

Also available at <http://amc-journal.eu>  
ISSN 1855-3966 (printed edn.), ISSN 1855-3974 (electronic edn.)  
Ars Mathematica Contemporanea Volume 7, Issue 1, Year 2014, Pages 99-111

## Hypercube Embeddings of Wythoffians

Michel Deza, Mathieu Dutour Sikirić, Sergey Shpectorov

### Abstract

The Wythoff construction takes a  $d$ -dimensional polytope  $P$ , a subset  $S$  of  $\{0, \dots, d\}$  and returns another  $d$ -dimensional polytope  $P(S)$ . If  $P$  is a regular polytope, then  $P(S)$  is vertex-transitive. This construction builds a large part of the Archimedean polytopes and tilings in dimension 3 and 4.

We want to determine, which of those Wythoffians  $P(S)$  with regular  $P$  have their skeleton or dual skeleton isometrically embeddable into the hypercubes  $H_m$  and half-cubes  $\frac{1}{2} H_m$ . We find six infinite series, which, we conjecture, cover all cases for dimension  $d > 5$  and some sporadic cases in dimension 3 and 4 (see Tables 1 and 2).

Three out of those six infinite series are explained by a general result about the embedding of Wythoff construction for Coxeter groups. In the last section, we consider the Euclidean case; also, zonotopality of embeddable  $P(S)$  are addressed throughout the text.

**Keywords:** Coxeter group, embedding.

Math. Subj. Class.: 20F55

Mat Sci Net: [20F55](#)

## Vložitve Wythofianov v hiperkocke

### Povzetek

Wythoffova konstrukcija vzame za izhodišče  $d$ -dimenzionalen politop  $P$  in podmnožico  $S$  of  $\{0, \dots, d\}$  in iz njiju naredi nek drug  $d$ -dimenzionalen politop  $P(S)$ . Če je  $P$  regularen politop, potem je  $P(S)$  vozliščno-tranzitiven. S to konstrukcijo je mogoče zgraditi večino arhimedskih politopov in tlakovanj v dimenzijah 3 in 4.

Želimo določiti, za katere od teh Wythoffianov  $P(S)$  z regularnim  $P$  lahko njihov skelet ali dualni skelet isometrično vložimo v hiperkocke  $H_m$  in pol-kocke  $\frac{1}{2} H_m$ . Najdemo šest neskončnih družin, ki, tako domnevamo, obsegajo vse primere za dimenzije  $d > 5$  in nekaj posameznih primerov v dimenzijah 3 in 4 (glej Tabeli 1 in 2).

Tri izmed teh šestih neskončnih družin lahko razložimo s pomočjo splošnega rezultata o vložitvah Wythoffovih konstruktov za Coxeterjeve grupe. V zadnjem razdelku obravnavamo evklidski primer; prav tako v vsem besedilu obravnavamo zonotopalitijo vložljivih  $P(S)$ .

**Ključne besede:** Coxeterjeva grupa, vložitev.