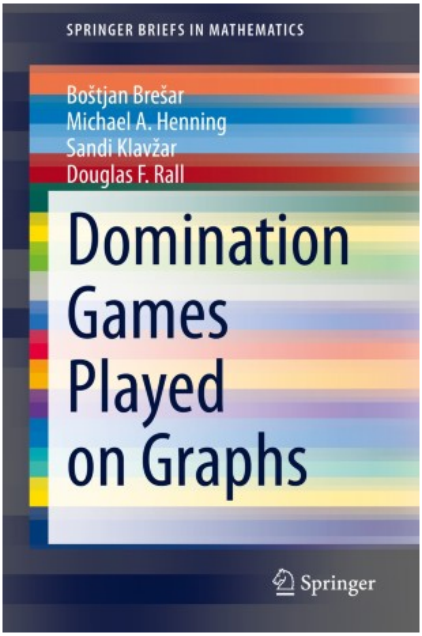
B. Brešar, M. A. Henning, S. Klavžar in D. F. Rall, Domination Games Played on Graphs, SpringerBriefs in Mathematics, Springer, Cham, 2021, 121 strani.



Aprila je pri založbi Springer izšla nova knjiga z naslovom Domination Games Played on Graphs (Dominacijske igre na grafih). Avtorji monografije so Boštjan Brešar (Univerza v Mariboru), Michael A. Henning (Univerza v Johannesburgu), Sandi Klavžar (Univerza v Ljubljani) in Douglas F. Rall (Univerza Furman), ki vsi sodijo med vodilne raziskovalce na področju dominacijskih iger. Knjiga predstavlja strnjen pregled različic dominacijske igre ter rezultatov in odprtih problemov povezanih z njimi. V glavnem je namenjena raziskovalcem, tako mladim kot izkušenim. Avtorji v knjigi največ pozornosti posvetijo osnovni različici dominacijske igre, ki je bila v zadnjem desetletju deležna izjemne pozornosti.

Knjiga je razdeljena na pet poglavij. V prvem, uvodnem poglavju najdemo potrebne oznake in definicije. Spomnimo se, da vozlišče dominira sebe in svoje sosede. Podmnožica vozlišč grafa je dominacijska množica, če dominira vsa vozlišča grafa. Velikost najmanjše dominacijske množice je grafovska invarianta imenovana dominantno število grafa G in označena z $\gamma(G)$. Določanje dominantnega števila splošnih grafov je zahteven problem, zato je zanimivo nanj pogledati tudi z vidika teorije iger. Dominacijska igra je tekmovalna optimizacijska igra, ki so jo leta 2010 vpeljali prav Brešar, Klavžar in Rall. Igro na danem grafu G igrata dva igralca (Dominator in Zavlačevalka), ki izmenično izbirata vozlišča in jih dodajata v izbrano množico. Vsako izbrano vozlišče mora dominirati vsaj eno vozlišče, ki ga prej izbrana vozlišča ne dominirajo. Igra se konča, ko izbrana množica tvori dominacijsko množico grafa G (in torej nadaljnje poteze niso mogoče). Igralca imata nasprotujoča si cilja: Dominator želi doseči čim manjšo končno velikost izbrane množice, Zavlačevalka pa teži k čim večji končni množici izbranih vozlišč. Igra nima zmagovalca ali poraženca. Oba igralca preprosto sledita strategiji, ki najbolj ustreza njunemu cilju. Če oba igrata optimalno, končna velikost množice izbranih vozlišč postane grafovska invarianta. Imenujemo jo igralno dominantno število grafa G in označimo z $\gamma_{\mathrm{g}}(G)$, če prvo potezo naredi Dominator, in z $\gamma'_{\mathrm{g}}(G)$, če je Zavlačevalka prva na potezi.

Izmed različic dominacijske igre v prvem poglavju natančneje spoznamo še celotno dominacijsko igro. Spomnimo se, da vozlišče celotno dominira svoje sosede, ne pa tudi samega sebe. Celotna dominacijska igra je definirana podobno kot dominacijska igra, le da mora izbrano vozlišče na vsaki potezi celotno dominirati vsaj eno vozlišče, ki ga prej izbrana vozlišča še ne dominirajo celotno. Če oba igralca igrata optimalno in igro na grafu G začne Dominator, dobljeno invarianto označimo z $\gamma_{\mathrm{tg}}(G)$.

Drugo poglavje je posvečeno dominacijski igri. Predstavljena sta nadaljevalni princip in strategija namišljene igre, ki se izkaže za zelo uporabno tehniko dokazovanja. Nadaljevalni princip je formalizacija intuitivno jasne lastnosti, da se igra na grafu konča hitreje, če so nekatera vozlišča že vnaprej dominirana, ki pa zahteva netrivialen dokaz. Naj $G|S$ označuje graf G, na katerem so vozlišča $S \subseteq V(G)$ že dominirana, in naj $\gamma_{\mathrm{g}}(G|S)$ označuje število potez v dominacijski igri na $G|S$, kjer prvo potezo naredi Dominator in vozlišč iz S ni več treba dominirati. Nadaljevalni princip pravi, da če je G graf in $B \subseteq A \subseteq V(G)$, potem velja $\gamma_{\mathrm{g}}(G|A) \leq \gamma_{\mathrm{g}}(G|B)$. Podobna lastnost velja tudi za igro, kjer začne Zavlačevalka. Predstavljene so znane zgornje meje za igralno dominantno število grafa. Leta 2013 so Kinnersley, West in Zamani postavili domnevo, da za vsak graf G brez izoliranih vozlišč in z n vozlišči velja $\gamma_{\mathrm{g}}(G) \leq \frac{3}{5}n$. Podobna domneva je še vedno odprta tudi za drevesa brez izoliranih vozlišč. Pri dokazovanju tovrstnih zgornjih mej je izredno uporabna metoda praznjenja Bujtáseve. Najboljša znana zgornja meja v splošnem je $\frac{5}{8}n$, če se omejimo na grafe z najmanjšo stopnjo 2, pa je dokazana zgornja meja $\frac{3}{5}n$. Posebej je študirana tudi podobna domneva, ki obravnava le grafe, ki premorejo Hamiltonovo pot (tj. pot v grafu, ki vsako vozlišče obišče natanko enkrat). Za tak graf na n vozliščih je domnevna zgornja meja enaka $\left\lceil \frac{1}{2}n \right\rceil$.

Določanje igralnega dominantnega števila ni enostavno niti na posameznih družinah grafov. Avtorji predstavijo natančne vrednosti za poti, cikle in njihove potence ter glavnike. Karakterizirani so grafi, ki imajo igralno dominantno število enako 2 ali 3. Posebna pozornost je namenjena vplivu odstranitve vozlišča ali povezave na igralno dominantno število grafa. Ker študirana invarianta za ti operaciji ni monotona, so tudi (povezavno) kritični grafi definirani nekoliko drugače kot običajno. Predstavljena je tudi časovna zahtevnost problema.

V tretjem poglavju avtorji predstavijo znane rezultate o celotni dominacijski igri. Analogno z zgornjo mejo za igralno dominantno število je postavljena domneva, da za vsak graf G na n vozliščih, katerega vsaka komponenta vsebuje vsaj tri vozlišča, velja $\gamma_{\mathrm{tg}}(G) \leq \frac{3}{4}n$. Natančna vrednost celotnega igralnega dominantnega števila je znana za poti, cikle in ciklične dvodelne grafe. Predstavljeni so kritični in popolni grafi, rezultati o vplivu odstranitve vozlišča ter računska zahtevnost problema.

Če si predstavljamo, da dominacijsko igro igra samo Dominator, je končna množica izbranih vozlišč ravno najmanjša dominacijska množica grafa. Bolj zanimivo je torej študirati igro, ki jo igra samo Zavlačevalka in porodi t. i. Grundyjevo dominantno število. Pri tej igri vozlišča izbira le Zavlačevalka, njen cilj je še vedno končati igro s čim več izbranimi vozlišči, različna pravila za veljavnost poteze pa porodijo več različic igre. Tej igri (in njenim različicam) je posvečeno četrto poglavje knjige. Posebej je izpostavljena povezava ene izmed različic z ničelno prisilo in najmanjšim rangom.

Zadnje poglavje predstavi še preostale različice dominacijske igre. Med drugim spoznamo disjunktno dominacijsko igro, povezano dominacijsko igro, Z-, L- in LL-dominacijske igre ter nekatere igre na hipergrafih. Pri disjunktni dominacijski igri eden izmed igralcev poskuša zgraditi dve disjunktni dominacijski množici, pri čemer mu drugi igralec poskuša to preprečiti. Povezana, Z-, L- in LL-dominacijska igra sledijo podobnim pravilom kot dominacijska igra, le da so pogoji za veljavnost poteze nekoliko drugačni. Na koncu poglavja najdemo tudi strnjen pregled preostalih različic dominacijske igre – nekatere so se v literaturi pojavile že pred letom 2010, vendar niso bile nikoli deležne tolikšne pozornosti kot osnovna verzija dominacijske igre, ki jo obravnava opisana knjiga.

Z jedrnatim pregledom definicij, rezultatov, metod dokazovanja in odprtih problemov knjiga predstavlja odlično referenco tako za bolj zagrete študente kot za trenutne in bodoče raziskovalce na tem področju.

Vesna Iršič