaj. Na primer to, da je geometrijska sredina $g = \sqrt{ab}$ števil a in b hkrati tudi geometrijska sredina njune harmonične sredine h in aritmetične sredine $c = \frac{a+b}{2}$, saj je

$$\sqrt{ch} = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{2ab}{a+b}\right)} = \sqrt{ab}.$$

Drugače povedano, ploščina pravokotnika s stranicama a in b je enaka ploščini pravokotnika, ki ima za stranici njuno aritmetično in harmonično sredino c in h. Obe pa sta seveda enaki ploščini kvadrata s stranico g.

Če vemo, da je $g \leq c$, od tod takoj sledi dobro znana relacija $h \leq g \leq c$ med tremi glavnimi sredinami dveh števil.

Vse tri omenjene sredine števil a in b imajo svojo geometrijsko sliko v enakokrakem trapezu $ABCD$ z osnovnicama a in b in krakom c, ki je očrtan krogu (takšnem, kot je na sliki 3).



Slika 3. Konstrukcija sredin v tangentnem enakokrakem trapezu

Za vsak tangentni štirikotnik velja, da sta vsoti obeh parov nasprotnih stranic enaki (če tega še ne veste, poskusite dokazati). Torej je v trapezu na sliki 3, $AB + CD = AD + BC$, torej $a + b = 2c$. To pomeni, da je dolžina kraka c ravno aritmetična sredina osnovnic a in b. Kvadrat višine g je po Pitagorovem izreku

$$g^2 = (\frac{a+b}{2})^2 - (\frac{a-b}{2})^2 = ab,$$

torej je višina geometrijska sredina obeh osnovnic. Označimo s h pravokotno projekcijo višine na krak. Zaradi podobnosti trikotnikov AEB in BEF je $\frac{h}{g} = \frac{g}{c}$, torej je

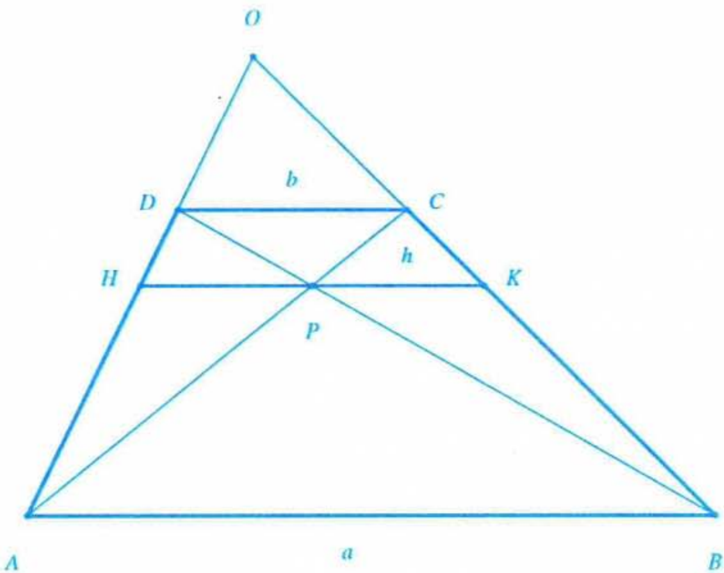
$$h = \frac{g^2}{c} = \frac{2ab}{a+b},$$

kar je ravno harmonična sredina obeh osnovnic. Spet je pred nami nazorna slika neenakosti $h \leq g \leq c$.

Aritmetično, geometrijsko in harmonično sredino števil a in b lahko predstavimo tudi v splošnem trapezu z osnovnicama a in b kot dolžine vzporednic osnovnicama na natanko določenih višinah. Dobro znano je, da je aritmetična sredina c dolžina srednjice, torej je na polovici višine trapeza. Geometrijska sredina g je dolžina daljice, ki razdeli trapez v dva podobna trapeza, kajti zaradi podobnosti velja, da je $\frac{a}{g} = \frac{g}{b}$. Harmonična sredina h pa je v višini presečišča obeh diagonal. O tem se prepričamo, če nad trapezom zgradimo trikotnik, tako kot na sliki 4. Iz podobnosti trikotnikov ABO, HKO in DCO sledi $a : h : b = OA : OH : OD$. Če upoštevamo še podobnost trikotnikov ABP in CDP, velja:

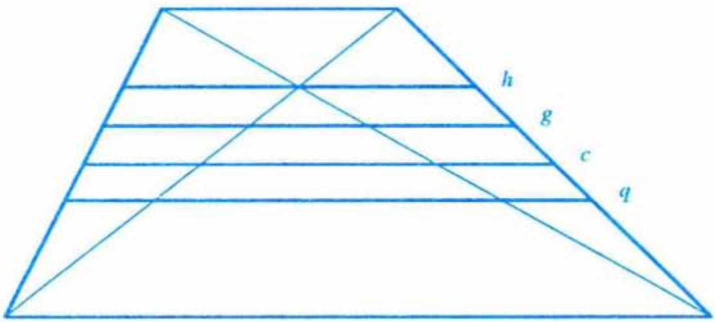
$$AH : DH = AP : DP = AB : DC = OA : OD,$$

to pa pove, da deli točka H stranico AD tako, da je dolžina OH harmonično povprečje dolžin OA in OD.



Slika 4. Konstrukcija harmonične sredine v trapezu

Še ena sredina v trapezu se ponuja kar sama: dolžini daljice, ki trapez razdeli na dva ploščinsko enaka dela, pravimo *kvadratna sredina*. Kvadratna sredina je med vsemi omenjenimi sredinami največja in je enaka, kot se bo bralec sam zlahka prepričal, $q = \sqrt{\frac{a+b}{2}}$.



Slika 5. Sredine v trapezu

Če tričleno zaporedje $a_0 = a, a_1 = h, a_2 = b$ nadaljujemo, tako da je vsak člen harmonična sredina člena neposredno pred njim in člena neposredno za njim, dobimo neskončno *harmonično zaporedje*. Skratka, harmonično zaporedje je v prav takšni zvezi s harmonično sredino, kot sta aritmetično in geometrijsko zaporedje, ki sta bralcem gotovo bolj znana, z aritmetično in geometrijsko sredino. Najbolj preprost primer harmoničnega zaporedja je

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots.$$

Harmonično zaporedje ima nekaj prav zanimivih lastnosti, ki si jih bomo podrobneje ogledali na najbolj preprostem harmoničnem zaporedju. Če seštevamo zaporedne člene harmoničnega zaporedja, dobimo sčasoma poljubno velika števila (ali drugače povedano, harmonična vrsta $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$ je divergentna). Pa poglejmo, zakaj. Izberimo poljubno veliko liho število M. Označimo $k = \frac{M+1}{2}$ in si oglejmo vsoto prvih 2^k členov zaporedja:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^k}.$$

Vsoto lahko razbijemo na $k+1$ členov:

$$1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8})+\ldots+(\frac{1}{2^{k-1}+1}+\ldots+\frac{1}{2^k}).$$

Izraz v $(i-1)$-tem oklepaju

$$\frac{1}{2^{i-1}+1}+\ldots+\frac{1}{2^i}$$

je vsota ravno 2^{i-1} členov, od katerih je vsak manjši od prejšnjega, zadnji pa je seveda najmanjši, torej je zagotovo

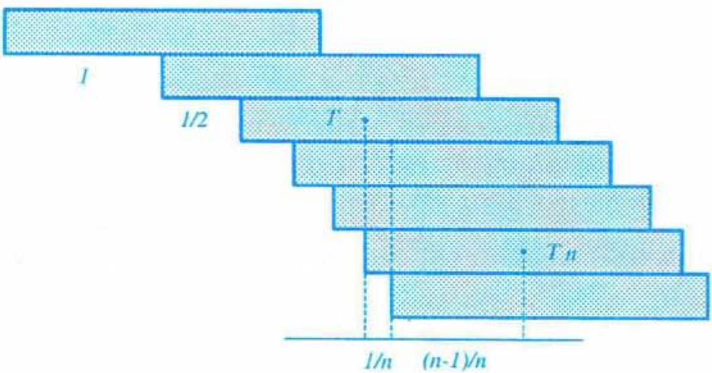
$$\frac{1}{2^{i-1}+1}+\ldots+\frac{1}{2^i}\geq\frac{1}{2^i}+\ldots+\frac{1}{2^i}=2^{i-1}\left(\frac{1}{2^i}\right)=\frac{1}{2}.$$

Ocena velja tudi za prva dva člena, torej velja za celo vsoto:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^k}\geq(k+1)\frac{1}{2}=M.$$

Vsota prvih 2^k+1 členov harmoničnega zaporedja je torej res večja od M.

Ta lastnost harmoničnega zaporedja pa ima prav nenavadne posledice. Zamislite si poševen stolp, zgrajen iz $n+1$ enakih opek, z dolžino 2, ki so zložene v skladu s harmoničnim zaporedjem. Rob druge opeke (od spodaj navzgor) gleda čez rob spodnje za $\frac{1}{n}$, tretja je zamaknjena za $\frac{1}{n-1}$ čez rob druge in tako naprej; zadnja, $(n+1)$-ta, pa je zamaknjena za 1 (torej za polovico svoje dolžine) čez rob predzadnje (nekako tako kot na sliki 6). Izkaže se, da je težišče zgornjih n opek natanko nad robom spodnje, tako da takšen poševen stolp obstane (bolj ali manj stabilno) brez dodatne podpore.



Slika 6. Harmonični stolp

To trditev lahko dokažemo s pomočjo popolne indukcije. Princip popolne indukcije pravi, da neka trditev velja za vsa naravna števila, če velja za število 1 in če iz predpostavke, da velja za izbrano število n, sledi, da velja tudi za naslednje število $n+1$. Če je $n=1$, sta v stolpu le dve opeki, druga je zamaknjena za polovico svoje dolžine, torej je njeno težišče ravno nad robom prve. Trditev je v tem primeru torej resnična. Predpostavimo, da je težišče zgornjih $n-1$ opek v stopnišču iz n opek ravno nad robom spodnje, in poglejmo, kaj se zgodi, če čisto spodaj podstavimo še $(n+1)$-to opeko, tako da je gleda za $\frac{1}{n+1}$ izpod stolpa nad njo. Težišče zgornjih n opek je med težiščem zgornjih $n-1$ opek (ki je na sliki 6 označeno s T) in težiščem n-te opeke (T_n) - za $\frac{1}{n}$ razdalje med obema zamaknjeno od T v smeri proti T_n, kajti vrhnjih $n-1$ opek tehta $(n-1)$-krat toliko kot n-ta opeka. Ker pa je po indukcijski predpostavki T nad robom (n)-te opeke, je razdalja med obema težiščema natanko 1, torej je zamik med težiščema ravno $\frac{1}{n}$, to pa je natanko nad robom spodnje opeke.

Obe lastnosti skupaj pa povesta, da lahko na ta način zgradimo stopnišče, ki se brez dodatne opore razteza poljubno daleč iznad svojih temeljev in vodi nekam čez vse meje ...

In kakšna je zveza med harmoničnim zaporedjem in glasbeno harmonijo? Vpeta struna, ki zaniha, niha z vso svojo dolžino l, pa tudi s polovično dolžino $l/2$, tretjinsko dolžino $l/3$, četrtinsko $l/4, \ldots$ dolžino. Zvok, ki ga pri tem oddaja, je tako sestavljen iz osnovnega tona, ki je določen z nihanjem cele strune, in iz višjih harmoničnih tonov, ki so določeni z nadaljnimi členi v harmoničnem zaporedju $l, l/2, l/3, l/4, \ldots$ (več o tem najdemo v članku Marije Vencelj: *Glasbena lestvica* v Preseku, l. 16, str. 12–17). Če hkrati zazvenijo tri strune, katerih dolžine so v harmoničnem razmerju, sta dolžini krajših dveh člena v harmoničnem zaporedju $l, l/2, l/3, l/4, \ldots$ nihanja najdaljše strune. Uho, ki je navsezadnje tudi nihajoča opna in niha s svojo osnovno in višjimi harmoničnimi frekvencami, to zaznava kot harmonijo zvokov.

Neža Mramor