BORSUK-ULAMOV IZREK

KATJA KELVIŠAR

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 55M25

V članku se bomo seznaninli z Borsuk-Ulamovim izrekom in njegovo uporabo v problemu poštene delitve. Bolj konkretno se bomo ukvarjali s problemom pravičnega razreza torte. Pokazali bomo tudi izrek o sendviču. Nadalje si bomo ogledali Borsuk-Ulamovemu izreku ekvivalentne trditve. S pomočjo teorije stopnje v evklidskih prostorih bomo izpeljali posplošitev Borsuk-Ulamovega izreka na simetrične množice. Pri tem bomo spoznali pojem stopnje gladke in zvezne preslikave, ovojno število ter njihove številne lastnosti.

BORSUK-ULAM THEOREM

In this article we will get familiar with the Borsuk-Ulam theorem and its application in a fair division problem. More concretely, we will deal with the fair cake-cutting problem. We will also prove the Ham Sandwich theorem. Furthermore we will take a look at equivalent statements of the Borsuk-Ulam theorem. We will obtain the generalization of the Borsuk-Ulam theorem on symmetric sets, which we will do with the help of degree theory in Euclidean spaces. We will also get to know new terms, such as the degree of a smooth or continous mapping and winding number, and their characteristics.

Uvod

Prvič sem se z Borsuk-Ulamovim izrekom srečala že v prvem letniku študija matematike, ko smo pri Analizi 1 pokazali, da v vsakem trenutku na Zemlji obstajata dve nasprotni si točki z enako temperaturo. Omenili smo še, da obstajata antipodni točki, ki imata poleg temperature enak tudi pritisk. Takrat izreka samega še nisem poznala in tako nisem vedela, da to pravzaprav sledi iz najbolj znane oblike Borsuk-Ulamovega izreka, ki pravi naslednje:

Izrek 1. *Za vsako zvezno preslikavo $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ obstaja točka $x \in S^n$, da velja $f(x) = f(-x)$.*

V izreku je s S^n mišljena enotska sfera v evklidskem prostoru $\mathbb{R}^{n+1}$, vendar izrek velja tudi za enotsko sfero v nekaterih drugih normah na $\mathbb{R}^{n+1}$, npr. v L^1 normi, ter za bolj splošne podmnožice $\mathbb{R}^{n+1}$.

Izrek je dobil ime po Stanislawu Ulamu, ki je problem zastavil, in Karolu Borsuku, ki ga je dokazal.

Zgornja verzija Borsuk-Ulamovega izreka je bila ena izmed treh originalnih trditev, ki jih je Karol Borsuk objavil leta 1933 v reviji *Fundamenta*

Mathematicae, glej [3]. Od takrat so se razvile številne različice, posplošitve ter aplikacije. Kot Borsuk-Ulamov izrek je v nadaljevanju članka mišljen izrek 1, razen ko je navedeno drugače.

V prvem delu članka se bomo osredotočili na uporabo izreka. Pomembno vlogo bo odigral t. i. izrek o sendviču, ki sledi iz Borsuk-Ulamovega izreka. Uporablja se na določenem področju problema poštene delitve (angl. fair division), ki izhaja iz problemov vsakdanjega življenja, kot so npr. dražbe, delitve premoženja ob ločitvah, razrez torte itd.

V drugem delu članka pa si bomo ogledali nekaj Borsuk-Ulamovemu izreku ekvivalentnih trditev in pokazali ekvivalence. Nato bomo s pomočjo teorije stopnje v evklidskih prostorih izpeljali posplošitev tega izreka na simetrične množice. Pri tem bomo uporabili lastnosti stopnje preslikave in ovojnega števila.

Z Borsuk-Ulamovim izrekom ste se bralci revije Obzornik že seznanili leta 1987, glej [4].

Primer uporabe Borsuk-Ulamovega izreka

Iz Borsuk-Ulamovega izreka sledi nekaj pomembnih trditev s področja topologije in diskretne matematike. V tem razdelku se bomo osredotočili na izrek o sendviču in njegovo uporabo v problemu poštene delitve.

Problem poštene delitve se ukvarja z delitvijo množice dobrin X med njene upravičence, tako da vsak dobi delež, ki mu najbolj pripada.

S tem problemom so se ljudje začeli ukvarjati že zelo zgodaj, ko je prišlo do delitve vojnega plena, premoženja, posesti, itd. Večino primerov so rešili enostransko s pomočjo avtoritete (kralji, razsodniki, ...), matematične (logične) rešitve so bile redke. Večji premiki na tem področju so se zgodili v zadnjem stoletju, ko se je razvilo kar nekaj algoritmov za različne tipe problema delitve.

Poznamo različne tipe problema poštene delitve, saj so predmeti, ki jih moramo razdeliti, lahko zelo različni. X je tako lahko končna množica nedeljivih objektov, kot npr. klavir, avto, stanovanje, ali pa množica neskončno deljivih objektov, npr. denar, torta. Objekti so prav tako lahko homogeni, kjer je pomembna samo količina, ki jo posameznik prejme, ali heterogeni, kjer je pomembno, kaj točno (glede na svoje preference) prejme. V nadaljevanju članka se bomo ukvarjali z delitvijo heterogene množice z deljivimi objekti, kot je npr. torta (angl. cake-cutting problem), pri čemer bomo predpostavili, da so preference posameznikov aditivne. To pomeni: če si posameznik določen kos objekta želi 40-odstotno, si preostanek objekta želi 60-odstotno. Vsota mora torej vedno biti 100 %.

Eden od prispevkov k modernemu reševanju problema poštene delitve je tudi izrek o sendviču. Zvezna verzija tega izreka se glasi:

Izrek 2. *Naj bodo $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset \mathbb{R}^n$ omejene množice z volumnom ($\int_{A_i} dV$ obstaja za vsak i). Potem obstaja hiperravnina h, ki vsako od teh množic razpolovi.*

Dokaz. Izrek bomo dokazali z uporabo Borsuk-Ulamovega izreka na ustrezni zvezni preslikavi $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}^{n-1}$. Izberimo poljubno točko ν na enotski sferi $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ in tako točko T_ν na premici skozi izhodišče s smernim vektorjem ν, da hiperravnina H_ν z normalo ν skozi točko T_ν razpolavlja množico A_1. Velja torej $\int_{A_1 \cap H_\nu^+} dV = \int_{A_1 \cap H_\nu^-} dV$, pri čemer sta H_ν^+ in H_ν^- zaprta polprostora z robom H_ν, prvi v smeri normale, drugi pa v nasprotni smeri. Točka T_ν obstaja zaradi omejenosti množice A_1. Če je množica A_1 nepovezana, je takšnih točk lahko več in tvorijo cel interval, za točko T_ν pa izberemo na primer središčno točko tega intervala. Preslikavo f definiramo s predpisom $f(\nu) = \left(\int_{A_i \cap H_\nu^+} dV\right)_{i=2}^n$. Ni težko videti, da je preslikava f zvezna. Po Borsuk-Ulamovem izreku torej obstaja taka točka $x \in S^{n-1}$, da je $f(x) = f(-x)$. Iz konstrukcije vidimo, da je $T_x = T_{-x}$ in $H_x = H_{-x} =: h$. Enakost $f(x) = f(-x)$ pomeni, da hiperravnina h razpolavlja množice $A_2, \ldots, A_n$, po konstrukciji pa razpolavlja tudi množico A_1. ∎

Čeprav izrek o sendviču zagotavlja, da je sendvič ali torto mogoče razdeliti pod predpostavkami kot v izreku, nam ne pove ničesar o tem, kako naj bi to storili. Nekaj o tem nam pove naslednji algoritem za pravično delitev torte med n oseb, glej [5, str. 328, 329]. Denimo, da n ljudi sedi za okroglo mizo s torto v središču mize. Nekdo začne in odreže kos, za katerega se mu zdi, da ustreza eni n-tini, ter odrezani kos poda osebi na svoji levi. Če se tej osebi zdi, da je njen predhodnik odrezal manj ali točno eno n-tino, jo enostavno poda naprej v levo, sicer pa odreže odvečni del in ga vrne k preostanku torte v središču mize. Sedaj zmanjšan kos poda levemu sosedu. Postopek se ponavlja, dokler nihče več ne zmanjša kosa. Kos dobi oseba, ki ga je nazadnje zmanjšala. Algoritem se nato ponovi med $n-1$ osebami, ki še niso dobile kosa, in preostankom torte.

V zgornjem algoritmu smo torto razdelili na n kosov. Torto pa je mogoče razdeliti na samo dva dela glede na preference n ljudi tudi direktno z uporabo Borsuk-Ulamovega izreka, glej [6, str. 16, 17]. Torto predstavimo s kompaktno množico $T \subset \mathbb{R}^3$. Želimo jo razdeliti na dva dela v skladu z željami n ljudi. Vsaka oseba lahko prereže torto, nastale kose pa nato razdelimo v dve skupini, ki predstavljata iskana dela. Želje ljudi, ki so lahko npr.

kos torte z več čokolade ali tisti z več jagodami itn., opišemo z zveznimi funkcijami $\rho_i : T \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, $i = 1, \ldots, n$, kjer je za i-tega opazovalca vrednost kosa torte $K \subset T$ enaka $\int_K \rho_i dV$. Koordinatni sistem v $\mathbb{R}^3$ izberemo tako, da torto omejujeta ravnini $\{z = 0\}$ in $\{z = 1\}$. Vsaka oseba naredi rez $\{z = c_i\}$, pri čemer je $c_i \in [0, 1]$ za vsak $i = 1, \ldots, n$. Brez škode za splošnost velja $c_i \leq c_j$ za $i \leq j$. Videti želimo, da obstajajo taki rezi in razdelitev teh $n + 1$ kosov v dve skupini, ki tvorita razdelitev torte na podmnožici A in B, da bo delitev v očeh n ljudi poštena. To pomeni, da mora za vsak i veljati $\int_A \rho_i dV = \int_B \rho_i dV$.

Razdelitvi $n + 1$ kosov na dva dela priredimo točko na n-sferi S v L^1 normi na prostoru $\mathbb{R}^{n+1}$, torej na množici $\{x \in \mathbb{R}^{n+1}; \sum_{i=1}^{n+1} |x_i| = 1\}$ takole: zapomnimo si debeline posameznih kosov, ki jih označimo z $d_1, \ldots, d_{n+1}$ in zanje velja $d_1 = c_1 - 0, \ldots, d_i = c_i - c_{i-1}, \ldots, d_{n+1} = 1 - c_n$. Opazimo $\sum_{i=1}^{n+1} |d_i| = 1$. Razdelitvi priredimo točko $(\pm d_1, \ldots, \pm d_{n+1})$ na sferi S, kjer je predznak k-te komponente pozitiven, če je k-ti kos v delu A, in negativen, če je v delu B torte T. Definirajmo sedaj funkcijo f, na kateri bomo uporabili Borsuk-Ulamov izrek. Da izrek velja tudi za zgoraj definirano n-sfero S, ki je simetrična množica, sledi iz četrtega razdelka tega članka. Funkcija $f : S \to \mathbb{R}^n$, ki točko $(z_1, \ldots, z_n) \in S$ slika v $\left(\int_A \rho_i dV\right)_{i=1}^n$, je zvezna in zadošča predpostavkam Borsuk-Ulamovega izreka. Obstaja torej točka $z \in S$, da je $f(z) = f(-z)$. Iz konstrukcije vidimo, da točki $z \in S$ in $-z \in S$ izhajata iz kosov enakih debelin (absolutne vrednosti koordinat), vlogi delov torte A in B pa sta zamenjani (koordinate točke z so nasprotno predznačene kot koordinate točke $-z$). Ker sta tudi sliki obeh točk enaki, velja $\int_A \rho_i dV = \int_B \rho_i dV$.

Ekvivalentne trditve Borsuk-Ulamovemu izreku

V tem razdelku si bomo ogledali nekaj ekvivalentnih formulacij Borsuk-Ulamovega izreka in dokazali njihovo ekvivalentnost [2, izrek 2.1.1].

Trditev 3. *Za vsak $n \geq 0$ so spodnje trditve ekvivalentne:*

1. *Za vsako zvezno preslikavo $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ obstaja točka $x \in S^n$, da velja $f(x) = f(-x)$.*

2. *Za vsako liho zvezno preslikavo $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ obstaja točka $x \in S^n$, da velja $f(x) = 0$.*

3. *Ne obstaja liha zvezna preslikava $f : S^n \to S^{n-1}$.*

4. *Ne obstaja zvezna preslikava $f : B^n \to S^{n-1}$, ki je liha na robu, torej zadošča pogoju $f(-x) = -f(x)$ za vse $x \in S^{n-1} = \partial B^n$.*

5. *(Ljusternik in Shnirel'man) Za vsako pokritje sfere S^n z $n+1$ zaprtimi množicami $F_1, \ldots, F_{n+1}$ obstaja vsaj ena množica F_i, ki vsebuje antipodni točki ($F_i \cap (-F_i) \neq \emptyset$).*

Dokaz. (1. $\Rightarrow$ 2.) Za liho preslikavo f po točki 1 dobimo $f(x) = f(-x)$, od koder sledi $f(x) = 0$.

(2. $\Rightarrow$ 3.) Če bi liha zvezna preslikava $f : S^n \to S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ obstajala, bi bilo to v nasprotju s točko 2, ker $0 \notin S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$.

(3. $\Rightarrow$ 1.) Če obstaja taka preslikava $f : S^n \to \mathbb{R}^n$, da za vsako točko $x \in S^n$ velja $f(x) \neq f(-x)$, je s predpisom

$$g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{||f(x) - f(-x)||}$$

dana liha zvezna preslikava g, ki slika iz n-sfere v $(n-1)$-sfero.

(3. $\Leftrightarrow$ 4.) Pri dokazu ekvivalence si bomo pomagali s projekcijo $\pi : (x_1, \ldots, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \ldots, x_n)$, ki je homeomorfizem zgornje hemisfere n-sfere (označimo jo s S_+) na n-disk.

(3. $\Rightarrow$ 4.) Privzemimo, da je preslikava $g : B^n \to S^{n-1}$ liha na robu. Preslikavo f definiramo tako: $f(x) = g(\pi(x))$ za $x \in S_+$. Upoštevamo lihost in preslikavo f razširimo na spodnjo hemisfero, torej $f(-x) = -g(\pi(x))$ za $x \in S_+$. Preslikava f je tako definirana na vsem S^n; predpisa se ujemata na preseku, ker je preslikava g liha na ekvatorju S^n. Je tudi liha ter zvezna, saj je zvezna na obeh zaprtih hemisferah. To nasprotuje točki 3.

(3. $\Leftarrow$ 4.) Iz lihe preslikave $f : S^n \to S^{n-1}$ dobimo preslikavo $g : B^n \to S^{n-1}$, $g(x) := f(\pi^{-1}(x))$, ki je liha na ∂B^n.

(1. $\Rightarrow$ 5.) Dano je zaprto pokritje $F_1, \ldots, F_{n+1}$. Zvezno preslikavo $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ definiramo takole: $f(x) := (\text{dist}(x, F_1), \ldots, \text{dist}(x, F_n))$, pri čemer je $\text{dist}(x, F_i)$ razdalja točke x do zaprte množice F_i. Po 1. obstaja točka $\overline{x} \in S^n$, za katero je $f(\overline{x}) = f(-\overline{x}) = y$. Če je i-ta koordinata točke y enaka 0, potem tako $\overline{x}$ kot $-\overline{x}$ ležita v F_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$. Če pa so vse koordinate y neničelne, $\overline{x}$ in $-\overline{x}$ ležita v F_{n+1}.

(5. $\Rightarrow$ 3.) Recimo, da obstaja $f : S^n \to S^{n-1}$, da je $f(-x) = -f(x)$. Sfero S^{n-1} razbijemo na $n+1$ zaprtih množic $Z_1, \ldots, Z_{n+1}$, da velja $Z_i \cap -Z_i = \emptyset$ za vsak $i \in \{1, \ldots, n+1\}$. To lahko storimo tako, da lica n-simpleksa, ki vsebuje 0 v svoji notranjosti, projiciramo na S^{n-1}. V $\mathbb{R}^2$ bi torej z radialno projekcijo stranice trikotnika projicirali na S^1, v $\mathbb{R}^3$ bi isto naredili s ploskvami tetraedra itd. Če sedaj pogledamo $F_1 =$

$f^{-1}(Z_1), \ldots, F_{n+1} = f^{-1}(Z_{n+1})$, vidimo, da zaradi lihosti f in lastnosti množic Z_i velja $F_i \cap -F_i = \emptyset$ za vsak $i \in \{1, \ldots, n+1\}$. ■

Pokazali smo ekvivalence med zgornjimi trditvami, ne pa tudi njihove veljavnosti. To bomo storili v naslednjem razdelku.

Posplošitev Borsuk-Ulamovega izreka

Za posplošitev Borsuk-Ulamovega izreka na simetrične množice potrebujemo nekaj znanja iz teorije stopnje v evklidskih prostorih. Najprej si bomo ogledali stopnjo gladke preslikave, nato pa še stopnjo zvezne preslikave, ki jo dobimo s pomočjo aproksimacije zvezne preslikave z gladkimi. Obravnavali bomo nekaj pomembnejših lastnosti tako definirane stopnje, ki jih bomo kasneje uporabili v dokazu posplošitve. S stopnjo preslikave je tesno povezano tudi ovojno število, s katerim bomo formulirali posplošitev Borsuk-Ulamovega izreka.

Preden definiramo stopnjo gladke preslikave, ponovimo še pojem regularne vrednosti. Točka $a \in \mathbb{R}^m$ je *regularna vrednost* preslikave $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, če je diferencial, predstavljen z Jacobijevo matriko $J_f(x)$, surjektiven za vsak $x \in f^{-1}(a)$. Po Sard-Brownovem izreku [1, izrek 3.4, str. 63] je množica regularnih vrednosti gosta v $\mathbb{R}^m$, torej regularno vrednost najdemo v vsaki odprti množici.

Za celotni razdelek privzemimo, da je $D \subset \mathbb{R}^n$ omejena odprta množica in $X = \overline{D} \backslash D$ njena topološka meja. Ker je $\overline{D}$ kompaktna množica, je slika zvezne preslikave $f : \overline{D} \to \mathbb{R}^n$ kompakt in norma $||f|| = \max\{||f(x)|| : x \in \overline{D}\}$ je zato dobro definirana.

Trditev 4. *Naj bo $f : \overline{D} \to \mathbb{R}^n$ gladka preslikava in $a \in \mathbb{R}^n \backslash f(X)$ regularna vrednost $f|_D$. Potem je $f^{-1}(a)$ končna množica (lahko tudi $\emptyset$).*

Dokaz. Množica $f^{-1}(a)$ je vsebovana v $\overline{D}$, ki je kompaktna. Zato je dovolj videti, da je $f^{-1}(a)$ diskretna in zaprta. Vzemimo poljuben $x \in f^{-1}(a)$. Po izreku o inverzni preslikavi je f lokalni difeomorfizem v neki okolici U_x točke x, kar sledi iz neizrojenosti Jacobijeve matrike. Torej je x edina točka v preseku $U_x \cap f^{-1}(a)$, iz česar sledi diskretnost množice $f^{-1}(a)$. Množica je zaprta, saj je praslika zaprte množice $\{a\}$. ■

Definicija 5. Naj bo $f : \overline{D} \to \mathbb{R}^n$ gladka preslikava in $a \in \mathbb{R}^n \backslash f(X)$ regularna vrednost $f|_D$ kot v prejšnji trditvi. *Stopnjo* f definiramo kot

$$d(f, D, a) = \sum_{x \in f^{-1}(a)} \operatorname{sign}_x(f),$$

kjer je

$$\operatorname{sign}_x(f) = \operatorname{sign}\det\left(J_f(x)\right) = \pm 1$$

predznak f v x, $J_f(x)$ pa Jacobijeva matrika preslikave f v x.

Predznak diferenciala preslikave f nosi informacijo o orientaciji. Če je $\operatorname{sign}_x(f) = 1$, diferencial v točki $x \in D$ orientacijo ohranja, če velja $\operatorname{sign}_x(f) = -1$, pa jo obrne.

Sedaj si oglejmo pomembno lastnost zgoraj definirane stopnje gladke preslikave:

Trditev 6 (lokalna konstantnost stopnje [1, str. 139]). *Za vsako regularno vrednost a obstaja odprta okolica W v množici regularnih vrednosti $R_{f|_D} \backslash f(X)$, da velja: $d(f, D, a) = d(f, D, x)$ za vsak $x \in W$.*

Dokaz. Množice $\left\{U_x; x \in f^{-1}(a)\right\}$ iz dokaza trditve 4 ustrezno zmanjšamo, da je na njih predznak $\det\left(J_f(x)\right)$ konstanten. To lahko storimo zaradi zveznosti determinante Jacobijeve matrike. Za W vzamemo

$$W := \bigcap_{x \in f^{-1}(a)} f(U_x) \backslash \left(f \left(\overline{D} \backslash \bigcup_{x \in f^{-1}(a)} U_x \right) \right). \qquad \blacksquare$$

Preden si ogledamo še eno pomembno lastnost stopnje gladke preslikave, se spomnimo, kaj je homotopija preslikav. Naj bosta X, Y topološka prostora ter $f_1, f_2 : X \to Y$ zvezni preslikavi. *Homotopija* od f_1 do f_2 je zvezna preslikava $H : X \times [0,1] \to Y$, za katero velja $H(x, 0) = f_1(x)$ in $H(x, 1) = f_2(x)$ za vsak $x \in X$. Predstavlja torej pot med f_1 in f_2 v prostoru zveznih preslikav. Pogosto namesto $H(x, t)$ pišemo kar $H_t(x)$. Pravimo, da sta f_1 in f_2 homotopni preslikavi.

Trditev 7 (homotopska invariantnost stopnje [1, str. 140–144]). *Za gladko preslikavo $H : [0,1] \times \overline{D} \to \mathbb{R}^n$ in točko $a \in \mathbb{R}^n \backslash H([0,1] \times X)$ velja: $d(H_0, D, a) = d(H_1, D, a)$.*

Pomembna posledica zgornje trditve je, da za gladke preslikave $f : \overline{D} \to \mathbb{R}^n$ in povezane množice $U \subset \mathbb{R}^n \backslash f(X)$ velja, da je stopnja $d(f, D, a)$ enaka za vse regularne vrednosti $a \in U$. Omogoča nam, da stopnjo gladke preslikave definiramo tudi v neregularnih vrednostih.

Definicija 8. Naj bo $f : \overline{D} \to \mathbb{R}^n$ gladka preslikava, $a \in \mathbb{R}^n \backslash f(X)$ in U povezana komponenta $\mathbb{R}^n \backslash f(X)$, ki vsebuje a. Potem je $d(f, D, b)$ konstantna za vse $b \in U$, ki so regularne vrednosti preslikave $f|_D$. Stopnjo nad a tako definiramo kot $d(f, D, a) = d(f, D, b)$ za poljuben tak b.

Regularna vrednost $b \in U$ iz zgornje definicije vedno obstaja po Sard-Brownovem izreku.

V nadaljevanju bomo uporabljali predvsem stopnjo zvezne preslikave, ki jo dobimo s pomočjo gladke takole:

Trditev 9. *Naj bo $f : \overline{D} \to \mathbb{R}^n$ zvezna preslikava in $a \in \mathbb{R}^n \backslash f(X)$. Potem obstaja gladka preslikava $g : \overline{D} \to \mathbb{R}^n$, za katero je $||f - g|| < \operatorname{dist}(a, f(X))$. Stopnja $d(g, D, a)$ je za vse take g enaka.*

Dokaz. Po Weierstrassovem aproksimacijskem izreku najdemo polinomsko preslikavo P, ki je seveda gladka, tako da velja $||P-f|| < \frac{1}{2} \operatorname{dist}(a, f(X))$. Po Sard-Brownovem izreku pa najdemo regularno vrednost za $P|_D$, imenujmo jo b, da velja: $||a - b|| < \frac{1}{2} \operatorname{dist}(a, f(X))$. Preslikava g, ki ustreza definiciji, je $g = P + a - b$. Da imata gladki preslikavi g in $\overline{g}$, ki sta obe blizu f, enako stopnjo nad točko a, preverimo s homotopijo $H : [0,1] \times \overline{D} \to \mathbb{R}^n : (x,t) \mapsto (1-t)g(x) + t\overline{g}(x)$, kjer velja $a \notin H([0,1] \times X)$. ∎

Definicija 10. Naj bo $f : \overline{D} \to \mathbb{R}^n$ zvezna preslikava in $a \in \mathbb{R}^n \backslash f(X)$. Potem po prejšnji trditvi obstaja gladka preslikava $g : \overline{D} \to \mathbb{R}^n$, za katero je $||f - g|| < \operatorname{dist}(a, f(X))$. Za takšne g je stopnja $d(g, D, a)$ že definirana, pri čemer je $a \in \mathbb{R}^n \backslash f(X)$, in je za vse take g enaka. Stopnjo f definiramo kot

$$d(f, D, a) = d(g, D, a).$$

Za stopnjo zveznih preslikav seveda veljajo lastnosti, navedene v trditvah 6 in 7. Še več, veljajo spodnji sklepi:

Trditev 11 (Nagumo, Führer, Deimling [1, str. 149, 150]).

1. *Če je f enaka inkluziji $Id_{\overline{D}} : \overline{D} \to \overline{D} \subset \mathbb{R}^n$, potem je stopnja preslikave f nad točko a enaka 1, če je $a \in D$, in 0, če velja $a \notin \overline{D}$.*

2. *(obstoj rešitve) Naj bo $f : \overline{D} \to \mathbb{R}^n$ zvezna preslikava in $a \notin f(X)$. Če je $d(f, D, a) \neq 0$, obstaja točka $x \in D$, za katero je $f(x) = a$.*

3. *(aditivnost stopnje) Naj bosta $D_1, D_2 \subset D$ disjunktni odprti množici, $f : \overline{D} \to \mathbb{R}^n$ zvezna preslikava in a točka, za katero velja $a \notin f(\overline{D} \backslash (D_1 \cup D_2))$. Potem je $d(f, D, a) = d(f, D_1, a) + d(f, D_2, a)$.*

Preden definiramo ovojno število, ki ga bomo uporabili v posplošitvi Borsuk-Ulamovega izreka, potrebujemo še naslednji izrek, ki sledi iz homotopske invariantnosti stopnje:

Izrek 12 ([1, str. 150]). *Naj bosta $f, g : \overline{D} \to \mathbb{R}^n$ zvezni preslikavi, ki se ujemata na meji $\overline{D}$, torej je $f|_X = g|_X$, in a točka, za katero velja $a \notin f(X) = g(X)$. Potem je $d(f, D, a) = d(g, D, a)$.*

Definicija 13. Naj bo $f : X \to \mathbb{R}^n$ zvezna preslikava, $\overline{f} : \overline{D} \to \mathbb{R}^n$ njena zvezna razširitev in $a \in \mathbb{R}^n \backslash f(X)$. Ovojno število f okoli a definiramo kot

$$w(f, a) = d(\overline{f}, D, a).$$

Ovojno število je dobro definirano, saj po Tietzejevem razširitvenem izreku razširitev $\overline{f} : \overline{D} \to \mathbb{R}^n$ vedno obstaja, njena stopnja pa je po zgornjem izreku 12 enaka za poljubno $\overline{f}$. Za tako definirano ovojno število veljajo vse lastnosti stopnje zvezne preslikave (lokalna konstantnost, homotopska invariantnost).

Lema 14 ([1, str. 161, 162]). *Naj bosta $D, X \subset \mathbb{R}^n$, kot smo predpostavili na začetku razdelka, naj $0 \notin \overline{D}$ in naj bo D simetrična množica glede na 0, tj., za $x \in D$ je tudi $-x \in D$. Privzemimo še, da je $f : X \to \mathbb{R}^n$ soda (liha) zvezna preslikava in $0 \notin f(X)$. Potem ima f sodo (liho) zvezno razširitev $\overline{f} : \overline{D} \to \mathbb{R}^n$, za katero velja $0 \notin \overline{f}(\overline{D} \cap \{x_n = 0\})$.*

Preslikavo v lemi konstruiramo postopoma, s pomočjo trditve, ki se od leme razlikuje le v tem, da f slika v prostor višje dimenzije, kot je dimenzija D, ter da točka 0 ni vsebovana v sliki razširitve f. To trditev dokažemo s pomočjo indukcije, kjer v indukcijskem koraku uporabimo sklep, da lahko zvezno preslikavo, ki ne vsebuje točke 0 v sliki kompaktne domene K, zvezno razširimo na kompaktno množico M ($K \subset M$), tako da tudi slika M ne vsebuje točke 0. Lema nato sledi iz trditve in Tietzejevega razširitvenega izreka.

Sedaj imamo na voljo vsa orodja, da dokažemo posplošitev Borsuk-Ulamovega izreka, ki pravi:

Izrek 15. *Naj bo $D \subset \mathbb{R}^n$ simetrična omejena odprta množica, $0 \in D$, $X = \overline{D} \backslash D$, $f : X \to \mathbb{R}^n$ zvezna preslikava, $0 \notin f(X)$.*

1. *Če velja*
$$\frac{f(x)}{||f(x)||} \neq \frac{f(-x)}{||f(-x)||}$$
za vse $x \in X$, je ovojno število $w(f, 0)$ liho, torej neničelno.

2. *Če velja*
$$\frac{f(x)}{||f(x)||} \neq -\frac{f(-x)}{||f(-x)||}$$
za vse $x \in X$, je ovojno število $w(f, 0)$ sodo in enako nič, če je n liho.

Opazimo, da prvi pogoj v zgornjem izreku izpolnjujejo lihe preslikave, drugega pa sode.

Dokaz. V dokazu bomo izračunali ovojno število $w(f,0)$, ki je po definiciji enako stopnji razširitve preslikave f nad 0. Razširitev bomo označili kar z oznako f. Na začetku bomo razširitev »popravili«, da bo liha preslikava v prvem oziroma soda v drugem delu dokaza. S pomočjo homotopije bomo videli, da imata »popravljena« liha/soda preslikava in naša razširitev f enako stopnjo nad 0. Iz tega sledi sklep, da je izrek dovolj pokazati na lihih/sodih preslikavah.

Predpostavimo, da velja pogoj 1. Po Tietzejevem razširitvenem izreku lahko preslikavo f razširimo na $\overline{D}$, torej do $f : \overline{D} \to \mathbb{R}^n$, ki pa ne zadošča nujno 1. pogoju, zato jo ustrezno »popravimo« v preslikavo g.

Preslikavo g definiramo kot $g : \overline{D} \to \mathbb{R}^n : x \mapsto f(x) - f(-x)$, ki je očitno liha. S homotopijo $H_t(x) = f(x) - tf(-x)$, $H_0 = f$, $H_1 = g$ želimo pokazati, da se stopnja ni spremenila, torej da je stopnja f enaka stopnji g. Da bo to res, moramo po trditvi 7 preveriti še, da velja $0 \notin H([0,1] \times X)$, kar bomo pokazali s protislovjem. Recimo, da je $0 = f(x) - tf(-x)$ za neki $x \in X$ in neki $0 \leq t \leq 1$. Ker po predpostavki izreka velja $0 \notin f(X)$, mora biti $t > 0$. Iz zveze $f(x) = tf(-x)$ z normiranjem dobimo $\frac{f(x)}{||f(x)||} = \frac{f(-x)}{||f(-x)||}$, kar je v nasprotju s pogojem 1.

Preslikavi f in g imata torej enaki stopnji. Dovolj je pokazati, da izrek velja za lihe preslikave, zato bomo od zdaj naprej privzeli, da je f liha. S pomočjo f bomo nato definirali nove preslikave, ki bodo imele nad točko 0 enako stopnjo kot f. Tako bomo lažje izračunali želeno stopnjo in s tem ovojno število.

Naj bo $\varepsilon > 0$ dovolj majhen, da je $K = \{x; ||x|| \leq \varepsilon\} \subset D$. Preslikavo f_1 definiramo takole:

$$f_1 : K \cup X \to \mathbb{R}^n : x \mapsto \begin{cases} f(x); & x \in X, \\ x; & x \in K. \end{cases}$$

Zaradi lažjega pisanja označimo $D_1 = D \backslash K$, $X_1 = \overline{D}_1 \backslash D_1 = X \cup \{||x|| = \varepsilon\}$ in $f_2 = f_1|_{X_1}$.

Po lemi 14 obstaja taka liha razširitev $\overline{f}_2 : \overline{D}_1 \to \mathbb{R}^n$ preslikave f_2 na $\overline{D}_1$, da velja $0 \notin \overline{f}_2(\overline{D}_1 \cap \mathbb{R}^{n-1})$. Sedaj definiramo našo končno preslikavo f_3, za katero bomo izračunali ovojno število okoli 0.

$$f_3 : \overline{D} \to \mathbb{R}^n : x \mapsto \begin{cases} \overline{f}_2(x); & x \in \overline{D}_1, \\ x; & x \in K. \end{cases}$$

Ker se f_3 in f ujemata na X, iz izreka 12 sledi $d(f,D,0) = d(f_3,D,0)$.

Stopnjo $d(f_3, D, 0)$ bomo izračunali z uporabo aditivnosti stopnje (lastnost 3 trditve 11) na D_1 in odprti krogli $K_0 = \{x; ||x|| < \varepsilon\}$. Za prvi del, torej za izračun $d(\overline{f}_2, D_1, 0)$, bomo prav tako uporabili aditivnost stopnje, za kar potrebujemo dve disjunktni množici, ki ustrezata predpostavkam. Definiramo ju kot: $D_{1+} = D_1 \cap \{x_n > 0\}$, $D_{1-} = D_1 \cap \{x_n < 0\}$.

Ker $0 \notin \overline{f}_2(\overline{D}_1 \backslash (D_{1+} \cup D_{1-}))$, sledi, da je $d(\overline{f}_2, D_1, 0) = d(\overline{f}_2, D_{1+}, 0) + d(\overline{f}_2, D_{1-}, 0)$. Radi bi videli, da je $d(\overline{f}_2, D_{1+}, 0) = d(\overline{f}_2, D_{1-}, 0)$.

To vidimo, če upoštevamo simetrijo domene in lihost preslikave $\overline{f}_2$. Definiramo preslikavo $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : x \mapsto -x$ in $\overline{f}_2(x)$ zapišemo kot $\overline{f}_2(x) = \varphi^{-1} \circ \overline{f}_2 \circ \varphi|_{\overline{D}_1}(x)$. Enakost $d(\overline{f}_2, D_{1+}, 0) = d(\varphi^{-1} \circ \overline{f}_2 \circ \varphi|_{\overline{D}_1}(x), D_{1+}, 0) = d(\overline{f}_2, D_{1-}, 0)$ sledi iz verižnega pravila ter predznaka Jacobijeve determinante. Velja torej $d(\overline{f}_2, D_1, 0) = 2d(\overline{f}_2, D_{1+}, 0) = 2N$, $N \in \mathbb{Z}$.

Za drugi del gledamo $d(Id, K_0, 0)$. Iz 1. lastnosti trditve 11 sledi, da je $d(Id, K_0, 0) = 1$.

Za končni izračun $d(f, D, 0) = d(f_3, D, 0)$ bomo uporabili aditivnost stopnje na prvem in drugem delu. To lahko storimo, ker sta $K_0 \cup (D\backslash K) \subset D$, K_0, $D\backslash K$ disjunktni in $0 \notin f_3(\overline{D} \backslash (K_0 \cup (D\backslash K)))$. Torej:

$$d(f, D, 0) = d(f_3, D, 0) = d(Id, K_0, 0) + d(\overline{f}_2, D_1, 0) = 1 + 2N.$$

Res dobimo liho število, 1. del izreka je tako dokazan.

Predpostavimo sedaj, da velja pogoj 2. Uporabljali bomo podobne sklepe kot pri dokazu 1. dela z nekaj popravki. Na začetku, ko razširimo preslikavo f na $\overline{D}$ in potrebujemo sodo razširitev, preslikavo g tokrat definiramo kot $g(x) = f(x) + f(-x)$. Veljajo analogni sklepi. Preslikavo f_1 definiramo:

$$f_1 : K \cup X \to \mathbb{R}^n : x \mapsto \begin{cases} f(x); & x \in X, \\ |x| = (|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|); & x \in K. \end{cases}$$

Ustrezno prilagodimo tudi preslikavo f_3:

$$f_3 : \overline{D} \to \mathbb{R}^n : x \mapsto \begin{cases} \overline{f}_2(x); & x \in \overline{D}_1, \\ |x|; & x \in K. \end{cases}$$

Sledi

$$\varphi^{-1} \circ \overline{f}_2 \circ \varphi|_{\overline{D}_1}(x) = \varphi^{-1}\overline{f}_2(-x) = \varphi^{-1}(\overline{f}_2(x)) = -\overline{f}_2(x).$$

In iz tega

$$d(\overline{f}_2, D_{1-}, 0) = d(\varphi^{-1} \circ \overline{f}_2 \circ \varphi|_{\overline{D}_1}, d_{1+}, 0) = d(-\overline{f}_2, D_{1+}, 0) = (-1)^n d(\overline{f}_2, D_{1+}, 0).$$

Velja torej:

$$d(\overline{f}_2, D_1, 0) = d(\overline{f}_2, D_{1+}, 0) + (-1)^n d(\overline{f}_2, D_{1+}, 0) = (1 + (-1)^n)N,$$

za neki $N \in \mathbb{Z}$. Preden izračunamo $d(f, D, 0)$, si oglejmo še $d(|Id|, K_0, 0)$, ki jo bomo potrebovali v končnem izračunu. Ta je po 2. lastnosti trditve 11 enaka $d(|Id|, K_0, 0) = d(|Id|, K_0, a) = 0$, kjer je $a = (-1, 0, \ldots, 0) \notin |Id|(X)$.

Stopnja, ki nas zanima, je tako enaka:

$$d(f, D, 0) = d(f_3, D, 0) = d(|Id|, K_0, 0) + d(\overline{f}_2, D_1, 0) = 0 + (1 + (-1)^n)N,$$

$N \in \mathbb{Z}$. ■

Dokažimo sedaj še Borsuk-Ulamov izrek s pomočjo zgornje posplošitve:

Dokaz izreka 1. Pokazati želimo, da za zvezno preslikavo $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ obstaja točka $x \in S^n$, za katero je $f(x) = f(-x)$. Po Tietzejevem razširitvenem izreku obstaja zvezna razširitev $\overline{f} : B^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ preslikave f, da je $\overline{f}|_{S^n} = f$.

Definiramo preslikavo $g : S^n \to \mathbb{R}^{n+1} : x \mapsto (f(x), 1)$, ki zadošča predpostavkam posplošitve Borsuk-Ulamovega izreka 15 ($D = \mathrm{int}(B^{n+1})$, $X = S^n$, $0 \notin g(S^n) \subset \mathbb{R}^n \times \{1\}$). Ovojno število $w(g, 0)$ je enako stopnji poljubne zvezne razširitve preslikave g na B^{n+1} nad točko 0. Oglejmo si stopnjo nad točko 0 naslednje razširitve $\overline{g} : B^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1} : x \mapsto (\overline{f}(x), 1)$. Ta je enaka 0, saj $0 \notin \overline{g}(B^{n+1}) \subset \mathbb{R}^n \times \{1\}$. Sledi, da obstaja točka $x \in S^n$, za katero velja $\frac{g(x)}{||g(x)||} = \frac{g(-x)}{||g(-x)||}$, kar je res natanko tedaj, ko je $\frac{(f(x),1)}{\sqrt{1+||f(x)||^2}} = \frac{(f(-x),1)}{\sqrt{1+||f(-x)||^2}}$, torej ko $(f(x), 1)$ in $(f(-x), 1)$ ležita na istem poltraku skozi izhodišče. Ta poltrak seka hiperravnino $\mathbb{R}^n \times \{1\}$, na kateri v celoti leži $g(S^n)$, v natanko eni točki, zato je $(f(x), 1) = (f(-x), 1)$, iz česar sledi $f(x) = f(-x)$. ■

LITERATURA

[1] E. Outerelo, J. M. Ruiz, *Mapping Degree Theory, Graduate Studies in Mathematics* **108**, American Mathematical Society, Providence, 2009.

[2] J. Matoušek, *Using the Borsuk–Ulam Theorem, Lectures on Topological Methods in Combinatorics and Geometry*, 2nd corrected printing, Springer-Verlag, Berlin, 2008.

[3] K. Borsuk, *Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre*, Fund. Math. **20** (1933), 177–190.

[4] N. Mramor-Kosta, *On Borsuk's antipodal system*, Obzor. Mat. Fiz. **34** (1987), 65–72.

[5] T. Hill, *Mathematical Devices for Getting a Fair Share*, American Sci. **88** (2000), 325–332, ogled 1. 1. 2016, dostopno na `people.math.gatech.edu/~hill/publications/PAPER\$\%\$20PDFS/MathematicalDevicesforGettingaFairShare2000.pdf`.

[6] T. Prescott, *Extensions of the Borsuk-Ulam Theorem*, diplomsko delo, Harvey Mudd College, 2002, ogled 29. 02. 2016, dostopno na `www.und.edu/instruct/tprescott/papers/thesis/thesis.pdf`.