

# PONCELETOVE KRIVULJE

MIRKO DOBOVIŠEK

Fakulteta za matematiko in fiziko  
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 15A63, 47A12, 51M04

V 18. stoletju so opazili, da velja naslednje: če sta krožnici včrtana in očrtana krožnica nekemu trikotniku, sta včrtana in očrtana krožnica še neskončno mnogo trikotnikom z oglišči na zunanji krožnici. Taki krivulji so poimenovali Ponceletovi krivulji. V članku obravnavamo zgodovinski razvoj iskanja takih parov krivulj. Izkazalo se je, da enako velja tudi pri  $n$ -kotnikih. Ko so odkrili, da takšne krivulje niso nujno kvadrike, je raziskovanje dobilo nov zalet. Cele družine takih krivulj so dobili kot rob numerične zaloge vrednosti matrike. V članku je definicija numeričnega zaklada, prikaz, kako dobimo Ponceletovo krivuljo kot rob numeričnega zaklada, in primer, ko Ponceletova krivulja ni elipsa. Pred nekaj leti so ovrgli tudi hipotezo, da je vsaka Ponceletova krivulja rob numeričnega zaklada. Klasifikacija vseh Ponceletovih krivulj je zato še vedno odprt problem.

## PONCELET CURVES

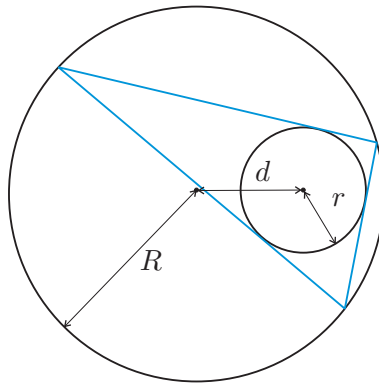
In the 18th century mathematicians established the following: given two circles  $C_1$ , inscribed to a given triangle, and  $C_2$ , circumscribed to the same triangle, then  $C_1$  and  $C_2$  are inscribed and circumscribed circle to an infinite number of triangles. Such a pair of curves is called Poncelet's curves. In this article the early history of Poncelet's porism is discussed. The same property occurs also in the case of an  $n$ -sided polygon. In 1998 it was proved that the boundary of the numerical range on any  $n \times n$  matrix that admits unitary bordering is an  $(n + 1)$ -Poncelet's curve with respect to the unitary circle, and that such curves need not be quadrics. The example of a Poncelet's curve that is not a quadric is given in this article. It is already known that not all Poncelet's curves are boundaries of a numerical range. All Poncelet's curves with respect to a circle have not yet been classified.

## Ponceletova krivulja

Znana formula iz geometrije pove naslednje:

**Trditev 1.** *Naj ima trikotniku očrtana krožnica polmer  $R$ , istemu trikotniku včrtana krožnica pa polmer  $r$ . Če označimo z  $d$  razdaljo med središčema teh dveh krožnic, je*

$$d^2 = R^2 - 2rR. \quad (1)$$



Slika 1

Formulo je prvi objavil William Chapple leta 1746 [1]. Chapple je bil navdušen ljubiteljski matematik. Njegov dokaz je poln napačnih logičnih razmislekov. V dokazu je brez pravega dokaza predpostavil, da če sta enkrat krožnici v tej legi in izberemo poljubno točko na zunanji krožnici, potem vedno lahko najdemo na zunanji krožnici še drugi dve oglišči trikotnika, da mu bosta dani krožnici očrtana in včrtana krožnica. Ta trditev je pravilna in je tema našega članka. Povzetek in razlago Chappleovega dokaza lahko bralec najde v članku [2].

Trditev 1 pripisujejo Eulerju. Euler ni v nobenem od svojih številnih del omenil te formule. Je pa vsekakor dokazal naslednje:

Če označimo z  $a$ ,  $b$  in  $c$  stranice trikotnika, s  $P$  njegovo ploščino in z  $d$  razdaljo med središčema očrtane in včrtane krožnice, je:

$$d^2 = \frac{(abc)^2}{16P^2} - \frac{abc}{a+b+c}. \quad (2)$$

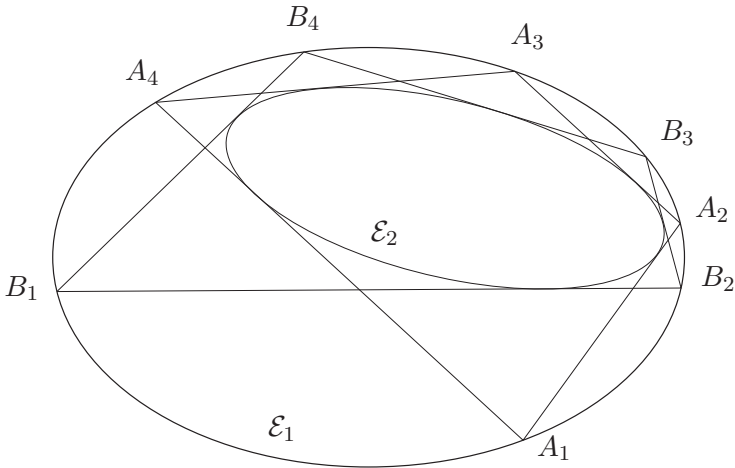
Ko upoštevamo, da sta polmer trikotniku očrtane in polmer včrtane krožnice

$$R = \frac{abc}{4P} \quad \text{in} \quad r = \frac{2P}{a+b+c},$$

dobimo Chapellovo formulo. Formula (2) direktno ne podaja zveze med polmeroma in razdalje med središčema, je bil pa Eulerjev dokaz pravilen.

Nicolaus Fuss je v članku [3] leta 1797 objavil zvezo med polmeroma očrtane in včrtane krožnice štirikotniku. Zveza je naslednja:

$$(R^2 - d^2)^2 = 2r^2(R^2 + d^2).$$



**Slika 2.** Elipsi  $\mathcal{E}_1$  in  $\mathcal{E}_2$  imata 4-Ponceletovo lastnost.

Dokaz ni prav enostaven. Bralec ga lahko najde recimo v knjigi Heinricha Dörrieja [4]. Fuss se je kasneje ukvarjal tudi z nekaterimi drugimi mnogokotniki, vendar zvez ni našel. Vedno pa se zgodi naslednje: če sta elipsi včrtana in očrtana elipsa nekemu  $n$ -kotniku in izberemo poljubno točko  $A_1$  na zunanji elipsi, narišemo iz nje tangento na manjšo elipso in označimo drugo presečišče te tangente z zunanjo elipso z  $A_2$ , spet naredimo tangento na notranjo elipso in presečišče z zunanjo označimo z  $A_3$ , in tako nadaljujemo, se izkaže, da je  $A_1 = A_{n+1}$ .

To je opazil Jean-Victor Poncelet in se začel ukvarjati s tem problemom kot vojni ujetnik v Saratovem ob Volgi. Za krivulje je vzel stožnice v ravnini. Leta 1822 je trditev in (napačen) dokaz objavil v delu [5].

**Definicija 1.** Naj bosta  $\mathcal{E}_1$  in  $\mathcal{E}_2$  elipsi. Če obstaja  $n$ -kotnik, očrtan elipsi  $\mathcal{E}_2$  in hkrati včrtan elipsi  $\mathcal{E}_1$ , pravimo, da imata elipsi  $n$ -Ponceletovo lastnost, oziroma da sta *Ponceletovi krivulji reda  $n$* .

Tako imenovani veliki Ponceletov izrek pa je:

**Izrek 2.** Naj bo  $n \geq 3$  in naj imata elipsi  $\mathcal{E}_1$  in  $\mathcal{E}_2$   $n$ -Ponceletovo lastnost. Potem za vsako točko  $A \in \mathcal{E}_1$  obstaja  $n$ -kotnik, ki je včrtan elipsi  $\mathcal{E}_1$  in očrtan elipsi  $\mathcal{E}_2$  ter ima točko  $A$  za eno od oglišč.

Pravilen dokaz je leta 1828 objavil Carl Gustav Jacob Jacobi [6]. Ko je delal z analitičnimi formulami za tangente in tetive med krožnicama, je opazil, da se podobne relacije pojavljajo tudi v teoriji eliptičnih funkcij. S pomočjo teh funkcij je našel analitičen dokaz Ponceletovih izrekov in tudi

zveze med polmeroma in razdaljo med njima. Bralec si lahko v modernejšo obliko predelan dokaz in še celotno zgodovino Ponceletovega izreka za stožernice ogleda v precej dolgem članku [2].

Tu navedimo še nekaj rezultatov za krožnici. Pri  $n$ -kotnikih so zveze med polmeroma včrtane krožnice in očrtane krožnice ter razdaljo med središčema naslednje:

$n = 4$ :

$$(R^2 - d^2)^2 = 2r^2(R^2 + d^2)$$

$n = 5$ :

$$r(R - d) = (R + d)[(R - r + d)(R - r - d)]^{1/2} + (R + d)[(R - r - d)2R]^{1/2}$$

$n = 6$ :

$$3(R^2 - d^2)^4 = 4r^2(R^2 + d^2)(R^2 - d^2)^2 + 16r^4d^2R^2$$

$n = 8$ :

$$8r^2[(R^2 - d^2)^2 - r^2(R^2 + d^2)]\{(R^2 + d^2)[(R^2 - d^2)^4 + 4r^4d^2R^2] - 8r^2d^2R^2(R^2 - d^2)^2\} = [(R^2 - d^2)^4 - 4r^4d^2R^2]^2$$

V resnici lahko s pomočjo eliptičnih funkcij najdemo zveze za poljuben mnogokotnik in elipsi.

Pri afini transformaciji ravnine se premice slikajo v premice, elipse pa v elipse. Zato nič ne izgubimo na splošnosti, če predpostavimo, da je zunanja elipsa kar enotska krožnica. V knjigi [7] lahko najdemo naveden izrek:

**Izrek 3.** *Krožnica  $x^2 + y^2 = 1$  in elipsa  $(x - c)^2/a^2 + (y - d)^2/b^2 = 1$  imata  $n$ -Ponceletovo lastnost natanko tedaj, ko je za  $n = 2m + 1$  oziroma za  $n = 2m + 2$*

$$\begin{vmatrix} \sigma_2 & \sigma_3 & \cdots & \sigma_{m+1} \\ \sigma_3 & \sigma_4 & \cdots & \sigma_{m+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{m+1} & \sigma_{m+2} & \cdots & \sigma_{2m} \end{vmatrix} = 0 \text{ oziroma } \begin{vmatrix} \sigma_3 & \sigma_4 & \cdots & \sigma_{m+2} \\ \sigma_4 & \sigma_5 & \cdots & \sigma_{m+3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{m+2} & \sigma_{m+3} & \cdots & \sigma_{2m+1} \end{vmatrix} = 0,$$

kjer so  $\sigma_j$  koeficienti razvoja funkcije

$$f(t) = \sqrt{\left(t + \frac{1}{a^2}\right) \left(t + \frac{1}{b^2}\right) \left(t + 1 - \frac{c^2}{a^2} - \frac{d^2}{b^2}\right) + t \left(\frac{c^2}{a^4} + \frac{d^2}{b^4}\right) + \frac{c^2}{a^4b^2} + \frac{c^2}{a^4b^2} + \frac{d^2}{a^2b^4}}$$

v formalno potenčno vrsto

$$f(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \sigma_j t^j.$$

Izrek je dokazal Cayley. Zelo lepo napisan dokaz lahko bralec najde v članku P. Griffithsa in J. Harrisa [8].

Do tod sta bili krivulji vedno elipsi. Zato si lahko postavimo vprašanje: So Ponceletove krivulje vedno elipse? Kako dobiti (klasificirati) vse Ponceletove krivulje?

Ponceletove krivulje, ki niso nujno kvadrike, je našel B. Mirman [9]. Za njihov opis pa potrebujemo numerični zaklad matrike.

### Numerični zaklad matrike

S  $\mathbb{C}^n$ ,  $n \geq 1$ , bomo označili prostor  $n$ -teric kompleksnih števil. Prostor  $\mathbb{C}^n$  je  $n$ -razsežen vektorski prostor nad obsegom kompleksnih števil. Skalarni produkt vektorjev  $x$  in  $y$  iz  $\mathbb{C}^n$  bomo označili z  $\langle x, y \rangle$ . Če je  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  in  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ , je standardni skalarni produkt vektorjev  $x$  in  $y$

$$\langle x, y \rangle = x_1 \bar{y}_1 + x_2 \bar{y}_2 + \dots + x_n \bar{y}_n.$$

Normo vektorja izračunamo z

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1 \bar{x}_1 + x_2 \bar{x}_2 + \dots + x_n \bar{x}_n}.$$

Vemo, da vsaki linearni preslikavi iz  $\mathbb{C}^n$  v  $\mathbb{C}^n$  pripada matrika velikosti  $n \times n$  in obratno. Definirajmo sedaj numerični zaklad matrike oziroma linearne preslikave.

**Definicija 2.** *Numerični zaklad matrike  $A$  je podmnožica kompleksnih števil, definirana z*

$$W(A) = \{\langle Ax, x \rangle; x \in \mathbb{C}^n, \|x\| = 1\}.$$

Preslikava, ki vektorju  $x$  priredi  $\langle Ax, x \rangle$ , je zvezna. Numerični zaklad je slika enotske sfere v  $\mathbb{C}^n$ . Ker je ta kompaktna, je tudi numerični zaklad kompaktna množica. Numerični zaklad je torej vedno omejena in zaprta podmnožica kompleksne ravnine.

Navedimo nekaj najočitnejših lastnosti numeričnega zaklada.

**Trditev 4.** *Numerični zaklad matrike  $A + \alpha I$  je za  $\alpha$  premaknjeni numerični zaklad matrike  $A$ ,  $W(A + \alpha I) = W(A) + \alpha = \{\lambda + \alpha; \lambda \in W(A)\}$ .*

**Trditev 5.** *Naj bo  $A$  matrika velikosti  $n \times n$  in  $U$  poljubna unitarna matrika. Potem je  $W(A) = W(U^*AU)$ .*

*Dokaz.* Če je  $\alpha \in W(A)$ , obstaja  $x \in \mathbb{C}^n$ ,  $\|x\| = 1$ , da je  $\alpha = \langle Ax, x \rangle$ . Vsaka unitarna matrika je obrnljiva in ohranja dolžino vektorjev. Zato obstaja tak  $y \in \mathbb{C}^n$ ,  $\|y\| = 1$ , da je  $x = Uy$ . Potem pa je  $\alpha = \langle Ax, x \rangle = \langle AUy, Uy \rangle = \langle U^*AUy, y \rangle \in W(U^*AU)$ . Dokaz obratne inkluzije je prav takšen. ■

Očitna je tudi naslednja trditev:

**Trditev 6.** *Spekter matrike je vsebovan v njenem numeričnem zakladu.*

*Dokaz.* Naj bo  $\lambda$  lastna vrednost matrike  $A$ . Potem obstaja  $x \in \mathbb{C}^n$ ,  $\|x\| = 1$ , da je  $Ax = \lambda x$ . Potem pa je za ta  $x$   $\langle Ax, x \rangle = \langle \lambda x, x \rangle = \lambda \langle x, x \rangle = \lambda$ , kar pomeni, da je  $\lambda \in W(A)$ . ■

**Trditev 7.** *Numerični zaklad diagonalne matrike je konveksna ogrinjača diagonalnih elementov.*

*Dokaz.* Naj bo  $A$  diagonalna matrika z elementi  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  na diagonalni. Potem je

$$\begin{aligned} W(A) &= \left\{ \langle Ax, x \rangle; \sum_{i=1}^n x_i \bar{x}_i = 1 \right\} = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \bar{x}_i; \sum_{i=1}^n x_i \bar{x}_i = 1 \right\} \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i |x_i|^2; \sum_{i=1}^n |x_i|^2 = 1 \right\}. \end{aligned}$$

Iz zadnje vrstice vidimo, da je  $W(A)$  konveksna ogrinjača diagonalnih elementov. ■

Ker vsako normalno matriko lahko diagonaliziramo z unitarno prehodno matriko, velja naslednje:

**Izrek 8.** *Numerični zaklad normalne matrike je enak konveksni ogrinjači njenih lastnih vrednosti.*

Posledica nam da karakterizacijo sebi adjungiranih operatorjev s pomočjo numeričnega zaklada.

**Izrek 9.** *Matrika je sebi adjungirana natanko tedaj, ko leži njen numerični zaklad na realni osi. Če označimo najmanjšo lastno vrednost sebi adjungirane matrike  $A$  z  $\lambda_m$  in največjo z  $\lambda_M$ , je  $W(A) = [\lambda_m, \lambda_M]$  in  $\|A\| = \max\{|\lambda_m|, |\lambda_M|\}$ .*

*Dokaz.* Če je matrika  $A$  sebi adjungirana, ležijo njene lastne vrednosti na realni osi. Vsaka sebi adjungirana matrika je tudi normalna. Konveksna ogrinjača realnih števil leži na realni osi. Naj sedaj leži numerični zaklad

matrike  $A$  na realni osi. Potem je  $\langle Ax, x \rangle \in \mathbb{R}$  za vsak  $x \in \mathbb{C}^n$  oziroma  $\langle Ax, x \rangle = \overline{\langle Ax, x \rangle} = \langle x, Ax \rangle = \langle A^*x, x \rangle$ . Sledi  $\langle (A - A^*)x, x \rangle = 0$  za vsak  $x \in \mathbb{C}^n$ . Matrika  $A - A^*$  ima v numeričnem zakladu samo število 0. Ker je matrika  $A - A^*$  normalna matrika, jo lahko diagonaliziramo in v spektru ima samo vrednost 0. Zato je  $A - A^* = 0$  oziroma  $A = A^*$ . Pokazati moramo le še, da je  $\|A\| = \max\{|\lambda_m|, |\lambda_M|\}$ . Za  $\lambda \neq 0$  je

$$\begin{aligned} 4\|Ax\|^2 &= \langle A(\lambda x + \lambda^{-1}Ax), \lambda x + \lambda^{-1}Ax \rangle - \langle A(\lambda x - \lambda^{-1}Ax), \lambda x - \lambda^{-1}Ax \rangle \\ &\leq \max\{|\lambda_m|, |\lambda_M|\} [\|\lambda x + \lambda^{-1}Ax\|^2 + \|\lambda x - \lambda^{-1}Ax\|^2] \\ &= 2 \max\{|\lambda_m|, |\lambda_M|\} [\lambda^2\|x\|^2 + \lambda^{-2}\|Ax\|^2]. \end{aligned}$$

Če vstavimo  $\lambda^2 = \|Ax\|/\|x\|$  in krajšamo, dobimo

$$\|Ax\| \leq \max\{|\lambda_m|, |\lambda_M|\} \|x\|.$$

Sledi  $\|A\| \leq \max\{|\lambda_m|, |\lambda_M|\}$ . Ocena v drugo smer je trivialna. ■

Naslednja lema bo pomembna pri dokazu konveksnosti numeričnega zaklada.

**Lema 10.** *Naj bo  $A$  linearna preslikava dvodimenzionalnega kompleksnega vektorskega prostora vase,  $A : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ . Potem je  $W(A)$  polna elipsa, ki ima za gorišči lastni vrednosti preslikave.*

Lemo dokažemo tako, da numerični zaklad izračunamo. Najprej uporabimo Schurov izrek, ki pove, da je vsaka matrika unitarno podobna zgornjetrikotni matriki. Numeričnega zaklada zgornjetrikotne matrike pa ni več težko izračunati.

Zgornja lema nam bo pomagala dokazati eno najpomembnejših lastnosti numeričnega zaklada.

**Izrek 11.** *Numerični zaklad matrike je konveksna množica.*

*Dokaz.* Naj bosta  $\alpha$  in  $\beta$  različna elementa numeričnega zaklada matrike  $A$ . Pokazati moramo, da je daljica med  $\alpha$  in  $\beta$  cela v  $W(A)$ . Naj bosta  $x$  in  $y$  vektorja z normo 1, za katera velja  $\langle Ax, x \rangle = \alpha$  in  $\langle Ay, y \rangle = \beta$ . Ker je  $\alpha \neq \beta$ , sta vektorja  $x$  in  $y$  linearno neodvisna. Označimo z  $V$  dvorazsežen podprostor, ki ga razpenjata, in s  $P$  ortogonalni projektor prostora  $\mathbb{C}^n$  na  $V$ . Če  $\mathbb{C}^n$  zapišemo kot ortogonalno vsoto  $\mathbb{C}^n = V \oplus V^\perp$ , sta matriki preslikav  $A$  in  $PAP$  glede na izbrani razcep prostora bločni matriki oblik:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad PAP = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matrika  $A_{11}$  je sedaj  $2 \times 2$  matrika in očitno je  $W(A_{11}) \subseteq W(A)$ . Ker je  $\alpha = \langle Ax, x \rangle = \langle APx, Px \rangle = \langle PAPx, x \rangle$ , je  $\alpha \in W(A_{11})$ . Enako dobimo tudi  $\beta \in W(A_{11})$ . Numerični zaklad  $2 \times 2$  matrike  $A_{11}$  je elipsa, zato vsebuje tudi daljico med  $\alpha$  in  $\beta$ . Ker je  $W(A_{11}) \subseteq W(A)$ , daljico vsebuje tudi  $W(A)$ . ■

Numerični zaklad matrike nam lahko pomaga locirati spekter matrike in dobiti ocene za napake pri računanju lastnih vrednosti.

Numerični zaklad matrike so posplošili že v veliko smeri. Precej so raziskane tudi lastnosti numeričnega zaklada operatorja na neskončnorazsežnem Hilbertovem prostoru. Numerični zakladi neomejenih operatorjev (bilinear-nih form) so uporabni pri dokazovanju obstoja zaprtih razširitev neomejenih operatorjev.

### Numerični zaklad in Ponceletove krivulje

B. Mirman je leta 1998 objavil rezultat [9], ki pove, da je rob numeričnega zaklada določenih matrik Ponceletova krivulja. Ponceletove krivulje, ki jih je dobil, niso nujno kvadrike (elipse). Oglejmo si del njegovih rezultatov.

**Definicija 3.** Matrika  $B$  velikosti  $m \times m$  je *dilacija*  $n \times n$  matrike  $A$ ,  $m \geq n$ , kadar obstaja izometrija  $V : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ , za katero velja  $A = V^*BV$ .

**Trditev 12.** Naj bo  $B$  dilacija matrike  $A$ . Potem je  $W(A) \subseteq W(B)$ .

*Dokaz.* Ker je  $B$  dilacija matrike  $A$ , obstaja taka izometrija  $V$ , da je  $A = V^*BV$ . Naj bo  $\alpha \in W(A)$ . Potem obstaja enotski vektor  $x$ ,  $\|x\| = 1$ , da je  $\alpha = \langle Ax, x \rangle$ . Pišemo lahko:

$$\alpha = \langle Ax, x \rangle = \langle V^*BVx, x \rangle = \langle BVx, Vx \rangle = \langle By, y \rangle.$$

Ker je  $V$  izometrija, je tudi  $y = Vx$  enotski vektor in zato  $\alpha \in W(B)$ . ■

**Izrek 13.** Naj bo  $n > 1$ ,  $U$  unitarna matrika velikosti  $(n + 1) \times (n + 1)$  s samimi različnimi lastnimi vrednostmi in  $w \in \mathbb{C}^{n+1}$  enotski vektor, ki ni pravokoten na nobenega od lastnih vektorjev matrike  $U$ . Nadalje naj bo

$$\mathcal{L} = \{x \in \mathbb{C}^{n+1} : \langle x, w \rangle = 0\}$$

in  $Q$  ortogonalni projektor  $Q = I_{n+1} - ww^*$  prostora  $\mathbb{C}^{n+1}$  na  $\mathcal{L}$ . Potem je rob numeričnega zaklada matrike  $QUQ$  kot preslikave  $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$  Ponceletova krivulja reda  $n + 1$  glede na enotsko krožnico.



**Opomba 1.** Naj bodo  $e_1, e_2, \dots, e_n$  baza prostora  $\mathcal{L}$ . Matrika  $QUQ$ , zapisana v bazi  $\{e_1, e_2, \dots, e_n, w\}$ , je potem oblike

$$\begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rob numeričnega zaklada  $n \times n$  matrike  $T$  je Ponceletova krivulja glede na enotsko krožnico.

*Dokaz.* Matrika  $U$  je normalna matrika. Njen numerični zaklad je zato konveksni  $(n+1)$ -kotnik  $M$  z oglišči na enotski krožnici, natančneje v lastnih vrednostih matrike  $U$ . Matrika  $U$  je dilacija matrike  $T$ , zato ta  $(n+1)$ -kotnik vsebuje numerični zaklad matrike  $T$ . Označimo lastne vrednosti matrike  $U$  z  $e^{i\varphi_k}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n+1$ .

Vsaka stranica  $S$  ( $n+1$ )-kotnika povezuje dve lastni vrednosti. Naj bosta to  $e^{i\varphi_1}$  in  $e^{i\varphi_2}$ . Pripadajoča lastna vektorja naj bosta  $v_1$  in  $v_2$ . Označimo z  $\mathcal{M}$  vektorski prostor, razpet s tema vektorjema. Ta prostor je dvodimenzionalen. Numerični zaklad zožitve operatorja  $U$  na podprostor  $\mathcal{M}$  je ravno stranica  $S$ . Vsota dimenzij prostorov  $\mathcal{M}$  in  $\mathcal{L}$  je  $n+2$ . To pomeni, da imata prostora netrivialen presek. V preseku je torej vsaj en neničeln vektor. Naj bo to  $f$ . Predpostavimo lahko, da je  $\|f\| = 1$ . Ker je  $f \in \mathcal{M}$ , je  $\xi = \langle Uf, f \rangle$  na stranici  $S$ . Po drugi strani pa je  $Qf = f$ , saj je  $f \in \mathcal{L}$ . Zato je

$$\xi = \langle Tf, f \rangle = \langle Uf, f \rangle.$$

Točka  $\xi$  je torej tudi v  $W(T)$ . Stranica  $S$  in  $W(T)$  imata torej skupno vsaj eno točko. Dokažimo, da je v  $S \cap W(T)$  natanko ena točka. Recimo, da bi bili skupni dve točki. Potem bi obstajala dva enotska neodvisna vektorja  $f_1 \in \mathcal{M} \cap \mathcal{L}$  in  $f_2 \in \mathcal{M} \cap \mathcal{L}$  in  $\mathcal{M}$  bi bil vsebovan v  $\mathcal{L}$ . To pa je protislovje, saj  $\mathcal{M}$  vsebuje lastne vektorje matrike  $U$ ,  $\mathcal{L}$  pa ne. To seveda velja za vse stranice  $(n+1)$ -kotnika  $M$ . Zato je rob numeričnega zaklada krivulja, včrtana mnogokotniku  $M$ , ta pa ima enotski krog za očrtan krog.

Dokazati moramo še to, da če iz poljubne točke  $A_1$  enotske krožnice potegnemo tangento na rob  $W(T)$ , drugo presečišče te tangente z enotsko krožnico označimo z  $A_2$  in potem tako nadaljujemo, dobimo  $A_{n+1} = A_1$ .

Matrika  $U$  je dilacija matrike  $T$ . Definirajmo

$$U_\gamma = U(I - ww^* + e^{i\gamma}ww^*).$$

Očitno je  $U_\gamma^*U_\gamma = I$  in  $QU_\gamma Q = T$ . Torej je tudi  $U_\gamma$  unitarna dilacija matrike  $T$ . Numerični zaklad matrike  $U_\gamma$  je  $(n+1)$ -kotnik  $M_\gamma$  in rob  $W(T)$  je včrtan mnogokotniku  $M_\gamma$ . Če bi imel manj oglišč, bi unitarna matrika  $U_\gamma$  imela vsaj eno večkratno lastno vrednost. Podprostor  $\mathcal{L}$  bi moral vsebovati lastni vektor matrike  $U_\gamma$  (dimenzija  $\mathcal{L}$  je  $n$ ) in rob  $W(T)$  bi se dotaknil krožnice, kar pa vemo, da ni res.

Dokažimo še, da imata mnogokotnika  $M_{\gamma_1}$  in  $M_{\gamma_2}$  različna oglišča, če je  $0 < |\gamma_1 - \gamma_2| < 2\pi$ . Ni težko videti, da je  $\det U_\gamma = e^{i\gamma} \det U$ . Zato sta determinanti matrik  $U_{\gamma_1}$  in  $U_{\gamma_2}$  različni. Ker je determinanta produkt lastnih vrednosti matrike, matriki  $U_{\gamma_1}$  in  $U_{\gamma_2}$  nimata istih lastnih vrednosti. Še več, vse lastne vrednosti oziroma oglišča morajo biti različna. Če bi mnogokotnika imela skupno oglišče, bi bila po konstrukciji enaka. Ko  $\gamma$  preteče  $2\pi$  dolg interval, mnogokotniki  $M_\gamma$  pretečejo vse možne  $(n+1)$ -kotnike, včrtane v enotsko krožnico in očrtane robu  $W(T)$  in to brez ponavljanja. Lastne vrednosti matrike  $U_\gamma$  oziroma oglišča  $(n+1)$ -kotnika  $M_\gamma$  se z  $\gamma$  zvezno spreminjajo. Ker sta  $M_{\gamma_1}$  in  $M_{\gamma_2}$  različna, če se  $\gamma_1$  in  $\gamma_2$  razlikujeta za manj kot  $2\pi$ , in je  $M = M_0 = M_{2\pi}$ , potuje vsako oglišče mnogokotnika  $M_\gamma$  ravno do sosednjega oglišča mnogokotnika  $M$ , ko teče  $\gamma$  od 0 do  $2\pi$ . ■

Da smo prišli do  $(n+1)$ -Ponceletove krivulje, smo morali imeti matriko  $T$ , ki ima unitarno dilacijo. Take matrike imenujemo *UB matrike*. V članku [9] je dokazan naslednji izrek:

**Izrek 14.** *Matrika  $T$  ima unitarno dilacijo natanko tedaj, ko je  $TT^* = I - uu^*$ , kjer je  $u$  neničelni vektor,  $\|u\| \leq 1$ .*

Dokaz izreka, še mnogo zanimivih lastnosti in tudi relativno enostaven dokaz velikega Ponceletovega izreka za krožnice najdemo v istem članku [9].

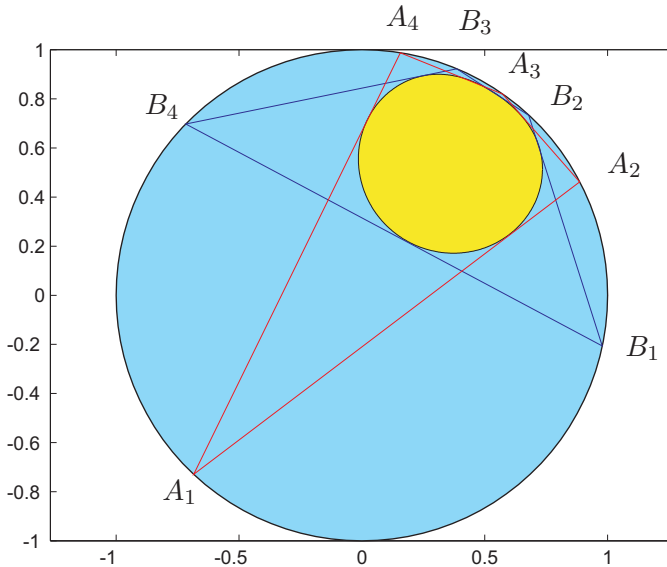
Vprašamo se lahko, ali so vse Ponceletove krivulje, dobljene kot rob numeričnega zaklada UB matrike, kvadrike. Odgovor je negativen.

Brez dokaza napišimo, da rob  $W(A)$  za matriko

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 - |\alpha|^2 & -\bar{\alpha}(1 - |\alpha|^2) \\ 0 & \alpha & 1 - |\alpha|^2 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}, \quad |\alpha| < 1, \quad (3)$$

ni kvadrika, je pa 4-Ponceletova krivulja glede na enotsko krožnico. Na sliki 3 je numerični zaklad matrike (3) pri  $\alpha = (2 + 3i)/5$ .

Naslednje vprašanje, ki so si ga postavili matematiki, je, ali so vse Ponceletove krivulje rob numeričnega zaklada kakšne UB matrike. Tudi tu je odgovor negativen. B. Mirman in P. Shukla [10] sta dokazala kriterij, ki pove, kdaj je Ponceletova krivulja rob numeričnega zaklada matrike, in tudi našla Ponceletove krivulje, ki niso rob numeričnega zaklada UB matrike. V članku je tudi posplošitev definicije Ponceletove krivulje iz realne ravnine v kompleksno ravnino. V obširnem seznamu literature v [10], [11] lahko najdemo članke, ki obravnavajo vse mogoče posplošitve Ponceletovih krivulj.



Slika 3. Ponceletova krivulja, ki ni kvadrika.

### LITERATURA

- [1] W. Chapple, *An essay on the properties of triangles inscribed in and circumscribed about two given circles*, Mischellanea Curiosa Mathematica **4** (1746), 117–124.
- [2] H. J. M. Bos, C. Kers, F. Oort in D. W. Raven, *Poncelet's closure theorem*, Expo. Math. **5** (1987), 289–364.
- [3] N. Fuss, *De quadrilateris quibus circulum tam inscribere quam circumscribere licet*, Nova acta acad. sci. Petrop. **10** (St Petersburg 1797), 103–125.
- [4] H. Dörrie, *100 great problems of elementary mathematics, their history and solutions*, New York (Dover), 1965.
- [5] J. V. Poncelet, *Traité des propriétés projectives des figures*, Paris 1822.
- [6] C. G. J. Jacobi, *Über die Anwendungen der elliptischen Transcendenten auf ein bekanntes Problem der Elementargeometrie*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **3** (1828), 376–389.
- [7] M. Berger, *Geometry II*, Springer, 1987.
- [8] P. A. Griffiths in J. Harris, *On Cayley's explicit solution of Poncelet porism*, l'Enseignement Math. **24** (1978), 31–40.
- [9] B. Mirman, *Numerical ranges and Poncelet curves*, Linear algebra Appl. **281** (1998), 59–85.
- [10] B. Mirman in P. Shukla, *A characterisation of complex plane Poncelet curves*, Linear algebra Appl. **408** (2005), 86–119.
- [11] B. Mirman, *Poncelet's porism in the finite real plane*, Linear and Multilinear Algebra **57** (2009) 5, 439–458.