PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **7** (1979/1980)
Številka 4
Strani 226–236

Tomaž Pisanski:

NAJCENEJŠE DREVO

Ključne besede: matematika, računalništvo, kombinatorika, teorija grafov, najcenejše drevo, Primov postopek, omrežja.

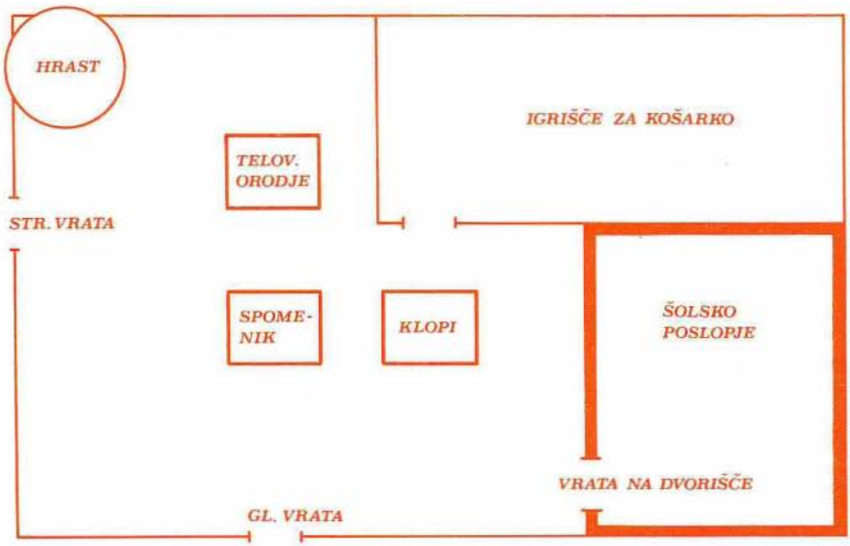
Elektronska verzija: http://www.presek.si/7/444-Pisanski.pdf

NAJCENEJŠE DREVO

Pred kratkim so zgradili novo šolo. Lepo so jo opremili. Ko pa so postavili zadnjo klop v učilnico, je zmanjkalo denarja, okolica pa je bila še neurejena. Ravnatelj si je v obupu pulil redke lase na glavi, saj se je neusmiljeno bližal dan svečane otvoritve nove šole, okrog šole pa še kupi blata! Šoli pripada veliko dvorišče. Le kdo bi ga hitro in lepo uredil - pa še brez plačila?

Na pomoč so priskočili učenci! Na sestanku šolske skupnosti so se dogovorili, da bodo sami uredili dvorišče. Napravili so načrt (Slika 1).

Sklenili so, da bodo posejali travo. Postavili bodo *spomenik* - skulpturo, ki je na lanski občinski razstavi - še v stari šoli

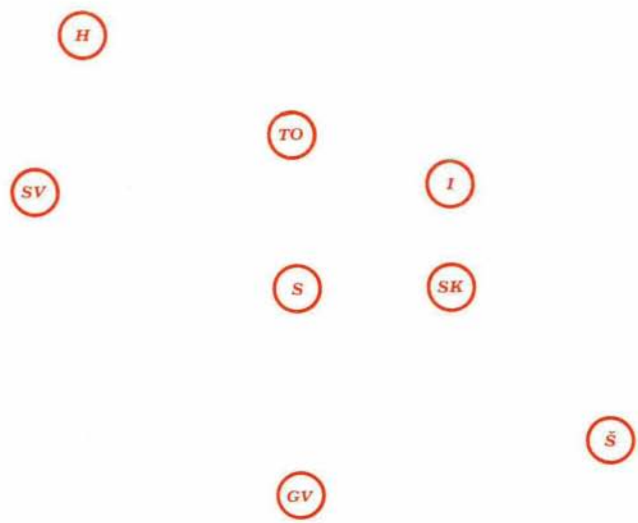


Slika 1: Načrt šolskega dvorišča, ki so ga izdelali učenci na sestanku šolske skupnosti.

- dobila prvo nagrado. Kasneje bodo uredili *igrišče za košarko*. Stari *hrast* bo kot nalašč za plezanje. Postavili bodo tudi *telovadno orodje*: dva droga in kroge. V bližini zgradbe bo *skupina klopi*. Za dostop na dvorišče bodo uporabili že obstoječa *glavna* in *stranska* vrata in *vrata iz šolskega poslopja na dvorišče*.

Z delom so pohiteli in trava je že začela poganjati. Nenadoma so se učenci spomnili, da niso začrtali stezic. Stezice so nujno potrebne, saj bo drugače trava kmalu uničena. Ker je pesek drag, pa tudi delo je naporno, so se dogovorili, da bodo stezice napeljali, kar se da varčno. Nepotrebnim križiščem se bodo izognili, ker je ureditev križišč še posebej težavna.

Povezati morajo spomenik, telovadno orodje, hrast, skupino klopi in košarkarsko igrišče z glavnimi in stranskimi vrati ter s šolskim poslopjem. Pri tem morajo seveda varčevati s peskom in svojimi močmi. Opazili so, da naloga ni lahka, zato so jo prepustili matematičnemu krožku, ki že vrsto let uspešno deluje na šoli.



Slika 2: Prvi načrt šolskega dvorišča, ki so ga izdelali krožkarji v sredo po pouku.

Matematiki so se sestali v sredo po pouku. Pred seboj so imeli jasno in uporabno nalogo. Dokončati morajo načrt. Naloga je bila zelo nenavadna in niso še srečali podobne. Zato so se je lotili z vso previdnostjo. Najprej so sliko poenostavili. Odmislili so si vse, kar je za reševanje nebistvenega. Narisali so nov načrt (Slika 2). Objekte na načrtu so takole označili:

zaporedna številka	oznaka	objekt
1	H	hrast
2	I	igrišče za košarko
3	SV	stranska vrata
4	TO	telovadno orodje
5	S	spomenik
6	SK	skupina klopi
7	GV	glavna vrata
8	$Š$	šola (vrata na dvorišče)

Tehle osem objektov je treba med seboj povezati. Povezali jih bodo seveda z ravnimi črtami, saj je ravna črta krajša od krive. Izbranim objektom so krožkarji rekli *točke*, stezicam, oziroma črtam med njimi pa *povezave*. Če bi povezali vsak par točk s stezico, bi potrebovali $8.7/2 = 28$ povezav. Eden od krožkarjev je rekel: "Seveda, če bi imeli n točk, bi potrebovali $n(n - 1)/2$ povezav, toliko kot je v n-kotniku stranic in diagonal". Jasno je bilo, da vseh 28 stezic ne bodo potrebovali. Če bi namreč začrtali stezici od stranskih vrat do telovadnega orodja in od tam naprej do igrišča za košarko, tedaj ne potrebujejo stezice od stranskih vrat do košarkarskega igrišča! (Slika 3)

Slika 3: Nekatere od 28 možnih stezic so odveč.

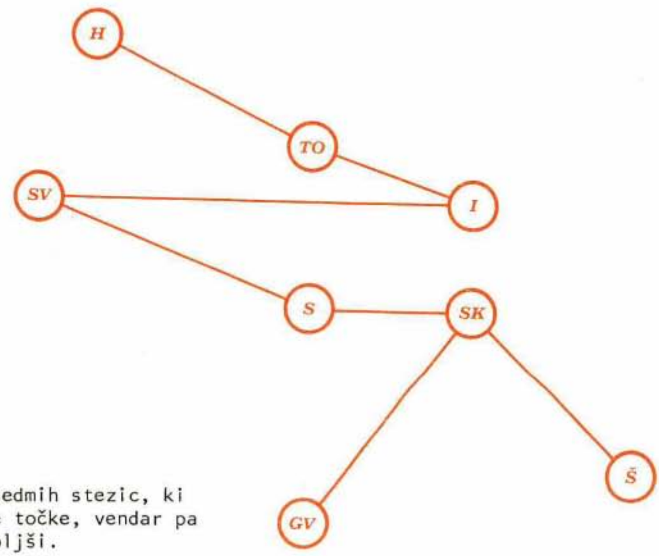
V dnevnik matematičnega krožka so zapisali: *Koliko (najmanj) povezav potrebujemo, da povežemo 8 točk v skupino? Koliko povezav potrebujemo, da povežemo n točk?*

Po preizkušanju so se zedinili in svojo ugotovitev zabeležili:

Potrebujemo 7 povezav in v splošnem, če želimo povezati n točk, potrebujemo n-1 povezav. (Če bo čas, bomo to tudi dokazali.)

Obogateni z novim spoznanjem so se pogumno lotili načrtovanja "sistema stezic" na šolskem dvorišču. Načrt, ki so ga dobili, prikazuje slika 4.

Z načrtom pa niso bili zadovoljni. Opazili so, da ni najboljši. Če bi stezico od stranskih vrat (SV) do košarkarskega igrišča (I) nadomestili s krajšo stezico od telovadnega orodja (TO) do spomenika (S), bi prihranili pesek in delo. Naloga, ki so jo reševali, je bila težja, kot so sprva menili. Zato so krožkarji poklicali na pomoč mentorja. Ko so ga seznanili s problemom, jim je povedal, da pravijo matematiki strukturam, sestavljenim iz točk in povezav *grafi*. Če nosijo povezave *vrednosti* (npr. dolžine, cene, kapacitete), pa jih imenujejo *vrednostni*



Slika 4: Sistem sedmih stezic, ki povezuje točke, vendar pa ni najboljši.

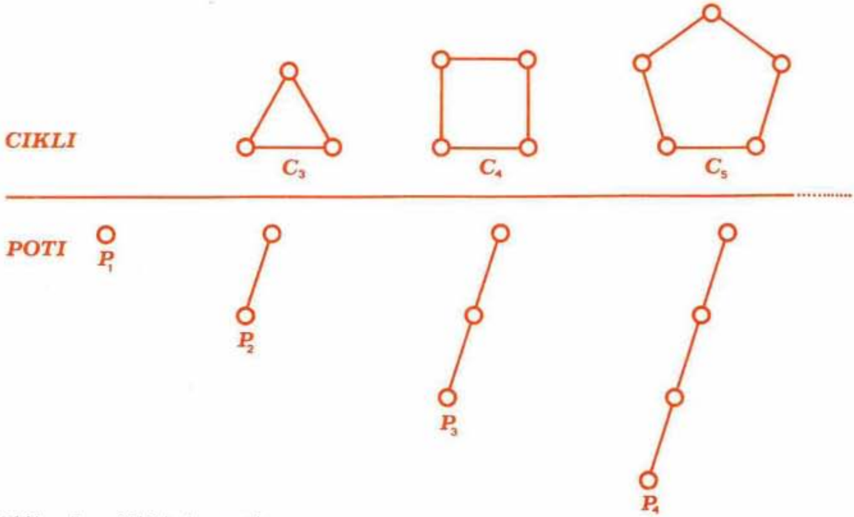
grafi ali *omrežja*. Krožkarje so začeli grafi zanimati. Mentor jim je naročil, naj si v šolski knjižnici ogledajo stare številke *Preseka* in naj poiščejo vse prispevke v zvezi z grafi. Sam pa je obljubil, da se bo pozanimal o rešitvi tega problema. Dogovorili so se za sestanek naslednji dan, saj je bilo le malo časa na razpolago.

Na četrtkov sestanek je predsednik krožka prinesel s seboj kopico Presekov. Našli so precej prispevkov, v katerih je mogoče zaslediti grafe.

Naslov članka	Letnik	Stran
SIM	P1/4	175
Problem iz igre SIM	P2/1	43
Labirint	P3/1 in	ovitek
	P3/3	ovitek
Uporovna vezja	P3/4	186
Naloge	P4/1 in	48
	P4/2	100
Problem o barvanju kart	P5/2	73
Nekaj o grafih in njihovi uporabi	P6/1	24
Matematika in šah	P6/2	71

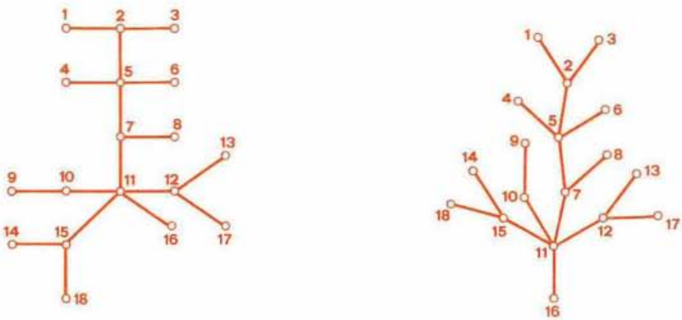
Mentor pa je v matematični knjižnici na Jadranski 19 v Ljubljani nabral nekaj knjig o grafih. Krožkarji so se takoj poglobili v študij grafov. Graf je *povezan*, če je mogoče iz poljubne točke v njem priti po povezavah v vsako drugo točko. Seveda so jih povezani grafi najbolj zanimali. Sošolci so jim zabičali, da ne marajo pohojene trave!

Kmalu so spoznali kup novih izrazov. Seznanili so se s *cikli*. Cikel dobimo, če vzamemo oglišča mnogokotnika za točke, stranice mnogokotnika pa za povezave grafa. Če izhajamo iz m-kotnika, dobimo C_m, *cikel na m točkah*. Če ciklu odstranimo povezavo, dobimo graf, ki mu rečejo *pot*. Iz C_m dobimo tako P_m, *pot na m točkah*. Cikel C_m ima m točk in m povezav, pot P_m pa ima m točk



Slika 5: Cikli in poti

Slika 6: Primer drevesa na 18 točkah. Narisali smo ga na dva načina.



in m-1 povezav. C_m in P_m sta povezana grafa. Pot P_m je le poseben primer drevesa. *Drevo* na m točkah je vsak povezan graf z m točkami in m-1 povezavami. Drevo ima zanimive lastnosti:

- če mu odvzamemo katerokoli povezavo, dobimo graf, ki ni povezan
- drevo ne vsebuje nobenega cikla
- če drevesu dodamo še kakšno povezavo, dobimo graf, ki vsebuje cikel.

če si drevesa narišemo, opazimo, da spominjajo na prava drevesa, od tod tudi "čudno" ime, ki ga nosijo (Slika 6).

Krožkarji so zdaj dokončno razumeli, kaj pravzaprav iščejo. Na izbranih osem točk morajo napeti drevo, tako da bo *cena*, to je vsota dolžin vseh sedmih povezav, najmanjša. Mentor je v neki knjigi našel ta problem z imenom: *problem najcenejšega drevesa*. Zraven je bila tudi splošna rešitev tega problema, ki jo je leta 1957 našel R. Prim in se po njem imenuje *Primov postopek (algoritem)* za konstrukcijo najcenejšega drevesa. Primov postopek gradi najcenejše drevo po korakih. Začne s poljubno točko, potem pa vsakič doda točko in povezavo, dokler ne poveže vseh točk med seboj.

PRIMOV POSTOPEK: Na začetku imamo n točk v ravnini. Noben par točk ni med seboj povezan. Na koncu dobimo najcenejše drevo.

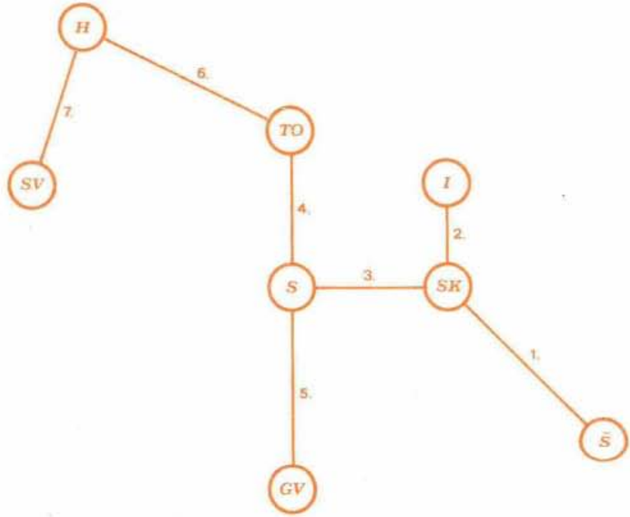
1. korak: Izberi poljubno točko. Imenuj jo *povezani del*. Preostale točke imenuj *nepovezani del*.
2. korak: Dokler je nepovezani del neprazen, ponavljaj:
   - 2.1: V povezanem delu izberi točko x, v nepovezanem delu pa točko y tako, da bo razdalja med njima najmanjša.
   - 2.2: Poveži x in y s povezavo in prenesi y iz nepovezanega dela v povezani del.

Učenci so temeljito premislili delovanje tega postopka in so se lotili dela. Natančno so izmerili razdalje med posameznimi točkami. Izmerjene razdalje so vnesli v razpredelnico:

	H	*I*	*SV*	*TO*	*S*	*SK*	*GV*	*Š*
H	-	7,62	3,16	4,47	6,40	8,60	9,85	12,81
I	7,62	-	8,00	3,16	3,61	2,00	6,71	5,83
SV	3,16	8,00	-	5,10	5,39	8,25	7,81	12,08
TO	4,47	3,16	5,10	-	3,00	4,24	7,00	8,49
S	6,40	3,16	5,39	3,00	-	3,00	4,00	6,71
SK	8,60	2,00	8,25	4,24	3,00	-	5,00	4,24
GV	9,85	6,71	7,81	7,00	4,00	5,00	-	6,08
Š	12,81	5,83	12,08	8,49	6,71	4,24	6,08	-

Za začetno točko (glej 1. korak Primovega postopka!) so si izbrali šolo (*Š*). V povezanem delu je sedaj samo šola. Iz zadnje vrstice razpredelnice se lepo vidi, da je *SK* najbližje *Š*, zato so dodali povezavo med šolo in skupino klopi. V novem povezanem delu sta sedaj šola in skupina klopi (2. korak postopka). Najbližje šoli ali skupini klopi je igrišče... Celotni potek postopka prikazuje naslednja razpredelnica:

Zaporedna številka	Povezani del	Nepovezani del	Točka x		Točka y	Razdalja
1.	*Š*	*SK,I,S,GV,TO,H,SV*	*Š*	-	*K*	4,24
2.	*Š,SK*	*I,S,GV,TO,H,SV*	*SK*	-	*I*	2,00
3.	*Š,SK,I*	*S,GV,TO,H,SV*	*SK*	-	*S*	3,00
4.	*Š,SK,I,S,*	*GV,TO,H,SV*	*S*	-	*TO*	3,00
5.	*Š,SK,I,S,TO,*	*GV,H,SV*	*S*	-	*GV*	4,00
6.	*Š,SK,I,S,TO,GV*	*H,SV*	*TO*	-	*H*	4,47
7.	*Š,SK,I,S,TO,GV,H*	*SV*	*H*	-	*SV*	3,16
-	*Š,SK,I,S,TO,GV,H,SV*		-	-	-	---



Slika 7: Dokončni načrt šolskega dvorišča. Skupna dolžina stezic je 23,87. To je najboljša rešitev.

Vsota dolžin vseh stezic v drevesu je:

4,24 + 2,00 + 3,00 + 3,00 + 4,00 + 4,47 + 3,16 = 23,87 enot.

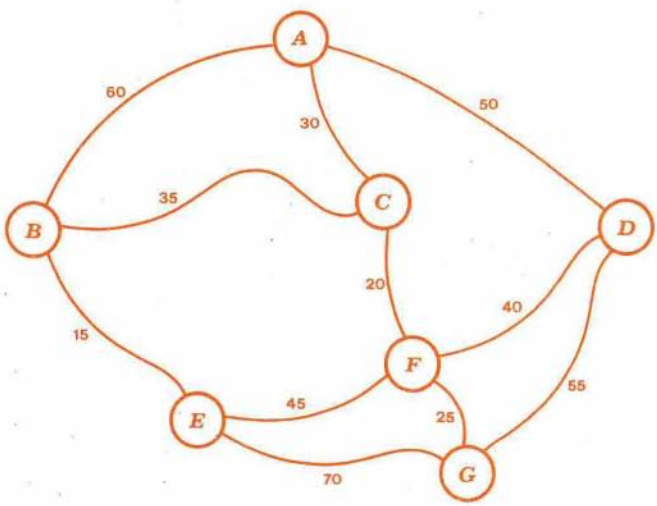
To je cena najcenejšega drevesa. Učenci so se prepričali, da bi dobili isto drevo, če bi začeli s kakšno drugo točko, le po vezave bi vstopale vanj v drugačnem vrstnem redu.

Krožkarji so napravili dokončni načrt (slika 7). Številke pri povezavah povedo, po kakšnem vrstnem redu so se odločali zanje.

Mladi matematiki so bili z rešitvijo zadovoljni, saj so opravili koristno delo: sebi in sošolcem so prihranili napor, šoli pa denar. Tu je naše zgodbe konec. Ni pa še konec uporabe Primovega postopka.

Oglejmo si soroden problem. Na sliki 8 je narisano cestno omrežje, ki povezuje kraje A, B, C, D, E, F in G.

Telefonsko podjetje se je namenilo povezati mesta v telefonsko omrežje. Zaradi lažjega vzdrževanja so se odločili, da bodo te

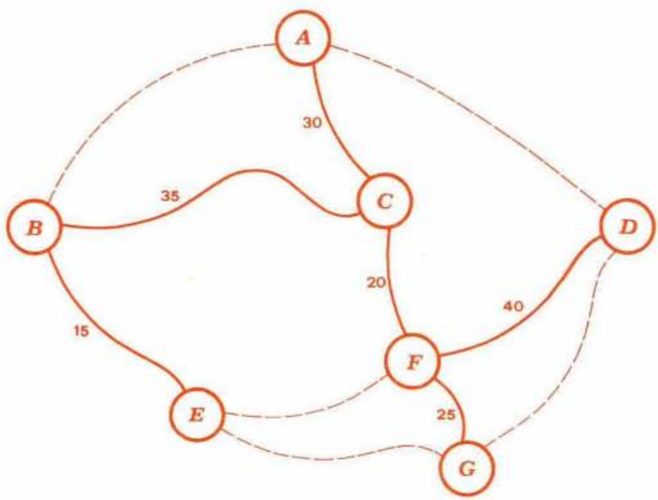


Slika 8: Cestno omrežje. Številke ob cestah pomenijo razdalje.

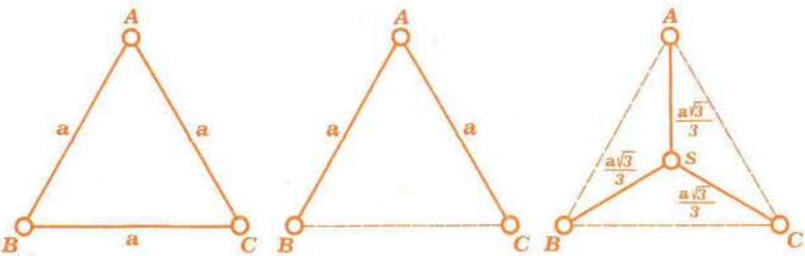
lefonski kabli potekali ob obstoječih cestah. Spet je treba poiskati najcenejše omrežje, spet je tu problem najcenejšega drevesa. Naloga je le malo drugačna od prve. Zdaj moramo namreč poiskati najcenejše drevo na že *obstoječem* vrednostnem grafu. V drevo smemo vključiti le obstoječe povezave. Tako npr. ne smemo napeljati kabla neposredno od mesta A do mesta G. Primov postopek pa deluje pravilno tudi v tem primeru. Slika 9 nam kaže najcenejše drevo. Telefonsko podjetje bo potrebovalo 165 km kabla.

Primov postopek nam v povezanem grafu v vsakem primeru poišče najcenejše drevo. Če ima več povezav v grafu isto ceno (vrednost), se lahko zgodi, da obstaja več najcenejših dreves. Postopek nam v tem primeru izbere eno od njih.

V resnici je prva naloga le poseben primer druge. Če imamo namreč n točk v ravnini in poljubni dve med njimi povežemo z daljico, dobimo *polni graf* K_n na n točkah. Povezave (skupaj jih je $n(n-1)/2$) nosijo vrednosti, ki so v tem primeru kar dolži



Slika 9: Načrt za napeljavo telefonskih kablov. Skupna dolžina kabla je 165 km.



Slika 10: Primov postopek najde v grafu (1) najcenejše drevo (2) dolžine $2a$, medtem ko je mogoče dodati točko S v središču trikotnika ABC in dobiti cenejše, Steinerjevo drevo z dolžino $1{,}73a$ (3).

ne daljic. V drugi nalogi imamo opravka s splošnim grafom, v katerem vrednosti povezav niso nujno dolžine daljic.

Če pazljivo preberete začetek tega prispevka, boste opazili, da smo rekli, da v omrežju stezic na šolskem dvorišču ne želimo *nepotrebnih križišč* . S tem smo križišča omejili na že obstoječe točke. Brez tega pogoja dobimo namreč drugo nalogo, nalogo o *Steinerjevem drevesu*. Razliko med obema nalogama si bomo ogledali na posebnem primeru. Za točke vzemimo oglišča enakostraničnega trikotnika z dolžino stranice a. S Primovim postopkom dobimo enega od treh minimalnih dreves z dolžino $2a$. Če pa dopustimo dodatne točke, dobimo lahko cenejše, Steinerjevo drevo s ceno (dolžino) $\sqrt{3}a = 1{,}73a$ (glej sliko 10).

Za konec povejmo le tole žalostno dejstvo. Doslej matematikom še ni uspelo najti učinkovitega postopka za iskanje Steinerjevega drevesa v splošnem primeru. Vse kar je do slej znanega o tem problemu, daje celo slutiti, da učinkovitega postopka za ta problem sploh *ni* !

Tomaž Pisanski