

Razvoj matematične kognicije

Razvoj kognitivne znanosti je v 70-ih letih pomembno vplival na vedno večje zanimanje za področja, bogata z znanjem, in tako tudi na raziskovanje različnih predmetnih področij, med katerimi ima matematika gotovo reprezentativno mesto.

Raziskovanje matematične kognicije je potekalo predvsem po dveh poteh (De Corte, Greer & Verschaffel, 1996). Na eni strani je bila predmet proučevanja psihologov, ki so matematiko uporabljali za raziskovanje temeljnih problemov učenja, poučevanja in razvoja. Na drugi strani pa so kognitivni znanstveniki uporabljali matematiko v teoretične namene za preverjanje različnih hipotez o kogniciji in kot sredstvo za raziskovanje kognitivnih procesov.

Sprva sta bila komunikacija in sodelovanje med obema vrstama raziskovalnih usmeritev otežkočena (Fischbein, 1990), kasneje sta se obe smeri vedno bolj produktivno povezovali.

Ta prizadevanja so v zadnjem času pomembno obogatili antropologija in medkulturne raziskave ter koncepcija učenja matematike, ki temelji na konstrukciji njenega pomena in razumevanja z modelingom realnosti.

V sodobnih raziskavah kognitivnega razvoja prevladuje teorija človekovega predelovanja informacij. Ta omogoča analizo razvojnih sprememb na številnih področjih, vključno s percepcijo, reševanjem problemov, jezikom, matematičnim vedenjem in socialno kognicijo.

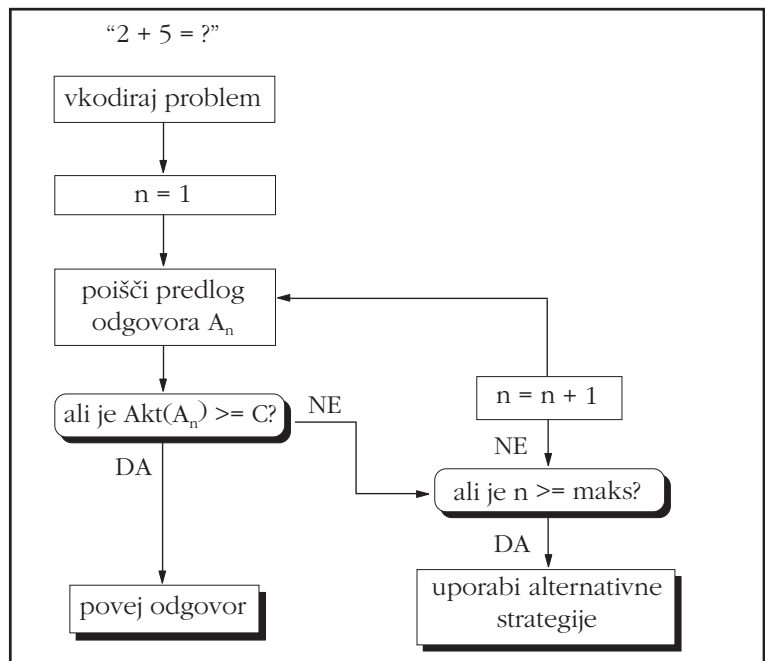
“Informacijski” razvojni psihologi zasledujejo tri cilje: opisati značilnosti obravnavanja informacij v različnih razvojnih obdobjih

človeka, razložiti prehode od ene razvojne stopnje do druge ter ugotoviti tiste lastnosti sistema predelovanja informacij, ki omogočajo ali pa ovirajo razvojni napredek.

Dober primer pristopa človekovega obravnavanja informacij predstavlja raziskovanje razvoja matematične kognicije. Raziskave Sieglerja in sodelavcev (Siegler & Jenkins, 1989; Siegler & Shranger, 1984) so reprezentativne na tem področju. Siegler (Siegler, 1988b) je v skladu s paradigmo raziskovanja človekovih informacijskih procesov uporabil kronometrični pristop v empiričnih raziskavah in računalniško simulacijo osnovnih reprezentacij znanja in procesov, ki so vključeni v reševanje enostavnih aritmetičnih problemov, da je preveril svojo teorijo oziroma model.

Z opazovanjem hitrosti in natančnosti, s katerima otroci rešujejo enostavne aritmetične probleme, je skušal določiti relativno majhno množico procesov, ki delujejo na mentalnih reprezentacijah znanja. Ti procesi so reprezentirani s ciklom priklica aritmetičnih dejstev, kot prikazuje *slika 1*. Znanje – aritmetična dejstva so reprezentirana z asociativno močjo, ki narašča z razvojem in učenjem. Dosežki oziroma uspešnost otrokovega reševanja aritmetičnih problemov je določena z interakcijo teh procesov in reprezentacijo znanja.

Po Sieglerju obstaja več korakov v reševanju enostavnih aritmetičnih problemov, kot je razvidno iz slike 1.



slika 1: Poenostavljen model mentalnih aritmetičnih procesov (Kail & Bisanz, 1992) po (Siegler & Shranger, 1984).

Število poskusov priklica je označeno z n in *maks* predstavlja zgornjo mejo tega števila. $Akt(A_n)$ se nanaša na aktivacijsko raven priklicanega odgovora v poskusu n in C pomeni kriterij zaupanja za sprejem priklicanega odgovora.

Otrok ali odrasla oseba začne reševanje z vkodiranjem aritmetičnega problema in nato poskuša priklicati odgovor (A_n) neposredno iz baze znanja v dolgoročnem spominu, kjer so shranjena aritmetična dejstva. Ta dejstva so reprezentirana kot asociacije med aritmetičnimi problemi, npr. $7 + 2$, in različnimi odgovori, npr. 8, 9, 10 itd. Te asociacije se razlikujejo po svoji moči. Če asociativna moč med priklicanimi odgovori in problemom ($Akt(A_n)$) preseže kriterij zaupanja (C), potem je dan odgovor. V primeru, da asociativna moč priklicanega odgovora ne preseže kriterija zaupanja, sledi ponoven poskus priklica odgovora. Ta cikel priklica se ponavlja, dokler ni priklican odgovor, ki ima asociativno moč, ki presega kriterij zaupanja, ali dokler število poskusov priklica ne presega določenega limita (*maks*), t.j. kriterij dolžine iskanja. V slednjem primeru je priklic zavržen in odgovor se tvori z uporabo strategij, kot sta npr. štetje s prsti in mentalno štetje.

Ta splošni proces, ki je prikazan na sliki 1, se ne spreminja z leti.

Sieglerjev model distribucije asociacij odgovarja na vprašanja, kako se učimo in kako so reprezentirane posamezne kombinacije števil v dolgoročnem spominu, ki omogočajo takojšen priklic rešitve aritmetičnih nalog kot tudi izbire strategij reševanja (Siegler & Jenkins, 1989). Tako model razlaga reprezentacijo znanja, procese, ki delujejo na teh reprezentacijah in omogočajo reševanje problema, ter osnovni mehanizem učenja – kako rešitve problemov ali odgovori vplivajo nazaj in preoblikujejo znanje, reprezentirano v dolgoročnem spominu.

Po Sieglerjevi teoriji distribucije asociacij otroci z uporabo strategij računanja (seštevanja, odštevanja, množenja) razvijajo bolj ali manj močne asociacije med aritmetičnimi problemi in odgovori. Npr. asociacija med $3 + 3$ in 6 se ojača, ko otrok reši $3 + 3$ z uporabo strategije (npr. šteje s prsti). Strategije pomenijo zaporedje kognitivnih operacij, ki se razlikujejo od tistih, ki so vključene v priklic, in omogočajo generiranje odgovorov za določen razred problemov. Ker otroci ne pridejo vedno do pravega odgovora, se vzpostavljajo asociacije tudi med problemom in nepravilnimi odgovori, ki pa so običajno šibkejše.

V skladu s Sieglerjevo teorijo so temeljni aritmetični problemi seštevanja ali odštevanja asociativno povezani z večjim številom

možnih odgovorov, ki variirajo v svoji asociativni moči. Običajno se vzpostavi najmočnejša asociativna zveza s pravilnim odgovorom. To otrokom omogoča, da teh aritmetičnih problemov ne rešujejo več z uporabo strategij računanja, ampak preprosto s priklicem pravilnega odgovora.

Z razvojem postaja priklic pravilnega odgovora najpogostejši način reševanja enostavnih aritmetičnih problemov, ker priklic zahteva najmanj časa za reševanje in najmanj obremeni kapaciteto kratkoročnega spomina (Siegler, 1986).

Izbor posamezne strategije reševanja problemov je po Sieglerjevi teoriji odvisen od distribucije asociacij med aritmetičnim problemom in potencialnimi odgovori. V primeru zelo koničaste distribucije ima en sam odgovor največjo asociativno moč, običajno je to pravilen odgovor. Sploščena distribucija pomeni, da je asociativna moč porazdeljena na več odgovorov. Koničasta distribucija pogosteje vodi k uporabi priklica pri reševanju problemov, zmanjšuje možnosti napačnih odgovorov in skrajšuje čas reševanja. Za sploščene distribucije velja ravno obratno.

Izbor strategije reševanja problema (priklic ali strategija reševanja) je poleg distribucije asociacij odvisen tudi od kriterija zaupanja (Siegler & Cambell, 1989). Kriterij zaupanja je prag, ki mora biti prekoračen z asociativno močjo priklicanega odgovora, da je odgovor dan. Kriterij zaupanja predstavlja notranji standard, s katerim otrok meri zaupanje v pravilnost priklicanega odgovora (Siegler, 1988b). Nizek kriterij zaupanja vodi k pogostejši uporabi strategije priklica in visok kriterij zaupanja k pogostejši uporabi drugih strategij (računanja), pri isti koničavosti distribucije asociacij.

Siegler je testiral uporabnost modela na otrokovih enostavnih aritmetičnih spretnostih z vrsto eksperimentov. Z eksperimenti je preveril predikcije o uporabi različnih strategij reševanja aritmetičnih problemov in kako te izkušnje vplivajo na napredek v reševanju. Preverjeno je bilo tudi, koliko model upošteva različne fenomene, ki se tičejo težavnosti aritmetičnih problemov in različnih tipov napak v reševanju. Eksperimenti so potrdili celo vrsto domnev, ki so v osnovi modela (Siegler & Cambell, 1989).

Prva domneva je bila, da otroci uporabljajo multiple strategije na mnogih aritmetičnih nalogah. Obstaja interindividualna in intraindividualna variabilnost v uporabi strategij.

Druga domneva govori o otrokovi izbiri strategij, ki je prilagojena različnim nalogam in situacijskim zahtevam. Adaptivna izbira strategij otrokom omogoča, da rešijo problem hitro in natančno. Bolj ko je problem težak, pogosteje bodo otroci uporabljali strategijo računanja namesto priklica. To je edini način za uspešno rešitev težke naloge.

Tretja domneva je bila, da adaptivna izbira strategij lahko izhaja iz uporabe proceduralnega znanja, ki ni dostopno introspekciji.

Četrta domneva, na kateri temelji model, je, da uporaba multiplih strategij vpliva na učenje. Problem, ki je težak z uporabo ene strategije, je lahek z uporabo druge strategije reševanja.

Model izbire strategij je bil potrjen tudi s pomočjo računalniških simulacij. Računalniške simulacije otrokove izbire strategij pri seštevanju, odštevanju in množenju so potrdile, da model zadovoljivo pojasnjuje otrokove načine reševanja kot tudi spremembe v reševanju z izkušnjami oziroma učenjem (Siegler & Schranger, 1984; Siegler, 1988b).

Normalen razvoj spretnosti mora odražati premik od pretežne uporabe strategij računanja k vedno večji uporabi strategije priklica aritmetičnih dejstev, pri čemer narašča tudi pravilnost rešitev.

Vendar se otroci razlikujejo v razvoju matematičnih spretnosti. Sieglerjev model omogoča identifikacijo dveh virov individualnih razlik: koničavost distribucije asociacij in kriterij zaupanja.

Siegler (Siegler, 1988a) je dobil konsistentne individualne razlike v izbiri strategij pri seštevanju, odštevanju in branju (identifikacija besed). Otroci s koničastimi distribucijami so pogosteje uporabljali priklic in bili točnejši v odgovorih ter hitrejši kot otroci s sploščenimi distribucijami. Otroci, ki so postavljali visok kriterij zaupanja, so se redkeje odločali za priklic odgovora in so pogosteje uporabljali druge strategije kot otroci z manj strogim kriterijem zaupanja.

Izvedena je bila tudi klasterska analiza, da bi ugotovili, ali otroci tvorijo posebne (značilne) skupine glede na uspešnost. S klastersko analizo so bile dobljene tri skupine otrok: odlični, dobri in slabši učenci, ki so se med seboj razlikovali po parametrih modela. Odlični učenci so imeli zelo dobro znanje, koničaste distribucije in visok kriterij zaupanja. Dobri učenci so imeli dobro znanje, koničaste distribucije, vendar so postavljali nižji kriterij zaupanja. Tretja skupina otrok je imela slabše znanje, manj koničaste distribucije kot otroci preostalih dveh skupin in nižji kriterij zaupanja.

Za razumevanje razvoja matematične kognicije so pomembne številne razlike, ki so dobljene med omenjenimi tremi skupinami:

- število aritmetičnih problemov seštevanja in odštevanja, ki so jih rešili s pomočjo priklica, je bilo najvišje pri odličnih učencih (97 odstotkov), sledijo dobri učenci (80 %) in nato slabši (53 %);
- število pravih rešitev aritmetičnih problemov je bilo najmanjše pri slabših učencih, ki so naredili 20 odstotkov več napak kot ostali dve skupini;
- čas, potreben za reševanje aritmetičnih problemov, je bil pri slabših učencih za 50 odstotkov daljši kot pri uspešnih;
- otroci iz prvih dveh skupin, ki so bili uspešnejši, so poleg priklica pogosteje uporabljali bolj zrele strategije reševanja

aritmetičnih nalog in so rabili manj materialnih opor kot otroci tretje skupine.

Čeprav otroci uporabljajo dve ali več strategij za reševanje enostavnih aritmetičnih problemov, lahko na osnovi modela distribucije asociacij oziroma izbire strategij sklepamo na razvojno zrelost otrokove izbire strategij.

Alternativne strategije, ki jih uporabljajo otroci, se razlikujejo po verjetnosti tvorjenja pravilnega odgovora, v trajanju izvajanja in v obremenitvi delovnega spomina (Siegler, 1986). Adaptivna izbira strategij zelo verjetno sloni na pretehtani kombinaciji vseh treh dejavnikov, ki opredeljujejo stopnjo zrelosti strategij.

Z razvojem je opaziti naraščanje uporabe zrelejših strategij. To pa ne pomeni le preprosto substitucijo ene strategije z drugo (Ashcraft, 1982), temveč "razvoj vključuje spremembe v zbirki obstoječih strategij kot tudi konstrukcijo novih in opuščanje starih strategij" (Siegler & Jenkins, 1989, str. 27).

Sodobne raziskave matematične kognicije poudarjajo poleg omenjenih še nekatere druge komponente kot najbolj bistvene za razvoj in uspešnost pri matematiki (De Corte, 1995; Schoenfeld, 1992):

1. Dobro organizirana in fleksibilna ter dostopna *baza znanja*, ki vsebuje dejstva, simbole, definicije, formule, algoritme, koncepte, pravila. To je vsebinski vidik matematike kot predmetnega področja.
2. Hevristične metode, t.j. *strategije iskanja rešitve* problemov, ki omogočajo sistematičen pristop k reševanju problemov (t.j. analiziranje problema, razdelitev problema v podprobleme, vizualiziranje problema z uporabo grafičnih prikazov ipd.).
3. Afektivna komponenta vključuje razna *prepričanja* o matematiki (prepričanje, da reševanje matematičnih problemov zahteva veliko truda ali da je stvar sreče), *stališča* (negativno stališče do besednih problemov) in *čustva* (zadovoljstvo ali nezadovoljstvo pri reševanju težjega problema).
4. *Metakognicija*, ki vključuje znanja in prepričanja, ki se nanašajo na delovanje lastnih kognitivnih procesov (prepričanje, da smo slabi v matematiki) ter spretnosti in strategije, ki se nanašajo na nadzorovanje lastnih kognitivnih procesov (načrtovanje procesa reševanja, nadzorovanje reševanja, evalviranje rešitve, refleksija lastnega učenja in reševanja problemov).

Vse štiri komponente moramo razumeti integrativno in interaktivno. To pomeni, da matematična kompetenca vsebuje več kot le sumo omenjenih komponent.

V razvoju matematične kognicije je tudi okolje velikega pomena. Pridobivanje znanja in strategij ne poteka neodvisno od socialnega in fizičnega konteksta, ki osmišlja to področje in opredeljuje njegovo uporabnost. To potrjujejo številne raziskave o vplivu kulturnih in situacijskih dejavnikov na pridobivanje aritmetičnega znanja, ki so bile opravljene pod nazivom "etnomatematika in vsakodnevna matematična kognicija" (Nunes, 1992). Tako je vrsta raziskav o t.i. "ulični matematiki" ('*street mathematics*') pokazala, da pogosto obstaja prepad med formalno, šolsko matematiko in neformalno matematiko, s katero se rešujejo vsakodnevni problemi in problemi resničnega življenja. Zato so sodobna prizadevanja na področju poučevanja matematike usmerjena v načrtovanje učinkovitejšega učnega okolja. Eden takih primerov je RME (Realistic Mathematics Education), ki so ga razvili na Nizozemskem. Pri RME začnejo otroci spoznavati in uporabljati matematiko v situacijah in kontekstih resničnega življenja.

LITERATURA

- ASHCRAFT, M.H. (1982): "The Development of Mental Arithmetic: A Chronometric Approach", *Developmental Review*, št. 2, 213-236.
- DE CORTE, E. (1995): "Fostering Cognitive Growth: A Perspective From Research On Mathematics Learning and Instruction", *Educational Psychology*, št. 30, 37-46.
- DE CORTE, E., GREER, B. & VERSCHAFFEL, L. (1996): "Mathematics", v BERLINER, D.C. & CALFEE, R.C. (ur.): *Handbook of Educational Psychology*, Macmillan, New York.
- FISCHBEIN, E. (1990): "Introduction", v NESCHER, P. & KILPATRICK, J. (ur.): *Mathematics and Cognition: A Research Synthesis by International Group for the Psychology of Mathematics Education*, University Press, Cambridge.
- KAIL, R. & BISANZ, J. (1992): "The Information-processing Perspective on Cognitive Development in Childhood and Adolescence", v: STERNBERG, R.J. & BERG C.A. (ur.): *Intellectual Development*, University Press, Cambridge.
- NUNES, T. (1992): "Ethnomathematics and Everyday Cognition", v: GROUWS, D.A. (ur.): *Handbook on Mathematics Teaching and Learning*, Macmillan, New York.
- SCHOENFELD, A.H. (1992): "Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense-making in Mathematics", v: GROUWS, D.A. (ur.): *Handbook on Mathematics Teaching and Learning*, Macmillan, New York.
- SIEGLER, R.S. (1983): "Information Processing Approaches to Development", v: MUSSER, P.H. (ur.): *Carmichael's Manual of Child Psychology*, Wiley, New York.
- SIEGLER, R.S. (1986): "Unities Across Domains in Children's Strategy Choices", v: *Minnesota Symposium on Child Development*, Erlbaum, Hillsdale - New York.
- SIEGLER, R.S. (1988a): "Individual Differences in Strategy Choices: Good Students, Not-So-Good Students, and Perfectionists", *Child Development*, št. 59, 833-851.

- SIEGLER, R.S. (1988b): "Strategy Choice Procedures and Development of Multiplication Skills", *Journal of Experimental Psychology: General*, vol. 117, št. 3, 258-275.
- SIEGLER, R.S. & CAMBELL, J.I.D. (1989): "Individual Differences in Children's Strategy Choices", v: ACKERMAN, P.L., STERNBERG, R.J. & GLASER, R. (ur.): *Learning and Individual Differences*, W.H. Freeman and Company, New York.
- SIEGLER, R.S. & JENKINS, E. (1989): "Children Discover new Strategies", Erlbaum, Hillsdale – New York.
- SIEGLER, R.S. & SCHRANGER, J. (1984): "Strategy Choices in Addition and Subtraction: How Do children Know What to Do?", v: SOPHIAN, C (ur.): *Origins of Cognitive Skills*, Erlbaum, Hillsdale – New York.