Močnik,

Arithmetik.

I. Abtheilung.

Wien
Carl Gerold's Sohn

abgeschlossen am 28.3. 199

50 Kr

Lehrbuch

der

Arithmetik

für

Unter-Gymnasien.

Von

Dr. Franz Ritter von Močnik.

Erste Abtheilung.

Neunundzwanzigste mit Rücksicht auf den neuen Lehrplan für Gymnasien umgearbeitete Auflage.

Wien.

Druck und Verlag von Carl Gerold's Sohn.

1885.

a

Josef Wolf
I. Gimnasium
I. II A.

Rotzleck T. 4

Inhalt.

um die Stellen auszufüllen

Deka Heft 10

mit Angabe der Zifferwerte u. Stellen
Vektor
oder Decimalen mit ihrer Zehnerschaft
angibt

I. Rechnen mit unbenannten und einnamigen ganzen und Decimalzahlen.

---

§. 1.

Um von mehreren Dingen derselben Art anzugeben, wie viele es sind, nimmt man ein solches Ding als Einheit an und untersucht, wie oft diese Einheit in der gegebenen Menge von Dingen derselben Art vorkommt. Der Ausdruck, welcher dies angibt, heißt Zahl.

Eine Zahl, welche nur die Menge der Einheiten, nicht aber die Art derselben ausdrückt, heißt eine unbenannte Zahl; eine Zahl dagegen, welche sowohl die Menge als die Art der Einheiten angibt, eine benannte Zahl. Drei ist eine unbenannte, drei Gulden eine benannte Zahl.

Eine benannte Zahl, welche Einheiten einer einzigen Benennung enthält, heißt einnamig, z. B. vier Gulden. Eine benannte Zahl, in welcher Einheiten verschiedener Benennungen, die jedoch zu derselben Art gehören, vorkommen, heißt mehrnamig, z. B. vier Gulden und drei Kreuzer.

Aus gegebenen Zahlen mittelst bestimmter Veränderungen andere Zahlen finden, heißt rechnen. Jede Veränderung einer Zahl besteht darin, dass man sie auf vorgeschriebene Weise vergrößert oder vermindert.

Die gesuchte Zahl, zu der man durch die Rechnung gelangt, wird das Ergebnis oder Resultat der Rechnung genannt.

Die Lehre von [illegible] ~~den Zahlen und deren Veränderungen~~ heißt Arithmetik.

---

1. Zahlenbildung.

Dekadische ganze Zahlen.

§. 2.

Jede Zahlenbildung beginnt mit dem Setzen der Einheit und geht, da die Einheit immer wieder gesetzt und zu der bereits entstandenen Menge von Einheiten hinzugedacht werden kann, ins Unendliche fort.

Die Zahlen so bilden, wie sie der Reihe nach durch fortgesetztes Hinzufügen der Einheit hervorgehen, heißt zählen. Wir zählen: eins, zwei, drei, vier, fünf, sechs, sieben, acht, neun, u. s. w. und drücken diese Zahlen schriftlich durch folgende Zeichen (Ziffern) aus: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, u. s. w. Die Reihe dieser Zahlen nennt man die natürliche Zahlenreihe.

Die durch das wiederholte Setzen der Einheit entstandenen Zahlen werden ganze Zahlen genannt.

Alle ganzen Zahlen, wie groß sie auch sein mögen, lassen sich mit einigen wenigen Wörtern genau und bestimmt benennen, und mit noch wenigeren Zeichen schriftlich ausdrücken. Man geht dabei von dem Grundsatze aus, dass eine bestimmte Zahl niedriger Einheiten stets wieder als eine neue höhere Einheit, als Einheit des nächst höheren Ranges, betrachtet wird und als solche auch einen besonderen Namen erhält. Eine solche Darstellung der Zahlen heißt ein Zahlensystem.

In unserem **dekadischen Zahlensysteme** zählt man, von der Einheit ausgehend, mit den bekannten Zahlwörtern: eins, zwei, ... bis zehn. Zehn ursprüngliche Einheiten, auch Einer genannt, bilden eine neue höhere Einheit, welche ein Zehner heißt; zehn Zehner bilden einen Hunderter, zehn Hunderter sind ein Tausender, zehn Tausender ein Zehntausender, zehn Zehntausender ein Hunderttausender, zehn Hunderttausender eine Million, u. s. w. Jede Zahl ist aus Einern, Zehnern, Hundertern, ... zusammengesetzt, und wird vollkommen bestimmt, wenn man angibt, wie viele Einer, Zehner, Hunderter, ... sie enthält.

Mit dem mündlichen Ausdrucke der Zahlen stimmt auch deren schriftliche Darstellung überein. Wir brauchen dazu nur die Ziffern für die ersten neun Zahlen, nämlich 1, 2, ... 9, und das Zeichen 0 (Null), welches anzeigt, dass von einem bestimmten Range keine Einheiten vorhanden sind. Um nun durch die Zusammenstellung dieser zehn Ziffern alle möglichen ganzen Zahlen auszudrücken, nimmt man an, dass jede Ziffer an der ersten Stelle, von der Rechten an gezählt, Einer, und an jeder folgenden Stelle gegen die Linke **zehnmal** so viel bedeutet, als sie an der nächst vorhergehenden Stelle gilt. Hiernach bedeutet jede Ziffer an der zweiten Stelle, von der Rechten an gezählt, so viele Zehner, an der dritten so viele Hunderter, an der vierten so viele Tausender, u. s. w., als sie an der ersten Einer ausdrückt.

Das dekadische Zahlensystem, in welchem zehn die Grundzahl bildet, beruhet demnach auf folgenden zwei Gesetzen:

1. Zehn Einheiten eines Ranges bilden immer eine Einheit des nächst höheren Ranges.

2. Eine Ziffer gilt an jeder Stelle zehnmal so viel als an der nächsten Stelle gegen die Rechte.

Jede Ziffer in einer geschriebenen Zahl hat einen doppelten Wert, den Wert der Ziffer oder den Nennwert, welcher die Zahl der Einheiten angibt, und den Stellenwert, welcher ihr vermöge der Stelle zukommt und den Rang der Einheiten anzeigt. So bedeutet z. B. in der Zahl 4444 jede vorkommende Ziffer vier, jedoch gilt dieselbe an der ersten Stelle, von der Rechten angefangen, vier Einer, an der zweiten vier Zehner, an der dritten vier Hunderter, an der vierten vier Tausender.

§. 3.

Die Kenntnis, Zahlen richtig anzuschreiben und die geschriebenen richtig zu lesen, heißt die Numeration.

Die Rangzahlen unseres Zahlensystems lassen sich sehr bequem in Classen zu drei Stellen eintheilen, welche nach der Reihe Einer, Zehner und Hunderter enthalten. Die drei niedrigsten Stellen sind geradezu Einer, Zehner, Hunderter; in der nächstfolgenden Classe kommen Einer, Zehner, Hunderter von Tausendern vor; in der noch weiter folgenden Classe stehen Einer, Zehner, Hunderter von Millionen u. s. w. Durch diese Eintheilung der Zahlen wird die Auffassung und schriftliche Darstellung derselben wesentlich erleichtert.

Der Kürze wegen wollen wir in dem Folgenden die Einer, Zehner, Hunderter, Tausender, Zehntausender, Hunderttausender, Millionen, ... folgeweise durch E, Z, H, T, Zt, Ht, M, ... bezeichnen.

Aufgaben für das Lesen und Anschreiben der Zahlen.

1. 200, 735, 364, 285, 511, 749, 180, 690, 906, 101.
2. Fünfhundert, zwei hundert acht und dreißig, siebenhundert ein und fünfzig, sechshundert zwanzig, vierhundert und vier.
3. 3000, 9548, 4212, 6336, 2800, 5230, 7508, 1046, 8003.
4. Zweitausend und vierzig, fünftausend siebenhundert vier und neunzig, achttausend und drei, eintausend dreihundert und zehn, dreitausend fünf und zwanzig.
5. 10000, 5700, 36200, 38090, 27026, 80912, 12345; 630427, 938824, 732284, 815500, 493220, 409010.
6. Zu Ende des Jahres 1880 hatte Wien 726105 Einwohner.
7. Zwölftausend achthundert und zwölf, fünfzigtausend siebenhundert vier und zwanzig, sieben und vierzig tausend dreihundert und fünfzig,

achtzigtausend ein und achtzig, vierhundert sieben tausend zweihundert eilf.

8. Wie viele Zehntausender enthält die Zahl 61735; wie viele Tausender, Hunderter, Zehner, Einer enthält sie?

61735	= 6 Zt	und	1 T	7 H	3 Z	5 E
	= 61 T		und	7 H	3 Z	5 E
	= 617 H			und	3 Z	5 E
	= 6173 Z				und	5 E
	= 61735 E.					

9. Gib ebenso die Bestandtheile folgender Zahlen an: 6458, 23719, 40821, 325368, 752379.

10. Lies: 3212654, 8900278, 3418509, 9284073, 1050090; 51379486, 20416829, 538191378, 3546790814.

11. Die Sonne ist 1413879mal so groß als unsere Erde.

12. Wenn Jemand in einer Secunde eins zählen würde, so brauchte er, um eine Million zu zählen, eilf Tage, dreizehn Stunden sechs und vierzig Minuten und vierzig Secunden; um eine Billion zu zählen, brauchte er ein und dreißigtausend siebenhundert und neun Jahre, zweihundert neun und achtzig Tage, eine Stunde, sechs und vierzig Minuten und vierzig Secunden.

Decimalzahlen.

§. 4.

Jede Einheit kann man in gleiche Theile theilen oder sich doch in gleiche Theile getheilt denken. Eine Zahl, welche nur einen Theil oder mehrere gleiche Theile der Einheit enthält, heißt eine gebrochene Zahl oder ein Bruch, im Gegensatze zu einer ganzen Zahl, welche die Einheit selbst ein- oder mehrmal enthält.

Wenn man in einer nach dem dekadischen Gesetze geschriebenen ganzen Zahl von der Linken gegen die Rechte zurückschreitet, so gilt jede folgende Ziffer gegen die Rechte nur den zehnten Theil von dem, was sie an der vorhergehenden Stelle gilt, und man kommt zuletzt auf die Einer herab. Es kann aber die Zahlenreihe nach demselben Gesetze auch unter die Einer hinab fortgesetzt werden, man kann einen Einer in zehn gleiche Theile theilen, und einen solchen Theil, ein Zehntel, als eine noch niedrigere Einheit betrachten, ferner den zehnten Theil von einem Zehntel, d. i. ein Hundertel, als die Einheit eines noch niedrigeren Ranges ansehen, und so durch fortgesetzte Theilung zu beliebig kleinen Zahleneinheiten hinabsteigen.

Übereinstimmend damit kann man nach dem dekadischen Gesetze auch die Ziffernreihe von den Einern noch weiter rechts fortsetzen, so dass eine Ziffer an der ersten Stelle nach den Einern Zehntel, an der zweiten Hundertel, an der dritten Tausendtel u. s. w. bedeutet. Bei dieser Fortsetzung der Ziffernreihe braucht man nur durch ein Zeichen sichtbar zu machen, wo die Einer aufhören; dieses Zeichen ist ein Punkt, welcher nach den Einern rechts oben gesetzt wird und Decimalpunkt heißt. Die Ziffern links vom Decimalpunkte sind Ganze, die Ziffern rechts nach dem Decimalpunkte heißen Decimalen. Es bedeutet demnach 444444·44444 Folgendes:

Ganze:						Decimalen:				
4	4	4	4	4	4 ·	4	4	4	4	4
Hunderttausender	Zehntausender	Tausender	Hunderter	Zehner	Einer	Zehntel	Hundertel	Tausendtel	Zehntausendtel	Hunderttausendtel

Eine Zahl, welche Decimalen enthält, heißt eine Decimalzahl oder ein Decimalbruch.

Die Zehntel, Hundertel, ... heißen auch niedrigere Rangzahlen zum Unterschiede von den Zehnern, Hundertern, ... welche höhere Rangzahlen heißen.

Der Kürze wegen werden wir in dem Folgenden die Zehntel, Hundertel, Tausendtel, Zehntausendtel, .. durch z, h, t, zt, .. bezeichnen.

§. 5.

Eine Decimalzahl wird gelesen, indem man zuerst die Ganzen, und dann entweder jede einzelne Decimale mit oder ohne Angabe ihres Stellenwertes ausspricht. Z. B. 47·385 wird gelesen:

a) 47 Ganze, 3 z, 8 h, 5 t; oder
b) 47 Ganze mit den Decimalen 3, 8, 5.

Die zweite Lesart wird am häufigsten angewendet.

Lies folgende Decimalzahlen:

32·517, 7·0703, 0·005, 3·14159, 0·5596, 17·008, 80·072, 0·480107, 0·20903, 725·008, 0·036, 28·00074.

Um eine Decimalzahl anzuschreiben, schreibt man zuerst die Ganzen an, setzt den Decimalpunkt und dann die einzelnen Decimalen nach der Ordnung ihres Stellenwertes. Fehlen die Ganzen oder einzelne Decimalen, so werden sie durch Nullen ersetzt.

Z. B. 13 Ganze, 5 h, 6 zt schreibt man an: 13·0506; 7 z schreibt man an: 0·7.

Schreibe folgende Decimalzahlen an:

1. a) 5 Ganze, 3 z, b) 28 Ganze, 4 z, 7 h, 1 t;
2. a) 110 Ganze, 35 t; b) 7tausend 28 Ganze, 4 h, 9 t;
3. a) 7 Hunderttausendtel; b) 39tausend 91 Milliontel.

Hängt man einer Decimalzahl rechts eine oder mehrere Nullen an, so wird ihr Wert nicht geändert, weil dabei die einzelnen Ziffern ihren früheren Stellenwert beibehalten; z. B.

$$8 \cdot 7 = 8 \cdot 70 = 8 \cdot 700 = 8 \cdot 7000 = 8 \cdot 70000.$$

Römische Zahlzeichen.

§. 6.

Die bisher angewendeten Ziffern heißen arabische. Nebst diesen werden manchmal auch die römischen Ziffern gebraucht.

Die Römer hatten sieben Zahlzeichen:

	I,	V,	X,	L,	C,	D,	M
für	1,	5,	10,	50,	100,	500,	1000.

Sie drückten damit durch gehörige Zusammenstellung alle übrigen Zahlen nach folgenden Gesetzen aus:

1. Stehen mehrere gleiche Buchstaben neben einander, so bedeuten sie so viel, als ihre Werte zusammen genommen betragen; z. B.:

II	bedeutet	2,	XXX	bedeutet	30,
III	„	3,	CCC	„	300.

2. Steht ein niedrigeres Zahlzeichen nach einem höheren, so wird der Wert des höheren um so viel vermehrt, als das niedrigere bedeutet; z. B.:

VI	bedeutet	6,	XXVI	bedeutet	26,
VIII	„	8,	CXV	„	115,
LX	„	60,	DCLX	„	660.

3. Steht ein niedrigeres Zahlzeichen vor einem höheren, so wird der Wert des höheren um so viel vermindert, als das niedrigere bedeutet, z. B.:

IV	bedeutet	4,	XIX	bedeutet	19,
IX	„	9,	XLIII	„	43,
XL	„	40,	XCIV	„	94,
XC	„	90,	MDCCCLXXIX	bedeutet	1879.

Lies: VII, XIII, XV, XXIV, XLI, LXI, XCI, CIX, CXI, CMXIX, MCCCXIV, MDCCXL.

Schreibe mit römischen Ziffern alle Zahlen von 1 bis 20; ferner 28, 49, 84, 365, 719, 930, 1344, 1799, 1885.

2. Addieren mit unbenannten und einnamigen ganzen und Decimalzahlen.

§. 7.

Addieren heißt eine Zahl suchen, welche so viele Einheiten enthält, als zwei oder mehrere gegebene Zahlen zusammen genommen. Die gegebenen Zahlen nennt man Summanden; die Zahl, zu welcher man durch das Addieren gelangt, heißt Summe.

Um zu einer Zahl 3 eine zweite 4 zu addieren, darf man nur in der natürlichen Zahlenreihe von der ersten Zahl 3 ausgehend um so viele Einheiten, als die zweite Zahl 4 anzeigt, vorwärts schreiten; die Zahl 7, zu der man dadurch gelangt, ist die gesuchte Summe.

Das Zeichen der Addition ist ein stehendes +, welches mehr (plus) gelesen und zwischen die Summanden gesetzt wird. Zwischen die Summanden und die Summe schreibt man das Gleichheitszeichen = (gleich), welches anzeigt, dass die Zahlen oder Zahlenverbindungen, zwischen denen es steht, gleichen Wert haben. Z. B.: $3 + 4 = 7$ wird gelesen: 3 mehr 4 ist gleich 7.

Sind mehr als zwei Zahlen zu addieren, so wird zu der Summe zweier Zahlen die dritte, zu der neuen Summe die vierte Zahl u. s. w. addiert.

Vorübungen (Kopfrechnen).

§. 8.

1. Zähle von 1 aufwärts bis 100, indem du immer 1 dazu setzest; nämlich $1 + 1 = 2$, $2 + 1 = 3$, $3 + 1 = 4$, ...

2. Zu 1 zähle 2, zur Summe wieder 2, und zu jeder folgenden Summe 2 dazu.

3. Fange bei 2 an und zähle ebenso immer 2 dazu.

4. Zähle mit 3 aufwärts
a) von 1 bis 100, b) von 2 bis 101, c) von 3 bis 102.

5. Auf gleiche Weise zähle
a) mit 4 vorwärts von 1, 2, 3, 4 anfangend;
b) „ 5 „ „ 1, 2, 3, 4, 5 „
c) „ 6 „ „ 1, 2, ... 5, 6 „
d) „ 7 „ „ 1, 2, ... 6, 7 „
e) „ 8 „ „ 1, 2, ... 7, 8 „
f) „ 9 „ „ 1, 2, ... 8, 9 „

6. Wie viel ist $7 + 4$? Zähle dazu noch 8. Wie viel ist also $7 + 4 + 8$?

7. a) $5 + 2 + 9$. b) $8 + 3 + 9$. c) $7 + 7 + 5$.
$8 + 9 + 4$. $6 + 8 + 7$. $9 + 8 + 6$.

8. a) Wenn man in der natürlichen Zahlenreihe einmal von 5 aus um 3 Einheiten, und dann von 3 aus um 5 Einheiten fortschreitet, zu welcher Zahl gelangt man in jedem Falle?
b) Wie viel ist $7 + 4$? Wie viel ist $4 + 7$?
c) $2 + 5 + 8$. $5 + 2 + 8$. $8 + 2 + 5$.
$2 + 8 + 5$. $5 + 8 + 2$. $8 + 5 + 2$.

Die Anzahl der in den Summanden enthaltenen Einheiten bleibt dieselbe, in welcher Reihenfolge sie auch vorkommen mögen; es muss daher auch die Summe dieselbe bleiben.

Dieselben Summanden geben in jeder Ordnung dieselbe Summe. (Gesetz von der Vertauschbarkeit der Summanden.)

9. Auf wie viele Arten kann a) aus den Zahlen 3, 4 und 5, b) aus den Zahlen 2, 3, 4 und 5 eine Summe gebildet werden?

10. a) $7 + 5 + 9 + 5$. b) $3 + 2 + 9 + 8 + 4$.
$2 + 7 + 8 + 9$. $6 + 9 + 3 + 7 + 5$.

11. a) $4 + 7 + 9 + 6 + 5$. b) $9 + 2 + 9 + 8 + 5 + 3$.
$6 + 8 + 4 + 5 + 7$. $5 + 6 + 8 + 7 + 4 + 9$.

12. Zähle die Zahlen von 1 bis 9 zusammen.

13. Wie viel sind 5 Zehner und 3 Zehner? Wie viel ist $20 + 10$, $30 + 40$, $40 + 50$, $50 + 60$, $80 + 20$, $70 + 90$?

14. Wie viel sind 4 Hunderter und 5 Hunderter? Wie viel ist $300 + 100$, $700 + 200$, $400 + 300$, $600 + 400$?

15. a) Wie viel ist $56 + 3$?

$$50 + 6 + 3 = 50 + 9 = 59.$$

Die Einer werden zu den Einern addiert, die Zehner bleiben ungeändert.

b) Wie viel ist 56 und 30?

$$50 + 6 + 30 = 50 + 30 + 6 = 80 + 6 = 86.$$

Die Zehner werden zu den Zehnern addiert, die Einer bleiben unverändert.

Zu einer Summe wird eine Zahl addiert, indem man diese nur zu einem Summanden addiert.

16. Wie viel ist $34 + 10$, $28 + 20$, $47 + 30$, $61 + 20$, $76 + 30$?

17. Wie viel ist $365 + 20$, $330 + 200$, $560 + 300$, $257 + 400$?

18. a) Wie viel ist $46 + 7$? Anstatt in der Zahlenreihe von 46 aus um $7 = 4 + 3$ vorwärts zu zählen, kann man zuerst um 4 und dann um 3 vorwärts zählen; es ist also

$$46 + 7 = 46 + 4 + 3 = 50 + 3 = 53.$$

b) Zähle 46 und 52 zusammen. Wie viel ist 46 und 50? — und noch 2 dazu?

$$46 + 52 = 46 + 50 + 2 = 96 + 2 = 98.$$

Anstatt zu einer Zahl eine Summe zu addieren, kann man zu ihr nach und nach die einzelnen Summanden addieren.

Manchmal verfährt man auch umgekehrt:

Anstatt zu einer Zahl nach und nach mehrere Zahlen zu addieren, addiert man zu ihr auf einmal die Summe dieser Zahlen.

Z. B.: $245 + 37 + 63 = 245 + 100 = 345$.

19. Wie viel ist $67 + 21$, $52 + 41$, $58 + 42$, $317 + 69$?

20. Welche Zahl ist um 36 größer als 51?

21. Ich denke mir eine Zahl; nehme ich von ihr 27 weg, so bleibt mir noch 65; welche Zahl habe ich mir gedacht?

22. Zähle folgende unter einander stehende Zahlen zusammen:

a)	b)	c)	d)	e)
50	12	81	63	53
17	57	19	39	19
43	83	64	23	48

23. a) $19 + 28 + 37 + 46$. b) $25 + 34 + 19 + 80$.

24. Wie viel beträgt $317 + 268$? 307 und 200 ist..., und 60 ist.., und 8 ist...

25. Wie viel ist $436 + 324$, $321 + 654$, $818 + 172$?

26. Ordne folgende Summanden so, dass sich die Additionen vortheilhaft vereinfachen:

a) $455 + 123 + 208 + 77 + 45 + 92$;

b) $63 + 28 + 116 + 272 + 37 + 84$.

27. Wie viel ist 4000 und 3000, $2800 + 4000$, $4108 + 500$?

28. Bestimme $5680 + 4007$, $2936 + 4040$.

Addition ganzer Zahlen.

§. 9.

Es seien folgende Summen zu bestimmen:

a) $2457 + 4132$; b) $693 + 458 + 357$.

a) 2457 = 2T 4H 5Z 7E

4132 = 4T 1H 3Z 2E

Summe 6T 5H 8Z 9E = 6589

b) 693 7E + 8E + 3E = 18E = 1Z 8E

458 1Z + 5Z + 5Z + 9Z = 20Z = 2H 0Z

357 2H + 3H + 4H + 6H = 15H

1508

Man addiert also zuerst die Einer, dann die Zehner, Hunderter .... Die jedesmalige Summe hat mit den addierten Einheiten gleichen Stellenwert; ist sie zweiziffrig, so bedeuten die Zehner derselben Einheiten des nächst höheren Ranges und werden daher zu den Einheiten dieses Ranges weiter gezählt.

Werden die Summanden wegen der leichteren Übersicht unter einander geschrieben, so müssen die Einheiten desselben Ranges unter einander, also Einer unter Einer, Zehner unter Zehner u. s. w. zu stehen kommen.

Um die Probe zu machen, d. i. um die Richtigkeit der Summe zu prüfen, kann man das Gesetz über die Vertauschbarkeit der Summanden benützen, indem man, wenn z. B. die Summanden unter einander geschrieben und früher von unten hinauf addiert wurden, dieselben nun von oben herab addiert. Erhält man in beiden Fällen dieselbe Summe, so kann man diese als richtig ansehen, da wegen der veränderten Reihenfolge der Ziffern nicht leicht beidemal derselbe Fehler möglich ist.

Aufgaben.

1.
```
  38
  94
  57
 ---
 189
```
7 und 4 ist 11, und 8 ist **19**, bleibt 1;
1 und 5 ist 6, und 9 ist 15, und 3 ist **18**.
Die hier fett gedruckten Ziffern werden beim Aussprechen sofort angeschrieben.

2. Addiere die folgenden Zahlen, und zwar zuerst jene der verticalen, dann jene der horizontalen Reihen; addiere ferner die bei den Verticalreihen, und dann die bei den Horizontalreihen erhaltenen Summen:

$$34 + 56 + 36 + 27 + 69 + 43 + 87 + 24$$
$$57 + 21 + 90 + 67 + 58 + 63 + 35 + 48$$
$$19 + 56 + 76 + 34 + 65 + 50 + 89 + 27$$
$$42 + 60 + 45 + 86 + 99 + 17 + 25 + 60$$
$$68 + 80 + 26 + 77 + 58 + 69 + 43 + 54$$

3.
```
  926
  835
  794
  462
 ----
 3017
```
Bei fortgeschrittener Übung werden während des Addierens unmittelbar nur die Summen ausgesprochen. Hier ist zu sprechen:
2, 6, 11, **17**, 1;
7, 16, 19, **21**, 2;
6, 13, 21, **30**.

4.

a)	b)	c)	d)	e)
8063	9007	2468	4178	7085
2497	98	1357	5264	926
811	1697	753	5355	182
2371	790	840	7246	6469

5. Mache bei den Aufgaben in 4. die Probe, indem du die Summanden in umgekehrter Reihenfolge addierst.

6. Addiere in dem nachstehenden Vierecke zuerst die Zahlen jeder verticalen, dann die Zahlen jeder horizontalen und endlich die Zahlen einer jeden der beiden Diagonalreihen.

924	4928	2772	6776	4620
6160	2464	6468	4312	616
2156	7700	4004	308	5852
7392	3696	1540	5544	1848
3388	1232	5236	3080	7084

7. Wie groß ist die achte Zahl in der Zahlenreihe, die mit 2096 beginnt, und bei welcher jede folgende Zahl um 214 größer ist als die vorhergehende? Wie groß ist die Summe aller acht Zahlen?

8. Von fünf Zahlen ist die erste 3087, die zweite um 690 größer als die erste, die dritte um 516 größer als die zweite, die vierte um 407 größer als die dritte, und die fünfte um 375 größer als die vierte; wie groß ist die Summe der fünf Zahlen?

9. Addiere wie in Aufgabe 2. die folgenden Zahlen:

$$41782 + 29714 + 80518 + 26396 + 63614$$
$$71396 + 29592 + 75801 + 34567 + 90123$$
$$95703 + 88466 + 54953 + 63780 + 77266$$
$$18278 + 91705 + 27265 + 53927 + 84706$$
$$89924 + 93364 + 62879 + 27048 + 60973$$

10.

a)	b)	c)	d)
158724	303235	1234567	3098752
306315	684450	2345678	8345097
30880	471899	3456789	58091
246727	4206	4567890	937248
150236	81183	5678901	5630956
9876	790547	6789012	1907338

11. Mache bei den Aufgaben in 10. die Probe durch Umkehrung der Reihenfolge der Summanden.

Addition der Decimalzahlen.

§. 10.

Die Addition der Decimalzahlen wird so wie die Addition der ganzen Zahlen von der niedrigsten Stelle angefangen ausgeführt. Werden die Summanden unter einander geschrieben, so müssen Ganze unter Ganze, Zehntel unter Zehntel, Hundertel unter Hundertel u. s. w., und daher auch die Decimalpunkte unter einander zu stehen kommen. Z. B.:

5·82	
7·37	6, 14, 21, 23 h geben **3** h und 2 z;
3·48	2, 6, 9, 17 z geben **7** z und 1 E; Decimalpunkt;
9·06	10, 13, 20, **25** E.
25·73	

Aufgaben.

1.	1·76	Zu sprechen: **5**;
	3·08	4, 12, 18, , **1**;
	2·645	7, **14**, 1; Decimalpunkt;
	7·485	3, 6, **7**.

2. $3·62 + 9·57 + 8·26 + 2·95 + 7·08 + 5·39$.
3. $37·3 + 30·3 + 3·84 + 7·29 + 3·90 + 67·2$.
4. $24·7 + 528 + 0·75 + 37·6 + 8·35$.
5. $3·142 + 4·586 + 5·92 + 6·364 + 7·703$.
6. $38·3 + 20·95 + 60·14 + 505 + 60·39 + 724·9$.
7. $1·4 + 91·025 + 8·79 + 24·21 + 0·8 + 1·848 + 35·791$.
8. $0·5 + 0·25 + 0·125 + 0·0625 + 0·03125$.
9. Addiere drei Zahlen, von denen die erste 8·12, die zweite um 8·79 größer als die erste und die dritte um 10·35 größer als die zweite ist.
10. Von einer Zahl nahm man 37·865 weg und es blieb noch 53·196 übrig; wie groß war jene Zahl?
11. Welche Zahl ist um 74·865 größer als 42·73 + 91·68?
12. $315·247 + 93·07 + 100 + 0·39747 + 293·2973 + 67·84$.
13. $165·8 + 307·405 + 509·7628 + 769·208 + 725 + 70·464 + 690·5237$.
14. $87·549 + 297·315 + 934·046 + 971·5411 + 84·3139 + 51·698 + 35·8423$.
15. $25480·7 + 4138·5 + 82091·08 + 7831·359 + 5092·4 + 1357 + 631·997$.

Addition einnamiger Zahlen.

§. 11.

Beim Addieren benannter Zahlen müssen die gegebenen Zahlen gleichen Namen haben, welchen dann auch die Summe erhält.

Aufgaben. (Schriftlich und theilweise auch mündlich zu lösen.)

1. Ein Gymnasium zählt in der I. Classe 50, in der II. 45, in der III. 43, in der IV. 37, in der V. 44, in der VI. 32, in der VII. 29, in der VIII. 30 Schüler; wie groß ist die ganze Schülerzahl dieses Gymnasiums?

2. Wie viele Tage verfließen in einem gemeinen Jahre vom 1. Jänner bis 15. Mai?

3. Wie viele Tage verfließen in einem Schaltjahr vom 1. Jänner bis zum letzten Tage eines jeden Monats?

4. Jemand wurde im Jahre 1819 geboren und starb in einem Alter von 53 Jahren; in welchem Jahre ist er gestorben?

5. Die Kreuzzüge der Christen nach dem heiligen Lande begannen im Jahre 1096 und dauerten 195 Jahre; wann war ihr Ende?

6. Ein Hausherr bezieht an jährlichem Mietzins von fünf Parteien einzeln: 196 fl., 230 fl., 280 fl., 300 fl., 335 fl.; wie viel zusammen?

7. Ein Kaufmann bekommt fünf Fässer Kaffee, welche einzeln 220, 224, 222, 227 und 231 *kg* wiegen; wie groß ist das ganze Gewicht?

8. An einem Wochenmarkte wurden verkauft: 432 *hl* Weizen, 305 *hl* Roggen, 287 *hl* Gerste und 613 *hl* Hafer; wie viel *hl* Getreide sind dies zusammen?

9. Jemand hat drei Capitalien; das erste trägt jährlich 62·35 fl., das zweite 27·68 fl., das dritte 85·395 fl. Zins; wie viel jährlichen Zins geben alle drei Capitalien?

10. A liegt 7·825 *m* höher als B, B 12·15 *m* höher als C, C 9·023 *m* höher als D; um wie viel liegt A höher als D?

11. Wenn man annimmt, dass ein freifallender Körper in der ersten Secunde seines Falles 4·904 *m* und in jeder folgenden Secunde immer 9·808 *m* mehr als in der vorhergehenden zurücklegt; a) welches sind dann die Fallräume für die zweite, dritte und vierte Secunde? b) welches ist der Fallraum für alle vier Secunden?

12. Vier Goldstangen wiegen einzeln 1·375, 1·248, 0·9315, 0·85 *kg*; wie groß ist das ganze Gewicht?

13. Jemand besitzt 31·284 *ha* Ackergrund, 0·95 *ha* Gartenland, 11·256 *ha* Wiesen und 38·5 *ha* Waldungen; wie viel Bodenfläche ist dies zusammen?

14. In einem Lande wurden in vier aufeinander folgenden Jahren 83560, 69012, 64805, 60500 *hl* Wein erzeugt; wie viel in allen vier Jahren zusammen?

15. Zu einem gemeinschaftlichen Geschäfte gab A 2956·6 fl., B um 532·2 fl. mehr als A, und C um 464·2 fl. mehr als B. Der Gewinn aus diesem Geschäfte wurde so vertheilt, dass A 739·15 fl., B um 133·05 fl. mehr als A, und C um 116·05 fl. mehr als B bekam. Wie viel haben alle zusammen eingelegt, und wie groß ist der ganze Gewinn gewesen?

16. Die Einnahmen einer Eisenbahn betrugen: im Jänner 755952 fl., im Februar 678879 fl., im März 891363 fl., im April 840504 fl., im Mai 914154 fl., im Juni 976083 fl.; wie viel zusammen?
17. Nach der letzten Volkszählung hat Böhmen 5560819, Mähren 2153407, Schlesien 565475 Einwohner; wie groß ist die Gesammtbevölkerung dieser drei Länder?

---

3. Subtrahieren mit unbenannten und einnamigen ganzen und Decimalzahlen.

Subtrahieren

§. 12.

Der Addition ist die Subtraction entgegengesetzt. Subtrahieren heißt, aus der Summe zweier Zahlen und einem der beiden Summanden den andern suchen. Die gegebene Summe heißt Minuend, der gegebene Summand Subtrahend, der gesuchte Summand Differenz, Unterschied oder Rest. Wenn man die Differenz und den Subtrahend addiert, so erhält man den Minuend.

Das Zeichen der Subtraction ist ein horizontaler Strich — und heißt weniger (minus); der Minuend wird vor, der Subtrahend nach dem Striche gesetzt. Z. B.: $8 - 3 = 5$ wird gelesen: 8 weniger 3 ist gleich 5.

Aus jeder Addition zweier Zahlen, z. B.: $8 + 5 = 13$, ergeben sich durch Umkehrung zwei Aufgaben der Subtraction, je nachdem außer der jedesmal gegebenen Summe 13, dem Minuend, entweder der erste Summand 8 oder der zweite Summand 5 als Subtrahend gegeben ist. Ist als Subtrahend der erste Summand 8 gegeben, so ist zu untersuchen, wie viel man zu 8 noch addieren müsse, um 13 zu erhalten; man muss von 8 in der Zahlenreihe vorwärts zählen, bis man auf 13 kommt; die so durch Addition gefundene Zahl 5 ist der gesuchte zweite Summand, die Differenz. Ist dagegen der zweite Summand 5 als Subtrahend gegeben, so ist zu untersuchen, zu welcher Zahl man 5 addieren müsse, um 13 zu erhalten; d. i. wie viel von 13 noch übrig bleibt, wenn die hinzugezählten 1 wieder weggezählt werden; die so übrig bleibende Zahl 8 ist der gesuchte erste Summand, der Rest.

Da es aber für die Summe einerlei ist, welcher von zwei Summanden der erste oder zweite ist, so ist es auch für die Differenz gleichgiltig, ob man beim Subtrahieren die erste oder die zweite der oben angegebenen Auflösungen anwendet. Man erhält bei der ersten Aufgabe die Differenz 5 auch dadurch, daſs man von 13 8 wegzählt, und bei der zweiten Aufgabe die Differenz 8 auch dadurch, daſs man zu 5 so viel dazu zählt, bis man auf 13 kommt.

Hiernach kann die Subtraction zweier Zahlen auf eine zweifache Art ausgeführt werden; entweder dadurch, daſs man zu dem Subtrahend so viele Einheiten addiert, bis man den Minuend erhält; oder dadurch, daſs man von dem Minuend so viele Einheiten wegzählt, wie der Subtrahend anzeigt. Z. B. in der Aufgabe 13 — 5 sagt man entweder: 5 und 8 ist 13, oder: 5 von 13 bleibt 8.

Vorübungen (Kopfrechnen).

§. 13.

1. Zähle von 100 rückwärts, indem du wiederholt 1 wegnimmst; nämlich 100, 99, 98, . . .
2. Welche Zahlen erhält man, wenn man in der natürlichen Zahlenreihe a) von 100, b) von 99 immer um 2 Einheiten rückschreitet?
3. Vermindere a) 100 um 3, und jeden neuen Rest wieder um 3; dann ebenso b) 99, c) 98.
4. Zähle von 100 angefangen mit 4 abwärts; ferner ebenso von 99, 98, 97 angefangen.
5. Zähle rückwärts
   a) mit 5 von 100, 99, 98, 97, 96 angefangen;
   b) „ 6 „ 100, 99, ... 96, 95 „
   c) „ 7 „ 100, 99, ... 95, 94 „
   d) „ 8 „ 100, 99, ... 94, 93 „
   e) „ 9 „ 100, 99, ... 93, 92 „
6. Zähle von 13 ab 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
7. Um wie viel Einheiten muſs man in der natürlichen Zahlenreihe von 8 ausgehend, fortschreiten, um zur Zahl 15 zu gelangen?
8. Wie viel muſs man zu 6, 7, 8, 9 zuzählen, um 14 zu erhalten?
9. Bestimme folgende Differenzen:
   a) 11 — 3, 25 — 8, 37 — 4, 43 — 7, 54 — 6, 60 — 5.
   b) 52 — 9, 93 — 4, 17 — 6, 65 — 8, 82 — 5, 29 — 7.
10. Zähle in der Zahlenreihe von 15 aus einmal zuerst um 4 und dann um 5 rückwärts, das anderemal zuerst um 5 und dann um 4 rückwärts. Welche Zahl erhältst du in jedem Falle?

$$15 - 4 - 5 = 15 - 5 - 4 = 6.$$

Sollen von einer Zahl zwei Zahlen subtrahiert werden, so ist es für das Resultat gleichgiltig, in welcher Ordnung man sie subtrahiert.

11. Zähle in der natürlichen Zahlenreihe von 8 zuerst um 7 vorwärts und dann um 5 rückwärts; zähle ferner von 8 zuerst um 5 rückwärts und dann um 7 vorwärts. Zu welcher Zahl gelangst du in jedem Falle?

$$8 + 7 - 5 = 8 - 5 + 7 = 10.$$

Soll zu einer Zahl eine zweite addiert und eine dritte von ihr subtrahiert werden, so ist es für das Resultat gleichgiltig, in welcher Ordnung man addiert oder subtrahiert.

12. a) $26 - 5 - 6.$ b) $35 - 8 - 3 - 5.$
$31 - 8 - 1.$ $59 - 2 - 9 - 7.$

13. a) $4 + 9 - 5.$ b) $78 + 6 - 5 - 4.$
$35 - 7 + 5.$ $46 - 8 + 5 - 6.$

14. Wie viel bleibt, wenn man 3 Zehner von 8 Zehnern wegnimmt? Wie viel ist $70 - 20$, $90 - 30$, $80 - 50$, $120 - 40$, $160 - 80$?

15. Wie viel bleibt, wenn man 5 Hunderter von 12 Hundertern wegnimmt? Wie viel ist $800 - 300$, $900 - 200$, $1500 - 700$?

16. Zähle weg 10 von 200, 60 von 300, 70 von 420.

17. a) Wie viel ist $68 - 5$?

$$60 + 8 - 5 = 60 + 3 = 63.$$

Die Einer werden von den Einern subtrahiert, die Zehner bleiben ungeändert.

b) Wie viel ist $68 - 50$?

$$60 + 8 - 50 = 60 - 50 + 8 = 10 + 8 = 18.$$

Die Zehner werden von den Zehnern subtrahiert, die Einer bleiben ungeändert.

Von einer Summe wird eine Zahl subtrahiert, indem man diese nur von einem Summanden subtrahiert.

18. Wie viel bleibt übrig, wenn man 10 von 25, 20 von 35, 40 von 78, 60 von 96 wegzählt?

19. Wie viel ist $126 - 50$, $153 - 80$, $149 - 90$, $118 - 30$?

20. $98 - 40 + 80 - 50 + 20 - 60.$

21. a) Wie viel ist $63 - 8$? Anstatt in der Zahlenreihe von 63 um $8 = 3 + 5$ zurückzuschreiten, kann man zuerst um 3 und dann noch um 5 zurückschreiten; es ist also:

$$63 - 8 = 63 - 3 - 5 = 60 - 5 = 55.$$

b) Von 67 nimm 24 weg. Von 67 zuerst 20 weg, bleibt 47, davon noch 4 weg, bleibt 43.

$$67 - 24 = 67 - 20 - 4 = 47 - 4 = 43.$$

Anstatt von einer Zahl eine Summe zu subtrahieren, kann man von ihr nach und nach die einzelnen Summanden subtrahieren.

Manchmal macht man auch von dem umgekehrten Satze vortheilhafte Anwendung:

Anstatt von einer Zahl nach und nach mehrere Zahlen zu subtrahieren, subtrahiert man auf einmal ihre Summe.

Z. B. $397 - 38 - 62 = 397 - 100 = 297$.

22. Wie viel bleibt, wenn man 16 von 78, 23 von 65, 38 von 80, 18 von 45, 36 von 71, 88 von 124 wegnimmt?

23. Der Unterschied zweier Zahlen ist 27, die größere Zahl 56; welches ist die kleinere?

24. Wie viel muſs man zu 32, 45, 67 zuzählen, um 100 zu erhalten? Bestimme

25. $85 - 24$, $67 - 26$, $94 - 34$, $74 - 53$, $83 - 51$.

26. $62 - 34$, $54 - 27$, $86 - 18$, $36 - 29$, $64 - 37$.

27. a) $34 + 56 - 42$. b) $100 - 28 - 42$.

28. Von 749 nehme man 185 weg. Von 749 zuerst 100 weg, bleibt...; davon 80 weg, bleibt...; davon noch 5 weg, bleibt...

29. Wie viel ist $466 - 149$, $393 - 208$, $586 - 250$, $423 - 173$, $832 - 565$, $706 - 658$?

30. a) Ein Vater ist 41, sein Sohn 12 Jahre alt; 1) um wie viel Jahre ist der Vater älter als der Sohn; 2) wie groß war der Altersunterschied beider vor 10 Jahren; 3) wie groß wird ihr Altersunterschied nach 10 Jahren sein?

b) Wie viel ist $54 - 6$, $64 - 16$, $74 - 26$?

Die Differenz ändert sich nicht, wenn man zu dem Minuend und dem Subtrahend dieselbe Zahl addiert, oder von beiden dieselbe Zahl subtrahiert.

Von diesem Satze kann manchmal mit Vortheil Gebrauch gemacht werden; z. B.

$$853 - 298 = 855 - 300 = 555,$$
$$648 - 303 = 645 - 300 = 345.$$

Subtraction ganzer Zahlen.

§. 14.

Es sollen folgende Differenzen bestimmt werden:

a) $5978 - 3242$; b) $845 - 216$.

Hier handelt es sich darum, zu bestimmen, wie viel zu den Einheiten eines jeden Ranges im Subtrahend dazu gezählt werden müsse, um die Einheiten desselben Ranges im Minuend zu erhalten.

a)	5978 =	5 T 9 H 7 Z 8 E	
	3242 =	3 T 2 H 4 Z 2 E	
Differenz		2 T 7 H 3 Z 6 E	= 2736;
		15	
b)	845 =	8 H 4 Z 5 E	
	216 =	2 H 1 Z 6 E	
		2	
	629 =	6 H 2 Z 9 E.	

Um in dem Beispiele b) die Subtraction bei den Einern verrichten zu können, vermehrt man die Einer des Minuends um 10 Einer, wobei dann auch der Subtrahend, damit die Differenz ungeändert bleibe, um 1 Zehner vermehrt werden muss. Man hat: 6 E und 9 E sind 15 E; bei den Zehnern sind dann 2 Z von 4 Z zu subtrahieren, wodurch man 2 Z als Differenz erhält; endlich hat man: 2 H und 6 H sind 8 H.

Beim Subtrahieren zählt man daher, bei den Einern anfangend, nach der Reihe zu jeder Ziffer des Subtrahends so viel dazu, dass man die entsprechende Ziffer des Minuends erhält, und setzt die jedesmal dazu gezählte Zahl in den Rest. Ist eine Ziffer des Subtrahends größer als die gleichstellige Ziffer des Minuends, so vermehre man diese letztere um 10 und subtrahiere; dagegen muss dann zugleich die Ziffer in der nächst höheren Stelle des Subtrahends um 1 vermehrt werden.

Um sich von der **Richtigkeit der Subtraction** zu überzeugen, darf man nur den Rest zu dem Subtrahend addieren, wodurch, wenn die Rechnung richtig ist, der Minuend herauskommen muss. Eine zweite **Probe** für die Richtigkeit des Restes besteht darin, dass man denselben vom Minuend subtrahiert, wodurch der Subtrahend zum Vorschein kommen muss.

Das Subtrahieren kann auch als **Probe** für die Richtigkeit der **Addition** angewendet werden. Addiert man nämlich alle Summanden bis auf einen und subtrahiert die dadurch erhaltene Summe von der Summe aller Summanden, so muss, wenn die Addition richtig ist, der weggelassene Summand herauskommen.

Aufgaben.

1.
   967
   592
   ―――
   375

   Man spricht: 2 und 5 ist 7;
   9 und 7 ist 16, 1;
   6 und 3 ist 9.

2. Welche Zahl muss man zu 208 addieren, um 419 zu erhalten?

3. a) 865 − 342   b) 698 − 173   c) 739 − 486   d) 905 − 637   e) 724 − 298

4. a) 677 − 316   b) 694 − 452   c) 300 − 85   d) 834 − 508   e) 543 − 268

5. Mache bei den Aufgaben in 4. die Probe.

6. a) 347 + 906 — 468. b) 981 — 483 + 297.

7. Von 1000 sollen die Zahlen 234, 423 und 342 subtrahiert werden; oder 1000 — (234 + 423 + 342).

8. Welche Zahl gibt zu 2109 addiert die Summe 8056?

9. a) $\begin{array}{r} 4066 \\ \underline{2135} \end{array}$ b) $\begin{array}{r} 9521 \\ \underline{670} \end{array}$ c) $\begin{array}{r} 5187 \\ \underline{2468} \end{array}$ d) $\begin{array}{r} 3854 \\ \underline{1577} \end{array}$

10. a) 25368 — 14843. b) 84691 — 80079.

11. Mache bei den Aufgaben in 9. und 10. die Probe.

12. 24680 — 18772 + 97531 — 68024.

13. Um wie viel ist die Summe 25936 + 57108 größer als die Summe 31527 + 40874?

14. Um wie viel ist die Differenz 81352 — 62586 kleiner als die Differenz 72542 — 53079?

15. Addiere die Zahlen 325467, 527496, 907245, 48394, und subtrahiere von der Summe nach und nach die ersten drei Summanden; wie groß ist der Rest?

16. Von 401894 sollen die Zahlen 139214, 91078, 35709, 102775 subtrahiert werden.

$$\begin{array}{r} 401894 \\ \left.\begin{array}{r} 139214 \\ 91078 \\ 35709 \\ 102775 \end{array}\right\} \\ \hline 33118 \end{array}$$

Anstatt hier zuerst die zu subtrahierenden Zahlen zu addieren und sodann ihre Summe von dem gegebenen Minuend zu subtrahieren, kann man mit der Addition der zu subtrahierenden Zahlen unmittelbar auch die Subtraction von dem Minuend verbinden. Nachdem man nämlich die Einer aller Subtrahenden addiert hat, sucht man sogleich, wie viel man zu ihrer Summe 26 noch dazu zählen müsse, um die nächste höhere Zahl, welche an der Einerstelle die entsprechende Ziffer 4 des Minuends hat, d. i. 34, zu erhalten; 26 und 8 ist 34; die dazu gezählten 8 Einer schreibt man sogleich während des Aussprechens in den Rest. Die 3 Zehner aus der erhaltenen Summe 34 addiert man zu den Zehnern des Subtrahends und verfährt dann wie bei den Einern. Man spricht dabei: 5, 14, 22, 26, und 8 ist 34, 3; 10, 17, 18, und 1 ist 19, u. s. w.

17. 5248901 — (863147 + 168854 + 279039 + 996489).

18. 71357093 — (684260 + 925476 + 1043325 + 842079).

19. Verrichte noch einmal die Additionen in §. 9, Aufgabe 10. und mache die Probe mittels der Subtraction durch Weglassung des ersten Summanden.

Subtraction der Decimalzahlen.

§. 15.

Decimalzahlen werden in gleicher Weise wie ganze Zahlen subtrahiert. Schreibt man dabei den Subtrahend unter den Minuend, so müssen die Decimalpunkte genau untereinander gesetzt werden. Z. B.

8·09	
5·453	3 t und 7 t sind 10 t, 1; 6 h und 3 h sind 9 h;
2·637	4 z und 6 z sind 10 z, 1; 6 E und 2 E sind 8 E.

Aufgaben.

1. 34·56 Sprich: 2 und 4 ist 6; 9 und 6 ist 15, 1;
   6·92 Decimalpunkt;
   27·64 7 und 7 ist 14, 1; 1 und 2 ist 3.
2. Welche Zahl ist um 2·678 kleiner als 8·765?
3. Um wie viel ist 61·43 a) größer als 23·958, b) kleiner als 70?
4. Der Unterschied zweier Zahlen ist 5·593, die größere ist 12·75; welches ist die kleinere?
5. Subtrahiere und mache die Probe:

a)	b)	c)	d)
28·355	85·7	9·04	100
16·79	9·416	0·2607	16·667.

6. a) 38·593 — 15·838, b) 67·859 — 48·369,
   c) 73·314 — 8·2076, d) 5·3415 — 0·88723.
7. Mache bei den Subtractionen in 6. die Probe.
8. 35·1097 + 27·4066 — 41·0365 — 10·3721.
9. Wie groß ist die Summe dreier Zahlen, von denen die erste 128·794, die zweite um 53·165 kleiner als die erste, und die dritte um 9·98 kleiner als die zweite ist?
10. Subtrahiere von 152·4405 die Zahlen 9·1085, 20·3668, 17·4519.
11. 7901·305 — (206·0408 + 123·456 + 789·012 + 135·79 + 802·406 + 918·273).

Subtraction einnamiger Zahlen.

§. 16.

Bei der **Subtraction** benannter Zahlen müssen Minuend und Subtrahend gleichen Namen haben; diesen erhält dann auch die Differenz.

Aufgaben. (Schriftlich und theilweise auch mündlich zu lösen.)

1. Von einem Stück Leinwand das 52 *m* enthält, werden 35 *m* abgeschnitten; wie viel Meter bleiben noch übrig?
2. Ein Sohn verlor seinen 75jährigen Vater, als er selbst 47 Jahre alt war; um wie viel war der Vater älter als der Sohn?
3. Eine Ware wurde um 350 fl. gekauft und um 408 fl. verkauft; wie viel ist dabei gewonnen worden?
4. Ein Kaufmann verkauft eine Ware für 824·64 fl. und gewinnt dabei 76·08 fl.; wir theuer hat er die Ware eingekauft?

5. Jemand nimmt in einem Vierteljahr 900 fl. ein und gibt 813 fl. aus; wie viel erspart er?
6. Von 750 *kg* Kaffee werden nach und nach verkauft: 128, 57, 105 *kg*; wie viel Kaffee bleibt noch vorräthig?
7. Von einem Acker, welcher 442 *ha* misst, werden 2·0825 *ha* verkauft; wie viel bleibt noch übrig?
8. Amerika wurde im Jahre 1493 von Columbus entdeckt; wie lange ist es jetzt bekannt?
9. Kaiser Franz I. wurde 1768 geboren, trat im Alter von 24 Jahren die Regierung an und starb 1835; a) in welchem Jahre kam er zur Regierung, b) in welchem Alter starb er?
10. Im Jahre 1880 zählte man seit der Erfindung der Dampfmaschinen 181 Jahre, seit der Erfindung der Buchdruckerkunst 440 Jahre und seit der Erfindung unseres Papieres 629 Jahre; in welchem Jahre geschah jede dieser Erfindungen?
11. Wie viel Tage haben die ersten sechs Monate eines gemeinen Jahres weniger als die letzten sechs?
12. Jemand schuldete 742·5 fl. und hat davon noch 318·75 fl. zu zahlen; wie viel hat er schon gezahlt?
13. Ein Vater hinterläßt dem älteren seiner beiden Söhne 6840 fl., dem jüngeren um 1580 fl. weniger; wie viel bekommen beide Söhne zusammen?
14. Der Ort A liegt 128 *m* höher als B, B 87 *m* höher als C und C 68 *m* tiefer als D; um wie viel liegt A höher als D?
15. Die Länge eines Pendels, das in jeder Secunde eine Schwingung macht, beträgt am Pole 996·808 *mm*, am Äquator 990·891 *mm*; wie groß ist der Unterschied beider Längen?
16. Die Stadt Graz hatte im Jahre 1820 36012 Einwohner und im Jahre 1880 97791; um wie viel hat die Bevölkerung in dieser Zwischenzeit zugenommen?

4. Multiplicieren mit unbenannten und einnamigen ganzen und Decimalzahlen.

Multip.

§. 17.

Die Wiederholung der Addition eines und desselben Summanden führt auf die **Multiplication**. **Multiplicieren heißt, eine Zahl so oft als Summand setzen, als eine zweite Zahl anzeigt.** Z. B. 5 mit 3 multiplicieren heißt, 5 3mal als Summand setzen, wodurch man 5 + 5 + 5 = 15 erhält. Die Zahl, welche mehrmal als Summand genommen wird, heißt der **Multiplicand**, und die Zahl, welche angibt, wie oft der Multiplicand als Summand gesetzt werden soll, der **Multiplicator**. Die Zahl, welche man durch das Multiplicieren erhält, wird das **Product** genannt. Den Multiplicand und den Multiplicator nennt man auch die **Factoren** des Productes.

Der Multiplicator ist immer unbenannt; der Multiplicand kann auch benannt sein, dann ist auch das Product benannt und zwar mit dem Multiplicand gleichnamig.

Das Zeichen der Multiplication ist ein schiefes Kreuz $\times$ oder auch ein Punkt. Z. B. $5 \times 3 = 15$ oder $5 . 3 = 15$ wird gelesen: 5 **multipliciert** mit 3 ist gleich 15, oder auch: 3mal 5 ist 15; 5 ist hier der Multiplicand und 3 der Multiplicator.

Unter dem Producte von mehr als zwei Zahlen versteht man das Endproduct, welches erhalten wird, wenn man das Product der ersten zwei Zahlen mit der dritten, das neue Product mit der vierten Zahl, u. s. w. multipliciert.

Vorübungen (Kopfrechnen).

§. 18.

1. Wie viel ist 1mal 1, 1mal 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9?
2. Wie viel ist 2mal 1, 2mal 2, 3, ... 8, 9?
3. Wie viel ist das 3fache von 1, von 2, 3, ... 8, 9?
4. Wie viel ist 4mal 1, 4mal 2, 3, ... 8, 9?
5. Wie viel ist 5mal 1, 5mal 2, 3, ... 8, 9?
6. Welche Zahlenreihe erhält man, wenn man die Zahlen 1, 2, 3... 8, 9 folgeweise 5mal als Summand setzt?
7. Wie viel ist 7mal 1, 7mal 2, 3, ... 8, 9?
8. Wie viel ist 8mal 1, 8mal 2, 3, ... 8, 9?
9. Welche Zahl ist 9mal so groß als 1, 2, 3, ... 8, 9?

Die Ergebnisse der voranstehenden Übungen bilden das sogenannte **Einmaleins der Zifferwerte**, das dem Gedächtnisse fest einzuprägen ist.

10. Gib von je zwei neben, und ebenso von je zwei unter einander stehenden Nachbarzahlen, ohne diese selbst auszusprechen, unmittelbar das Product an:

2	9	7	1	3	5	6	4	8
4	5	1	9	2	7	3	8	6
9	3	6	2	4	6	8	2	7
8	4	9	5	7	6	5	3	2

11. a) Wie viel ist 5×3? Wie viel 3×5?

Zerlegt man 5 in fünf Einheiten, macht diese in einer horizontalen Reihe anschaulich und bringt 3 solche Reihen untereinander an:

1 1 1 1 1
1 1 1 1 1
1 1 1 1 1

so erhält man offenbar gleichviel, ob man die Einheiten aller horizontalen, oder jene aller verticalen Reihen zusammenzählt. Zählt man die Einheiten der horizontalen Reihen, so erhält man 5 Einheiten 3mal, oder 5×3; zählt man die Einheiten der verticalen Reihen, so erhält man 3 Einheiten 5mal, oder 3×5. Es ist daher $5 \times 3 = 3 \times 5 = 15$.

Das Product ändert sich nicht, wenn man die Factoren unter einander vertauscht. (Gesetz von der Vertauschbarkeit der Factoren.)

b) Sind mehr als zwei Zahlen zu multipliciren, z. B. 3, 4 und 5, so kann man, ohne das Product zu ändern, je zwei aufeinander folgende Factoren vertauschen und durch wiederholtes Vertauschen jeden Factor an jede beliebige Stelle bringen.

$$3.\underbrace{4.5}_{} = 3.\underbrace{5.4}_{} = \underbrace{5.3}_{}.4 = 5.\underbrace{4.3}_{} = 4.\underbrace{5.3}_{} = 4.3.5 = 60.$$

12. Wie viel ist 1mal 10, 2mal 10, 3mal 10,... 9mal 10?

13. Wie viel ist 1mal 100, 2mal 100,... 9mal 100?

14. Wie viel sind 2mal 4 Zehner? Wie viel ist 2mal 50, 3mal 40, 5mal 60, 7mal 30, 9mal 80?

15. Wie viel sind 3mal 2 Hunderter? Wie viel ist 2mal 400, 5mal 700, 4mal 500, 7mal 600, 8mal 900?

16. Wie viel ist 10mal 1, 10mal 2, 10mal 3, 4,... 9? Was wird also aus den Einern, wenn man sie 10mal nimmt?

17. Wie viel ist 10mal 10, 10mal 20, 10mal 50, 10mal 80? Was wird aus den Zehnern, wenn man sie 10mal nimmt?

18. Wie viel ist 100mal 1, 100mal 2, 100mal 3, 4,... 9?

19. Wie viel ist 100mal 10, 20, 50, 90?

20. Wie viel ist 4mal 20? Wie viel ist 4mal 6? Wie viel ist also 4mal 26?

$$26 \times 4 = 20 \times 4 + 6 \times 4 = 80 + 24 = 104.$$

Eine Summe wird mit einer Zahl multipliciert, indem man jeden Summanden mit derselben multipliciert und die erhaltenen Theilproducte addiert.

21. Wie viel ist 2mal, 3mal,... 9mal a) 11, b) 12, c) 15, d) 16?

22. Wie viel ist 3mal 18, 4mal 21, 5mal 34, 6mal 53, 2mal 127?

23. Nimm jede der Zahlen:

a) 25, b) 84, c) 45, d) 78, e) 51, f) 94, g) 36

m) 2mal, n) 3mal, o) 7mal, p) 8mal, q) 9mal.

24. Wie viel ist 15mal 30?

Statt 30 15mal als Summand zu setzen, kann man, da $15 = 3 \times 5$ ist, zunächst je 3 von den gleichen Summanden in eine Summe zusammenfassen; man erhält dadurch 5 gleiche Summen, welche noch zu addieren sind, was geschieht, wenn man eine dieser Summen mit 5 multipliciert.

$$\begin{array}{ccccc} 30 & 30 & 30 & 30 & 30 \\ 30 & 30 & 30 & 30 & 30 \\ \underline{30} & \underline{30} & \underline{30} & \underline{30} & \underline{30} \end{array}$$

$$30 \times 15 = 90 + 90 + 90 + 90 + 90 = 90 \times 5 = 450,$$

also $30 \times 15 = 30 \times 3 \times 5 = 90 \times 5 = 450.$

Um eine Zahl mit einem Producte zweier Factoren zu multiplicieren, kann man sie mit dem einen Factor, und das Ergebnis mit dem andern Factor multiplicieren.

25. Wie viel ist 20mal 8? 20 ist 2×10; anstatt daher mit 20 zu multiplicieren, multipliciert man zuerst mit 2 und das Ergebnis noch mit 10; 2mal 8 ist 16, 10mal 16 ist 160?

26. Wie viel ist 20mal 10, 30mal 30, 50mal 40?

27. Wie viel ist 20mal 12, 30mal 15, 60mal 13?

28. Wie viel ist 12mal 35?

Es beträgt gleichviel, ob man 12 Stücke einer Ware auf einmal, oder zuerst 10 Stücke und dann noch 2 Stücke à 35 kr. bezahlt. $35 \times 12 = 35 \times 10 + 35 \times 2 = 350 + 70 = 420.$

Eine Zahl wird mit einer Summe multipliciert, indem man sie mit jedem Summanden multipliciert und die erhaltenen Theilproducte addiert.

29. Wie viel ist 13mal 20, 17mal 51, 24mal 33, 22mal 350?

Multiplication ganzer Zahlen.

§. 19.

a. Multiplication mit einer einziffrigen Zahl.

Es sei die Zahl 132 mit 3 zu multiplicieren.

$$\begin{array}{r} 132 \\ 132 \\ \underline{132} \\ 396 \end{array} \qquad \text{Multiplicand } 132 \times 3 \text{ Multiplicator}$$

396 Product.

3mal 2 E sind 6 E,
3mal 3 Z sind 9 Z,
3mal 1 H sind 3 H.

Welchen Stellenwert hat das Product, wenn man Einer, Zehner, Hunderter ... mit Einern multipliciert?

Es soll ferner 456 mit 8 multipliciert werden.

456 × 8 — 8mal 6 E sind 48 E, d. i. 8 E und 4 Z;
3648 — 8mal 5 Z sind 40 Z, und 4 Z sind 44 Z, d. i. 4 Z und 4 H;
8mal 4 H sind 32 H, und 4 H sind 36 H.

Man multipliciert also mit dem einziffrigen Multiplicator der Reihe nach die Einer, Zehner, Hunderter ... des Multiplicands und schreibt die erhaltenen Producte als Einheiten desselben Ranges an; ist ein Product zweiziffrig, so werden nur die Einer jenes Ranges an die betreffende Stelle gesetzt, die Zehner dagegen als Einheiten des nächst höheren Ranges zu dem Producte bei der nächst höheren Ziffer dazu gezählt.

b. Multiplication mit einer höheren Rangzahl.

Um eine Zahl mit 10, 100, 1000 zu multiplicieren, muss man jeder Ziffer derselben einen 10mal, 100mal, 1000mal so hohen Wert ertheilen. Dies geschieht, indem man der ganzen Zahl 1, 2, 3 Nullen anhängt. Z. B.:

318 × 10 = 3180   709 × 100 = 70900   850 × 1000 = 850000

Multipliciere jede der Rangzahlen

1, 10, 100, 1000, 10000, 100000

mit jeder der Rangzahlen

1, 10, 100, 1000, 10000, 100000.

Welche Rangzahl erhält man jedesmal als Product?

Die Ergebnisse enthält die nachstehende Tabelle, welche einen Theil des sogenannten Einmaleins der Stellenwerte bildet.

E	Z	H	T	Zt	Ht	
Z	H	T	Zt	Ht	M	
H	T	Zt	Ht	M	Zm	
T	Zt	Ht	M	Zm	Hm	
Zt	Ht	M	Zm	Hm	Tm	
Ht	M	Zm	Hm	Tm	Ztm	

In dieser Tabelle, welche dem Gedächtnisse einzuprägen ist, kommt das Product irgend einer Rangzahl der obersten Horizontalspalte mit irgend einer Rangzahl der ersten Verticalspalte in dem Durchschnitte beider Spalten vor.

c. Multiplication mit einer mehrziffrigen Zahl.

Wenn der Multiplicator z. B. 40 = 4 × 10 oder 400 = 4 × 100 ist, so multipliciert man den Multiplicand zuerst mit 4, und dann noch mit 10 oder bezüglich mit 100, indem man dem ersteren Producte eine oder zwei Nullen anhängt.

Ist nun z. B. 649 mit 435 zu multiplicieren, so muſs man den Multiplicand 400mal, 30mal und 5mal nehmen und die erhaltenen Theilproducte addieren.

Man erhält also

	649 × 435	oder	649 × 435
400mal 649 . . .	259600		2596
30mal 649 . . .	19470		1947
5mal 649 . . .	3245		3245
	282315		282315.

Die Nullen rechts in den Theilproducten haben nur den Zweck, der ersten von 0 verschiedenen Ziffer, und daher dann auch den übrigen die richtige Stelle anzuweisen; sie können somit auch weggelassen werden, sobald über den Stellenwert dieser Ziffern kein Zweifel obwalten kann, was hier der Fall ist, da die niedrigste von 0 verschiedene Ziffer eines jeden Theilproductes Einheiten desselben Ranges bedeuten muſs, wie die Ziffer des Multiplicators, mit welcher man multipliciert hat.

Es ist an sich gleichgiltig, in welcher Ordnung man mit den einzelnen Ziffern des Multiplicators multipliciert, wenn nur die Theilproducte in der gehörigen Stellung unter einander geschrieben werden. Im allgemeinen erscheint es am zweckmäßigsten, zuerst mit der höchsten Ziffer des Multiplicators und dann nach der Reihe mit den niedrigeren zu multiplicieren, wobei man jedes folgende Theilproduct um eine Stelle rechts hinausrückt und dann die Theilproducte, wie sie stehen, addiert.

Kommt im Multiplicator in dessen inneren Stellen eine Null vor, so wird diese beim Multiplicieren übergangen, dafür aber das nächstfolgende Theilproduct um zwei Stellen weiter rechts gesetzt.

Zur Probe für die Richtigkeit der Multiplication darf man nur die Factoren vertauschen und dann die Multiplication noch einmal vornehmen; erhält man dabei wieder das nämliche Product, so darf dasselbe als richtig angesehen werden.

d. Rechnungsvortheile.

1. Läſst sich der Multiplicator in zwei Factoren zerlegen, mit denen man bequem multiplicieren kann, so multipliciert man den Multiplicand zuerst mit dem einen Factor und dann das Ergebnis mit dem andern Factor. Z. B.:

$$\begin{array}{rl} 51046 & \times\ 24 \\ \hline & \times\ 4 \\ 204184 & \\ \hline & \times\ 6 \\ 1225104 & \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 21596 & \times\ 350 \\ \hline & \times\ 7 \\ 151172 & \\ \hline & \times\ 50 \\ 7558600 & \end{array}$$

2. Ist die erste oder die letzte Ziffer des Multiplicators 1, so läßt man den Multiplicand ungeändert als das zu dieser Ziffer gehörige Theilproduct stehen, multipliciert ihn dann nur mit den übrigen Ziffern des Multiplicators und schreibt die dadurch erhaltenen Theilproducte gehörig darunter. Z. B.:

$$\begin{array}{r} 15308 \times 13 \\ 45924 \\ \hline 199004 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 40925 \times 301 \\ 122775 \\ \hline 12318425 \end{array}$$

3. Ist der Multiplicator 11, so schreibt man die erste Ziffer rechts im Multiplicand ungeändert an, addiert dann zur ersten Ziffer die zweite, zur zweiten die dritte, u. s. w. Z. B.:

$$\begin{array}{r} 79264 \times 11 \\ 79264 \\ \hline 871904 \end{array} \qquad \text{kürzer} \qquad \begin{array}{r} 70264 \times 11 \\ \hline 871904 \end{array}$$

Aufgaben.

1. $\begin{array}{r} 3716 \times 4 \\ \hline 14864 \end{array}$ Sprich: 24, 2; 4, 6; 28, 2; 12, 14.
2. Multipliciere mit 2, 3, 4 ... 8, 9 die folgenden Zahlen:
24, 714, 956, 512, 382, 4067, 8406,
87, 508, 484, 205, 475, 2596, 9057.
3. Multipliciere die Zahl 5 mit sich selbst, das Product wieder mit 5 u. s. f., bis du 5 Producte erhältst; a) welches ist das letzte Product, b) wie groß ist die Summe aller Producte?
4. a) 13794×2. b) 29078×6.
5. Multipliciere 91072 mit 3, das Product mit 4, das neue Product mit 5.
6. Multipliciere 905347 6mal nacheinander mit 3, ebenso oft mit 4, 5, 6, 7, 8, 9.
7. a) 49758×10. b) 69450×100.
1982523×60. 193146×5000.
8. Multipliciere 5798 mit 10, 100, 1000, 30, 500, 8000.
9. Wie viel ist $5016237 \times 9 + 83406 \times 2000$?
10. Bestimme noch vor Ausführung der Multiplication den Stellenwert der höchsten Ziffer des Productes:

a) 563 × 37; b) 9154 × 266;
c) 13048 × 74; d) 38701 × 453;
e) 29207 × 4014; f) 64075 × 12345.

11. Wähle bei der nebenstehenden Multiplication irgend eine Ziffer eines Theilproductes aus und bestimme ihren Stellenwert aus den Stellenwerten der Ziffern, durch deren Multiplication sie entstanden ist.

5179 × 3648
15537
31074
20716
41432
18892992

Z. B.: Die Ziffer 7 des dritten Theilproductes entstand durch Multiplication von 1 H mit 4 Z; diese Ziffer hat also den Stellenwert H × Z, d. i. T.

12. Verfahre ebenso bei den Multiplicationen:
a) 7927 × 3462; b) 15824 × 6159.

13. Bestimme das Product je zweier neben und je zweier unter einander stehender Zahlen und mache die Probe durch Vertauschung der Factoren:

3179	5084	2263	4706	5328
4826	7519	9081	8530	6407.

14. Wie groß ist das 5206fache a) von 49032? b) von 52963?

15. a) 470300 × 51207. b) 85290 × 14930.
89370 × 38147. 21092 × 49753.

16. Multipliciere jede der Zahlen a) 63758, b) 29370, c) 57012 mit jeder der Zahlen m) 6120, n) 33049, p) 32678, und mache die Probe durch Vertauschung der Factoren.

17. 41397 × 80902 × 4630.

18. 5602 × 7981 × 3596 × 4085.

Bestimme mit Anwendung von Vortheilen:

19. a) 75263 × 27. b) 32289 × 72.
90648 × 45. 56071 × 36.

20. a) 809175 × 48. b) 126054 × 54.
287050 × 64. 293491 × 630.

21. a) 17052 × 17. b) 92478 × 144.
947063 × 51. 708347 × 601.

22. a) 439251 × 61. b) 135709 × 321.
580463 × 19. 688437 × 159.

23. 738526 × 11
8123786

Sprich: 6; 8, 7; 13, 1; 9, 12, 1; 4, 11, 1; 8.

24. a) 561289 × 11. b) 834190 × 11.
806509 × 11. 688437 × 11.

25. Multipliciere jede der Zahlen 34129, 93256, 170948 4mal nacheinander mit 11.

Multiplication der Decimalzahlen.

§. 20.

a. Multiplication einer Decimalzahl mit einer einziffrigen ganzen Zahl.

Es sei z. B. 0·836 mit 7 zu multiplicieren.

0·836 × 7	7mal 6 t sind 42 t, oder 2 t und 4 h;
5·852	7mal 3 h sind 21 h, und 4 h sind 25 h, oder 5 h und 2 z;
	7mal 8 z sind 56 z, und 2 z sind 58 z, oder 8 z und 5 E.

Welchen Stellenwert hat das Product, wenn man Zehntel, Hundertel, Tausendtel,... mit Einern multipliciert?

b. Multiplication einer Decimalzahl mit einer höheren Rangzahl.

Um eine Decimalzahl mit 10, 100, 1000 zu multiplicieren, muſs man jeder Ziffer derselben einen 10mal, 100mal, 1000mal höheren Wert ertheilen. Dies geschieht, indem man den Decimalpunkt um 1, 2, 3 Stellen nach rechts rückt. Z. B.:

0·345 × 10	5·082 × 100	6·47 × 100	0·89 × 1000
3·45	508·2	647	890

Was für eine Rangzahl erhält man, wenn man jede der Rangzahlen

1, 0·1, 0·01, 0·001, 0·0001, 0·00001

folgeweise mit den Rangzahlen

1, 10, 100, 1000, 10000, 100000

multipliciert?

Die Ergebnisse enthält die nachstehende das Einmaleins der Stellenwerte erweiternde Tabelle:

E	z	h	t	zt	ht	
Z	E	z	h	t	zt	
H	Z	E	z	h	t	
T	H	Z	E	z	h	
Zt	T	H	Z	E	z	
Ht	Zt	T	H	Z	E	

c) Multiplication einer Decimalzahl mit einer mehrziffrigen ganzen Zahl.

Um eine Decimalzahl z. B. mit 30 = 3 × 10 oder mit 300 = 3 × 100 zu multiplicieren, multipliciert man sie zuerst mit 3, und dann das Product noch bezüglich mit 10 oder 100, indem man den Decimalpunkt um 1 oder 2 Stellen nach rechts rückt.

Es sei nun 5·903 mit 257 zu multiplicieren.

	5·90 3 × 257
200mal 5·903 ...	11 80·6
50mal 5·903 ...	2 95·15
7mal 5·903 ...	41·321
	15 17·071.

Die niedrigste Ziffer 1 des Productes ist aus der Multiplication der niedrigsten Ziffer 3 des Multiplicands mit den Einern 7 des Multiplicators entstanden; sie muss daher mit der letzteren gleichen Stellenwert haben, d. h. im Producte müssen eben so viele Decimalstellen vorkommen wie im Multiplicand.

d) **Multiplication einer Decimalzahl mit einer niedrigeren Rangzahl.**

Die Multiplication mit 0·1, 0·01, 0·001 hat nach der in §. 17 aufgestellten Erklärung des Multiplicierens keinen Sinn. Soll dieselbe eine Bedeutung haben, so muss der Begriff der Multiplication entsprechend erweitert werden.

Es ist $0·1 \times 10 = 1$, $0·1 \times 100 = 10$, $0·1 \times 1000 = 100$.

Lässt man nun das Gesetz der Vertauschbarkeit der Factoren allgemein gelten, so ist auch

$10 \times 0·1 = 1$, $100 \times 0·1 = 10$, $1000 \times 0·1 = 100$.

Hierauf beruht folgende Erklärung:

Eine Zahl mit 0·1 multiplicieren heißt, ihren 10ten Theil nehmen.

Ebenso ergibt sich:

Eine Zahl mit 0·01, 0·001, ... multiplicieren heißt, ihren 100sten, 1000sten Theil nehmen.

Um nun eine Decimalzahl mit 0·1, 0·01, 0·001 zu multiplicieren, muss man von dem Werte jeder Ziffer derselben den 10ten, 100sten, 1000sten Theil nehmen. Dies wird erzielt, indem man den Decimalpunkt um 1, 2, 3 Stellen nach links rückt. Z. B.

52·3 × 0·1	75·6 × 0·01	9·28 × 0·001
5·23	0·756	0·00928.

Welche Rangzahl erhält man, wenn man jede der Rangzahlen

1, 0·1, 0·01, 0·001, 0·0001, 0·00001

folgeweise mit den Rangzahlen

1, 0·1, 0·01, 0·001, 0·0001, 0·00001

multipliciert?

Die Ergebnisse sind in der nachfolgenden das Einmaleins der Stellenwerte abschließenden Tabelle zusammengestellt:

E	z	h	t	zt	ht	
z	h	t	zt	ht	m	
h	t	zt	ht	m	zm	
t	zt	ht	m	zm	hm	
zt	ht	m	zm	hm	tm	
ht	m	zm	hm	tm	ztm	

e) Multiplication einer Decimalzahl mit einer mehrzifferigen Decimalzahl.

Es sollen folgende Producte bestimmt werden:

a) $48 \cdot 57 \times 0 \cdot 03$, b) $70 \cdot 98 \times 0 \cdot 006$.

a) $\frac{48 \cdot 57 \times 0 \cdot 03}{1 \cdot 4571}$ 7 h × 3 h gibt 21 zt; die Ziffer 1 steht also an der 4ten Decimalstelle.

b) $\frac{70 \cdot 98 \times 0 \cdot 006}{0 \cdot 42588}$ 8 h × 6 t gibt 48 h t; die Ziffer 8 kommt also an die 5te Decimalstelle.

Es sei nun $23 \cdot 56$ mit $3 \cdot 789$ zu multiplicieren.

$$
\begin{array}{lcr}
 & & 23 \cdot 56 \times 3 \cdot 789 \\
\hline
23 \cdot 56 \times 3 & \ldots & 70 \cdot 68 \\
23 \cdot 56 \times 0 \cdot 7 & \ldots & 16 \cdot 492 \\
23 \cdot 56 \times 0 \cdot 08 & \ldots & 1 \cdot 8848 \\
23 \cdot 56 \times 0 \cdot 009 & \ldots & 0 \cdot 21204 \\
\hline
 & & 89 \cdot 26884.
\end{array}
$$

Ebenso erhält man

$$
\begin{array}{r}
15 \cdot 3 \times 3 \cdot 14 \\
\hline
45 \cdot 9 \\
1 \cdot 53 \\
612 \\
\hline
48 \cdot 042
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
4 \cdot 23 \times 0 \cdot 01307 \\
\hline
0 \cdot 0423 \\
1269 \\
2961 \\
\hline
0 \cdot 0552861.
\end{array}
$$

Da die niedrigste Ziffer im Producte erhalten wird, indem man die niedrigste Ziffer des Multiplicands mit der niedrigsten Ziffer des Multiplicators multipliciert, so ist leicht einzusehen, dass das Product eben so viele Decimalstellen haben müsse als beide Factoren zusammen.

Aufgaben.

1. $5\cdot367 \times 4$ Sprich: 28, 2; 24, 26, 2; 12, 14, 1; Decimalpunkt;
$\overline{21\cdot468}$ 20, 21.

2. Multipliciere mit 2, 3, 4, ... 8, 9 folgende Zahlen:
5·2, 27·5, 4·19, 76·6, 2·18, 0·1937, 6·712,
0·66, 1·67, 7·09, 43·5, 8·03, 0·3385, 2·198.

3. a) $7\cdot245 \times 6$. b) $3\cdot1416 \times 3 \times 5$.

4. $78\cdot932 \times 2 \times 6 \times 8$.

5. $135\cdot79 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7$.

6. $640\cdot28 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6$.

7. Multipliciere 39·2507 4mal nach einander mit 3, ebenso mit 4, 7, 8, 9.

8. a) $3926\cdot08 \times 100$. b) $1\cdot3472 \times 1000$.

9. Multipliciere die Zahl 3·8016 mit 10, 100, 1000, 10000, 1000000.

10. a) $79\cdot056 \times 20$. b) $5\cdot2403 \times 400$.

11. a) $0\cdot91 \times 58$. b) $4\cdot301 \times 92$.
$0\cdot418 \times 82$. $12\cdot856 \times 37$.

12. a) $0\cdot336 \times 432$. b) $2\cdot7136 \times 703$.
$5\cdot092 \times 693$. $0\cdot0795 \times 2618$.

Berechne mit Anwendung von Vortheilen.

13. a) $0\cdot7912 \times 32$. b) $25\cdot4426 \times 56$.
$7\cdot8507 \times 49$. $19\cdot0837 \times 350$.

14. a) $6\cdot1384 \times 19$. b) $6\cdot78913 \times 11$.
$32\cdot7051 \times 401$. $0\cdot54265 \times 110$.

15. Multipliciere 87·35 mit 0·1, 0·01, 0·001.

16. Wie groß ist das Product von 5 Factoren, deren jeder 0·8 ist?

17. Bilde ein Product von 6 gleichen Factoren, deren jeder
a) 0·2, b) 0·5, c) 0·9 ist.

18. a) $39\cdot56 \times 1\cdot2$. b) $4\cdot2789 \times 7\cdot5$.
$60\cdot58 \times 3\cdot7$. $0\cdot4065 \times 0\cdot92$.

Bestimme in den Aufgaben 19. und 20. vor Ausführung der Multiplication den Stellenwert der höchsten und der niedrigsten Ziffer des Productes.

19. a) $628\cdot49 \times 0\cdot327$. b) $1\cdot8516 \times 51\cdot8$.
c) $3074\cdot18 \times 0\cdot0656$. d) $727\cdot391 \times 0\cdot857$.

20. a) $72\cdot462 \times 13\cdot907$. b) $330\cdot57 \times 28\cdot38$.
c) $81\cdot427 \times 643\cdot27$. d) $8313\cdot52 \times 0\cdot00665$.

21. Bilde folgende Producte und bestimme für irgend eine selbstgewählte Ziffer in den Theilproducten den Stellenwert aus ihrer Entstehungsweise:

a) 34·141 × 9·864. b) 5·7719 × 0·057.
c) 10·81302 × 0·129. d) 0·07264 × 0·3642.

22. Multipliciere je zwei neben und je zwei unter einander stehende Zahlen und mache die Probe durch Vertauschung der Factoren:

15·328	6·2104	8·4025	3·1416	14·8875
5·789	0·0175	0·0957	12·8572	0·53644.

23. Wie groß sind die Producte, welche man erhält, wenn man jede der Zahlen a) 3709·2, b) 566·25, c) 10·8273 mit sich selbst multipliciert?

24. Wie groß ist das Product von drei Factoren, deren jeder gleich a) 0·108, b) 29·05, c) 31·554 ist?

Multiplication einnamiger Zahlen.

§. 21.

Aufgaben.

1. 1 *hl* Wein kostet 48 fl., wie viel kosten 9 *hl*?

   1 *hl* Wein kostet 48 fl., 9 *hl* sind 9mal 1 *hl*, es kosten also 9 *hl* 9mal 48 fl. = 432 fl.

2. Wie viel kosten 8 *a* Landes, wovon das *a* mit a) 17 fl., b) 23 fl., c) 30 fl., d) 36·75 fl. bezahlt wird?

3. 1 *dm* Tuch kostet 0·34 fl.; wie viel kostet 1 *m*?

4. 1 *l* Wein kostet 0·48 fl.; wie viel kostet 1 *hl*?

5. 1 *kg* Zucker kostet 0·36 fl.; wie viel kostet 1 *q*?

6. 1 *m* kostet 7·28 fl.; wie viel kosten a) 35 *m*, b) 72·25 *m*?

7. Aus 1 *kg* feinen Silbers werden 90 Gulden österreichischer Währung geprägt; wie viel Gulden aus 236 *kg*?

8. Der Durchmesser der neuen österr. Zweiguldenstücke beträgt 36 *mm* und jener der Guldenstücke 29 *mm*; welche Länge erhält man, wenn man 2 Zweiguldenstücke und 32 Guldenstücke in gerader Linie gehörig neben einander legt?

9. Welchen Wert in ö. W. haben 2408 Franken à 0·485 fl.

10. Wenn 1 *hl* Wein im Einkaufe 23 fl. gekostet hat und 32 *hl* für 832 fl. verkauft wurden, wie viel hat man beim Verkaufe gewonnen?

11. A gibt dem B 118 *hl* Gerste à 5 fl. und bekommt dafür von B 14 *hl* Wein à 21 fl.; wie viel an Geld hat er noch von B zu fordern?

12. Jemand kauft 17 *ha* Ackerland à 955 fl., 4 *ha* Wiesen à 583 fl. und 22 *ha* Waldungen à 295 fl.; wie viel hat er dafür im ganzen zu bezahlen?

13. Wenn 1 *ha* Ackerland durchschnittlich 13 *hl* Getreide liefert, wie groß ist das Erträgnis von a) 9 *ha*? b) 15 *ha*? c) 29·75 *ha*?
14. Ein Capital gibt in einem Jahre 173·41 fl. Zins; wie viel in 2·5 Jahren?
15. Wie viel kosten 13·25 *hl*, wenn 1 *hl* 4·83 fl. kostet?
16. Wie viel kosten 58·75 *m* eines Stoffes à 5·64 fl.?
17. Eine Locomotive legt in 1 Stunde 25·76 *km* zurück; wie viel in 3·75 Stunden?
18. Ein Fass mit Kaffee wiegt 218·15 *kg*, das leere Fass wiegt 37·5 *kg*; wie viel kostet der Kaffee, wenn 1 *kg* Netto mit 1·52 fl. bezahlt wird?
19. Der Schall legt in jeder Secunde 332·25 *m* zurück; wie viel das Licht, welches sich 926406mal so schnell verbreitet als der Schall?
20. Steiermark hat einen Flächeninhalt von 22354·75 km^2; wie groß ist die Bevölkerung dieses Landes, wenn man auf 1 km^2 durchschnittlich 54 Einwohner rechnet?

---

5. Dividieren mit unbenannten und einnamigen ganzen und Decimalzahlen.

§. 22.

Dem Multiplicieren ist das Dividieren entgegengesetzt. Dividieren heißt, aus dem Producte zweier Factoren und aus einem dieser Factoren den andern suchen. Z. B. 20 ist das Product aus den beiden Factoren 5 und 4; aus dem Producte 20 und dem einen Factor 5 den andern Factor suchen, heißt 20 durch 5 dividieren. Das gegebene Product heißt der Dividend, der bekannte Factor der Divisor, und der unbekannte Factor, welcher durch die Division gefunden wird, der Quotient. Wenn man den Quotienten und den Divisor mit einander multipliciert, so muss der Dividend herauskommen.

Das Zeichen der Division ist ein Doppelpunkt :, welcher anzeigt, dass die Zahl vor dem Doppelpunkte durch die Zahl nach demselben zu dividieren ist; oder ein Strich, über welchem der Dividend und unter welchem der Divisor steht. Z. B. 20 : 4 oder $\frac{20}{4}$ wird gelesen: 20 dividiert durch 4, oder 4 in 20.

Jede Multiplication zweier Zahlen, z. B. $5 \times 4 = 20$, bietet in ihrer Umkehrung zwei dem Begriffe nach verschiedene Aufgaben der

Division, je nachdem außer dem jedesmal gegebenen Producte 20, dem Dividend, entweder der Multiplicand 5 oder der Multiplicator 4 als Divisor gegeben ist.

Ist als Divisor der Multiplicand 5 gegeben, so ist diejenige Zahl zu suchen, welche anzeigt, wie oft 5 als Summand gesetzt werden müsse, um den Dividend 20 als Summe zu erhalten. Diese Zahl 4 erhält man, indem man untersucht, wie oft sich der Divisor 5 in dem Dividend 20 subtrahieren läßt oder wie oft der Divisor 5 in dem Dividend 20 enthalten ist. Die Division ist eine Untersuchung des Enthaltenseins, ein Messen.

Ist dagegen der Multiplicator 4 als Divisor gegeben, so hat man diejenige Zahl zu suchen, welche 4mal als Summand gesetzt den Dividend 20 zur Summe gibt; diese Zahl 5 findet man, indem man den Dividend in 4 gleiche Theile theilt. Die Division ist hier ein Theilen.

Noch deutlicher tritt der Unterschied zwischen den beiden Divisionsarten an benannten Zahlen hervor: Z. B.

Multiplicationsaufgabe: 1 *m* kostet 5 fl., wie viel kosten 4 *m*? Antwort: 5 fl. × 4 = 20 fl.

Die beiden daraus zu bildenden Divisionsaufgaben sind:

a) 1 *m* kostet 5 fl.; wie viel Meter erhält man für 20 fl.? Hier sind das Product und der Multiplicand gegeben und der Multiplicator zu suchen. Es wird gefolgert: Für 5 fl. erhält man 1 *m*, für 20 fl. wird man so vielmal 1 *m* erhalten, wie oft 5 fl. in 20 fl. enthalten sind, also 4mal 1 *m*, d. i. 4 *m*. Hier werden 20 fl. durch 5 fl. gemessen; man hat 20 fl. : 5 fl. = 4. Wird die Division benannter Zahlen zur Lösung einer Aufgabe des Messens angewendet, so müssen Dividend und Divisor als Product und Multiplicand gleichnamig sein; der Quotient aber als Multiplicator ist immer unbenannt; erst durch anderweitige Schlüsse kann er einen Namen erhalten, wie im angeführten Beispiele „Meter".

b) 4 *m* kosten 20 fl., wie viel kostet 1 *m*? Hier sind das Product und der Multiplicator gegeben und der Multiplicand zu suchen. Es wird geschlossen: 1 *m* ist der 4te Theil von 4 *m*, 1 *m* kostet daher nur den 4ten Theil von 20 fl. Es werden also 20 fl. in 4 gleiche Theile getheilt, und so viele Gulden ein solcher Theil enthält, so viele Gulden kostet 1 *m*; man erhält 20 fl. : 4 = 5 fl. Wird die Division benannter Zahlen als Theilen angewendet, so muss der Divisor als Multiplicator immer unbenannt sein; der Quotient als Multiplicand ist gleichnamig mit dem Dividend als Product.

Das Theilen läſst sich immer auf das Messen zurückführen. Ist z. B. 20 durch 4 zu theilen, so hat man den 4ten Theil von 20 zu suchen; diesen findet man, indem man von je 4, welche in 20 vorkommen, immer nur 1 nimmt; man erhält dadurch so vielmal 1, wie oft 4 in 20 vorkommt, d. h. der 4te Theil von 20 ist so viel, wie oft 4 in 20 enthalten ist. So sehr daher die beiden Divisionsarten des Messens und des Theilens dem Begriffe nach verschieden sind, so geben doch beide für denselben Dividend und denselben Divisor, wenn man von den Benennungen absieht, dieselbe Zahl als Quotienten und fallen daher in der Ausführung in eine einzige Rechnungsart zusammen.

Die Ausführung der Division ist in der natürlichen Zahlenreihe nicht immer möglich. Man kann z. B. keine ganze Zahl finden, welche der 3te Theil von 20 wäre; 6 ist zu klein und 7 zu groß. Man muſs da den Quotienten so groß nehmen, als es angeht, also die größte Zahl bestimmen, welche mit dem Divisor multipliciert ein Product gibt, das nicht größer ist als der Dividend. Bestimmt man den Quotienten in dieser Weise, so besteht zwischen dem Dividende und dem Producte aus dem Quotienten und Divisor noch ein Unterschied, welcher Rest der Division genannt wird. In diesem Falle muſs man also zu dem Producte aus dem Quotienten und dem Divisor noch den Rest addieren, um den Dividend zu erhalten. So ist $20 : 3 = 6$ mit dem Reste 2, und daher $6 \times 3 + 2 = 20$.

Vorübungen (Kopfrechnen).

§. 23.

Wie oft ist enthalten?

1. 1 in 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9?
2. 2 „ 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18?
3. Wie oft ist 2 in 7 enthalten? Wie viel bleibt noch übrig?
4. Wie oft ist 2 in 3, 19, 13, 15, 9, 17 enthalten, und welcher Rest bleibt jedesmal übrig?

Wie oft ist enthalten

5. 3 in 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27; in 7, 20, 14, 26?
6. 4 „ 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36; „ 6, 15, 21, 34?
7. 5 „ 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45; „ 9, 22, 33, 49?
8. 6 „ 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54; „ 8, 13, 34, 53?
9. 7 „ 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63; „ 10, 25, 36, 60?
10. 8 „ 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72; „ 18, 30, 45, 69?
11. 9 „ 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81; „ 12, 38, 64, 78?

Wie viel ist

12.	die Hälfte	von	8,	9,	16,	15,	3,	11,	7,	18,	13, 15?
13.	der dritte Theil	„	6,	24,	18,	13,	26,	8,	19,	25,	15, 22?
14.	„ vierte „	„	20,	7,	14,	35,	32,	17,	10,	37,	23, 30?
15.	„ fünfte „	„	15,	26,	9,	36,	40,	12,	23,	45,	34, 18?
16.	„ sechste „	„	24,	13,	32,	8,	55,	46,	49,	36,	23, 50?
17.	„ siebente „	„	49,	64,	10,	37,	60,	42,	18,	29,	40, 13?
18.	„ achte „	„	16,	43,	26,	68,	61,	50,	40,	39,	12, 77?
19.	„ neunte „	„	63,	10,	46,	36,	74,	26,	58,	19,	85, 70?

20. Wie oft ist 10 in 30 enthalten? wie oft 10 in 50, 20, 80, 60, 40? Was wird aus den Zehnern, wenn man sie durch 10 dividiert?

21. Wie viel ist der 10te Theil von 100, von 500, 700, 900? Was wird aus den Hundertern, wenn man sie durch 100 dividiert?

22. Wie oft sind 2 Zehner in 6 Zehnern, wie oft 20 in 100, 30 in 180, 50 in 200, 60 in 360, 80 in 320, 90 in 270 enthalten?

23. Wie viel ist 80 : 20, 120 : 30, 233 : 50, 137 : 40, 311 : 60?

24. Wie viel ist der 100ste Theil von 1000, 4000, 7000, 8000? Was wird aus den Tausendern, wenn man sie durch 100 theilt?

25. Wie oft sind 3 Hunderter in 15 Hundertern enthalten. Wie oft ist 400 in 1200, 500 in 2000, 600 in 4200 enthalten?

26. Der wievielte Theil von 800 ist 100, 200, 400?

27. Wie viel ist die Hälfte von 20? die Hälfte von 8? Wie groß ist daher die Hälfte von 28.

$$28 : 2 = 20 : 2 + 8 : 2 = 10 + 4 = 14.$$

Eine Summe wird durch eine Zahl dividiert, indem man jeden Summanden durch dieselbe dividiert und die erhaltenen Theilquotienten addiert.

28. Wie oft ist 4 in 56 enthalten? 56 ist 40 + 16; 4 ist in 40 10mal, 4 in 16 4mal, 4 in 56 also 14mal enthalten.

29. Theile durch 2, 3, 4, ... 8, 9 jede der folgenden Zahlen:
   a) 82, 59, 15, 24, 46, 64, 30, 72, 51, 28, 7, 36;
   b) 20, 65, 9, 52, 12, 40, 49, 68, 34, 83, 55, 25.

30. Wie oft ist 2 in 106, 3 in 216, 9 in 648, 4 in 114, 9 in 528, 7 in 580, 5 in 372, 6 in 213 enthalten?

31. Wie viel ist 5mal der 6te Theil von 138; 7mal der 8te Theil von 280; 8mal der 5te Theil von 345?

32. a) Theile 60 in 4 gleiche Theile, und dann jeden solchen Theil noch in 3 gleiche Theile. Wie viele gleiche Theile erhältst du, und wie groß ist jeder? Wie kann man also eine Zahl in 12 gleiche Theile theilen?

$$60 : 12 = (60 : 4) : 3 = 15 : 3 = 5.$$

b) Wie viel ist der 6te Theil von dem 4ten Theile von 120? Wie viel ist der 24ste Theil von 120?

Anstatt eine Zahl durch ein Product zweier Zahlen zu dividieren, dividiert man sie zuerst durch den einen Factor und dann das Ergebnis durch den andern Factor.

33. Wie viel ist der 15te Theil von 135, der 16te Theil von 352, der 32ste Theil von 448, der 45ste Theil von 945?

34. Eine Summe von 80 fl. wird unter 10 Personen zu gleichen Theilen vertheilt; wie viel erhält jede? Wie viel erhält eine Person, wenn die doppelte, dreifache Summe unter 2mal, 3mal so viel Personen vertheilt wird? Wie viel erhält jede Person, wenn der 5te Theil der Summe unter den 5ten Theil der Personen vertheilt wird?

Der Quotient ändert sich nicht, wenn man den Dividend und den Divisor mit derselben Zahl multipliciert, oder beide durch dieselbe Zahl dividiert.

Division ganzer Zahlen.

§. 24.

a) Division durch eine einziffrige Zahl.

Dividend 936 : 3 Divisor — 9 H : 3 = 3 H,
312 Quotient — 3 Z : 3 = 1 Z,
6 E : 3 = 2 Z.

Welchen Stellenwert erhält der Quotient, wenn man Einer, Zehner, Hunderter, ... durch Einer dividiert?

2738 : 6
456, Rest 2

Da 2 T durch 6 dividiert keine T geben, so nimmt man sogleich 27 H als ersten Theildividend an.

27 H : 6 geben 4 H, bleiben noch 3 H;
3 H und 3 Z sind 33 Z, 33 Z : 6 geben 5 Z, bleiben 3 Z;
3 Z und 8 E sind 38 E, 38 E : 6 geben 6 E, bleiben 2 E als Rest.

Man beginnt also die Division bei der höchsten Stelle und setzt sie dann bis zu den Einern herab fort. Bleibt von einem Theildividende ein Rest übrig, so wird er in Einheiten des niedrigeren Ranges verwandelt und mit der an dieser Stelle befindlichen Ziffer des Dividends vereinigt.

b) Division durch eine höhere Rangzahl.

Um eine Zahl durch 10, 100, 1000 zu dividieren, muſs man von dem Werte jeder Ziffer den 10ten, 100sten, 1000sten Theil nehmen. Dies geschieht, indem man von der ganzen Zahl rechts 1, 2, 3 Ziffern abschneidet; die links bleibenden Ziffern bilden den Quotienten, die rechts abgeschnittenen sind der Rest der Division. Z. B.:

283,0 : 10	373,00 : 100	17,549 ; 1000
283	373	17, Rest 549.

c) Division durch eine mehrziffrige Zahl.

Wie oft ist 92 in 31924 enthalten?

```
31924 : 92 = 347
276
---
 432
 368
 ---
  644
  644
  ---
    0
```

92 ist in 319 (versuchsweise 9 in 31) 3mal, in 319 H also 300mal enthalten; die erste Ziffer 3 des Quotienten bedeutet also H. Multipliciert man dann 92 E mit 3 H und subtrahiert das Product 276 H von 319 H, so bleiben 43 H, und 2 Z des Dividends dazu, sind 432 Z. 92 ist in 432 (9 in 43) 4mal, in 432 Z also 40mal enthalten; in den Quotienten setzt man daher 4 Z. Subtrahiert man das Product 92 E $\times$ 4 Z = 368 Z von 432 Z, so bleiben 64 Z, und 4 E dazu, sind 644 E. 92 ist in 644 (9 in 64) 7mal enthalten; die dritte Ziffer des Quotienten ist somit 7. 7mal 92 ist 644; es bleibt also kein Rest übrig.

Die erste Ziffer des Quotienten hat gleichen Stellenwert mit der niedrigsten Ziffer des ersten Theildividends.

Die Theilproducte aus dem Divisor und der jedesmaligen Ziffer des Quotienten subtrahiert man gewöhnlich sogleich während des Multiplicierens von den entsprechenden Theildividenden und schreibt nur die Reste an. Die obige Division würde sich dabei so stellen:

```
31924 : 92
 432    347
  644
    0
```

Man spricht: 92 in 319 (9 in 31) 3mal; 3mal 2 ist 6 und 3 ist 9; 3mal 9 ist 27 und 4 ist 31. Zum Reste 43 2 herab; 92 in 432 (9 in 43) 4mal; 4mal 2 ist 8 und 4 ist 12, bleibt 1; 4mal 9 ist 36 und 1 ist 37 und 6 ist 43; u. s. w.

Die Probe für die Richtigkeit der Division besteht darin, dass man den Divisor mit dem erhaltenen Quotienten multipliciert und zu dem Producte den etwa übrig gebliebenen Rest dazu zählt; ist richtig dividiert worden, so kommt dadurch der Dividend zum Vorschein.

Die Division dient auch als Probe für die Multiplication. Wenn man nämlich das Product durch den einen Factor dividiert, so muss der andere Factor herauskommen.

d) Rechnungsvortheile.

1. Läſst sich der Divisor in zwei Factoren zerlegen, durch die man bequem dividieren kann, so dividiert man zuerst durch den einen Factor und dann das Ergebnis durch den andern Factor. Z. B.

$$\begin{array}{rl} 146055 : 35 & \\ \hline & : 5 \\ 29211 & \\ \hline & : 7 \\ 4173 & \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 171192 : 56 & \\ \hline & : 7 \\ 24456 & \\ \hline & : 8 \\ 3057 & \end{array}$$

2. Eine Zahl wird durch 25 dividiert, indem man sie mit 4 multipliciert und das Product durch 100 dividiert. Eine Zahl wird durch 125 dividiert, indem man sie mit 8 multipliciert und das Product durch 1000 dividiert.

Denn der Quotient wird nicht geändert, wenn man Dividend und Divisor mit 4 oder mit 8 multipliciert.

$$\begin{array}{rl} 6149\,50 : 25 & \\ \hline & \times 4 \\ 24598,00 & \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 392\,875 : 125 & \\ \hline & \times 8 \\ 3143,000 & \end{array}$$

3. Mit 25 wird eine Zahl multipliciert, indem man sie mit 100 multipliciert und das Product durch 4 dividiert. Mit 125 wird eine Zahl multipliciert, indem man sie mit 1000 multipliciert und das Product durch 8 dividiert. Z. B.

$$\begin{array}{rl} 3158700 \times 25 & \\ \hline & : 4 \\ 789675 & \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 42609000 \times 125 & \\ \hline & : 8 \\ 5326125 & \end{array}$$

Aufgaben.

1. $\begin{array}{l} 21564 : 6 \\ \hline 3594 \end{array}$ Sprich: 6 in 21 3mal; in 35 5mal; in 56 9mal; in 24 4mal.
2. a) 128 : 4. b) 357 : 7. c) 472 : 8.
3. Dividiere durch 2, 3, 4, ... 8, 9 jede der folgenden Zahlen:
   a) 288, 318, 702, 193, 560, 906, 444, 832;
   b) 456, 465, 546, 464, 645, 654, 789, 987;
   c) 1240, 3418, 2195, 5436, 2348, 4786.
4. Die halbe Summe zweier Zahlen nennt man das arithmetische Mittel derselben. Wie groß ist das arithmetische Mittel zwischen 1205 und 4317, 1418 und 8324, 2704 und 4136?
5. a) 398024 : 8. b) 906144 : 3.
6. Wie oft ist 7 in 132076 enthalten?
7. Wie groß ist der 4te Theil von 290356?
8. Wenn 621360 das Product zweier Zahlen und 8 der eine Factor ist, wie groß ist der andere Factor?
9. Welche Zahl muss man mit 3 multiplicieren, um 123456 zu erhalten?
10. Welche Zahl läßt sich von 835245 9mal wegnehmen?

11. Dividiere 8849408 durch 4, diesen und jeden folgenden Quotienten wieder durch 4; wie groß ist der 5te Quotient?

12. a) 135000 : 100. b) 289462 : 1000.

13. 61025 : 83 = 735
292
435
20 Rest

Sprich: 83 in 610 7mal; 21 und 9 ist 30, 3; 56, 59 und 2 ist 61.
83 in 292 3mal; 9 und 3 ist 12, 1; 24, 25 und 4 ist 29; u. s. f.

14. Verrichte folgende Divisionen und mache jedesmal auch die Probe:
a) 58056 : 82. b) 12035 : 29.
28567 : 53. 30048 : 58.
11016 : 51. 78310 : 67.

15. Ebenso:
a) 489168 : 516. b) 238400 : 298.
388240 : 240. 293962 : 847.
5228724 : 6137. 3804423 : 5604.

Berechne mit Anwendung von Vortheilen:

16. a) 466320 : 48. b) 8872472 : 56.
100856 : 28. 5185728 : 64.

17. a) 930450 : 25. b) 524625 : 125.
2369575 : 25. 1398750 : 125.

18. a) 123456 × 25. b) 93078 × 125.
413210 × 25. 75542 × 125.

19. Welche Zahl gibt, mit dem Unterschiede der Zahlen 5724 und 4912 multipliciert, die Summe der Zahlen 2345670 und 5222170 zum Producte?

20. Das Product zweier Zahlen ist um 1392 kleiner als 45624998, der eine Factor ist 6958; wie groß ist der andere Factor?

21. Verrichte noch einmal die Multiplicationen in §. 19, Aufgabe 10. und mache die Probe mit Hilfe der Division.

Division der Decimalzahlen.

§. 25.

a) Division einer Decimalzahl durch eine höhere Rangzahl.

Um eine Decimalzahl durch 10, 100, 1000 zu dividieren, d. i. um von dem Werte jeder Ziffer den 10ten, 100sten, 1000sten Theil zu nehmen, darf man nur den Decimalpunkt um 1, 2, 3 Stellen nach links rücken. Z. B.

61·48 : 10 = 6·148 34·56 : 100 = 0·3456 2354·2 : 1000 = 2·3542

b) Division einer Decimalzahl durch irgend eine ganze Zahl.

$2·568 : 6$ — $0·428$

25 z : 6 = 4 z, bleibt 1 z;
16 h : 6 = 2 h, bleiben 4 h;
48 t : 6 = 8 t.

Dividiert man Zehntel, Hundertel, Tausendtel, ... durch Einer, so erhält man wieder Einheiten desselben Ranges.

$847·85 : 31 = 27·35$
227
108
155

84 Z : 31 geben 2 Z,
227 E : 31 geben 7 E,
108 z : 31 geben 3 z,
155 h : 31 geben 5 h.

Man dividiere also die Decimalzahl wie eine ganze Zahl und setzt im Quotienten den Decimalpunkt, bevor man die Zehntel des Dividends in Rechnung zieht.

Die erste Ziffer des Quotienten hat auch hier gleichen Stellenwert mit der niedrigsten Ziffer des ersten Theildividends.

Bleibt bei der Division ein Rest übrig, so kann man, da der Wert eines Decimalbruches durch Hinzufügen von Nullen nicht geändert wird, diesem sowie jedem folgenden Reste eine Null anhängen und die Division fortsetzen. Z. B.:

$303·8_{00} : 56$ — $5·425$
23 8
1 40
280
0

$19·934 : 317$ — $0·06288..$
914
2800
2640
104

Dieses Verfahren kann auch angewendet werden, wenn bei der Division ganzer Zahlen am Ende ein Rest übrig bleibt, da sich jede ganze Zahl als ein Decimalbruch darstellen läſst, wenn man ihr rechts den Decimalpunkt und dann beliebig viele Nullen beifügt. Es wird dabei im Quotienten der Decimalpunkt angebracht, wenn man in dem Reste die erste Decimalnull anhängt. Z. B.:

$5802·_{00} : 75$ — $77·36$
552
270
450
0

$836 : 234$ — $3·572..$
1340
1700
620
152.

c) Division durch eine Decimalzahl.

Da die aufeinander folgenden Ziffern des Quotienten erhalten werden, indem man die Division ohne Rücksicht auf die Decimalpunkte wie bei ganzen Zahlen ausführt, so handelt es sich hier nur noch um die Bestimmung des Stellenwertes dieser Ziffern, zu welchem Zwecke es genügt, den **Stellenwert der ersten Ziffer des Quotienten** zu finden. Dieser aber kann aus dem Einmaleins der Stellenwerte durch **Umkehrung** ermittelt werden, indem man jedesmal die Frage stellt: mit welcher Rangzahl muss die Rangzahl der niedrigsten Ziffer des Divisors multipliciert werden, um die Rangzahl der niedrigsten Ziffer des ersten Theildividends zu geben? Man kann übrigens den Stellenwert der ersten Ziffer des Quotienten auch **unmittelbar** bestimmen. Ist der Divisor eine ganze Zahl, bedeutet also die niedrigste Ziffer des Divisors **Einer**, so hat die erste Ziffer des Quotienten **gleichen Stellenwert mit der niedrigsten Ziffer des ersten Theildividends**. Bedeutet nun die niedrigste Ziffer des Divisors **Zehntel, Hundertel, Tausendtel ...**, ist also der Divisor der 10te, 100ste, 1000ste, ... Theil des früheren Divisors, so wird der Quotient 10mal, 100mal, 1000mal so groß als früher, und ist daher der Wert der ersten Ziffer des Quotienten bezüglich **um eine, zwei, drei, ... Stellen höher als der Stellenwert der niedrigsten Ziffer des ersten Theildividends**. Z. B.

```
22875·72 : 72·3
 1185          316·4
  462 7
   28 92
      0
```

Die niedrigste Ziffer im ersten Theildividend 2287 bedeutet Z, im Divisor z.

Man fragt nun: womit muss man z multiplicieren, um Z zu erhalten? Die erste Ziffer 3 des Quotienten bedeutet also H.

Oder unmittelbar: der Wert der ersten Ziffer 3 muss um eine Stelle höher sein als Z, somit H bedeuten.

```
3·79623 : 68·72
 36023     0·05524..
  16630
   28860
    1372
```

Niedrigste Ziffer des ersten Theildividends zt, des Divisors h.

h muss man mit h multiplicieren, um zt zu erhalten; also bedeutet die erste Ziffer 5 des Quotienten h.

Oder: die erste Ziffer 5 des Quotienten hat einen um 2 Stellen höheren Wert als zt, bedeutet somit h.

Aufgaben.

1. Dividiere durch 2, 3, 4, ... 8, 9, jede der folgenden Zahlen:
a) 50·4, 24·8, 7·63, 0·918, 32·2, 4·32;
b) 37·86, 8·796, 0·9480, 3·262, 6·425, 75·84.

2. Dividiere die Zahl 135·79 durch 10, 100, 1000, 10000, 100000.

Mache bei den nachfolgenden Divisionen auch die Probe.

3. a) 139·5 : 31. b) 130·83 : 21.
136·62 : 23. 5·93524 : 18.

4. a) 379·42 : 0·4. b) 39·83 : 0·7.
3·14155 : 0·5. 0·07614 : 0·06.
5. a) 285·59 : 5·3. b) 248·67 : 0·81
1391·52 : 7·4. 530·955 : 0·057.
6. Dividiere jede der Zahlen a) 90889, b) 272·667, c) 45·4445 durch jede der Zahlen m) 0·97, n) 48·5, o) 291.
7. a) 19147·8 : 329. b) 24·0484 : 0·472.
270·2146 : 8·69. 540·9835 : 0·02447.
8. a) 389·007 : 0·52. b) 0·784 : 3·08.
7·3402 : 0·0098. 616·337 : 0·2569.
9. a) 4·554144 : 1·506. b) 1 : 3·14159.
0·06584508 : 0·3451. 7·470799 : 0·00917.
10. Dividiere 5409835 durch a) 4·61, b) 23·47, c) 491·8.
11. Wie oft muss 4·2052 als Summand gesetzt werden, damit man 12640·8312 erhalte?
12. Dividiere a) 89990166, b) 2149·09526 durch jede der Zahlen m) 599, n) 25·039, o) 364·13.

Division einnamiger Zahlen.

§. 26.

Aufgaben.

1. Jemand kauft 8 *hl* Wein für 336 fl.; wie hoch kommt 1 *hl* zu stehen?
   1 *hl* ist der 8te Theil von 8 *hl*; daher kostet 1 *hl* nur den 8ten Theil von 336 fl., also 42 fl.
2. Jemand kauft 9 *ha* Wiesen um 3780 fl.; wie viel kostet 1 *ha*?
3. 1 *m* Seidenstoff kostet 12 fl.: wie viel kostet 1 *dm*?
4. 1 *hl* Öl wiegt 95 *kg*; wie viel wiegt 1 *l*?
5. 1 Ries Papier kostet 6¾ fl.; wie viel kostet 1 Buch?
6. Ein Röhrbrunnen liefert 55 *l* Wasser in 4 Minuten, ein anderer 84 *l* in 7 Minuten, welcher ist ergiebiger?
7. In einer Mühle werden in 15 Tagen 36300 *kg* Mehl gemahlen; wie viel in einem Tage?
8. Ein Beamter hat eine jährliche Besoldung von 2100 fl.; wie viel bezieht er monatlich?
9. Die jährlichen Zinsen eines Capitals betragen 258·36 fl.; wie groß sind die Zinsen für einen Monat?
10. Ein Rad macht auf einem Wege von 1241·5 *m* 382 Umdrehungen; wie groß ist sein Umfang?
11. 1 *m* Tuch kostet 5 fl.; wie viel *m* erhält man für 135 fl.?
    Man erhält so vielmal 1 *m*, wie oft 5 fl. in 135 fl. enthalten sind;
    135 fl. : 5 fl. = 27.
    Man erhält also 27mal 1 *m*, d. i. 27 *m*.

12. Wenn 1 kg 0·5 fl. kostet, wie viel kg erhält man für 37 fl.?
13. Wie groß ist eine Baustelle, welche 14400 fl. kostet, wenn das m^2 mit 9 fl. bezahlt wird?
14. Für 16·15 m zahlt man 69·55 fl.; wie viel für 1 m?
15. 2976 fl. werden unter mehrere Personen so vertheilt, dass jede 24 fl. erhält; wie viele Personen sind es?
16. 59415 fl. sind unter 255 Personen zu gleichen Theilen zu vertheilen; wie viel kommt auf eine Person?
17. In einer Baumpflanzung befinden sich in regelmäßigen Reihen 31928 Pflanzen, und zwar in jeder Reihe 104 Pflanzen; wie viel Reihen sind da?
18. In A wird eine Kanone abgefeuert; nach wie viel Zeit wird ein Beobachter in der Entfernung von 8000 m den Knall der Kanone hören, wenn der Schall in einer Secunde 332·25 m zurücklegt?
19. Auf einer Eisenbahn wurden im Jahre 1885 1250855 Personen befördert; wie viel kamen durchschnittlich auf einen Tag?
20. Die Höhe einer Treppe soll 4 m, und die Höhe jeder Stufe 0·125 m betragen; wie viele Stufen muss die Treppe erhalten?
21. 38 m Tuch kosten 266 fl.; a) wie viel kostet 1 m, b) wie viel kosten 29 m?
22. Ein Kaufmann erhielt 186 Ries Papier à 4·2 fl. und verkaufte dasselbe mit 104·16 fl. Gewinn; wie theuer hat er 1 Ries verkauft?
23. Ein Kaufmann hat 75 m Tuch um 336 fl. gekauft; wie viel m muss er zu 5[illegible]4 fl. verkaufen, um 31·28 fl. zu gewinnen?
24. 0·741[illegible]3 Myriameter betragen 1 geographische Meile; wie viel geogr. Meilen beträgt 1 Myriameter?
25. Wie viel fl. ö. W. betragen 2127·5 deutsche Mark, wenn 1 Mark zu 60·4 fl. ö. W. gerechnet wird?
26. Ein Sack, welcher mit 500 österr. Goldstücken gefüllt ist, wiegt 6·2 kg; der leere Sack wiegt 0·027161 kg; wie groß ist das Gewicht eines Guldenstückes?
27. Jemand hat eine jährliche Besoldung von 945 fl., überdies bezieht er jährlich an Zinsen von seinen Capitalien 400 fl. und von seinen Nebengeschäften 240 fl.; wie viel darf er täglich verbrauchen, wenn er jährlich 250 fl. ersparen will?
28. Ein Land hat 2462886 Einwohner, von denen durchschnittlich 72 auf eine Fläche von 1 km^2 kommen; wie viel km^2 beträgt der Flächeninhalt dieses Landes?
29. Das Herzogthum Salzburg hat auf einer Fläche von 7154·54 km^2 163570 Einwohner; wie viele Einwohner kommen im Durchschnitte auf 1 km^2?

30. Im Jahre 1882 zählte ein Land bei einer Bevölkerung von 2207520 Seelen 61320 Sterbefälle; a) wie viele Sterbefälle kamen durchschnittlich auf 1 Tag, b) auf wie viele Einwohner kam 1 Sterbefall?

31. Wenn man 3·45 *hl* Wein à 24 fl. mit 5·55 *hl* à 30 fl. mischt, welchen Wert hat 1 *l* dieser Mischung?

32. Jemand kauft 10 *kg* Zucker zu 34 kr., 10 *kg* zu 35 kr. und 40 *kg* zu 39 kr.; wie hoch kommt im Durchschnitte 1 *kg* zu stehen?

33. Jemand hat von einer Ware 60 *kg* à 60 kr. und 80 *kg* à 55 kr.; er setzt noch 100 *kg* einer dritten Sorte dazu, und erhält dadurch eine Mischung, von der das *kg* 50 kr. kostet; wie viel kostet das *kg* der letzten Sorte?

II. Theilbarkeit der Zahlen.

§. 27.

Eine Zahl heißt durch eine andere theilbar, wenn sie durch dieselbe dividiert eine ganze Zahl zum Quotienten gibt. Z. B. 24 ist durch 6 theilbar, da 24 durch 6 dividiert 4 zum Quotienten gibt und kein Rest übrig bleibt; dagegen ist 27 durch 6 nicht theilbar, da bei der Division von 27 durch 6 ein Rest übrig bleibt.

Ist eine Zahl durch eine andere theilbar, so heißt der Divisor ein Maß des Dividends, und der Dividend ein Vielfaches des Divisors; z. B. 6 ist ein Maß von 24, und 24 ein Vielfaches von 6.

Zahlen, welche nur durch 1 und durch sich selbst theilbar sind, heißen Primzahlen; z. B. 1, 2, 5, 11, 17. Zahlen, welche nicht nur durch 1 und durch sich selbst, sondern auch durch andere Zahlen theilbar sind, heißen zusammengesetzte Zahlen; z. B. 12 ist durch 1 und 12, aber überdies auch noch durch 2, 3, 4, 6 theilbar; 12 ist also eine zusammengesetzte Zahl.

Gib alle Primzahlen von 1 bis 100 an.

Kennzeichen der Theilbarkeit.

§. 28.

1. Jede Zahl, welche am Ende 1, 2, 3... Nullen hat, ist ein Vielfaches von 10, 100, 1000,... und daher durch 10, 100, 1000,.. theilbar.

2. Jede Zahl läßt sich in zwei Bestandtheile zerlegen, deren einer ein Vielfaches von 10, der andere die Ziffer der Einer enthält; z. B. $57876 = 57870 + 6$; $21335 = 21330 + 5$.

Da jedes Vielfache von 10 durch 10, somit auch durch 2 und durch 5 theilbar ist, so hängt es nur von der Ziffer der Einer ab, ob die ganze Zahl durch 2 oder 5 theilbar ist.

Ist die Ziffer der Einer durch 2 theilbar, d. i. eine der Ziffern 0, 2, 4, 6, 8, so ist die Zahl selbst durch 2 theilbar. Man nennt die Zahlen, welche Vielfache von 2 sind, gerade Zahlen, während die übrigen, als 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13... ungerade Zahlen heißen.

Ist die Ziffer der Einer durch 5 theilbar, d. i. steht an der niedrigsten Stelle 0 oder 5, so ist die Zahl selbst durch 5 theilbar.

3. Jede Zahl läßt sich in zwei Bestandtheile zerlegen, von denen der eine ein Vielfaches von 100, der andere die zwei niedrigsten Ziffern enthält; z. B.

$$2548 = 2500 + 48; \quad 375375 = 375300 + 75.$$

Das Vielfache von 100 ist durch 4 und durch 25 theilbar; sind auch die zwei niedrigsten Stellen durch 4 oder 25 theilbar, so ist es auch die Zahl selbst.

4. Jede Zahl läßt sich in zwei Bestandtheile zerlegen, von denen der eine ein Vielfaches von 1000, der andere die drei niedrigsten Ziffern enthält; z. B.

$$31624 = 31000 + 624; \quad 79875 = 79000 + 875.$$

Da nun das Vielfache von 1000 durch 8 und durch 125 theilbar ist, so folgt:

Eine Zahl ist durch 8 oder durch 125 theilbar, wenn ihre drei niedrigsten Stellen, als Zahl betrachtet, durch 8 oder 25 theilbar sind.

5. Jede Zahl kann in zwei Bestandtheile zerlegt werden, von denen der eine lauter Vielfache von 9, der andere die Summe aller Ziffern der Zahl enthält. So besteht z. B. 5724 aus folgenden Theilen:

$$\begin{aligned} 5000 &= 1000 \,.\, 5 = 999 \,.\, 5 + 5 \\ 700 &= 100 \,.\, 7 = 99 \,.\, 7 + 7 \\ 20 &= 10 \,.\, 2 = 9 \,.\, 2 + 2 \\ 4 &= \ldots\ldots\ldots\ldots \; 4, \\ \hline \text{daher} \quad 5724 &= 999 \,.\, 5 + 99 \,.\, 7 + 9 \,.\, 2 \\ &\quad + 5 + 7 + 2 + 4. \end{aligned}$$

Der erste Bestandtheil, welcher lauter Vielfache von 9 enthält, ist nun durch 3 theilbar; ist auch der zweite Bestandtheil, nämlich die

Ziffernsumme, durch 3 theilbar, so ist es auch die ganze Zahl. Die eben zerlegte Zahl 5724 ist also durch 3 theilbar, weil die Ziffernsumme $5 + 7 + 2 + 4 = 18$ durch 3 theilbar ist.

Ebenso folgt auch: Eine Zahl ist durch 9 theilbar, wenn ihre Ziffernsumme durch 9 theilbar ist.

6. Ist eine Zahl sowohl durch 2 als durch 3 theilbar, so muss sie auch durch 2×3, d. i. durch 6, theilbar sein.

Durch 6 sind also alle geraden Zahlen theilbar, deren Ziffernsumme durch 3 theilbar ist.

7. Es ist
$$
\begin{aligned}
10 &= 1.11 - 1; & 100 &= 9.11 + 1;\\
1000 &= 91.11 - 1; & 10000 &= 909.11 + 1;\\
100000 &= 9091.11 - 1; & 1000000 &= 90909.11 + 1;
\end{aligned}
$$
u. s. w.

Hieraus ergibt sich, dass jede Zahl in zwei Bestandtheile zerlegt werden kann, von denen der eine lauter Vielfache von 11 enthält. So besteht z. B. 281743 aus folgenden Theilen:
$$
\begin{aligned}
200000 &= 18182.11 - 2\\
80000 &= 7272.11 + 8\\
1000 &= 91.11 - 1\\
700 &= 63.11 + 7\\
40 &= 4.11 - 4\\
3 &= \;.\;\;.\;\;.\;\;3
\end{aligned}
$$

28/2.

daher $281743 = 18182.11 + 7272.11 + 91.11 + 63.11 + 4.11 + (8 + 7 + 3) - (2 + 1 + 4).$

Der eine Bestandtheil, welcher lauter Vielfache von 11 enthält, ist durch 11 theilbar; ist auch die Differenz $(8 + 7 + 3) - (2 + 1 + 4)$ durch 11 theilbar oder gleich 0, so ist auch die ganze Zahl 281743 durch 11 theilbar.

Eine Zahl ist daher durch 11 theilbar, wenn die Differenz der Ziffernsumme der geraden und der ungeraden Stellen 0 oder durch 11 theilbar sind.

Aufgaben.

1. Gib für alle zusammengesetzten Zahlen zwischen 1 und 100 an, durch welche der Zahlen 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 25 sie theilbar sind.
2. Welche von den Zahlen 138, 759, 1235, 2184, 19326, 93128, 13020, 35731, 24689, 75314 sind durch 2 theilbar, welche nicht?
3. Gib von folgenden Zahlen diejenigen an, welche durch 4 theilbar sind: 152, 372, 574, 1380, 2324, 198760, 293456, 135731.

4. Welche von den Zahlen 352, 1630, 2876, 4756, 9492, 12748, 22062, 25864, 30508 sind durch 2, welche auch durch 4, und welche durch 8 theilbar?
5. Welche von den Zahlen 35, 120, 1225, 2300, 2375, 3500, 38405, 312750, 278000 sind nur durch 5, welche auch durch 10, 25, 100, 125, 1000 theilbar?
6. Welche von den Zahlen 273, 1540, 5926, 8028, 12345, 20475, 38124, 67089, 705426, 791426, 310629 sind durch 3, welche zugleich durch 9, welche weder durch 9 noch durch 3 theilbar?
7. Welche von folgenden Zahlen sind durch 6 theilbar: 870, 1258, 5082, 5184, 27082, 31406, 560742, 934316?
8. Welche von den Zahlen 737, 2516, 3904, 17820, 37191, 56789, 265474, 847165, 5063487 sind durch 11 theilbar?
9. Gib an, durch welche von den Zahlen 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 25, 100, 125 die nachfolgenden Zahlen theilbar sind:
   a) 312, 8316, 3975, 57585, 23584, 740024, 652400;
   b) 396, 1840, 5715, 31750, 50787, 714282, 1000362;
   c) 375, 3450, 7132, 24377, 250875, 219350, 221625.

Zerlegung in Factoren.

§. 29.

Unter den **einfachen Factoren** oder **Primfactoren** einer Zahl versteht man diejenigen Primzahlen, deren Product sie ist.

Wird eine zusammengesetzte Zahl durch einen ihrer Primfactoren dividiert, so ist der Quotient das Product aller übrigen Factoren jener Zahl.

Um daher eine zusammengesetzte Zahl in ihre einfachen Factoren zu zerlegen, dividiere man dieselbe durch die kleinste Primzahl, durch die sie theilbar ist, 1 nicht mitgerechnet; den Quotienten dividiere man wieder durch die kleinste Primzahl, durch die er theilbar ist, die frühere Primzahl nicht ausgenommen, und verfahre so mit jedem folgenden Quotienten, bis man als Quotienten eine Primzahl selbst erhält. Die nach und nach angewendeten Divisoren und der letzte Quotient sind die Primfactoren der vorgelegten Zahl.

Es sei z. B. 420 die gegebene Zahl, so erhält man

$420 : 2 = 210$	oder	420	2
$210 : 2 = 105$		210	2
$105 : 3 = 35$		105	3
$35 : 5 = 7$		35	5
		7	7

folglich $420 = 2.2.3.5.7$.

Bei kleineren Zahlen geschieht die Zerlegung in Primfactoren leicht im Kopfe.

Aufgaben.

1. Zerlege im Kopfe alle zusammengesetzten Zahlen zwischen 1 und 100 in ihre Primfactoren.

Zerlege in einfache Factoren:

2.	a) 360,	b) 300,	c) 648,	d) 936.
3.	a) 930,	b) 540,	c) 680,	d) 1540.
4.	a) 1155,	b) 924,	c) 1050,	d) 2646.
5.	a) 990,	b) 2900,	c) 13552,	d) 13860.

Größtes gemeinsames Maß.

§. 30.

Sind zwei oder mehrere Zahlen durch dieselbe Zahl theilbar, so heißt diese ein gemeinsames Maß jener Zahlen; z. B. 8 ist ein gemeinsames Maß von 24 und 16, ebenso 5 ein gemeinsames Maß von 10, 20, 50. Die größte Zahl, durch welche zwei oder mehrere Zahlen theilbar sind, heißt das größte gemeinsame Maß dieser Zahlen; z. B. 12, 24, 36, 60 haben die Zahlen 2, 3, 4, 6, 12 zu gemeinsamen Maßen, die Zahl 12 aber ist ihr größtes gemeinsames Maß.

Zahlen, welche außer 1 kein anderes gemeinsames Maß haben, heißen Primzahlen untereinander oder relative Primzahlen; z. B. 5 und 13, 7 und 15, 9 und 25.

§. 31.

Zerlegt man zwei oder mehrere Zahlen in ihre Primfactoren, so ist das Product derjenigen Factoren, welche in allen gegebenen Zahlen gemeinsam vorkommen, gewiss ein gemeinsames Maß dieser Zahlen; es ist aber auch das größte, weil, sobald man noch einen andern Factor hinzufügen würde, durch das neue Product nicht mehr alle gegebenen Zahlen theilbar wären.

Ist z. B. das gr. g. Maß von 180 und 420 zu suchen, so hat man

180	2	420	2
90	2	210	2
45	3	105	3
15	3	35	5
5	5	7	7

Scheidet man die den beiden Zahlen gemeinsamen Factoren 2, 2, 3, 5 aus, so bleiben die relativen Primfactoren 3 und 7 übrig; die zwei Zahlen haben also außer 2, 2, 3, 5 keinen gemeinsamen Factor mehr und ist daher ihr größtes gemeinsames Maß das Product

$$2 . 2 . 3 . 5 = 60.$$

Das größte gemeinsame Maß gegebener Zahlen, z. B. von 180 und 420 wollen wir durch M (180, 420) darstellen*). Es ist also

$$M\ (180,\ 420) = 60.$$

Für kleinere Zahlen kann das größte gemeinsame Maß im Kopfe bestimmt werden.

Aufgaben.

Bestimme die folgenden größten gemeinsamen Maße:

1.	a) M (8, 12).	b) M (28, 42).
	M (15, 36).	M (420, 630).
	M (24, 60).	M (18, 30, 48).
2.	a) M (105, 165).	b) M (114, 630).
3.	a) M (468, 624).	b) M (252, 448).
4.	a) M (576, 1080).	b) M (954, 2295).
5.	a) M (294, 336, 504).	b) M (378, 882, 1386).
6.	a) M (312, 468, 1092).	b) M (336, 1152, 2016).

§. 32.

Das gr. g. Maß zweier Zahlen kann auch unabhängig von ihrer Zerlegung in Primfactoren bestimmt werden.

Es sei z. B. das gr. g. Maß von 365 und 73 zu suchen. Da dieses nicht größer sein kann als die kleinere der beiden Zahlen, so versuche man zuerst, ob 73 in 365 ohne Rest enthalten ist.

$$365 : 73 = 5.$$

Da hier die Division ohne Rest aufgeht, so ist 73 selbst das gesuchte gr. g. Maß.

Meistens bleibt übrigens bei der Division ein Rest übrig. Das Verfahren, durch welches in diesem Falle das gr. g. Maß der beiden Zahlen gefunden wird, gründet sich auf die wiederholte Anwendung des Satzes: Das größte gemeinsame Maß zwischen Divisor und Divisionsrest ist zugleich das größte gemeinsame Maß zwischen Dividend und Divisor.

Die Richtigkeit dieses Satzes läßt sich leicht einsehen. Es ist allgemein

$$\text{Dividend} = \text{Divisor} \times \text{Quotient} + \text{Rest}.$$

Hieraus geht zunächst hervor, dass jedes gemeinsame Maß des Dividends und des Divisors auch ein gemeinsames Maß des Divisors und des Restes, und dass umgekehrt jedes gemeinsame Maß des Divisors und des Restes auch ein gemeinsames Maß des Dividends und

*) Nach der in J. Schram's Lehrbuche der Arithmetik eingeführten Bezeichnung.

des Divisors sein muss; denn, geht die Division durch dieses Maß auf der einen Seite des Gleichheitszeichens ohne Rest auf, so muss sie auch auf der andern Seite ohne Rest aufgehen.

Haben aber der Dividend und der Divisor immer dieselben gemeinsamen Maße wie der Divisor und der Rest, so muss auch das gr. g. Maß zwischen dem Divisor und dem Reste zugleich das gr. g. Maß zwischen dem Dividend und dem Divisor sein.

Es sei nun das gr. g. Maß zwischen 4277 und 637 zu suchen.

$$4277 : 637 = 6 \text{ mit dem Reste } 455.$$

Da man weiß, dass der Dividend 4277 und der Divisor 637 dasselbe gr. g. Maß haben, wie der Divisor 637 und der Rest 455, so wird man sogleich zwischen den kleineren Zahlen 637 und 455 das gr. g. Maß suchen.

$$637 : 455 = 1 \text{ mit dem Reste } 182.$$

Man wird nun wieder, anstatt zwischen 637 und 455, das gr. g. Maß zwischen 455 und 182 suchen.

$$455 : 182 = 2 \text{ mit dem Reste } 91.$$

Da das gr. g. Maß zwischen 182 und 91 auch das gr. g. Maß zwischen 455 und 182 sein muss, so hat man ferner

$$182 : 91 = 2.$$

Es ist also 91 das gr. g. Maß zwischen 182 und 91, folglich auch zwischen 455 und 182, daher auch zwischen 637 und 455, und somit auch zwischen 4277 und 637.

Man kann daher die Rechnung so stellen:

637	7277	6	M (4277, 637) = M (637, 455)
182	455	1	M (637, 455) = M (455, 182)
0	**91**	2	M (455, 182) = M (182, 91)
		2	M (182, 91) = **91**.

Das hier angegebene Verfahren, das gr. g. Maß zweier Zahlen zu bestimmen, ist unter dem Namen der Kettendivision bekannt.

Es sei nun das gr. g. Maß von mehr als zwei Zahlen, z. B. von 1248, 1872 und 2288 zu bestimmen.

Man sucht zuerst das gr. g. Maß der ersten zwei Zahlen 1248 und 1872. Da dasselbe alle gemeinsamen Factoren der beiden ersten Zahlen enthält, so braucht man nur noch zu diesem Maße und zu der dritten Zahl 2288 das gr. g. Maß zu suchen; das letztere enthält dann alle gemeinsamen Factoren der gegebenen Zahlen 1248, 1872 und 2268 und ist somit ihr gr. g. Maß. Die Rechnung steht

1248	1872	1	624	2288	3	M (1248, 1872) = 624,
	624	2	**208**	416	1	M (624, 2288) = 208;
					2	M (1248, 1872, 2288) = 208.

Aufgaben.

Bestimme durch die Kettendivision:

1. a) M (5072, 1585). b) M (21712, 6785).

2. a) M (581, 830). b) M (3811, 721).

3. a) M (23343, 3012). b) M (9889, 2552).

4. a) M (8008, 2156). b) M (2703, 8840).

5. a) M (24569, 17143). b) M (39951, 22581).

6. a) M (6630, 9061). b) M (84535, 122496).

Prüfe die Richtigkeit folgender Angaben:

7. M (6919, 1309) + M (25728, 8241) = M (10476, 1552).

8. M (6630, 9503) — M (27898, 198690) = M (15288, 47481).

Bestimme

9. a) M (435, 522, 667). b) M (8178, 10092, 28797).

10. M (16614, 21726, 22365, 23430).

11. M (241164, 291060, 167706, 208824).

Kleinstes gemeinsames Vielfaches.

§. 33.

Eine Zahl, welche durch zwei oder mehrere andere Zahlen theilbar ist, heißt ein *gemeinsames Vielfaches* dieser Zahlen; z. B. 24 ist durch 8 und 12 theilbar, 24 ist also ein gemeinsames Vielfaches von 8 und 12. Die kleinste Zahl, welche durch mehrere andere theilbar ist, heißt das *kleinste gemeinsame Vielfache* dieser Zahlen; z. B. die Zahlen 3, 4, 6, 10 haben die Zahlen 60, 120, 180, 240,... zu gemeinsamen Vielfachen, die Zahl 60 aber ist das kleinste gemeinsame Vielfache jener Zahlen.

Das kleinste gemeinsame Vielfache gegebener Zahlen wollen wir durch v bezeichnen; z. B. v (8, 12) = 24.

Wenn man mehrere Zahlen miteinander multipliciert, so ist das Product immer ein gemeinsames Vielfaches derselben. Sind diese Zahlen Primzahlen unter einander, so ist ihr Product zugleich ihr kleinstes gemeinsames Vielfaches; sind aber zwei oder mehrere unter den Zahlen durch eine gemeinsame Zahl theilbar, so haben sie auch kleinere gemeinsame Vielfache, als es ihr Product ist.

§. 34.

Bei leicht zerlegbaren Zahlen geschieht die Bestimmung des kl. g. Vielfachen durch **Zerlegung in Primfactoren**, und zwar auf eine der folgenden Arten:

a) Man nimmt jeden Primfactor so vielmal, als er in irgend einer Zahl am öftesten vorkommt.

Ist z. B. das kl. g. Vielfache von 24, 36, 60 zu bestimmen, so hat man

$$24 = 2.2.2.3, \quad 36 = 2.2.3.3, \quad 60 = 2.2.3.5.$$

Jedes gemeinsame Vielfache von 24, 36, 60 muss
den Factor 2 mindestens 3mal,
" " 3 " 2mal, und
" " 5 " 1mal

enthalten; das Product, welches nur die Factoren 2.2.2.3.3.5 enthält, ist daher das **kleinste** g. Vielfache jener Zahlen, also

$$v\,(24, 36, 60) = 2.2.2.3.3.5 = 360.$$

b) Man geht von der größten gegebenen Zahl aus und fügt von den übrigen Zahlen nach und nach die noch fehlenden Factoren hinzu.

Ist z. B. v (16, 45, 60) zu suchen, so hat man:
die größte Zahl ist 60...2.2.3.5;
von 16 = 2.2.2.2 fehlt der Factor 2 2mal...2.2.3.5.2.2;
von 45 = 3.3.5 fehlt der Factor 3 1mal...2.2.3.5.2.2.3,
also v (16, 45, 60) = 2.2.2.2.3.3.5 = 720.

Dieses Verfahren empfiehlt sich besonders dann, wenn das kl. g. Vielfache im Kopfe bestimmt wird.

c) Man sondert aus den gegebenen Zahlen, nachdem man diejenigen, welche in den größeren ohne Rest enthalten sind, weglässt, nach und nach die Primfactoren aus, bis zuletzt nur mehr relative Primzahlen zurückbleiben. Das Product aus diesen Primzahlen und den nach und nach ausgeschiedenen Primfactoren ist das kl. g. Vielfache der gegebenen Zahlen. Z. B.

~~2~~, ~~4~~, ~~5~~, 8, 10, 15, 36				
4,	~~5~~,	15,	18	2
2,		15,	9	2
2,		5,	3	3

$$v\,(2, 4, 5, 8, 10, 15, 36) = 2.5.3.2.2.3 = 360.$$

Aufgaben.

Bestimme:

1. a) v (6, 8). b) v (3, 5, 6). c) v (4, 6, 9).
   b) v (9, 12). v (2, 7, 12). v (8, 15, 20).

2. a) v (5, 6, 10, 12). b) v (6, 15, 20, 30).
v (5, 12, 16, 20). v (2, 5, 16, 25).

3. v (2, 3, 5, 8, 12, 18, 28, 40).
4. v (2, 4, 8, 16, 3, 9, 27, 6, 12, 24).
5. v (2, 3, 7, 8, 16, 20, 35, 42, 50).
6. v (5, 12, 8, 10, 21, 28, 30, 15, 60).
7. v (16, 12, 9, 8, 25, 15, 24, 54).
8. v (12, 27, 36, 28, 35, 54, 96, 112).

§. 35.

Zur Bestimmung des kl. g. Vielfachen zweier größerer Zahlen sucht man zuerst durch die Kettendivision ihr gr. g. Maß. Da die Quotienten, welche man erhält, wenn zwei Zahlen durch ihr gr. g. Maß dividiert werden, keinen gemeinsamen Factor mehr haben können, so darf man, um das kl. g. Vielfache zweier Zahlen zu finden, nur zu der einen Zahl noch den Quotienten, welcher bei der Division der anderen Zahl durch das gr. g. Maß erhalten wird, als Factor hinzufügen.

Sind z. B. die Zahlen 1254 und 1653 gegeben, so hat man

1254	1653	1	M (1254, 1653) = 57,
57	399	3	1254 : 57 = 22,
	0	7	v (1254, 1653) = 1653.22 = 36366.

Um nach dieser Methode das kl. g. Vielfache dreier oder mehrerer Zahlen zu finden, sucht man das kl. g. Vielfache der zwei ersten Zahlen, dann von dem so erhaltenen kl. g. Vielfachen und der dritten Zahl u. s. w. Das zuletzt gefundene kl. g. Vielfache ist zugleich das kl. g. Vielfache aller gegebenen Zahlen.

Aufgaben.

1. a) v (249, 913). b) v (713, 837).
2. a) v (438, 949). b) v (481, 1110).
3. a) v (845, 1183). b) v (1104, 897).
4. a) v (2167, 1379). b) v (3009, 2183).
5. a) v (507, 1183, 1521). b) v (1073, 1102, 1258)
6. v (1555, 2177, 3421, 4043).

III. Rechnen mit gemeinen Brüchen.

§. 36.

Eine Zahl, welche einen Theil der Einheit ein- oder mehrmal enthält, heißt eine gebrochene Zahl oder ein Bruch. Zur Darstellung eines Bruches sind zwei Zahlen erforderlich: der Nenner, welcher angibt, in wie viele gleiche Theile die Einheit getheilt wurde, und der Zähler, welcher anzeigt, wie viele solcher Theile man genommen hat. Man schreibt den Nenner unter den Zähler und setzt zwischen beide einen Strich.

Z. B. In dem Bruche $\frac{3}{8}$ oder $^3/_8$ (drei Achtel) ist 8 der Nenner und zeigt an, dass die Einheit in 8 gleiche Theile getheilt wurde; 3 ist der Zähler und gibt an, dass man einen solchen Theil, nämlich $^1/_8$, 3mal genommen hat.

Die in dieser Form dargestellten Brüche heißen gemeine Brüche zum Unterschiede von den Decimalbrüchen (§. 4), bei denen der Nenner nicht angeschrieben wird.

Jeder Bruch kann als ein angezeigter Quotient betrachtet werden, worin der Zähler als Dividend und der Nenner als Divisor vorkommt.

Der Bruch, $^4/_5$ bedeutet 4mal den 5ten Theil von 1 Ganzen. Der Quotient 4 : 5 bedeutet den 5ten Theil von 4 Ganzen; um aber den 5ten Theil von 4 Ganzen zu bestimmen, wird man jedes einzelne Ganze in 5 gleiche Theile theilen und von jedem 1 Theil nehmen; man erhält daher auch hier 4mal den 5ten Theil von 1 Ganzen. Es ist also

$$^4/_5 = 4 : 5.$$

Ein Bruch, dessen Zähler kleiner als der Nenner ist, heißt echt; z. B. $^1/_2$, $^2/_3$, $^5/_8$. Ein echter Bruch ist kleiner als 1.

Ein Bruch, dessen Zähler gleich dem Nenner oder größer als der Nenner ist, heißt unecht; z. B. $^2/_2$, $^6/_3$, $^5/_4$, $^{13}/_8$. Ein unechter Bruch ist entweder gleich 1, oder größer als 1.

Eine Zahl, welche aus einer ganzen Zahl und einem angehängten Bruche besteht, wird eine gemischte Zahl genannt; z. B. $1^3/_4$, $5^7/_{10}$.

Vorübungen (Kopfrechnen).

§. 37.

Halbe, Viertel und Achtel.

1. Wie entstehen die Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{10}{8}$?
2. Wie viel Halbe sind 1, 2, 7, 15 Ganze; $4\frac{1}{2}$, $9\frac{1}{2}$, $17\frac{1}{2}$?
3. Wie viel Viertel sind 1, 2, 5, 12 Ganze; $1\frac{1}{4}$, $3\frac{3}{4}$, $12\frac{1}{4}$?
4. Wie viel Achtel sind 1, 3, 7, 14 Ganze; $1\frac{1}{8}$, $4\frac{3}{8}$, $10\frac{7}{8}$?
5. Wie viel Ganze sind
   a) $\frac{2}{2}$, $\frac{4}{2}$, $\frac{10}{2}$, $\frac{26}{2}$, $\frac{48}{2}$; $\frac{5}{2}$, $\frac{9}{2}$, $\frac{19}{2}$, $\frac{53}{2}$?
   b) $\frac{4}{4}$, $\frac{8}{4}$, $\frac{20}{4}$, $\frac{32}{4}$, $\frac{60}{4}$; $\frac{5}{4}$, $\frac{14}{4}$, $\frac{41}{4}$, $\frac{82}{4}$?
   c) $\frac{8}{8}$, $\frac{16}{8}$, $\frac{40}{8}$, $\frac{72}{8}$, $\frac{96}{8}$; $\frac{9}{8}$, $\frac{20}{8}$, $\frac{37}{8}$, $\frac{95}{8}$?
6. Wie viel Viertel sind $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{9}{2}$, $\frac{17}{2}$, $\frac{47}{2}$?
7. Wie viel Achtel sind $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{2}$, $\frac{15}{2}$, $\frac{21}{2}$, $\frac{35}{2}$?
8. Wie viel Achtel sind $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{13}{4}$, $\frac{27}{4}$, $\frac{51}{4}$?
9. Wie viel Halbe sind $\frac{2}{4}$, $\frac{6}{4}$, $\frac{10}{4}$, $\frac{18}{4}$, $\frac{34}{4}$, $\frac{76}{4}$?
10. Wie viel Halbe sind $\frac{4}{8}$, $\frac{12}{8}$, $\frac{20}{8}$, $\frac{36}{8}$, $\frac{56}{8}$, $\frac{84}{8}$?
11. Wie viel Viertel sind $\frac{2}{8}$, $\frac{6}{8}$, $\frac{18}{8}$, $\frac{42}{8}$, $\frac{66}{8}$, $\frac{92}{8}$?
12. a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$. b) $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$. c) $\frac{3}{8}+\frac{1}{8}$. d) $2\frac{1}{2}+4\frac{1}{2}$.
    $\frac{3}{2}+\frac{1}{2}$. $\frac{3}{4}+\frac{1}{4}$. $\frac{5}{8}+\frac{3}{8}$. $5\frac{3}{4}+3\frac{3}{4}$.
    $4\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}+3\frac{3}{4}$. $4\frac{7}{8}+\frac{5}{8}$. $8\frac{1}{8}+2\frac{3}{8}$.
13. $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{2}{4}+\frac{3}{4}=\frac{5}{4}=1\frac{1}{4}$.
14. Wie viel ist $\frac{7}{4}+\frac{1}{2}$; $\frac{5}{8}+\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}+\frac{7}{8}$; $3\frac{1}{2}+5\frac{3}{8}$?
15. a) $\frac{5}{2}-\frac{1}{2}$. b) $\frac{3}{4}-\frac{1}{4}$. c) $\frac{7}{8}-\frac{3}{8}$. d) $\frac{3}{4}-\frac{1}{2}$.
    $3-\frac{1}{2}$. $5-\frac{3}{4}$. $7\frac{5}{8}-2\frac{3}{8}$. $1\frac{1}{8}-\frac{1}{4}$.
    $3\frac{1}{2}-\frac{1}{2}$. $4\frac{1}{4}-\frac{3}{4}$. $\frac{7}{8}-\frac{3}{4}$. $12\frac{1}{2}-10\frac{5}{8}$.
16. Wie viel ist
    a) $\frac{1}{2}\times 4$; $\frac{1}{4}\times 9$; $\frac{3}{4}\times 12$; $\frac{3}{8}\times 3$; $\frac{7}{8}\times 6$?
    b) $1\frac{1}{2}\times 7$; $5\frac{1}{2}\times 8$; $3\frac{3}{4}\times 5$; $9\frac{5}{8}\times 10$?
17. Wie oft ist enthalten
    a) $\frac{1}{2}$ in $\frac{5}{2}$; $\frac{3}{4}$ in $\frac{15}{4}$; $1\frac{1}{4}$ in $8\frac{3}{4}$; $2\frac{5}{8}$ in $7\frac{7}{8}$?
    b) $\frac{1}{2}$ in 2; $\frac{1}{4}$ in $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{8}$ in $\frac{3}{4}$; $1\frac{1}{4}$ in $7\frac{1}{2}$?
18. Wie viel ist der 5te Theil von $\frac{15}{2}$, $\frac{25}{4}$, $\frac{45}{8}$?
19. Wie viel ist die Hälfte von $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$?
20. Bestimme $\frac{49}{2} : 7$; $2\frac{1}{4} : 3$; $11\frac{1}{4} : 9$; $3\frac{3}{4} : 2$.
21. Wie viel Kreuzer sind $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$ fl.?
22. Wie viel *dkg* sind $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$ *kg*?
23. Wie viel *l* sind $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$ *hl*?
24. Wie viel Stunden sind $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{7}{8}$ Tage?

12+6+18+3+9+21

§. 38.

Drittel, Sechstel und Zwölftel.

1. Wie erhält man die Brüche $^1/_3$, $^2/_3$, $^1/_6$, $^5/_6$, $^1/_{12}$, $^7/_{12}$, $^{11}/_{12}$?
2. Wie viel Drittel sind 1, 2, 8 Ganze; $1^1/_3$, $4^2/_3$, $13^1/_3$?
3. Wie viel Sechstel sind 1, 3, 12 Ganze; $2^1/_6$, $5^5/_6$, $9^1/_6$?
4. Wie viel Zwölftel sind 1, 5, 9 Ganze; $3^1/_{12}$, $4^5/_{12}$, $7^7/_{12}$?
5. Wie viel Ganze sind $^3/_3$, $^{18}/_3$; $^6/_6$, $^{30}/_6$, $^{12}/_{12}$, $^{72}/_{12}$?
6. Sondere von $^5/_3$, $^{14}/_3$, $^{31}/_3$, $^{53}/_3$, $^7/_6$, $^{19}/_6$, $^{41}/_6$, $^{73}/_6$; $^{13}/_{12}$, $^{25}/_{12}$, $^{65}/_{12}$ die Ganzen aus.
7. Wie viel a) Sechstel, b) Zwölftel sind $^1/_3$, $^5/_3$, $^{11}/_3$, $^{29}/_3$?
8. Drücke $^1/_6$, $^5/_6$, $^{11}/_6$, $^{35}/_6$ in Zwölfteln aus.
9. Wie viel ist das Drittel von $^1/_2$, von $^1/_4$? Wie viel ist das Sechstel von $^1/_2$?
10. Wie viel Sechstel sind $^1/_2$, $^3/_2$, $^7/_2$, $^{13}/_2$, $^{25}/_2$?
11. Wie viel Zwölftel sind $^1/_2$, $^5/_2$, $^{19}/_2$; $^1/_4$, $^3/_4$, $^{17}/_4$?
12. Drücke in gleichen Theilen aus: a) $^1/_3$, $^5/_6$; b) $^2/_3$, $^5/_{12}$; c) $^1/_2$, $^5/_6$; d) $^1/_2$, $^2/_3$; e) $^2/_3$, $^3/_4$.
13. Wie viel Halbe sind $^3/_6$, $^{21}/_6$, $^{57}/_6$; $^6/_{12}$, $^{42}/_{12}$, $^{78}/_{12}$?
14. Wie viel Drittel sind $^2/_6$, $^{20}/_6$, $^{56}/_6$; $^4/_{12}$, $^{28}/_{12}$, $^{64}/_{12}$?
15. Drücke $^3/_{12}$, $^{39}/_{12}$ in Vierteln, $^2/_{12}$, $^{46}/_{12}$ in Sechsteln aus.
16. a) $^2/_3 + {}^1/_3$. b) $^5/_6 + {}^1/_6$. c) $^7/_{12} + {}^5/_{12}$. d) $8^5/_6 + 3^5/_6$.
    $1^1/_3 + 4^1/_3$. $^{19}/_6 + {}^5/_6$. $^{11}/_{12} + {}^7/_{12}$. $10^5/_{12} + 9^{11}/_{12}$.
17. $^2/_3 + {}^3/_4 = {}^8/_{12} + {}^9/_{12} = {}^{17}/_{12} = 1^5/_{12}$.
18. $^2/_3 + {}^1/_6$; $^5/_6 + {}^7/_{12}$; $^3/_4 + {}^1/_6$; $2^1/_2 + 5^1/_3$; $8^{11}/_{12} + 7^3/_4$.
19. $^5/_6 - {}^1/_6$; $^3/_4 - {}^7/_{12}$; $^{11}/_{12} - {}^5/_6$; $^3/_4 - {}^2/_3$; $^7/_{12} - {}^1/_2$.
20. $8 - 2^2/_3$; $5^1/_3 - 2^1/_4$; $7^5/_{12} - 3^1/_6$; $13^2/_3 - 8^5/_6$.
21. $^2/_3 \times 6$; $^5/_6 \times 5$; $^1/_6 \times 18$; $^7/_{12} \times 10$; $^{11}/_{12} \times 9$.
22. $8^1/_3 \times 3$; $9^2/_3 \times 7$; $12^5/_6 \times 9$; $15^7/_{12} \times 6$.
23. $3 : {}^1/_3$; $8 : {}^2/_3$; $^5/_6 : {}^5/_{12}$; $^1/_2 : {}^1/_6$; $^1/_3 : {}^1/_{12}$.
24. $1^2/_3 : {}^5/_6$; $12^1/_2 : {}^5/_6$; $9^3/_4 : 1^1/_{12}$; $33^3/_4 : 1^2/_3$.
25. Wie viel ist der 5te Theil von $^{25}/_3$, $^{35}/_6$, $7^1/_{12}$?
26. Wie viel Monate sind $^1/_3$, $^2/_3$, $^1/_6$, $^5/_6$, $^1/_{12}$, $^7/_{12}$ Jahre?
27. Wie viel Stunden sind $^1/_3$, $^2/_3$, $^1/_6$, $^5/_6$, $^1/_{12}$, $^{11}/_{12}$ Tage?
28. Wie viel Minuten sind $^1/_3$, $^2/_3$, $^1/_6$, $^1/_{12}$, $^7/_{12}$, $^{11}/_{12}$ Stunden?

§. 39.

Fünftel und Zehntel.

1. Wie entstehen die Brüche $^1/_5$, $^2/_5$, $^4/_5$, $^1/_{10}$, $^3/_{10}$, $^7/_{10}$?
2. Wie viel Fünftel sind 1, 2, 7 Ganze; $1^1/_5$, $5^3/_5$, $8^4/_5$?
3. Wie viel Zehntel sind 1, 3, 10 Ganze; $1^3/_{10}$, $4^7/_{10}$, $5^9/_{10}$?

4. Wie viel Ganze sind $^5/_5$, $^{15}/_5$, $^{55}/_5$; $^{10}/_{10}$, $^{40}/_{10}$, $^{70}/_{10}$?
5. Wie viel Ganze sind $^6/_5$, $^{12}/_5$, $^{33}/_5$, $^{64}/_5$, $^{13}/_{10}$, $^{37}/_{10}$?
6. Wie viel Zehntel sind $^1/_5$, $^3/_5$, $^7/_5$, $^{19}/_5$, $^{42}/_5$?
7. Wie viel Zehntel sind $^1/_2$, $^3/_2$, $^9/_2$, $^{15}/_2$, $^{31}/_2$?
8. Wie viel Fünftel sind $^2/_{10}$, $^6/_{10}$, $^{28}/_{10}$, $^{40}/_{10}$, $^{62}/_{10}$?
9. Wie viel Halbe sind $^5/_{10}$, $^{25}/_{10}$, $^{30}/_{10}$, $^{55}/_{10}$, $^{90}/_{10}$?
10. a) $^3/_5 + ^4/_5$. b) $5^2/_5 + 6^1/_5$. c) $^2/_5 + ^7/_{10}$. d) $^1/_2 + ^3/_5$.
$^7/_{10} + ^3/_{10}$. $3^2/_{10} + 2^7/_{10}$. $^1/_2 + ^9/_{10}$. $7^3/_{10} + 4^1/_2$.
11. a) $^9/_{10} - ^3/_{10}$. b) $6^4/_5 - 3^2/_5$. c) $^1/_5 - ^1/_{10}$. d) $8^7/_{10} - 3^1/_2$.
$5 - ^2/_5$. $7^1/_{10} - 2^3/_{10}$. $^1/_2 - ^2/_5$. $6^1/_5 - 5^1/_2$.
12. $^3/_5 \times 6$; $^7/_{10} \times 5$; $9^3/_{10} \times 8$; $13^4/_5 \times 10$.
13. $^4/_5 : ^1/_5$; $1 : ^1/_5$; $2^2/_5 : ^3/_5$; $2^7/_{10} : ^3/_{10}$.
14. Wie groß ist der 4te Theil von $^{24}/_5$, $^{36}/_5$; der dritte Theil von $^9/_{10}$, $^{36}/_{10}$, $5^1/_{10}$?
15. Gib $^1/_5$ ($^2/_5$, $^4/_5$) fl., *m*, *hl*, *kg*, Ries, Stunden in Einheiten der nächst niedrigen Benennung an.
16. Ebenso $^1/_{10}$ ($^3/_{10}$, $^7/_{10}$) fl., *m*, *hl*, *kg*, Ries, Stunden.

Formveränderung der Brüche.

§. 40.

Umformung unechter Brüche und gemischter Zahlen.

1. **Jeder unechte Bruch kann in eine ganze oder gemischte Zahl verwandelt werden.**

Sollen z. B. aus dem unechten Bruche $^{27}/_4$ die Ganzen ausgesondert werden, so schließt man: 4 Viertel sind 1 Ganzes, 27 Viertel sind also so viel Ganze, wie oft 4 in 27 enthalten ist, somit 6 Ganze, und es bleiben noch 3 Viertel.

$$^{27}/_4 = 27 : 4 = 6^3/_4.$$

2. **Jede gemischte Zahl kann in einen unechten Bruch verwandelt werden.**

Es sei z. B. $3^7/_8$ in einen unechten Bruch umzuformen. Man schließt: 1 Ganzes hat 8 Achtel, 3 Ganze sind also 3mal 8 = 24 Achtel, und die 7 Achtel dazu, sind 31 Achtel: folglich

$$3^7/_8 = \frac{3 \times 8 + 7}{8} = {}^{31}/_8.$$

Aufgaben.

1. Wie viele Ganze enthält $^6/_6$, $^{50}/_6$, $^{29}/_7$, $^{58}/_8$, $^{70}/_9$, $^{83}/_{10}$, $^{55}/_{12}$?
(Die hier angeführten und in diesem Abschnitte weiter folgenden Aufgaben sind, soweit es die Einfachheit der Zahlen zuläst, im Kopfe zu lösen.)

2. Suche die Ganzen aus folgenden Brüchen:

$^{7}/_{3}$, $^{35}/_{5}$, $^{57}/_{6}$, $^{31}/_{7}$, $^{85}/_{9}$, $^{13}/_{11}$, $^{25}/_{12}$, $^{71}/_{15}$, $^{87}/_{20}$, $^{100}/_{25}$.

3. Verwandle in gemischte Zahlen die folgenden Brüche:

$\frac{105}{32}$, $\frac{117}{37}$, $\frac{80}{17}$, $\frac{257}{84}$, $\frac{1320}{57}$, $\frac{1041}{416}$, $\frac{2177}{208}$, $\frac{50713}{471}$, $\frac{31073}{1000}$.

4. Verwandle 1, 3 6, 9, 13, 25, 128 in Brüche, deren Nenner 10, b) 25, c) 60, d) 100 ist.

Richte folgende gemischte Zahlen zu unechten Brüchen ein:

5. $3^{4}/_{5}$, $12^{3}/_{7}$, $9^{9}/_{10}$, $3^{8}/_{15}$, $14^{2}/_{9}$, $21^{3}/_{4}$, $102^{7}/_{12}$, $58^{9}/_{20}$.

6. $9\frac{13}{16}$, $27\frac{43}{81}$, $41\frac{31}{400}$, $84\frac{32}{125}$, $702\frac{27}{400}$, $37\frac{217}{422}$, $581\frac{147}{1000}$.

§. 41.

Erweitern der Brüche.

Wird in einem Bruche $^{3}/_{5}$ der Zähler z. B. mit 4 multipliciert, so erhält man 4mal so viele Theile, als ihrer der frühere Bruch enthielt; wird zugleich auch der Nenner mit 4 multipliciert, so werden die einzelnen Theile des neuen Bruches 4mal kleiner ausfallen, als die früheren; der neue Bruch enthält also 4mal so viele, aber 4mal kleinere Theile, so dass er mit dem früheren Bruche gleichen Wert hat; folglich

$$^{3}/_{5} = \frac{3 \times 4}{5 \times 4} = {}^{12}/_{20}.$$

Der Wert eines Bruches wird also nicht geändert, wenn man Zähler und Nenner mit derselben Zahl multipliciert.

Indem der Bruch $^{3}/_{5}$ in $^{12}/_{20}$ verwandelt wurde, hat sich seine Form geändert, der Wert ist aber unverändert geblieben.

Die Formveränderung eines Bruches durch die Multiplication des Zählers und Nenners mit derselben Zahl wird die Erweiterung des Bruches genannt.

Durch die Erweiterung kann man jeden Bruch ohne Änderung seines Wertes in einen andern verwandeln, dessen Nenner ein Vielfaches des früheren Nenners ist.

Um z. B. $^{7}/_{12}$ in einen Bruch, dessen Nenner 48 ist, zu verwandeln, muß man $^{7}/_{12}$ mit 48 : 12, d. i. mit 4 erweitern; man hat daher folgende Rechnung:

$$48 : 12 = 4,\ 7 \times 4 = 28,\ \text{also}\ ^{7}/_{12} = {}^{28}/_{48}.$$

Im Kopfe rechnet man: ein Ganzes hat $^{48}/_{48}$, $^{1}/_{12}$ hat $^{4}/_{48}$, $^{7}/_{12}$ sind also $^{28}/_{48}$.

Durch die Erweiterung kann man auch mehrere Brüche auf einen gemeinsamen Nenner bringen, sobald dieser durch alle Nenner der gegebenen Brüche theilbar ist. Um die Rechnungen so einfach als möglich zu führen, bringt man die Brüche gewöhnlich auf den kleinsten gemeinsamen Nenner; dieser ist die kleinste Zahl, welche durch alle gegebenen Nenner theilbar ist, somit ihr kleinstes gemeinsames Vielfaches.

Aufgaben.

1. Bringe a) die Brüche $^1/_2$, $^3/_5$ auf den Nenner 10;
   b) „ „ $^3/_4$, $^5/_6$, $^7/_{10}$ „ „ „ 60;
   c) „ „ $^1/_2$, $^2/_3$, $^3/_4$, $^4/_5$, $^5/_6$ „ „ „ 120.
2. Bringe die Brüche $^3/_4$, $^5/_6$, $^7/_{10}$ auf den kleinsten gemeinsamen Nenner.

$$v\,(4,\ 6,\ 10) = 60$$

$^3/_4$	15	45	$^3/_4 = {}^{45}/_{60}$,
$^5/_6$	10	50	$^5/_6 = {}^{50}/_{60}$,
$^7/_{10}$	6	42	$^7/_{10} = {}^{42}/_{60}$.

Oder: $1 = {}^{60}/_{60}$;

$^1/_4 = {}^{15}/_{60}$, $^3/_4 = {}^{45}/_{60}$;

$^1/_6 = {}^{10}/_{60}$, $^5/_6 = {}^{50}/_{60}$;

$^1/_{10} = {}^6/_{60}$, $^7/_{10} = {}^{42}/_{60}$.

Diese Darstellungsweise schließt sich an den Gedankengang des mündlichen Rechnens an.

Stelle folgende Brüche mit dem kl. g. Nenner dar:

3. a) $^3/_{10}$, $^7/_{15}$. b) $^3/_4$, $^5/_{14}$. c) $^{13}/_{25}$, $^8/_{15}$.
4. a) $^4/_9$, $^{11}/_{17}$. b) $^7/_{12}$, $^{13}/_{20}$. c) $^{16}/_{21}$, $^{37}/_{70}$.
5. a) $^1/_2$, $^2/_5$, $^3/_8$. b) $^2/_3$, $^3/_4$, $^4/_5$. c) $^5/_6$, $^7/_{12}$, $^{19}/_{24}$.
6. a) $^2/_3$, $^5/_8$, $^{11}/_{12}$, $^{13}/_{15}$. b) $^3/_5$, $^7/_8$, $^{11}/_{14}$, $^5/_{18}$, $^{19}/_{30}$.
7. a) $\frac{17}{44}$, $\frac{35}{72}$, $\frac{29}{56}$. b) $\frac{11}{15}$, $\frac{18}{35}$, $\frac{24}{55}$, $\frac{98}{105}$.
8. a) $\frac{37}{108}$, $\frac{113}{132}$, $\frac{79}{162}$. b) $\frac{91}{120}$, $\frac{147}{264}$, $\frac{103}{198}$, $\frac{211}{495}$.

§. 42.

Abkürzen der Brüche.

Wird in einem Bruche $^{12}/_{20}$ der Zähler z. B. durch 4 dividiert, so erhält man 4mal weniger Theile; wenn man zugleich auch den Nenner durch 4 dividiert, so werden die einzelnen Theile des neuen Bruches 4mal so groß; man erhält daher 4mal weniger, aber 4mal so große Theile, also wird der Bruch durch diese Division nur der Form, nicht aber dem Werte nach geändert; man hat

$$^{12}/_{20} = \frac{12:4}{20:4} = {}^3/_5.$$

Der Wert eines Bruches wird also nicht geändert, wenn man Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl dividiert.

Durch die Formveränderung eines Bruches mittelst der Division des Zählers und Nenners durch dieselbe Zahl kann man den Bruch abkürzen, d. i. denselben ohne Änderung des Wertes mit kleineren Zahlen darstellen. Dies kann jedoch nur dann geschehen, wenn Zähler und Nenner ein gemeinsames Maß haben.

Aufgaben.

1. a) $\frac{8}{14} = \frac{4}{7}$; b) $\frac{420}{510} = \frac{42}{51} = \frac{14}{17}$.
   Kürze folgende Brüche so weit als möglich ab:
2. $^{12}/_{18}$, $^{15}/_{24}$, $^{10}/_{25}$, $^{18}/_{30}$, $^{20}/_{36}$, $^{25}/_{40}$, $^{36}/_{54}$, $^{48}/_{60}$, $^{44}/_{66}$.
3. $\frac{75}{200}$, $\frac{192}{240}$, $\frac{102}{153}$, $\frac{135}{480}$, $\frac{666}{909}$, $\frac{1625}{2000}$, $\frac{410}{2520}$, $\frac{960}{1728}$.
4. Kürze noch folgende Brüche ab, indem du zwischen Zähler und Nenner durch die Kettendivision das gr. g. Maß suchst:
   $\frac{805}{966}$, $\frac{2924}{5117}$, $\frac{803}{1752}$, $\frac{741}{1254}$, $\frac{791}{1243}$, $\frac{2567}{6191}$, $\frac{1707}{2845}$.

Addition und Subtraction der Brüche.

§. 43.

Addition der Brüche.

5 Neuntel und 2 Neuntel sind 7 Neuntel; oder

$$^5/_9 + {}^2/_9 = {}^7/_9.$$

Brüche von gleichen Nennern werden addiert, indem man ihre Zähler addiert und als Nenner den gemeinsamen Nenner beibehält. Haben die Brüche ungleiche Nenner, so werden sie zuerst auf einen gemeinsamen Nenner gebracht und dann addiert.

Aufgaben.

1. $^4/_{15} + {}^7/_{15} + {}^{11}/_{15} = {}^{22}/_{15} = 1^7/_{15}$.
2. a) $^3/_{20} + {}^7/_{20} + {}^9/_{20}$. b) $5^3/_8 + 6^7/_8 + 8^5/_8$.
3. $12\frac{7}{32} + 44\frac{17}{32} + 10 + 18\frac{23}{32} + 7\frac{29}{32}$.
4. Man hat vier Zahlen; die erste ist $8^4/_5$, jede folgende ist um $2^3/_5$ größer als die vorhergehende; wie groß ist die Summe aller?
5. Addiere die Brüche $^3/_5$, $^5/_6$ und $^7/_{10}$

   v (5, 6, 10) = 30

$^3/_5$	6	18
$^5/_6$	5	25
$^7/_{10}$	3	21

$$\frac{64}{30} = \frac{32}{15} = 2\frac{2}{15}.$$

6. a) $^2/_3 + {}^5/_6$. b) $^7/_8 + {}^5/_6$.
7. a) $^1/_2 + {}^3/_4 + {}^5/_8$. b) $^2/_3 + {}^4/_5 + {}^7/_9$.
8. a) $^7/_8 + {}^5/_{12} + {}^{11}/_{20}$. b) $^{17}/_{18} + {}^{16}/_{27} + {}^{13}/_{36} + {}^{14}/_{15}$.
9. a) $8^3/_4 + 5^7/_{12} + 6^{13}/_{30}$. b) $12^7/_{10} + 13^8/_{15} + 25^{19}/_{24}$.

10. $4\frac{5}{6} + 8\frac{13}{21} + 5\frac{20}{33} + 3\frac{29}{36} + 7\frac{37}{54}$.

11. $25\frac{17}{48} + 32\frac{23}{72} + 15\frac{11}{63} + 24\frac{7}{36} + 20\frac{31}{98}$.

12. Prüfe die Richtigkeit folgender Angaben:

a) $^3/_4 + {}^1/_2 + {}^5/_6 + {}^7/_{10} = {}^2/_3 + {}^7/_{12} + {}^3/_5 + {}^{14}/_{15}$.

b) $^2/_9 + {}^7/_{12} + {}^9/_{14} + {}^{29}/_{63} = {}^3/_7 + {}^{13}/_{18} + {}^8/_{21} + {}^{11}/_{36}$.

c) $\frac{13}{44} + \frac{47}{75} + \frac{53}{165} + \frac{217}{275} = \frac{29}{60} + \frac{23}{66} + \frac{39}{100} + \frac{107}{132}$.

13. Wie groß ist die Summe von fünf Zahlen, von denen die erste $731^{11}/_{12}$ und jede folgende um $27^3/_5$ größer als die vorhergehende ist?

14. Jemand hat $37^3/_4$ fl., $15^7/_{10}$ fl., $22^{13}/_{20}$ fl., $5^{16}/_{25}$ fl. und $12^1/_2$ fl. zu zahlen; wie viel zusammen?

15. Die Seiten eines Dreiecks betragen $225^1/_2\,m$, $173^3/_4\,m$ und $205^2/_5\,m$; wie groß ist der Umfang?

16. Ein Wasserbehälter wird durch drei Röhren gefüllt; die erste Röhre allein füllt in 1 Stunde $^1/_3$ des Behälters, die zweite in derselben Zeit $^1/_4$, die dritte $^1/_6$. Welcher Theil des Behälters wird in einer Stunde gefüllt, wenn alle drei Röhren zugleich fließen?

17. Eine Wasserpumpe kann das in einer Grube enthaltene Wasser in 15 Tagen, eine andere in 12 Tagen herausschaffen; welcher Theil des Wassers wird von beiden Maschinen zusammen in einem Tage herausgepumpt?

18. Wie hoch kommt das Ausgraben eines $8\,m$ tiefen Brunnens, wenn das Ausgraben für das erste m $3^3/_4$ fl. und für jedes folgende m $^4/_5$ fl. mehr als für das vorhergehende kostet?

§. 44.

Subtraction der Brüche.

7 Achtel weniger 5 Achtel sind 2 Achtel; oder

$$^7/_8 - {}^5/_8 = {}^2/_8.$$

Brüche von gleichen Nennern werden subtrahiert, indem man die Zähler subtrahiert und als Nenner den gemeinsamen Nenner beibehält. Haben die Brüche ungleiche Nenner, so werden sie zuerst auf einen gemeinsamen Nenner gebracht und dann subtrahiert.

Aufgaben.

1. a) $^8/_9 - {}^5/_9$. b) $^{11}/_{12} - {}^5/_{12}$. c) $^{23}/_{30} - {}^{13}/_{30}$.

2. a) $8^3/_7 - 3$. b) $12^7/_{10} - 9$. c) $9^8/_{15} - 2^2/_{15}$.

3. a) $1 - {}^5/_6$. b) $5 - {}^9/_{16}$. c) $15 - 10^3/_4$.

4. a) $8^9/_{16} - 5^{13}/_{16}$. b) $57\frac{59}{100} - 38\frac{83}{100}$.

5. Subtrahiere $^2/_9$ von $^5/_{12}$.

$$\begin{array}{ll|l} \multicolumn{3}{l}{v\,(9,\ 12) = 36} \\ \hline \frac{5}{12} & 3 & 15 \\ \frac{2}{9} & 4 & 8 \\ \hline & & \frac{7}{36} \end{array}$$

$\frac{5}{12} = \frac{15}{36}$; $\frac{2}{9} = \frac{8}{36}$. Wenn man nun $\frac{8}{36}$ von $\frac{15}{36}$ subtrahiert, so bleiben $\frac{7}{36}$.

6. a) $^8/_9 - {}^7/_8$. b) $^{17}/_{20} - {}^3/_5$. c) $^{13}/_{18} - {}^3/_{10}$.

7. a) $^{15}/_{28} - {}^4/_{21}$. b) $^9/_{16} - {}^5/_{12}$. c) $^{19}/_{25} - {}^{11}/_{30}$.

8. a) $\frac{53}{60} - \frac{13}{25}$. b) $\frac{59}{84} - \frac{71}{112}$. c) $\frac{209}{480} - \frac{253}{600}$.

9. a)
$$\begin{array}{r r|l} & \multicolumn{2}{c}{24} \\ \hline 19\frac{7}{8} & 3 & 21 \\ 7\frac{2}{3} & 8 & 16 \\ \hline 12\frac{5}{24} & & 5 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r r|l} & \multicolumn{2}{c}{36} \\ \hline 35\frac{2}{9} & 4 & 8 + 36. \\ 21\frac{7}{12} & 3 & 21 \\ \hline 13\frac{23}{36} & & 23 \end{array}$$

10. a) $23\frac{13}{15} - 18\frac{17}{25}$. b) $19\frac{53}{60} - 15\frac{47}{48}$.

II **11.** a) $129\frac{13}{24} - 105\frac{27}{32}$. c) $52\frac{71}{300} - 25\frac{103}{250}$.

12. Um wie viel wird der Bruch $\frac{37}{48}$ größer oder kleiner, wenn man a) zum Zähler und Nenner 5 addiert, b) vom Zähler und Nenner 5 subtrahiert?

13. Um wie viel wird der Bruch $\frac{5408}{7219}$ größer oder kleiner, wenn man im Zähler und Nenner a) die letzte, b) die zwei letzten Ziffern rechts wegläßt?

14. Man hat folgende Brüche: $^1/_2$, $^1/_4$, $^1/_8$, $^1/_{16}$, $^1/_{32}$, $^1/_{64}$; um wie viel ist die Summe der ersten zwei Brüche kleiner als 1? — um wie viel die Summe, der ersten drei, vier, fünf, sechs Brüche?

15. Man hat vier Zahlen: die erste ist $25^1/_3$, die zweite um $8^3/_4$ größer als die erste, die dritte um $12^3/_5$ kleiner als die zweite, die vierte ist gleich dem Unterschiede zwischen der ersten und dritten; wie groß ist die Summe aller vier Zahlen?

16. Ein Beamter bezieht in einem Monate $87^1/_4$ fl. Gehalt, er gibt $74^3/_5$ fl. aus; wie viel erspart er?

17. Drei Säcke wiegen mit dem darin enthaltenen Reis $125^3/_5$, $127^7/_{10}$, $128^1/_4$ *kg*; die leeren Säcke wiegen $8^1/_2$, $8^3/_5$, $8^3/_4$ *kg*; wie viel Reis ist in allen Säcken?

II **18.** Aus einem Fasse, welches $32^1/_4$ *hl* Wein enthält, werden drei kleinere Fässer, von denen das erste $7^1/_2$, das zweite $6^3/_4$, das dritte $6^7/_{20}$ *hl* faßt, gefüllt; wie viel Wein bleibt noch im großen Fasse übrig?

Multiplication und Division der Brüche.

§. 45.

Multiplication eines Bruches mit einer ganzen Zahl.

Nimmt man den Zähler eines Bruches z. B. 5mal so groß, so wird die Anzahl der Theile, somit auch der Bruch 5mal so groß. Nimmt man den Nenner eines Bruches 5mal so klein, d. i. nimmt man von ihm den 5ten Theil, so erhält man 5mal so große Theile, somit wird auch der Bruch 5mal so groß.

Ein Bruch wird demnach mit einer ganzen Zahl multipliciert, indem man entweder den Zähler mit der ganzen Zahl multipliciert oder den Nenner durch dieselbe dividiert.

Z. B. $^7/_{10} \times 5 = \frac{7 \times 5}{10} = {}^{35}/_{10} = {}^7/_2$; oder

$$^7/_{10} \times 5 = \frac{7}{10:5} = {}^7/_2.$$

Das zweite Verfahren ist vortheilhafter, jedoch nur dann anwendbar, wenn der Nenner des Bruches durch die ganze Zahl theilbar ist.

$$^5/_8 \times 8 = 5, \quad {}^{12}/_{25} \times 25 = 12.$$

Ein Bruch mit seinem Nenner multipliciert gibt den Zähler zum Producte.

Aufgaben.

1. a) $^8/_{11} \times 7$. b) $^5/_{12} \times 8$. c) $^3/_{10} \times 5$.
$^7/_{12} \times 5$. $^{11}/_{15} \times 6$. $^{17}/_{30} \times 15$.

2. a) $\frac{37}{64} \times 5$. b) $\frac{59}{63} \times 16$. c) $\frac{21}{112} \times 337$.

3. $\frac{13}{18} \times 12 = \frac{156}{18} = 8\frac{12}{18} = 8\frac{2}{3}$; oder $\frac{13}{\underset{3}{\cancel{18}}} \times \overset{2}{\cancel{12}} = \frac{26}{3} = 8\frac{2}{3}$.

Wenn der Nenner des Bruches und die ganze Zahl ein gemeinsames Maß haben, so wird die Multiplication vereinfacht, wenn man dieselben noch vor dem Multiplicieren durch jenes Maß dividiert.

4. a) $\frac{10}{21} \times 14$. b) $\frac{25}{32} \times 36$. c) $\frac{17}{21} \times 15$.

5. a) $\frac{17}{30} \times 20$. b) $\frac{112}{125} \times 75$. c) $\frac{83}{150} \times 105$.

6. $5\frac{3}{4} \times 7$; oder $5\frac{3}{4} \times 7 = \frac{23}{4} \times 7 = \frac{161}{4} = 40\frac{1}{4}$.
$\overline{40\frac{1}{4}}$

Bei der ersten Multiplicationsart spricht man: 7mal $\frac{3}{4}$ sind $\frac{21}{4}$, d. i. 5 Ganze und $\frac{1}{4}$, 7mal 5 ist 35, und 5 ist 40.

7. a) $19\frac{5}{8} \times 9$. b) $18\frac{7}{12} \times 11$. c) $19\frac{23}{25} \times 37$.

8. a) $91\frac{7}{12} \times 61$. b) $12\frac{37}{40} \times 25$. c) $31\frac{12}{27} \times 18$.

9. a) $89\frac{8}{35} \times 55$. b) $45\frac{107}{125} \times 105$. c) $271\frac{39}{160} \times 93$.

10. a) $53\frac{7}{12} \times 35$ b) $23\frac{9}{16} \times 45$.

$$\begin{array}{r} \times 5 \\ \hline 267\frac{11}{12} \\ \times 7 \\ \hline 1875\frac{5}{12} \end{array}$$

c) $17\frac{13}{32} \times 56$.

d) $241\frac{125}{236} \times 72$.

11. 1 q kostet $35\frac{17}{25}$ fl.; wie viel kosten a) 10 q, b) 43 q?

12. Wie groß ist der Umfang eines Rades, welches 48 Zähne hat, wenn diese $4\frac{3}{5}$ *cm* von einander abstehen?

13. Ein österreichischer Gulden wiegt $\frac{1}{81}$ *kg*; wie viel wiegen a) 98 fl., b) 162 fl.? c) 500 fl.?

14. Ein russischer Silberrubel gilt 1 fl. $61\frac{23}{25}$ kr. ö. W.; wie viel in ö. W. betragen a) 204 Rubel? 793 Rubel? c) 2465 Rubel?

§. 46.

Division eines Bruches durch eine ganze Zahl.

Nimmt man den Zähler eines Bruches 4mal so klein, so wird die Anzahl der Theile, somit auch der Bruch, 4mal so klein. Nimmt man den Nenner eines Bruches 4mal so groß, so wird jeder einzelne Theil, somit auch der Bruch, 4mal so klein.

Ein Bruch wird also durch eine ganze Zahl dividiert, indem man entweder den Zähler durch die ganze Zahl dividiert oder den Nenner mit derselben multipliciert.

Z. B. $^8/_9 : 4 = \frac{8 : 4}{9} = {}^2/_9$; oder

$$^8/_9 : 4 = \frac{8}{9 \times 4} = {}^8/_{36} = {}^2/_9.$$

Das erste Verfahren ist vortheilhafter, jedoch nur dann anwendbar, wenn der Zähler durch die ganze Zahl theilbar ist.

Aufgaben.

1. a) $^{10}/_{11} : 2$. b) $^9/_{10} : 3$. c) $^8/_{15} : 4$.
$^7/_9 : 3$. $^{11}/_{15} : 2$. $^{21}/_{25} : 8$.

2. $\frac{8}{15} : 12 = \frac{8}{180} = \frac{2}{45}$; oder $\frac{\overset{2}{\cancel{8}}}{15} : \overset{3}{\cancel{12}} = \frac{2}{45}$.

3. a) $\frac{15}{16} : 20$. b) $\frac{12}{33} : 14$. c) $\frac{35}{43} : 21$.

4. $9\frac{1}{8} : 5 = 1\frac{33}{40}$; oder $9\frac{1}{8} : 5 = \frac{73}{8} : 5 = \frac{73}{40} = 1\frac{33}{40}$.

Bei der ersten Divisionsart sagt man: der 5te Theil von 9 ist 1, bleibt 4; 4 Ganze sind $\frac{32}{8}$ und $\frac{1}{8}$ sind $\frac{33}{8}$; der 5te Theil von $\frac{33}{8}$ sind $\frac{33}{40}$.

5. a) $12^6/_7 : 3$. b) $17^3/_4 : 5$. c) $59^7/_{10} : 8$.

6. a) $307\frac{17}{28} : 9$. b) $342\frac{9}{11} : 23$. c) $1346\frac{13}{25} : 31$.

7\. a) $517\frac{3}{8} : 36$ b) $1907\frac{7}{24} : 56$.

$\overline{} : 6$

$86\frac{11}{48}$ c) $9248\frac{17}{20} : 45$.

$\overline{} : 6$

$14\frac{107}{288}$ d) $6804\frac{7}{10} : 28$.

8\. 9 *m* kosten $38\frac{1}{4}$ fl.; wie viel kostet 1 *m*?

9\. 1 *hl* kostet 18 fl.; wie viel *hl* bekommt man für $499\frac{1}{2}$ fl.?

10\. In einer Classe von 45 Schülern ist 1 Schüler $10^1/_2$ Jahre alt, 17 sind je 11, 15 sind je $11^2/_3$, 11 sind je 12, und 1 ist 13 Jahre alt; welches ist das durchschnittliche Alter eines Schülers dieser Classe?

11\. Wenn man 24 *hl* Weizen à $6^1/_4$ fl. und 16 *hl* à $6^1/_5$ fl. mischt und beim Verkaufe den 7ten Theil des Preises gewinnen will; wie viel beträgt der Gewinn und wie theuer muss man das *hl* des so gemischten Weizens verkaufen?

§. 47.

Multiplication mit einem Bruche.

Es sei eine Zahl mit $^3/_4$ zu multiplicieren. Hier sollte nach der in §. 17 gegebenen Erklärung der Multiplication die gegebene Zahl $^3/_4$mal als Summand gesetzt werden, welche Aufgabe offenbar keinen Sinn hat. Wir werden daher den ursprünglich für ganze Zahlen aufgestellten Begriff des Multiplicierens im nachfolgenden so erweitern, daß er auch für die Brüche anwendbar wird.

Statt des Ausdruckes „den 4ten Theil einer Zahl nehmen“ pflegt man auch kürzer zu sagen: „$^1/_4$ der Zahl nehmen“, oder „die Zahl mit $^1/_4$ multiplicieren“.

Ebenso gebraucht man für die Aufgabe: „den 4ten Theil einer Zahl 3mal nehmen“, die kürzere Ausdruckweise: „$^3/_4$ der Zahl nehmen“ oder „die Zahl $^3/_4$mal nehmen“, oder „die Zahl mit $^3/_4$ multiplicieren“.

Eine Zahl mit einem Bruche multiplicieren bedeutet demnach, sie fortschreitend durch den Nenner dividieren und mit dem Zähler multiplicieren, oder zuerst mit dem Zähler multiplicieren und dann durch den Nenner dividieren.

Auf diese Erweiterung des Multiplicationsbegriffes wird man auch durch die Aufgaben des praktischen Lebens geführt. Um allgemein aus dem Betrage der Einheit den Betrag einer gleichartigen Mehrheit zu finden, wird der Betrag der Einheit mit der Zahl, welche die Mehrheit ausdrückt, multipliciert. Kostet z. B. 1 *m* 5 fl., so kosten $^3/_4 m$ 5 fl. $\times$ $^3/_4$. Was dieses Product bedeutet, wird aus der wirklichen Lösung der Aufgabe ersichtlich; man hat nämlich:

1 *m* kostet 5 fl.;

$^1/_4 m$ kostet den 4ten Theil von 5 fl., also $^5/_4$ fl.;

$^3/_4 m$ kosten 3mal so viel als $^1/_4 m$, also $^5/_4$ fl. $\times$ 3;

folglich ist 5 fl. $\times$ $^3/_4 = {}^5/_4$ fl. $\times$ 3.

Ist ein Bruch mit einem Bruche, z. B. $\frac{3}{5}$ mit $\frac{7}{8}$ zu multiplicieren, so erhält man nach der obigen Erklärung

$$\tfrac{3}{5} : 8 = \frac{3}{5 \times 8}; \quad \frac{3}{5 \times 8} \times 7 = \frac{3 \times 7}{5 \times 8}; \text{ folglich}$$

$$\tfrac{3}{5} \times \tfrac{7}{8} = \frac{3 \times 7}{5 \times 8}.$$

Das Product zweier Brüche ist also ein Bruch, dessen Zähler das Product der Zähler und dessen Nenner das Product der Nenner der gegebenen Brüche ist.

Aufgaben.

1. a) $12 \times {}^1/_6$. b) $10 \times {}^2/_5$. c) $13 \times {}^3/_8$.
   $25 \times {}^4/_5$. $27 \times {}^7/_9$. $15 \times {}^9/_{11}$.
2. a) $613 \times {}^5/_8$. b) $938 \times {}^3/_8$.
   $306^1/_2 \ldots {}^1/_2$. c) $159 \times {}^7/_{12}$.
   $76^5/_8 \ldots {}^1/_8 = {}^1/_4$ von $^1/_2$. d) $207 \times {}^{11}/_{20}$.
   $383^1/_8$.
3. a) $^3/_8 \times {}^5/_7$. b) $^7/_{19} \times {}^5/_{12}$. c) $^9/_{10} \times \frac{3}{5}$.
4. $\frac{8}{15} \times \frac{7}{12} = \frac{56}{180} = \frac{14}{45}$; oder $\frac{8}{15} \times \frac{\overset{2}{\cancel{7}}}{\underset{3}{\cancel{12}}} = \frac{14}{45}$.

Wenn der Zähler des einen und der Nenner des andern Bruches ein gemeinsames Maß haben, so kürzt man sie noch vor der Multiplication ab.

5. a) $\frac{3}{8} \times \frac{18}{25}$. b) $\frac{15}{34} \times \frac{4}{9}$. c) $\frac{35}{48} \times \frac{20}{21}$.
6. $3^1/_2 \times 6^2/_3 = {}^7/_2 \times {}^{20}/_3 = {}^{70}/_3 = 23^1/_3$.
7. a) $7 \times 6^4/_5$. b) $15 \times 9^3/_8$. c) $18 \times 7^7/_9$.
8. a) $4^3/_4 \times {}^4/_5$. b) $8^3/_5 \times {}^8/_9$. c) $25^1/_2 \times {}^7/_{10}$.
9. a) $7^2/_5 \times 3^1/_4$. b) $12^2/_3 \times 9^5/_8$. c) $21^3/_4 \times 12^5/_9$.
10. Multipliciere 209 mit $8^3/_4$.

Wegen $8^3/_4 = 8 + {}^1/_2 + {}^1/_4$ oder $8^3/_4 = 9 - {}^1/_4$ hat man

$209 \times 8^3/_4$ oder $209 \times 8^3/_4$
$1672 \ldots 8$ $1881 \ldots 9$
$104^1/_2 \ldots {}^1/_2$ ab $52^1/_4 \ldots {}^1/_4$
$52^1/_4 \ldots {}^1/_4$ $1828^3/_4$
$1828^3/_4$

11. a) $905 \times 9^7/_8$. b) $315 \times 24^3/_8$. c) $1234 \times 17^{11}/_{12}$.

12. a) $357^5/_6 \times 57^{13}/_{15}$. b) $835\frac{37}{50} \times 198\frac{25}{72}$.

13. a) $3\frac{1}{2} \times \frac{7}{10} \times 2\frac{4}{5}$. b) $2\frac{11}{20} \times \frac{12}{25} \times \frac{10}{27} \times \frac{15}{16}$.

14. Um wie viel ist das Product der Brüche $^1/_2$, $^2/_3$, $^3/_4$ und $^4/_5$ kleiner als ihre Summe?

15. Wie viel kosten $^4/_5$ *kg*, wenn 1 *kg* $1^9/_{20}$ fl. kostet?

16. Der Umfang eines Kreises ist $3\frac{1}{7}$ mal, genauer $\frac{355}{113}$ mal so groß als der Durchmesser; a) wie groß ist für jede dieser Angaben der Umfang eines Kreises, dessen Durchmesser 4 *m* 7 *dm* beträgt; b) wie groß ist der Unterschied beider Resultate?

17. Drei Personen sollen eine Summe von $385^1/_5$ fl. so theilen, dass A $^3/_{10}$ davon, B $^1/_4$ und C den Rest bekommt; wie viel erhält jede Person?

18. B hat $2^1/_2$ mal so viel Geld als A, C $1^1/_7$ mal so viel als B, D aber nur $^3/_8$ mal so viel als C; wenn nun A $45^3/_5$ fl. hat, wie viel hat a) jeder der übrigen, b) wie viel haben alle zusammen?

§. 48.

Division durch einen Bruch.

Werden in einer als Bruch dargestellten Zahl Zähler und Nenner vertauscht, so heißt die neue Zahl der umgekehrte oder reciproke Wert der gegebenen. So ist

$^5/_4$ der reciproke Wert von $^4/_5$,

5 „ „ „ „ $^1/_5$.

Gib die reciproken Werte folgender Zahlen an:

$^2/_3$, $^5/_2$, $^1/_4$, 6 $2^1/_2$, $3^5/_8$.

Jede Zahl gibt mit ihrem reciproken Werte multipliciert 1 zum Producte; z. B.

$$^4/_5 \cdot {}^5/_4 = 1, \qquad {}^1/_5 \cdot 5 = 1.$$

Es sei nun 7 durch $^1/_5$ zu dividieren. Der Quotient ist diejenige Zahl, welche mit dem Divisor $^1/_5$ multipliciert den Dividend 7 gibt, d. i. von welcher der 5te Theil 7 ist. Die Zahl nun, deren 5ter Theil 7 ist, ist das 5fache von 7; somit

$$7 : {}^1/_5 = 7 \times 5.$$

Entwickle durch ähnliche Schlüsse, dass

$$7 : {}^1/_2 = 7 : 2, \qquad 7 : {}^1/_3 = 7 \times 3 \text{ ist.}$$

Um also eine Zahl durch $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_5$ zu dividieren, multipliciert man sie mit dem reciproken Werte 2, 3, 5.

Es sei ferner 7 durch $^4/_5$ zu dividieren. Hier soll die Zahl gefunden werden, welche mit $^4/_5$ multipliciert, d. i. von welcher der 5te Theil 4mal genommen, 7 gibt. Die Zahl, welche 4mal genommen 7 gibt, ist der 4te Theil von 7; die Zahl aber, von welcher schon der 5te Theil 4mal genommen 7 gibt, ist 5mal so groß, also 5mal der 4te Theil von 7, d. i. $7 \times {}^5/_4$; somit ist

$$7 : {}^4/_5 = 7 \times {}^5/_4.$$

Begründe auf gleiche Weise die Richtigkeit folgender Quotienten:

$$7 : {}^2/_3 = 7 \times {}^3/_2, \qquad 7 : {}^3/_4 = 7 \times {}^4/_3.$$

Hieraus ergibt sich der Satz:

Eine Zahl wird durch einen Bruch dividiert, indem man sie mit dem reciproken Werte desselben multipliciert.

Auf diesen Satz wird man auch durch die Lösung angewandter Aufgaben geleitet. Z. B. $^4/_5$ *hl* kosten 7 fl.; wie viel kostet 1 *hl*? Wenn 4 *hl* 7 fl. kosteten, so würde 1 *hl* den 4ten Theil von 7 fl. kosten, man müsste also 7 fl. durch 4 dividieren; kosten nun $^4/_5$ *hl* 7 fl., so wird man, um den Preis für 1 *hl* zu erhalten, 7 fl. durch $^4/_5$ dividieren, 1 *hl* kostet demnach 7 fl. : $^4/_5$. Was die Division bedeutet, ergibt sich sogleich, wenn man die Aufgabe durch gewöhnliche Schlüsse auflöst.

Kosten $^4/_5$ *hl* 7 fl., so kostet

$^1/_5$ *hl* den 4ten Theil von 7 fl.;

1 *hl* kostet dann 5mal so viel, somit 5mal den 4ten Theil von 7 fl.

Man muss also 7 fl. fortschreitend durch 4 dividieren und mit 5 multiplicieren, d. i.

$$7 \text{ fl.} : {}^4/_5 = 7 \text{ fl.} \times {}^5/_4.$$

Häufig treten die Multiplication und die Division der Brüche mit einander in Verbindung auf.

Es sei z. B. $^7/_{10} \times {}^3/_8$ durch $^{11}/_{15}$ zu dividieren. Man hat

$$\frac{{}^7/_{10} \times {}^3/_8}{{}^{11}/_{15}} = \frac{7 \times 3 \times \overset{3}{\cancel{15}}}{\underset{2}{\cancel{10}} \times 8 \times 11} = {}^{63}/_{176}.$$

Der Quotient wird nicht geändert, wenn man den Dividend und den Divisor mit derselben Zahl multipliciert oder durch dieselbe Zahl dividiert. Multipliciert man hier Dividend und Divisor mit 10, so fällt 10 als Nenner im Dividend weg, kommt dagegen als Factor in den Divisor. Ebenso wird durch die Multiplication mit 8 der Nenner 8 des Dividends als Factor in den Divisor, und durch die Multiplication mit 11 der Nenner 11 des Divisors als Factor in den Dividend gebracht. Der dadurch entstandene Bruch wird sodann durch 5 (wodurch 10 und 15 theilbar sind) abgekürzt.

Wenn gemischte Zahlen vorkommen, so werden sie zu unechten Brüchen eingerichtet. Z. B.

$$\frac{2^1/_2 \times 3^3/_5}{1^3/_4} = \frac{^5/_2 \times {}^{18}/_5}{^7/_4} = \frac{\cancel{5} \times 18 \times \overset{2}{\cancel{4}}}{\cancel{2} \times \cancel{5} \times 7} = {}^{36}/_7 = 5^1/_7.$$

Aufgaben.

1. a) $12 : {}^1/_3$. b) $42 : {}^7/_{10}$. c) $504 : {}^5/_8$.
   $15 : {}^3/_4$. $36 : {}^4/_5$. $5 : 3^2/_3$.
2. a) ${}^1/_2 : {}^3/_8$. b) ${}^5/_6 : {}^1/_9$. c) ${}^7/_{12} : {}^9/_{16}$.
3. a) ${}^3/_{10} : 3^2/_5$. b) ${}^{11}/_{12} : 2^3/_4$. c) $5^1/_4 : {}^7/_{10}$.
4. a) ${}^7/_{10} : {}^3/_8$. b) $3^4/_5 : {}^5/_6$. c) $9^1/_2 : {}^8/_{15}$.
5. a) $17\frac{16}{21} : \frac{11}{12}$. b) $18\frac{7}{15} : 3\frac{3}{10}$. c) $7\frac{3}{8} : 3\frac{11}{20}$.
6. a) $92^1/_3 : 2^6/_7$. b) $702 : 12^2/_3$. c) $25^7/_9 : 15^1/_{18}$.
7. a) $258\frac{23}{50} : \frac{127}{130}$. b) $728\frac{325}{628} : 57\frac{137}{250}$.
8. a) ${}^5/_8 \times {}^3/_4 : {}^{10}/_{13}$. b) $3^1/_2 \times 9 : 5^3/_4$.
9. a) $\dfrac{2^7/_{10} \cdot 35^1/_2 \cdot {}^2/_3}{37^1/_5 \cdot {}^3/_4}$. b) $\dfrac{5^1/_2 \cdot {}^3/_4 \cdot 3^5/_6 \cdot 6^1/_4}{2^3/_4 \cdot 4^1/_5 \cdot 34}$.
10. Von welcher Zahl betragen $\frac{27}{32}$ um $72\frac{5}{8}$ mehr als $\frac{13}{16}$ von $588\frac{17}{85}$?
11. Welches ist die Zahl, von welcher $\frac{23}{40}$ um $15\frac{3}{25}$ weniger betragen als $\frac{31}{48}$ von $2358\frac{17}{30}$?
12. Wie theuer kommt 1 *m* zu stehen, wenn $^3/_4$ *m* 36 kr. kosten?
13. Ein Kaufmann gewann beim Verkaufe einer Ware $25^3/_4$ fl., und zwar an jedem *kg* $^1/_{10}$ fl.; wie viel *kg* hat er verkauft?
14. Ein Bote legt in einer Stunde $4^3/_8$ *km* zurück; in welcher Zeit legt er 210 *km* zurück?
15. Ein Acker, welcher $2^1/_4$ *ha* enthält, wird um 2520 fl. verkauft; wie hoch kommt 1 *ha* zu stehen?
16. Jemand kauft um $28^4/_5$ fl. Zucker und Kaffee, und zwar von jedem um die Hälfte des Betrages; wenn nun 1 *kg* Zucker $^9/_{25}$ fl. und 1 *kg* Kaffee $1^3/_5$ fl. kostet, wie viel bekommt er Zucker und wie viel Kaffee?
17. Was ist vortheilhafter, $8^1/_2$ *kg* einer Ware für $13^{13}/_{50}$ fl., oder $10^3/_4$ *kg* derselben Ware für $17^1/_5$ fl. einzukaufen?
18. In ein Fass, welches 56 *l* fasst, fließt durch zwei Röhren Wasser; die erste allein füllt das Fass in 16 Minuten, die andere in 12 Minuten; a) wie viel Wasser liefert jede Röhre in 1 Minute, b) in wie viel Minuten wird das Fass voll sein, wenn sich beide Röhren zugleich in dasselbe ergießen?

Verwandlung der gemeinen Brüche in Decimalbrüche und umgekehrt.

§. 49.

Die Decimalzahlen als Brüche.

Die Decimalzahlen lassen eine zweifache Auffassungsweise zu. Man kann dieselben als eine Erweiterung des dekadischen Zahlensystems über die Einer hinaus darstellen und dann mit ihnen nach den Gesetzen der dekadischen Zahlen rechnen, wie dies hier im I. Abschnitte geschehen ist. Man kann aber die Decimalzahlen auch als Brüche, deren Nenner eine höhere Rangzahl 10, 100, 1000... ist, betrachten, und in diesem Falle mit Anschreibung des Nenners auch in der Form von gemeinen Brüchen darstellen. So ist

$0 \cdot 1 = \frac{1}{10}$, $\quad 0 \cdot 01 = \frac{1}{100}$, $\quad 0 \cdot 001 = \frac{1}{1000}$,

$0 \cdot 7 = \frac{7}{10}$, $\quad 0 \cdot 53 = \frac{53}{100}$, $\quad 0 \cdot 029 = \frac{29}{1000}$,

$2 \cdot 3 = \frac{23}{10}$, $\quad 5 \cdot 41 = \frac{541}{100}$, $\quad 0 \cdot 627 = \frac{627}{1000}$; u. s. w.

Werden die Decimalzahlen in der Form von Brüchen dargestellt, so können auf sie auch die für das Rechnen mit gemeinen Brüchen entwickelten Gesetze angewendet werden. Z. B.

$$0 \cdot 534 \times 2 \cdot 67 = \frac{534}{1000} \times \frac{267}{100} = \frac{142578}{100000} = 1 \cdot 42578.$$

§. 50.

Verwandlung eines gemeinen Bruches in einen Decimalbruch.

Um einen gemeinen Bruch in einen Decimalbruch zu verwandeln, darf man nur den Zähler durch den Nenner dividieren. Z. B. $\frac{7}{8} = 7_0 : 8 = 0 \cdot 875$, $\qquad \frac{113}{25} = 113 : 25 = 4 \cdot 52$.

60	130
40	50
0	0.

Schließt die Division ohne Rest ab, so heißt der erhaltene Decimalbruch ein endlicher oder geschlossener. Dieser Fall tritt nur ein, wenn der Nenner des gemeinen Bruches 2 oder 5, oder ein Product ist, das keinen von 2 und 5 verschiedenen Factor enthält. In jedem andern Falle geht die Division nicht ohne Rest auf und heißt dann der Decimalbruch ein unendlicher. Z. B.

$\frac{8}{11} = 8_0 : 11 = 0 \cdot 7272..$, $\qquad \frac{97}{15} = 97 : 15 = 6 \cdot 466..$

30	70
80	100
30	100
8	10.

Wenn die Division nicht ohne Rest aufgeht, so muss bei fortgesetzter Rechnung einer der schon einmal übrig gebliebenen Reste nothwendig wieder erscheinen und es werden daher auch im Quotienten Ziffern, die schon einmal dagewesen sind, in derselben Reihenfolge wiederkehren. Ein Decimalbruch, in welchem eine Ziffer oder eine Reihe von Ziffern immer wiederkehrt, heißt ein periodischer, und die Reihe der Ziffern, welche sich wiederholen, die Periode.

Jeder unendliche Decimalbruch, der aus einem gemeinen Bruche entsteht, ist ein periodischer.

Man pflegt die Periode nur einmal anzuschreiben, jedoch die erste und die letzte Ziffer derselben mit darüber gesetzten Punkten zu bezeichnen. Es ist demnach:

$$\tfrac{8}{11} = 0\cdot\dot{7}\dot{2}; \qquad \tfrac{97}{15} = 6\cdot4\dot{6}.$$

Je nachdem die Periode mit der ersten Decimalstelle oder erst mit einer späteren Stelle anfängt, heißt der periodische Decimalbruch reinperiodisch oder gemischtperiodisch.

Ein reinperiodischer Decimalbruch entsteht aus einem gemeinen Bruch, dessen Nenner weder 2 noch 5 als Factor enthält; ein gemischtperiodischer aus einem gemeinen Bruche, dessen Nenner 2 oder 5 und auch andere Primfactoren enthält.

Aufgaben.

Verwandle folgende gemeine Brüche in Decimalbrüche:

1. $\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{7}{4}, \frac{19}{25}, \frac{25}{8}, \frac{101}{125}, \frac{29}{16}, \frac{73}{625}, \frac{37}{64}$.
2. $\frac{2}{3}, \frac{5}{9}, \frac{7}{11}, \frac{40}{33}, \frac{20}{27}, \frac{31}{37}, \frac{602}{111}, \frac{5}{7}, \frac{11}{13}$.
3. $\frac{5}{6}, \frac{14}{15}, \frac{25}{12}, \frac{217}{330}, \frac{49}{54}, \frac{25}{36}, \frac{216}{275}, \frac{51}{88}, \frac{197}{296}$.

§. 51.

Verwandlung eines Decimalbruches in einen gemeinen Bruch.

1. Um einen endlichen Decimalbruch in einen gemeinen Bruch zu verwandeln, stellt man ihn mit Anschreibung seines Nenners dar. Z. B.

$$0\cdot75 = \tfrac{75}{100} = \tfrac{3}{4}; \qquad 0\cdot048 = \tfrac{48}{1000} = \tfrac{6}{125}.$$

2. Es sei der reinperiodische Decimalbruch $0\cdot\dot{3}\dot{7}$ in einen gemeinen Bruch zu verwandeln. Die Periode hat zwei Ziffern. Multipliciert man daher den ohne Ende fortlaufenden Decimalbruch $0\cdot373737\ldots$ mit 100 und subtrahiert davon den gegebenen Bruch, so fallen in der Differenz die Decimalen weg; man hat

$$\left.\begin{array}{r} \text{100facher Bruch} = 37\cdot3737\ldots \\ \text{1facher Bruch} = 0\cdot3737\ldots \end{array}\right\} \text{subtrahiert}$$
$$\text{99facher Bruch} = 37,$$

daher der Bruch selbst $= \frac{37}{99}$; somit

$$0\cdot\dot{3}\dot{7} = \frac{37}{99}.$$

Nach demselben Vorgange erhält man:

$$0\cdot\dot{6} = \frac{6}{9}; \qquad 0\cdot\dot{2}\dot{3} = \frac{23}{99}; \qquad 0\cdot\dot{4}0\dot{1} = \frac{401}{999}.$$

Welches Gesetz herrscht in den erhaltenen gemeinen Brüchen?

3. Ist ein gemischtperiodischer Decimalbruch in einen gemeinen Bruch zu verwandeln, so multipliciert man ihn, je nachdem der Periode 1, 2, 3, .. Decimalstellen vorangehen, mit 10, 100, 1000..., wodurch man einen reinperiodischen Decimalbruch erhält; man darf dann nur diesen in einen gemeinen Bruch verwandeln und den letzteren noch bezüglich durch 10, 100, 1000, .. dividieren. Z. B.

$$0\cdot5\dot{2} = 5\cdot\dot{2} : 10 = 5\tfrac{2}{9} : 10 = \frac{47}{90}.$$

$$0\cdot06\dot{7} = 6\cdot\dot{7} : 100 = 6\tfrac{7}{9} : 100 = \frac{61}{900}.$$

$$0\cdot81\dot{2}\dot{6} = 81\cdot\dot{2}\dot{6} : 100 = 81\tfrac{26}{99} : 100 = \frac{8045}{9900}.$$

Aufgaben.

Verwandle folgende Decimalbrüche in gemeine Brüche.

1. $0\cdot4$, $0\cdot63$, $6\cdot48$, $0\cdot15$, $0\cdot025$, $0\cdot064$, $3\cdot1225$.

2. $0\cdot\dot{5}$, $0\cdot\dot{3}$, $0\cdot\dot{7}\dot{2}$, $3\cdot\dot{4}\dot{2}$, $0\cdot\dot{0}\dot{6}$, $8\cdot\dot{9}\dot{8}$, $0\cdot\dot{5}0\dot{4}$.

3. $0\cdot\dot{4}2\dot{8}$, $2\cdot\dot{9}3\dot{6}$, $0\cdot\dot{4}2\dot{3}$, $0\cdot\dot{8}43\dot{9}$, $7\cdot\dot{5}23\dot{0}$.

4. $0\cdot5\dot{8}$, $0\cdot8\dot{3}$, $2\cdot4\dot{8}$, $0\cdot08\dot{3}$, $0\cdot42\dot{6}$, $9\cdot82\dot{6}$.

5. $0\cdot1\dot{9}\dot{6}$, $0\cdot3\dot{0}\dot{6}$, $0\cdot57\dot{2}\dot{7}$, $5\cdot52\dot{2}\dot{6}$, $0\cdot15\dot{2}9\dot{6}$.

IV. Rechnen mit mehrnamigen Zahlen.

Resolvieren.

§. 52.

Einheiten einer höheren Benennung in Einheiten einer niedrigeren Benennung derselben Art verwandeln, heißt sie resolvieren.

Die Zahl, welche angibt, wie viele Einheiten einer niedrigeren Benennung eine Einheit der höheren Benennung enthält, heißt die Verwandlungszahl zwischen diesen beiden Benennungen.

Das Resolvieren einer benannten Zahl in eine niedrigere Benennung geschieht durch die Multiplication mit der entsprechenden Verwandlungszahl. Z. B.

Wie viel Minuten sind 21 Stunden?

1 Stunde hat 60 Minuten; die gesuchte Zahl der Minuten ist also 60mal so groß als die gegebene Zahl der Stunden; mithin

$$\frac{21 \times 60}{1260 \text{ Minuten.}}$$

Bei benannten Zahlen, deren Benennungen dem Decimalsysteme angehören, d. i. deren Verwandlungszahlen 10, 100, 1000 sind, kann das Resultat des Resolvierens unmittelbar angegeben werden; z. B.

$8\,m\ 7\,dm = 87\,dm$; $\qquad 12\,h\ 8\,l = 1208\,l.$

Aufgaben.

1. Wie viel Secunden sind 5 Grad 14 Minuten 53 Secunden?

5^0 sind $5 \times 60 = 300'$ und $14'$ dazu sind $314'$; $314'$ sind $314 \times 60 = 18840''$ und $53''$ dazu sind $18893''$.

$$\begin{array}{r} 5^0\ 14'\ 53'' \\ \hline 314' \\ \hline 18893''. \end{array}$$

2. Wie viel Tage sind
 a) 7 Mon. 24 Tage? d) 3 Jahre 8 Mon. 15 Tage?
3. Wie viele Secunden betragen
 a) 51 Min. 13 Sec.? b) 18 Stund. 35 Min. 40 Sec.?
4. Wie viel Secunden hat ein gemeines Jahr?
5. Wie viel Kreuzer sind
 a) 39 fl. 28 kr.? b) 250 fl. 90 kr.? c) 310 fl. 45 kr.?
 d) 4 fl. 13 kr.? e) 45 fl. 9 kr.? f) 206 fl. 5 kr.?
6. Wie viel Kreuzer sind a) 0·37 fl.? b) 0·085 fl.? c) 13·59 fl.?
7. Wie viel cm sind a) $8\,m$? b) $5\,dm\ 8\,cm$? c) $6·35\,m$?
8. Wie viel cm^2 sind a) $8\,dm^2$? b) $7\,m^2\ 15\,dm^2$? c) $0·7586\,m^2$?
9. Wie viel l sind a) $37\,hl$? b) $2\,hl\ 55\,l$? c) $0·385\,hl$?
10. Wie viel g sind a) $35\,kg$? b) $4\,kg\ 8\,dkg$? c) $138\,kg$?
11. Wie viel Bogen Papier enthalten
 a) 5 Buch 15 Bogen? b) 4 Ries 7 Buch 12 Bogen?
12. Wie viel Grad, Minuten und Secunden sind 43·275 Grad?

$$\begin{array}{l} 43·2\ 75^0 = 43^0\ 16'\ 30''. \\ \quad\ \ 1\ 6·50' \\ \quad\ \ 3\ 0·0'' \end{array}$$

13. Wie viele Monate und Tage sind $^{13}/_{60}$ Jahre?

$^{13}/_{60} \times 12 = {}^{13}/_{5} = 2^3/_5$ Mon. $\qquad ^{13}/_{60}$ Jahre = 2 Mon. 18 Tage.
$^3/_5 \times 30 = 18$ Tage.

14. Wie viel Monate sind $^1/_2$, $^2/_3$, $^3/_4$, $^5/_6$, $^7/_{15}$, $^8/_{25}$ Jahre?
15. Das Sonnenjahr hat 365·24222 Tage; um wie viel Stunden, Minuten und Secunden ist es größer als das bürgerliche Jahr von 365 Tagen?

16. Wie viel Kreuzer sind $^3/_4$, $^4/_5$, $^8/_{10}$, $^{11}/_{25}$, $^{37}/_{50}$ fl.?

17. Wie viel Gulden und Kreuzer sind
a) 3·92 fl.? b) 155·07 fl.? c) 207·535 fl.? d) $87\frac{16}{25}$ fl.?

18. Wie viel *m*, *dm*, *cm* und *mm* sind
a) 5·397 *m*? b) 318·091 *m*? c) 0·9075 *m*? d) $4\frac{77}{200}$ *m*?

19. Wie viel *ha*, *a* und m^2 sind
a) 129·235 *ha*? b) 6·2325 *ha*? c) 49·7801 *ha*? d) $^{11}/_{40}$ *ha*?

20. Wie viel *kg*, *dkg* und *g* sind
a) 7·345 *kg*? b) 0·075 *kg*? c) 25·803 *kg*? d) $7\frac{91}{125}$ *kg*?

Das Reducieren.

§. 53.

Einheiten einer niedrigeren Benennung in Einheiten einer höheren Benennung derselben Art verwandeln, heißt sie **reducieren**.

Das Reducieren einer benannten Zahl auf eine höhere Benennung geschieht mittelst der **Division** durch die bezügliche Verwandlungszahl. Z. B.

1. Wie viel Tage sind 816 Stunden? — 1 Tag hat 24 Stunden; die gesuchte Zahl der Tage ist also der 24ste Theil der gegebenen Zahl der Stunden; folglich

816 : 24 = 34 Tage.

Bei benannten Zahlen, welche nach dem Decimalsystem gebildet sind, kann das Ergebnis der Reduction unmittelbar angegeben werden.

Aufgaben.

1. Wie viele Tage, Stunden und Minuten sind 31024 Minuten?

31024 (Min.) : 60
4 Min. 517 (Stund.) : 24
37 21 Tage
13 Stunden

also: 31024 Minuten = 21 Tage 13 Stund. 4 Min.

Reduciere auf Ganze der höheren Benennungen:

2. a) 148134 Zeitsecunden, b) 28481 Bogensecunden.

3. a) 356 kr. b) 3809 kr. c) 79085 kr.

4. a) 2735 *cm*. b) 19628 *mm*. c) 544063 *mm*.

5. a) 5563 dm^2. b) 31446 *a*. c) 850582 m^2.

6. a) 7048 *g*. b) 94722 *dg*. c) 92258 *mg*.

7. Die Zeit von einem Vollmonde zum andern beträgt 2551442 Secunden; wie viel sind dies Tage, Stunden, Minuten und Secunden?

8. Ein Buch von 14 Druckbogen erschien in einer Auflage von 4500 Exemplaren; wie viel Ries wurden dazu erfordert?

9. Reduciere $83^0\ 56'\ 24''$ auf Grade.

$24 : 60 = 0\cdot4'$ also $83^0\ 56'\ 24'' = 83\cdot94^0$

$56\cdot4 : 60 = 0\cdot94^0$;

Man könnte die Reduction auch in gemeinen Brüchen ausführen:

$24 : 60 = {}^{24}/_{64} = {}^{2}/_{5}{}'$ also $83^0\ 56'\ 24'' = 83^{47}/_{50}$.

$56^2/_5 : 60 = {}^{282}/_{300} = {}^{47}/_{50}$.

Verwandle a) in einen Decimalbruch, b) in einen gemeinen Bruch der nächst höheren Benennung:

10. a) 16 kr., b) $8^1/_2$ kr., c) 1365 kr.

11. a) 4 *dm*, b) $37^1/_4$ *dm*, c) 564 *cm*.

12. a) 13·5 *a*, b) $602^1/_2$ *l*, c) 28·4 *dkg*.

Reduciere auf einen Decimalbruch der höheren Benennung:

13. a) 12 fl. 24 kr. b) 75 fl. $8^1/_2$ kr.

14. a) 5 *m* 3 *dm* 8 *cm* 1 *mm*. b) 1 m^2 83 dm^2 5 cm^2 23 mm^2.

15. a) 3 m^3 618 dm^3 708 cm^3. b) 35 *hl* 87 *l* 7 *dl*.

16. a) 29 *kg* 4 *dkg* 5 *g*. b) 3 *g* 4 *dg* 9 *mg*.

17. a) $53^0\ 15'\ 6''$. b) 12 Tage 18 St. 45 Min.

Addition mehrnamiger Zahlen.

§. 54.

Beim Addieren mehrnamiger Zahlen beginnt man bei den Zahlen der niedrigsten Benennung und reduciert die Summe jeder Benennung, wenn sie Ganze der nächst höheren Benennung enthält, auf diese höhere Benennung. Man kann auch alle Summanden auf dieselbe höchste oder niedrigste Benennung bringen und dann die Addition verrichten.

Aufgaben.

1.
308 fl. 45 kr.		oder	308·45 fl.
92 „ 88 „			92·88 „
157 „ 64 „			157·64 „
250 „ 75 „			250·75 „
809 fl. 72 kr.			809·72 fl.

Addiere folgende mehrnamige Zahlen:

2. a)
23 *m*	7 *dm*	8 *cm*	5 *mm*.
47 „	3 „	4 „	8 „
16 „	9 „	6 „	7 „

b)
247 *ha*	38 *a*	15 m^2.
109 „	74 „	8 „
328 „	9 „	76 „

3. a)
123 *hl*	83 *l*
86 „	72 „
174 „	60 „

b)
58 *kg*	75 *dkg*	8 *g*
32 „	19 „	6 „
19 „	6 „	5 „

4. a) 57 Tage 19 St. 47 Min. b) $95^0\ 47'\ 51''$.
16 „ 22 „ 14 „ $51^0\ 18'\ 40''$.
38 „ 8 „ 55 „ $32^0\ 53'\ 29''$.

5. Ein Kaufmann hat nachstehende Summen zu fordern: 351 fl. 84 kr., 247 fl. 73 kr., 480 fl. 76 kr., 37 fl. 8 kr., 147 fl. 68 kr.; wie groß ist seine Gesammtforderung?

6. Von zwei Gärten misst der eine 148 m^2 24 dm^2, der andere ist um 137 m^2 18 dm^2 größer; wie groß sind beide zusammen?

7. Europa liegt zwischen $11^0\ 50'\ 20''$ westlicher und $60^0\ 30'$ östlicher Länge von Paris; wie viel Längengrade umfasst dieser Erdtheil?

8. Die geogr. Breite von Triest ist $45^0\ 38'\ 8''$, Wien liegt $2^0\ 34'\ 27''$ nördlicher als Triest, Prag liegt $1^0\ 52'\ 54''$ nördlicher als Wien; wie groß ist die geogr. Breite von Wien und von Prag?

9. In Paris tritt der Mittag 48 Minuten 19 Secunden später ein als in Prag; wie viel zeigt eine Uhr in Prag, wenn es in Paris 3 Uhr 55 Min. 40 Sec. ist?

10. Jemand wurde am 5. Jänner 1809 geboren und starb in einem Alter von 60 Jahren, 6 Monaten und 12 Tagen; an welchem Tage war dies?

Geburtszeit:	1808 Jahre	— Mon.	4 Tage	nach Chr. G.
Lebensdauer:	60 „	6 „	12 „	
Sterbezeit:	1868 Jahre	6 Mon.	16 Tage	nach Chr. G.

Er starb also am 17. Juli 1869.

11. Kaiser Franz Josef I. wurde am 18. August 1830 geboren und übernahm in einem Alter von 18 Jahren 3 Monaten 14 Tagen die Regierung; wann war dies?

12. Kaiser Josef II. wurde am 13. März 1741 geboren und starb in einem Alter von 48 Jahren 11 Monaten und 7 Tagen; wann starb er?

13. Schiller war am 10. November 1759 geboren und erreichte ein Alter von 45 Jahren 5 Monaten 29 Tagen; wann starb er?

14. Die Zeit von einem Vollmond bis zum andern (synodischer Monat) beträgt 29 Tage 12 Stunden 44 Minuten 3 Secunden; wenn nun am 18. Mai um 5 Uhr 27 Min. 28 Sec. abends Vollmond ist, wann tritt der nächste Vollmond ein?

Subtraction mehrnamiger Zahlen.

§. 55.

Auch das **Subtrahieren mehrnamiger Zahlen** wird bei der niedrigsten Benennung angefangen. Ist bei einer Benennung die

Zahl des Subtrahends größer als jene des Minuends, so wird letztere, damit man subtrahieren könne, um so viel Einheiten vermehrt, als ihrer eine nächst höhere Einheit enthält; sodann wird aber, damit die Differenz ungeändert bleibe, auch der Subtrahend in der nächst höheren Benennung um 1 vermehrt. Bei Benennungen mit decimaler Theilung ist es am einfachsten, Minuend und Subtrahend als Decimalbrüche der höchsten Benennung darzustellen.

Aufgaben.

1. Von $135^0\ 48'\ 37''$ soll subtrahiert werden
$62^0\ 25'\ 52''$; wie viel bleibt übrig?
$73^0\ 22'\ 45''$.

Subtrahiere:

2. a) 81 *m* 61 *cm* 5 *mm*
27 „ 67 „ 8 „
b) 650 m^2 47 dm^2 55 cm^2
278 „ 8 „ 64 „

3. a) 5 *ha* 28 *a*
97 „ 25 m^2
b) 53 *hl* 9 *l*
14 „ 72 „

4. a) 789 *g* 502 *mg*
291 „ 375 „
b) 662 fl. 37 kr.
284 „ 8 „

5. a) 15 Jahre 5 Mon.
6 „ 8 „
b) 23 Tage 12 St. 35 Min.
9 „ 20 „ 48 „

6. Von einem Acker, welcher 2 *ha* 54·7 *a* groß ist, wird eine Fläche von 1 *ha* 81·5 *a* mit Weizen, der Rest mit Korn besäet; wie viel beträgt die Kornfläche?

7. Die Eisenbahnstrecke von Wien bis Triest beträgt 577 *km* 340 *m*; wenn nun die Strecke von Wien bis Mürzzuschlag 118 *km* 289 *m*, von Mürzzuschlag nach Laibach 314 *km* 118 *m* beträgt, wie lang ist die Strecke von Laibach nach Triest?

8. Die Summe der drei Winkel eines Dreieckes ist gleich 180^0; wie groß ist der dritte Winkel, wenn die beiden anderen Winkel $57^0\ 25'\ 46''$ und $71^0\ 53'\ 50''$ betragen?

9. Innsbruck hat $9^0\ 3'\ 41''$, Wien $14^0\ 2'\ 36''$, Lemberg $21^0\ 42'\ 40''$ östlicher Länge von Paris; wie viel Längengrade liegt Lemberg östlicher als jede der zwei anderen Städte?

10. Eine Uhr geht um 13 Min. 8 Sec. zu früh; wenn nun dieselbe 7 Uhr 3 Min. zeigt, welches ist dann die richtige Zeit?

11. Wenn eine Uhr in Graz 4 Stunden 52 Min. 18 Sec. zeigt, weist eine Uhr in Paris 3 Stund. 59 M. 50 S.; wie viel Uhr ist es in Paris, wenn die Uhr in Graz 8 Stund. 23 Min. 48 Sec. zeigt?

12. Jemand wurde am 3. Juni 1802 geboren und starb am 25. September 1877; wie alt ist er geworden?

Sterbezeit:	1876 J.	8 M.	24 T.	nach Chr. G.	
Geburtszeit:	1801 „	5 „	2 „	„ „	„
Alter:	75 J.	3 M.	22 T.		

13. Die Kaiserin Maria Theresia wurde am 13. Mai 1717 geboren und starb am 29. November 1780; welches Alter erreichte sie?

14. Kaiser Franz I. starb am 2. März 1835 im Alter von 67 Jahren 18 Tagen; wann wurde er geboren?

15. Ein Capital war am 1. Juli 1885 fällig, wurde jedoch 3 Monate 24 Tage früher bezahlt; an welchem Tage geschah dies?

Multiplication mehrnamiger Zahlen.

§. 56.

Soll eine mehrnamige Zahl mit einer unbenannten multipliciert werden, so multipliciert man die Einheiten einer jeden Benennung von der niedrigsten angefangen und reduciert die bei den niedrigeren Benennungen erhaltenen Producte. Ist die Verwandlungszahl 10, 100 oder 1000, so gestaltet sich die Rechnung am einfachsten, wenn man die gegebene mehrnamige Zahl in einen Decimalbruch der höchsten Benennung verwandelt und dann die Multiplication verrichtet.

Aufgaben.

1. Multipliciere 14 Tage 12 Stunden mit 9.

14 T. 12 St. × 9
130 T. 12 St.

12 St. × 9 = 108 St. = 4 T. 12 St.
14 T. × 9 = 126 T.; 126 T. + 4 T. = 130 T.

2. 37 fl. 65 kr. × 31.

37·65 fl. × 31
1129·5
1167·15 fl. = 1167 fl. 15 kr.

3. a) 25 *m* 3 *dm* 38 *mm* × 25. b) 37 *km* 287 *m* × 9.

4. a) 7 *ha* 5·2 *a* × 146. b) 15 *hl* 56 *l* × 39.

5. a) 8 *kg* 47 *dkg* × 64. b) 317 fl. 84 kr. × 542.

6. Wenn 1 Ducaten 5 fl. 79 kr. gilt, wie viel betragen 25 Ducaten?

7. Ein *hl* Gerste wiegt 64 *kg* 15 *dkg*; wie viel wiegen 43 *hl*?

8. Wie lang ist eine Schnur, die sich um eine Welle, deren Umfang 3 *dm* 5 *cm* 8 *mm* ist, 158mal herumwinden läßt?

9. Ein Mondmonat beträgt 29 Tage 12 Stunden 44 Minuten 3 Secunden; wie viel betragen 12 Mondmonate?

10. Ein Kaufmann kauft 128 *m* 28 *cm* à 8 fl. 54 kr. das *m*, und 106 *m* 52 *cm* à 6 fl. 12 kr. das *m*; er verkauft die ganze Ware zu 7 fl. 92 kr. das *m*; wie viel hat er dabei gewonnen oder verloren?

11. Zwei Körper bewegen sich zu gleicher Zeit von dem nämlichen Orte aus, a) in gleicher, b) in entgegengesetzter Richtung. Wenn nun der erste in jeder Minute 38 *m* 2·5 *dm*, der zweite 32 *m* 1·8 *dm* zurücklegt, wie weit werden sie in jedem Falle nach 56 Minuten von einander entfernt sein?

12. So viele Längengrade ein Ort weiter gegen Osten liegt als ein anderer, so oftmal 4 Zeitminuten früher ist es daselbst Mittag, d. i. dem Längenunterschiede von 1^0 entspricht in der Uhrzeit eine Differenz von 4 Zeitminuten. Bestimme aus den Angaben in §. 55, Aufgabe 9, wie viel Uhrzeit man in Paris, ~~Innsbruck~~, ~~Lemberg~~ hat, wenn es in Wien 11 Uhr 52 Minuten 15 Secunden vormittags ist?

13. Wenn man das Sonnenjahr, welches 365 Tage 5 Stunden 48 Minuten 48 Secunden beträgt, zu 365 Tagen rechnet und wegen des dabei Vernachlässigten jedes vierte Jahr als Schaltjahr mit 366 Tagen annimmt; wie groß wird der Fehler, den man bei dieser Rechnungsweise in 400 Jahren begeht?

6/4

Division mehrnamiger Zahlen.

§. 57.

a) Ist eine mehrnamige Zahl durch eine unbenannte zu dividieren (Aufgabe des Theilens), so dividiert man die Einheiten jeder Benennung von der höchsten angefangen, indem man dabei den jedesmaligen Rest in die niedrigere Benennung auflöst und die im Dividend vorhandenen Einheiten dieser Benennung dazu zählt. Man kann auch die mehrnamige Zahl zuerst in die niedrigste oder höchste Benennung verwandeln und dann dividieren. z. B.

Wie viel ist der 26ste Theil eines Bogens von $116^0\ 34'$?

$116^0\ 34' : 26$		oder	$116^0\ 34' : 26$	
12^0	$4^0\ 29'$		6994	$269'$
$754'$			179	$= 4^0\ 29'$
234			234	
0			0	

b) Ist eine mehrnamige Zahl durch eine andere benannte Zahl zu dividieren (Aufgabe des Messens), so müssen beide früher auf dieselbe Benennung gebracht werden.

Aufgaben.

1. a) 530 fl. 84 kr. : 23. b) 9225 fl. 30 kr. : 382.
2. a) 120 *km* 509 *m* : 37. b) 289 *kg* 674 *g* : 57.
3. a) 128 fl. 76 kr. : $^3/_4$. b) 257 m^2 $25^1/_2$ dm^2 : $3^1/_3$.
4. 28 *hl* Wein werden mit 710 fl. 64 kr. bezahlt; wie viel kostet 1 *hl*?
5. Eine Locomotive legt in 1 Stunde 30 *km* 720 *m* zurück; wie viel in 1 Minute?
6. 31 fl. 50 kr. : 2 fl. 25 kr.
7. 1108 *kg* 14 *dkg* : 5 *kg* 6 *dkg*.
8. $107^0\ 32'\ 45''$: $2^0\ 1'\ 45''$.
9. Zu einer 5 *m* 6 *cm* hohen Treppe sollen die Stufen 2 *dm* 3 *cm* hoch werden; wie viele Stufen wird die Treppe erhalten?
10. Der Umfang eines Kreises hat 360^0; der wievielte Theil des Umfanges ist ein Bogen von $2^0\ 48'\ 45''$?
11. Für 19 fl. 75 kr. kauft man 1 *hl* Wein; wie viel *hl* erhält man a) für 256 fl. 75 kr., b) für 730 fl. 75 kr.?
12. Die Triebräder einer Locomotive haben 3 *m* 77 *cm* im Umfange; wie viel Umläufe müssen sie machen, um die Eisenbahnstrecke zwischen Wien und Linz, welche 188 *km* 890 *m* beträgt, zurückzulegen?
13. Für 98 *m* 72 *cm* werden 666 fl. 36 kr. bezahlt; wie hoch kommt 1 *m*?
14. Das *hl* Bier kostet 15 fl. 5 kr.; wie viel *l* erhält man für 53 fl. 94 kr.?
15. Ein Wirt kaufte 4 *hl* Wein à 30 fl. 40 kr., 2 *hl* à 24 fl. 28 kr. und 3 *hl* à 22 fl.; wie viel kostete im Durchschnitte 1 *hl*?
16. 8 Dutzend Tücher werden für 43 fl. 84 kr. eingekauft; man will an jedem Dutzend 88 kr. gewinnen; wie theuer muss man 1 Stück verkaufen?
17. Eine silberne Schüssel wiegt 7 *kg*, in jedem *kg* sind 750 *g* feines Silber; wenn nun für die Schüssel 516 fl. 60 kr. bezahlt werden, wie hoch rechnet man 1 *kg* feines Silber?
18. In Petersburg tritt der Mittag um 55 Minuten 45·6 Secunden früher ein als in Wien, das $14^0\ 2'\ 36''$ östliche Länge (von Paris) hat; welche östliche Länge hat Petersburg? (§. 56, Aufg. 12.)

V. Abgekürzte Multiplication und Division.

Abkürzen der Decimalzahlen.

Wenn eine Decimalzahl viele Decimalen enthält, so sind häufig einige niedrigere Decimalstellen mit Rücksicht auf die Beschaffenheit der Aufgabe für die Anwendung ganz wertlos. Man kürzt in solchen Fällen die Decimalzahl ab, d. h. man behält von ihr nur so viele Decimalen, als das Bedürfnis der Rechnung erfordert. Dass eine Decimalzahl abgekürzt ist, wird durch angehängte Punkte angezeigt, z. B. 5·36...

Wird beim Abkürzen einer Decimalzahl die Ziffer an der niedrigsten beibehaltenen Stelle ungeändert gelassen, wenn die folgende Ziffer kleiner als 5 ist, dagegen corrigiert, d. h. um 1 erhöht, wenn die folgende Ziffer 5 oder größer als 5 ist, so ist der Fehler, d. i. der Unterschied zwischen der gegebenen und der abgekürzten Decimalzahl, nicht größer als eine halbe Einheit der niedrigsten beibehaltenen Stelle. Man setzt z. B., wenn auf 3 Decimalstellen abgekürzt wird, 7·156.. statt 7·15635, und 4·803.. statt 4·80273.

Aufgaben.

1. Wie groß ist der Fehler, wenn man statt 0·236782 a) 0·2367, b) 0·2368 setzt? Welcher Fehler ist kleiner?
2. Kürze folgende Decimalzahlen:
   a) 0·6034, 3·49712, 2·88747, 12·317162;
   b) 5·0468, 2·17392, 9·25866, 0·0735
   auf 3 Decimalstellen ab und gib jedesmal auch den Fehler an.
3. Ebenso folgende Decimalzahlen:
   a) 6·3854, 39·7328, 5·3406, 0·6 0·63;
   b) 1·1977, 5·08276, 3·81549, 0·999995.
4. Bestimme folgende Brüche auf 5 Decimalstellen möglichst genau:
   $\frac{15}{28}$, $\frac{382}{207}$, $\frac{41}{129}$, $\frac{293}{563}$.
5. Kürze die Zahl 3·15784 *km* so weit ab, dass der Fehler a) kleiner als $^1/_2$ *m*, b) kleiner als $^1/_2$ *dm* wird.

§. 59.

Abgekürzte Multiplication

Will man das Product zweier Decimalzahlen nur bis zu einer bestimmten Decimalstelle entwickeln und dabei jede überflüssige Rechnung vermeiden, so bedient man sich der abgekürzten Multiplication.

Es sei z. B. das Product 328·47156 × 0·09 auf 3 Decimalstellen, d. i. so zu bestimmen, dass Tausendtel die niedrigste Stelle des Productes bilden.

$$\frac{328{\cdot}47156 \times 0{\cdot}09}{29{\cdot}562}$$

Mit h muss man z multiplicieren, um t zu erhalten; die Berechnung des Productes beginnt also bei 4z; die übrigen niedrigeren Stellen des Multiplicands werden weggelassen. Nur die nächste rechts folgende Ziffer 7 wird noch multipliciert, da die Zehner ihres Productes mit 9 schon Tausendtel geben; denn 7h × 9h = 63zt = 6t 3zt. Die Zehner 6 dieses Productes werden zu dem Producte 4z × 9h = 36t als Correctur dazu gezählt und dann die weiter folgenden höheren Stellen des Multiplicands multipliciert.

Man spricht: 63, 6 als Correctur; 36, 42, 4;
72, 76, 7; 18, 25, 2; 27, 29.

Multipliciere ebenso auf 3 Dec. mit Vermeidung jeder unnöthigen Rechnung 51·67834 a) mit 800, b) mit 5, c) mit 0·006.

Schreibe unter den Multiplicand 35·7915 die Ziffern des Multiplicators 24·678 in umgekehrter Reihenfolge so an, dass die Ziffer der Einer des Multiplicators unter die a) Zehntel, b) Hundertel, c) Tausendtel des Multiplicands zu stehen kommt, und bestimme dann den Stellenwert des Productes je zweier übereinander stehender Ziffern.

a)	b)	c)
35·7915	35·7915	35·7915
876 42	87 642	8 7642

Schreibt man den Multiplicator in umgekehrter Ordnung unter den Multiplicand, so hat das Product je zwei übereinander stehender Ziffern immer mit derjenigen Ziffer des Multiplicands, unter welcher die Einer des Multiplicators stehen, gleichen Stellenwert.

Es soll nun das Product 8·5432 × 7·916 bis auf die Tausendtel herab bestimmt werden.

a)

8·543	2 × 7·916
59 802	4
7 688	88
85	432
51	2592
67·627	9712

b)

8·5432
6 197
59 802
7 689
85
51
67·627

c)

8·5432
6 197
$59\ 802_4$
$7\ 688_9$
85_4
51_3
67·628

Da hier nur die drei ersten Decimalen des Productes verlangt werden, so ist in der vorstehenden vollständigen Multiplication a) die Rechnung rechts des Striches überflüssig; sie kann dadurch erspart werden, dass man mit jeder Ziffer des Multiplicators zunächst jene Ziffer des Multiplicands, welche im Producte Tausendtel hervorbringt, und dann nur die weiter folgenden höheren Ziffern desselben multipliciert. Man erhält nun im Producte Tausendtel, wenn man

mit 7E	des Multiplicators	3t	des Multiplicands,		
„ 9z	„ „	4h	„ „		
„ 1h	„ „	5z	„ „		
„ 6t	„ „	8E	„ „	multipliciert.	

Am einfachsten erscheint es, die Ziffern des Multiplicators in einer solchen Aufeinanderfolge unter den Multiplicand zu schreiben, dass das Product je zweier untereinander stehender Ziffern Tausendtel bedeutet. Zu diesem Zwecke braucht man nur die Einer 7 des Multiplicators unter die Tausendtel 3 des Multiplicands zu setzen und die übrigen Ziffern des Multiplicators in umgekehrter Reihenfolge zu schreiben, wie oben in der Rechnung b). Multipliciert man dann mit jeder Ziffer des Multiplicators die darüber stehende und die höheren Stellen des Multiplicands, so bedeuten die niedrigsten Stellen aller Theilproducte Tausendtel; man schreibt daher die Theilproducte so an, dass ihre niedrigsten Stellen gerade untereinander stehen. Wegen der größeren Genauigkeit multipliciert man mit jeder Ziffer des Multiplicators auch die um eine Stelle weiter rechts stehende Ziffer des Multiplicands, behält aber von diesem Producte nur die nächsten Zehner, welche Tausendtel bedeuten und zählt diese als C o r r e c t u r zu dem ersten anzuschreibenden Producte dazu.

In dem obigen Beispiele b) rechnet und spricht man:

14, 1 als Correctur; 21, 22, 2; 28, 30, 3; 35, 38, 3; 56, 59;
27, 3 als Correctur; 36, 39, 3; 45, 48, 4; 72, 76;
4, 0 als Correctur; 5; 8;
30, 3 als Correctur; 48, 51.

Die so erhaltenen Theilproducte werden addiert.

In der Rechnung b) sind zwar die einzelnen Theilproducte bis auf eine halbe Einheit der niedrigsten Stelle genau, allein durch ihre Addition kann sich der Fehler vergrößern und ist daher die niedrigste Stelle des Hauptproductes nicht verlässlich. Die Genauigkeit dieser Stelle kann nun dadurch erreicht werden, dass man in jedem Theilproducte nicht die niedrigste verlangte Stelle corrigiert, sondern, wie in der obigen Rechnung c), noch die ihr folgende niedrigere Ziffer möglichst genau entwickelt und die aus der Summe dieser Ziffern sich ergebende Correctur erst im Endproducte berücksichtiget.

Das hier für Decimalzahlen begründete abgekürzte Multiplicationsverfahren kann auch bei der Multiplication ganzer Zahlen, wenn man im Producte nur einige höchste Stellen erhalten will, angewendet werden.

Aufgaben.

Bestimme nach der abgekürzten Multiplication:

1.	a) $7\cdot0572 \times 3\cdot885$	b) $128\cdot7654 \times 0\cdot813$	in 3 Dec.
2.	a) $17\cdot4315 \times 3\cdot1416$	b) $157\cdot34 \times 0\cdot0763$	
3.	a) $2\cdot057 \times 4\cdot867$	b) $0\cdot56105 \times 0\cdot\dot{7}$	
4.	a) $5\cdot902 \times 2\cdot468$	b) $9\cdot1347 \times 8\cdot35$	in 2 Dec.
5.	a) $36\cdot41 \times 0\cdot0207$	b) $0\cdot895 \times 1\cdot07$	
6.	a) $35\cdot239 \times 78$	b) $41\cdot506 \times 9\cdot43$	in 1 Dec.
7.	a) $58\cdot36 \times 5\cdot39$	b) $2\cdot791 \times 0\cdot982$	
8.	a) $9\cdot0256 \times 4\cdot325$	b) $69\cdot2345 \times 0\cdot1573$	in 4 Dec.
9.	$4\cdot05672 \times 9\cdot16035 \times 0\cdot08783$		

10. $1\cdot045 \times 1\cdot045 \times 1\cdot045 \times 1\cdot045 \times 1\cdot045$ in 6 Dec.
11. Suche die Ganzen des Productes $128\cdot975 \times 602\cdot736 \times 71\cdot068$.
12. Bestimme das Product 310786×45067 bis auf die Millionen herab.
13. Wie viel kosten $37\cdot3456$ *ha*, wenn 1 *ha* $941\cdot34$ fl. kostet? (3 Dec.)
14. Ein Capital gibt jährlich $43\cdot578$ fl. Zinsen; wie viel in $2\cdot862$ Jahren? (3 Dec.)
15. Die Entfernung des Mondes von der Erde beträgt $58\cdot525$ Halbmesser des Erdäquators; wie viel macht dies, wenn man den Halbmesser des Erdäquators zu $859\cdot44$ geogr. Meilen annimmt? (1 Dec.)

§. 60.

Abgekürzte Division.

Will man im Quotienten nur eine bestimmte Anzahl Decimalen erhalten, so bedient man sich der abgekürzten Division. Diese ist die Umkehrung der abgekürzten Multiplication, wobei der Multiplicand nach und nach um eine Stelle verkürzt wird. Das Wesen der abgekürzten Division besteht in Folgendem:

Aus dem Stellenwerte der ersten Ziffer des Quotienten und aus der Anzahl der in demselben verlangten Decimalen ergibt sich, wie viele Ziffern des Quotienten man im ganzen zu bestimmen hat. Man nehme nun so viele höchste Ziffern des Divisors, als ihrer der gesuchte Quotient enthalten soll, als abgekürzten Divisor, und behalte von den

Ziffern des Dividends nur den zu dem abgekürzten Divisor zugehörigen ersten Theildividend bei. Sodann multipliciert man mit der ersten Ziffer des Quotienten zunächst die höchste im Divisor weggelassene Ziffer, und addiert die aus diesem Producte erhaltene Correctur zu dem Producte aus dem abgekürzten Divisor und der ersten Ziffer des Quotienten, welches man von dem Dividend subtrahiert. Zu dem übrig gebliebenen Reste wird keine neue Ziffer dazu gesetzt, sondern man läst im Divisor rechts eine Ziffer weg, dividiert dann und setzt dieses Verfahren fort, bis sich im Divisor keine Ziffer mehr vorfindet.

Hat der Divisor weniger Ziffern, als der Quotient enthalten soll, so tritt das abgekürzte Verfahren erst später im Verlaufe der Rechnung ein.

Das abgekürzte Divisionsverfahren kann auch bei der Division ganzer Zahlen, wenn man im Quotienten nur einige höchste Stellen erhalten will, angewendet werden.

Aufgaben.

1. Führe folgende Divisionen abgekürzt aus, so dass bei der ersten Theildivision der ganze gegebene Divisor verwendet wird.

a) 19·339 : 8·153 = 2·372
3 033
587
16

b) 37·086 : 3·267.

c) 9·3678 : 1·0634.

d) 15·894 : 0·8635.

2. Ebenso

a) 52·92478 : 6·239 b) 5·79 : 0·873.

3. Bestimme folgende Quotienten bis auf die Tausendtel.

876·54|38 : 18·957|9 = 46·236
118 22
4 48
69
12
1

Da die erste Ziffer 4 des Quotienten Zehner bedeutet, so ist der Quotient im ganzen mit 5 Stellen zu bestimmen; man nimmt daher 18·957 als abgekürzten Divisor und 876·54 als Dividend an.

Bestimme abgekürzt folgende Quotienten:

4. a) 43·534 : 31·607 b) 0·8463 : 0·001581 } mit 4 Stellen.
5. a) 100 : 3·1416 b) 0·00257 : 2·97416 }
6. a) 0·9275 : 0·3702 b) 3·49358 : 23·86 } in 3 Dec.
7. a) 0·78432 : 0·8932 b) 284·069 : 27·523 }
8. a) 5·49825 : 1·3219 b) 791·5046 : 876·189 (5 Stellen).
9. Bestimme 2345·21 : 9·18 in 6 Stellen.

Hier tritt das abgekürzte Verfahren erst im Verlaufe der Rechnung ein.

10. a) 3·7984 : 48·7 b) 430 : 0·717 (4 Stellen).

11. Bestimme den Quotienten 35874137 : 8435 bis auf die Hunderte herab.

12. In Wien leben auf einer Fläche von 59·01 km^2 726105 Einwohner; wie viele kommen auf 1 km^2? (Ganze Zahl.)

13. Jemand ist einen Betrag von 2000 fl. nach 15 Jahren zu zahlen schuldig; wenn nun jeder Gulden, den er jetzt zahlt, nach jener Zeit durch Verzinsung zu dem Werte von 2·078928 fl. anwächst, wie viel muss er sogleich zahlen, um die obige Schuld zu tilgen? (3. Dec.)

VI. Verhältnisse und Proportionen.

1. Verhältnisse.

§. 61.

Durch die Division zweier Zahlen im Sinne des Messens (§. 22) wird untersucht, wie oft die zweite Zahl in der ersten enthalten ist. Der Quotient der beiden Zahlen heißt in diesem Falle auch das **Verhältnis** der ersten Zahl zu der zweiten. Ist z. B. 15 durch 5 im Sinne des Messens zu dividieren, d. i. zu bestimmen, wie oft 5 in 15 enthalten ist, so drückt der Quotient 15 : 5 das Verhältnis von 15 zu 5 aus und wird als solches gelesen: 15 verhält sich zu 5, oder kürzer: 15 zu 5. Der Dividend 35 heißt das **Vorderglied**, der Divisor 5 das **Hinterglied**, und der ausgerechnete Quotient 3 der **Exponent** des Verhältnisses.

Die Glieder eines Verhältnisses sind beide unbenannt oder beide benannt; im zweiten Falle müssen sie gleichartig sein, also gleichnamig gemacht werden können. Ein Verhältnis, dessen Glieder unbenannte Zahlen sind, heißt ein **Zahlenverhältnis**; ein Verhältnis, dessen Glieder benannte Zahlen sind, ein **Größenverhältnis**.

Aus den voranstehenden Erklärungen folgt:

1. Der **Exponent** eines Verhältnisses ist gleich dem Vordergliede dividiert durch das Hinterglied.

2. Das Vorderglied eines Verhältnisses ist gleich dem Hintergliede multipliciert mit dem Exponenten.

3. Das Hinterglied eines Verhältnisses ist gleich dem Vordergliede dividiert durch den Exponenten.

§. 62.

Verhältnisse, welche denselben Exponenten haben, heißen gleich.

Jedes Größenverhältnis läßt sich als ein Zahlenverhältnis darstellen. So ist das Verhältnis 10 fl. : 5 fl. gleichbedeutend mit dem Verhältnisse 10 : 5, weil beide den Exponenten 2 haben.

Ein Verhältnis bleibt so lange unverändert, als der Exponent desselben sich nicht ändert.

Ein Verhältnis wird daher nicht geändert, wenn man beide Glieder mit derselben Zahl multipliciert oder durch dieselbe Zahl dividiert, weil in beiden Fällen der Exponent unverändert bleibt.

Die Formveränderung eines Verhältnisses durch die Multiplication seiner Glieder dient dazu, um ein Verhältnis, dessen Glieder Brüche enthalten, durch ganze Zahlen darzustellen. Z. B.

$$\frac{5 : {}^2/_3}{15 : 2} \times 3 \qquad \frac{{}^2/_3 : {}^3/_5}{10 : 9} \times 15 \qquad \frac{2^1/_3 : 1^5/_6}{14 : 11} \times 6$$

Mittelst der Formveränderung eines Verhältnisses durch die Division kann man jedes Verhältnis, dessen Glieder durch dieselbe Zahl theilbar sind, abkürzen. Z. B.

$$\frac{20 : 8}{5 : 2} : 4 \qquad \frac{12 : 6}{2 : 1} : 6 \qquad \frac{100 : 48}{25 : 12} : 4$$

Aufgaben.

1. Suche die Exponenten folgender Verhältnisse:
   18 : 12, 12 : 18, 35 : 28, 28 : 35, 240 : 360, 1024 : 36.
2. Bestimme das Vorderglied eines Verhältnisses, dessen Hinterglied a) 3, b) 8, c) $5^1/_2$, und dessen Exponent 3 ist.
3. Suche das Hinterglied eines Verhältnisses, dessen Vorderglied a) 10, b) 22, c) $8^3/_4$, und dessen Exponent 5 ist.
4. Stelle folgende Verhältnisse mit ganzen Zahlen dar:
   $^1/_2 : {}^3/_5$, $2^3/_4 : 3^5/_6$, $7^1/_8 : 2^3/_{10}$, $19^5/_{16} : 17^7/_{12}$.
5. Wie verhalten sich zwei Brüche von gleichen Nennern?
6. Kürze folgende Verhältnisse ab:
   16 : 36, 57 : 18, 50 : 65, 72 : 56, 375 : 90.

7. Folgende Verhältnisse sollen auf die einfachste Form gebracht, d. i. in ganzen Zahlen dargestellt und dann, wenn es angeht, abgekürzt werden:

a) $4 : 6\frac{2}{3}$	b) $12\frac{7}{6} : 8\frac{4}{7}$	c) $\frac{15}{16} : 3\frac{3}{4}$
$5\frac{1}{5} : 7\frac{1}{9}$	$11\frac{3}{5} : 2\frac{4}{5}$	$12 \cdot 5 : 6 \cdot 5$
$3\frac{3}{8} : 8\frac{2}{5}$	$1\frac{7}{8} : \frac{6}{7}$	$8 \cdot 25 : 7 \cdot 5.$

8. Wie verhalten sich 5 *m* zu 2 *dm*?

9. Wie verhält sich die Geschwindigkeit des Minutenzeigers einer Uhr zu der des Stundenzeigers?

10. Eine Kanonenkugel legt in einer Secunde 228 *m* zurück, der Schall 332 *m*; wie verhalten sich diese Geschwindigkeiten zu einander?

11. Von zwei Locomotiven legt die eine in jeder Minute 500 *m*, die andere 550 *m* zurück; wie verhalten sich ihre Geschwindigkeiten?

12. Von zwei Locomotiven legt die eine den Weg von 1 *km* in 2 Minuten, die andere in $2\frac{1}{2}$ Minuten zurück; wie verhält sich die Geschwindigkeit der ersten Locomotive zu jener der zweiten?

13. A geht in drei Stunden so weit als B in 4 Stunden; wie verhalten sich ihre Geschwindigkeiten?

14. Eine Straße erhebt sich auf 1 *m* um 3 *cm*; wie groß ist das Verhältnis der Steigung?

15. 100 geogr. Meilen = 742 *km*; wie verhält sich 1 geogr. Meile zu 1 *km*?

16. Ein dm^3 Gold wiegt $19\frac{8}{25}$ *kg*, ein dm^3 Silber $10\frac{1}{2}$ *kg*; wie verhalten sich diese Gewichte zu einander?

17. 1 *kg* Gold wird zu 1395 fl., 1 *kg* Silber zu 90 fl. gerechnet; wie verhält sich der Wert des Goldes zu dem des Silbers?

18. Ein Kreis, dessen Durchmesser 1 *m* ist, hat $3\frac{1}{7}$ *m* Umfang; welches Verhältnis findet zwischen dem Durchmesser und dem Umfange statt?

19. Ein Vater ist 36, sein Sohn 9 Jahre alt. Wie verhält sich das Alter des Vaters zu jenem des Sohnes; in welchem Verhältnisse stand es vor 6 Jahren?

20. Ein *hl* Weizen kostet 6 fl. 60 kr., ein *hl* Gerste 4 fl. 80 kr.; wie verhält sich der Preis des Weizens zu dem der Gerste?

21. Von zwei Rädern, deren Zähne ineinander greifen, hat das erste 28, das zweite 36 Zähne; in welchem Verhältnisse steht die Umdrehungsgeschwindigkeit des ersten Rades zu jener des zweiten?

22. Die Summe von 350 fl. wurde unter zwei Personen so getheilt, dass A 210 fl., B den Rest erhielt; nach welchem Verhältnisse fand die Theilung statt?

23. Ein Wasserbehälter kann durch zwei Röhren gefüllt werden, und zwar durch die erste in 2 Stunden 24 Minuten, durch die zweite in 3 Stunden 18 Minuten; wie verhalten sich die Wassermengen, welche in derselben Zeit aus jeder der beiden Röhren fließen?

24. Ein frei fallender Körper legt in einer Secunde 4·9 m, in zwei Secunden 19·6 m, in drei Secunden 44·1 m zurück; wie verhält sich die erste dieser Strecken zur zweiten und wie zur dritten?

---

2. Proportionen.

§. 63.

Die Gleichstellung zweier gleicher Verhältnisse heißt eine **Proportion**. Z. B. $10 : 5 = 12 : 6$ ist eine Proportion, und wird gelesen: 10 verhält sich zu 5, so wie sich 12 zu 6 verhält, oder kürzer: 10 zu 5 wie 12 zu 6; 10 ist das erste, 5 das zweite, 12 das dritte und 6 das vierte Glied der Proportion. Das erste und vierte Glied nennt man die **äußeren**, das zweite und dritte die **inneren Glieder**.

Eine Proportion, in welcher das zweite und dritte Glied gleich sind, heißt eine **stetige Proportion**, und jedes der inneren Glieder die **mittlere geometrische Proportionale** oder das **geometrische Mittel** zwischen den beiden äußeren. Z. B. $24 : 12 = 12 : 6$ ist eine stetige Proportion, 12 das geometrische Mittel zwischen 24 und 6.

In einer Proportion können auch benannte Zahlen vorkommen, nur müssen die beiden Glieder eines jeden Verhältnisses gleichnamig sein; z. B. $12\,m : 4\,m = 30$ fl. : 10 fl. Eine solche Proportion heißt eine **Größenproportion**, zum Unterschiede von einer **Zahlenproportion**, deren Glieder unbenannte Zahlen sind.

Sowie jedes Größenverhältnis als Zahlenverhältnis, kann auch jede Größenproportion als Zahlenproportion dargestellt werden.

Zur leichteren Übersicht der hier abzuleitenden Grundgesetze der Proportionen soll das erste Glied mit a, das zweite mit b, das dritte mit c, das vierte mit d und der Exponent der beiden gleichen Verhältnisse mit e bezeichnet werden, so dass $a : b = c : d$ eine Proportion darstellt, in welcher $a : b = e$ und $c : d = e$ ist.

§. 64.

1. Da $a = b \times e$ und $d = \frac{c}{e}$ ist, so erhält man durch Multiplication

$$a \times d = b \times e \times \frac{c}{e}, \text{ oder } a \times d = b \times c, \text{ d. h.}$$

In jeder Zahlenproportion ist das Product der äußeren Glieder gleich dem Producte der inneren Glieder.

$$10 : 5 = 12 : 6; \quad 10 \times 6 = 5 \times 12.$$

In einer stetigen Proportion $9 : 6 = 6 : 4$ muss hiernach das geometrische Mittel mit sich selbst multipliciert das Product der beiden anderen Zahlen geben, also $6 \times 6 = 9 \times 4$ sein.

Das arithmetische Mittel zweier Zahlen (§. 24, Aufg. 4) muss zu sich selbst addiert die Summe dieser Zahlen geben.

2. Umgekehrt: Aus zwei gleichen Producten, deren jedes zwei Factoren enthält, kann man immer eine Proportion bilden, indem man die Factoren des einen Productes zu äußeren, die des andern Productes zu inneren Gliedern annimmt.

Ist $a \times d = b \times c$, so ergibt sich, wenn man auf beiden Seiten durch $d \times b$ dividiert,

$$\frac{a \times d}{d \times b} = \frac{b \times c}{d \times b}, \text{ also } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ oder}$$

$$a : b = c : d.$$

Aus $12 \times 4 = 6 \times 8$ folgt die Proportion $12 : 6 = 8 : 4$.

Das Kennzeichen für die Richtigkeit einer Proportion ist demnach nicht nur die Gleichheit der Exponenten beider Verhältnisse, sondern auch die Gleichheit der Producte aus den äußeren und aus den inneren Gliedern.

3. Aus $a \times d = b \times c$ erhält man, wenn auf beiden Seiten einmal durch d, dann durch a dividiert wird,

$$a = \frac{b \times c}{d}, \qquad d = \frac{b \times c}{a}; \text{ d. h.}$$

Jedes äußere Glied einer Proportion ist gleich dem Producte der inneren Glieder dividiert durch das andere äußere Glied.

Z. B. In der Proportion $10 : 15 = 2 : 3$ ist

$$10 = \frac{15 \times 2}{3}, \qquad 3 = \frac{15 \times 2}{10}.$$

4. Aus $b \times c = a \times d$ ergibt sich, wenn man auf beiden Seiten zuerst durch c, dann durch b dividiert,

$$b = \frac{a \times d}{c}, \qquad c = \frac{a \times d}{b}; \text{ d. h.}$$

Jedes innere Glied einer Proportion ist gleich dem Producte der äußeren Glieder dividiert durch das andere innere Glied.

Z. B. In der Proportion $6 : 2 = 15 : 5$ ist

$$2 = \frac{6 \times 5}{15}, \quad 15 = \frac{6 \times 5}{2}.$$

§. 65.

Eine Proportion kann verschiedenen Formveränderungen unterworfen werden, ohne dass sie aufhört richtig zu sein, wenn nur bei diesen Veränderungen der Exponent der beiden Verhältnisse ungeändert oder das Product der äußeren Glieder dem Producte der inneren Glieder gleich bleibt. Hieraus folgt:

1. Wenn man in einer Proportion gleichartiger oder unbenannter Zahlen 1. die äußeren Glieder untereinander, oder 2. die inneren Glieder untereinander, oder 3. die äußeren Glieder mit den inneren Gliedern verwechselt, so erhält man durch jede solche Verwechslung wieder eine Proportion.

Aus der Proportion $a : b = c : d$ ergeben sich auch die Proportionen:

1) $d : b = c : a$,
2) $a : c = b : d$,
3) $b : a = d : c$.

Die Vertauschung der äußeren Glieder mit den inneren ist allgemein für jede Proportion zulässig.

2. Wenn man in irgend einer Proportion ein äußeres und ein inneres Glied mit derselben Zahl multipliciert, so erhält man wieder eine Proportion.

Mit Hilfe der Multiplication eines äußeren und eines inneren Gliedes kann man jede Proportion, in welcher Brüche vorkommen, mit ganzen Zahlen darstellen; mit Hilfe der Division kann jede Proportion, in welcher ein inneres und ein äußeres Glied ein gemeinsames Maß haben, durch dieses abgekürzt werden.

3. Multipliciert man in zwei Zahlenproportionen die gleichstelligen Glieder mit einander, so bilden die Producte wieder eine Proportion.

Ist $A : B = C : D$, also $A \times D = B \times C$,
und $a : b = c : d$, also $a \times d = b \times c$,

so ist auch $A \times a : B \times b = C \times c : D \times d$.

Denn es ist $A \times a \times D \times d = B \times b \times C \times c$.

Man sagt, die letzte Proportion ist aus den gegebenen zwei Proportionen **zusammengesetzt**.

So geben die Proportionen $6 : 3 = 8 : 4$
und $2 : 5 = 6 : 15$

die zusammengesetzte Proportion $6 \times 2 : 3 \times 5 = 8 \times 6 : 4 \times 15$,
oder $12 : 15 = 48 : 60$.

4. Ist $a : b = c : d$ eine Proportion mit dem Exponenten e, so ist b in a emal, in $a + b$ also $(e + 1)$mal enthalten; ebenso ist d in c emal, in $c + d$ daher $(e + 1)$mal enthalten. Es ist somit

$$(a + b) : b = (c + d) : d,$$

oder wenn man die inneren Glieder vertauscht,

$$(a + b) : (c + d) = b : d.$$

Aus $a : b = c : d$ folgt aber $a : c = b : d$; somit ist auch

$$(a + b) : (c + d) = a : c.$$

In jeder Proportion gleichartiger oder unbenannter Zahlen verhält sich die Summe der zwei ersten Glieder zur Summe der zwei letzten Glieder, wie das erste Glied zum dritten, oder wie das zweite zum vierten.

Z. B. Aus der Proportion $24 : 8 = 18 : 6$ folgt auch

$$(24 + 8) : (18 + 6) = 24 : 18 \text{ und } = 8 : 6.$$

5. Durch ähnliche Schlüsse ergibt sich der Satz:

In jeder Proportion gleichartiger oder unbenannter Zahlen verhält sich die Differenz der zwei ersten Glieder zur Differenz der zwei letzten Glieder, wie das erste Glied zum dritten, oder wie das zweite zum vierten.

Z. B. Aus der Proportion $24 : 8 = 18 : 6$ folgt auch

$$(24 - 8) : (18 - 6) = 24 : 18 \text{ und } = 8 : 6.$$

§. 66.

Aus einer Proportion, in welcher drei Glieder bekannt sind, das unbekannte Glied finden, heißt die **Proportion auflösen**. Das unbekannte Glied wird mit einem der Buchstaben x, y, z bezeichnet.

Eine Proportion wird aufgelöst, indem man a) den Exponenten des bekannten Verhältnisses sucht und mittelst desselben das unbekannte Glied des andern Verhältnisses bestimmt, oder bei Zahlenproportionen noch einfacher b) nach den Sätzen 3. und 4. in §. 64.

Z. B. Für die Proportion $x : 3 = 30 : 5$ findet man:

a) $30 : 5 = 6, \quad x = 3 \times 6 = 18$; oder

b) $x = \frac{3 \times 30}{5} = 18$; daher ist

$18 : 3 = 30 : 5$ die vollständige Proportion.

Am besten erscheint es hier, aus der Proportion, ohne sie früher auf eine einfachere Form zu bringen, unmittelbar das unbekannte Glied zu suchen.

Aufgaben.

Aus den folgenden gleichen Producten sollen Proportionen gebildet und aus diesen durch Vertauschung der Glieder neue Proportionen abgeleitet werden.

1. a) $12 \times 4 = 6 \times 8$. b) $10 \times {}^2/_3 = 5 \times 1^1/_3$.
2. a) $4^1/_2 \times 1^1/_3 = 3 \times 2$. b) $3^1/_2 \times {}^3/_5 = 4^1/_5 \times {}^1/_2$.

Drücke folgende Proportionen durch die kleinsten ganzen Zahlen aus:

3. a) $x : 18 = 24 : 21$. b) $x : 15 = 8 : 6$.
4. a) $5^1/_5 : 6^2/_9 = 18 : x$. b) ${}^1/_4 : {}^2/_3 = {}^5/_8 : x$.
5. a) $x : 13^{13}/_{48} = 27^9/_{14} : {}^{33}/_{84}$. b) $1^1/_{16} : x = 4^1/_8 : 5^1/_5$.

Löse folgende Proportionen auf:

6. a) $3 : 4 = 5 : x$. b) $3 : x = 6 : 36$.
7. a) $63 : 21 = 45 : x$. b) $77 : 56 = x : 15$.
8. a) $88 : x = 72 : 63$. b) $x : 15 = 165 : 66$.
9. $7^4/_5 : 2^1/_6 = x : 5^5/_8$.

$$x = \frac{7^4/_5 \times 5^5/_8}{2^1/_6} = \frac{39 \,.\, 45 \,.\, 6}{5 \,.\, 8 \,.\, 13} = 20^1/_4.$$

10. a) $5^1/_3 : 7^3/_4 = x : 2^1/_2$. b) $x : {}^7/_9 = 3^1/_3 : 5$.
11. a) $14 : 4^3/_8 = x : 5^1/_4$. b) $x : 10^1/_2 = 4^2/_7 : 9^1/_3$.
12. a) $1^5/_9 : x = 3^{23}/_{25} : 4^4/_5$. b) $17^1/_7 : 12^2/_{41} = 14^2/_9 : x$.
13. a) $10^{11}/_{12} : x = 13^{14}/_{15} : 18^{19}/_{20}$. b) $9^{17}/_{18} : 10^1/_9 = 27^3/_8 : x$.
14. a) $243^5/_{32} : 317^{11}/_{24} = x : 55^{29}/_{60}$. b) $4{\cdot}35 : x = 3{\cdot}18 : 2{\cdot}31$.
15. a) $2{\cdot}5 : 0{\cdot}5 = x : 0{\cdot}4$. b) $x : 0{\cdot}45 = 16{\cdot}625 : 9{\cdot}5$.

---

3. Einfache Regeldetri.

§. 67.

Zwei Größen heißen von einander **abhängig**, wenn eine Änderung der einen Größe auch eine Änderung der andern zur Folge hat.

1. Hängen zwei Arten von Zahlen so von einander ab, dass einer 2-, 3-, 4mal so großen Zahl der einen Art auch immer eine 2-, 3-, 4mal so große Zahl der andern Art entspricht, so sagt man: die beiden Arten von Zahlen sind **gerade proportioniert**, oder sie stehen **in einem geraden Verhältnisse**.

So sind Ware und Preis gerade proportioniert; denn 2mal so viel von derselben Ware kostet auch 2mal so viel Geld, 3mal so viel Ware kostet auch 3mal so viel Geld, 4mal so viel Ware kostet 4mal so viel Geld.

In einem geraden Verhältnisse stehen auch: die Zeit der Arbeit und der Lohn, der Lohn und die Zahl der Arbeiter; die Zeit und der zurückgelegte Weg bei einer gleichförmigen Bewegung; Capital und Zins, Zeit und Zins; Einlage bei einer Unternehmung und Gewinn; u. dgl. m.

Sind zwei Arten von Zahlen gerade proportioniert, so ist das Verhältnis zwischen je zwei Zahlen der einen Art gleich dem Verhältnisse zwischen den zwei zugehörigen Zahlen der andern Art in derselben Ordnung genommen.

2. Sind zwei Arten von Zahlen so von einander abhängig, dass einer 2-, 3-, 4mal so großen Zahl der einen Art nur der 2te, 3te, 4te Theil von der Zahl der andern Art entspricht, so sagt man: die beiden Arten von Zahlen sind verkehrt proportioniert, oder sie stehen in einem umgekehrten Verhältnisse.

So sind die Anzahl der Arbeiter und die Dauer der Arbeitszeit verkehrt proportioniert; denn 2mal so viel Arbeiter brauchen für dieselbe Arbeit nur die Hälfte der Zeit, 3mal so viel Arbeiter brauchen den dritten Theil der Zeit, 4mal so viel Arbeiter nur den vierten Theil der Zeit.

In einem umgekehrten Verhältnisse stehen auch: die Zahl der Personen und die Zeit, für welche ein Vorrath ausreicht; die Länge und die Breite eines Stoffes bei gleichem Inhalte; Capital und Zeit bei gleichen Zinsen; Zeit und Geschwindigkeit, u. dgl. m.

Sind zwei Arten von Zahlen verkehrt proportioniert, so ist das Verhältnis zwischen je zwei Zahlen der einen Art gleich dem Verhältnisse zwischen den zwei zugehörigen Zahlen der andern Art, jedoch in umgekehrter Ordnung genommen.

§. 68.

Wenn zwei Arten von Größen gerade oder verkehrt proportioniert sind, und es sind zwei Zahlen der einen Art gegeben, von den beiden zugehörigen Zahlen der andern Art aber die eine unbekannt, so heißt das Rechnungsverfahren, durch welches diese unbekannte Zahl gefunden wird, die einfache Regeldetri.

Z. B. 5 *m* Tuch kosten 24 fl.; wie viel fl. kosten 9 *m*? — ist eine Regeldetri-Aufgabe.

Bei jeder solchen Aufgabe sind zwei Theile zu unterscheiden, der Bedingungs- und der Fragesatz.

Bedingung: 5 *m* kosten 24 fl.
Frage: 9 „ „ x „

Hängt eine Größe von mehreren anderen zugleich ab und kommt in einer Regeldetri-Aufgabe nur eine dieser Größen vor, so wird immer stillschweigend vorausgesetzt, dass die übrigen unverändert bleiben.

Eine Regeldetri-Aufgabe kann durch ganz einfache Schlüsse oder mit Hilfe einer Proportion aufgelöst werden.

§. 69.

Auflösung durch Schlüsse (Schlussrechnung).

1. Das allgemeine Verfahren bei der Lösung von Regeldetri-Aufgaben durch die Schlussrechnung besteht darin, dass man von dem gegebenen Werte einer Mehrheit auf den Wert der Einheit, und von diesem auf den Wert einer andern Mehrheit schließt. (Schluss von einer Mehrheit mittelst der Einheit auf eine andere Mehrheit.)

Einfachere Aufgaben werden im Kopfe aufgelöst. Z. B.

a) 8 *m* kosten 48 fl.; wie viel kosten 11 *m*?

8 *m* kosten 48 fl.;
1 *m* kostet den 8ten Theil, also 6 fl;
11 *m* kosten 11mal so viel, also 66 fl.

b) 6 Arbeiter brauchen zu einer Arbeit 20 Tage; wie viel Tage brauchen 5 Arbeiter?

6 Arbeiter brauchen 20 Tage;
1 „ braucht 6mal so viel Zeit, also 120 Tage;
5 „ brauchen den 5ten Theil, somit 24 Tage.

Sind größere Zahlen oder Brüche gegeben, so bildet man dieselben Schlüsse, führt jedoch die Rechnung schriftlich durch. Es ist gut, dabei während der Schlussfolgerungen die Multiplicationen und Divisionen nur anzuzeigen und die wirkliche Ausrechnung erst in dem letzten Resultate, nachdem man dasselbe gehörig vereinfacht hat, vorzunehmen. Z. B.

$6^3/_4$ *kg* kosten $4^1/_2$ fl.; wie viel kosten $3^3/_5$ *kg*?

$6^3/_4$ *kg* $4^1/_2$ fl.

1 „ $\dfrac{4^1/_2}{6^3/_4}$ „

$3^3/_5$ „ $\dfrac{4^1/_2 \times 3^3/_5}{6^3/_4} = \dfrac{9.18.4}{2.5.27} = 2^2/_5$ fl.

2. Ganz einfach gestaltet sich die Auflösung, wenn die Mehrheit des Fragesatzes ein Vielfaches oder ein Maß der Mehrheit des Bedingungssatzes ist. (Schluss von einer Mehrheit auf ein Vielfaches oder ein Maß derselben.) Z. B.

a) 5 *hl* Gerste kosten 21 fl. 15 kr.; wie hoch kommen 30 *hl*?

5 *hl* kosten 21 fl. 15 kr.;
30 „ „ 6mal so viel, also 126 fl. 90 kr.

b) 100 fl. Capital geben jährlich 5 fl. Zins; wie viel Zins geben jährlich 25 fl. Capital?

100 fl. Capital geben 5 fl. Zins;
25 „ „ „ den 4ten Theil, mithin 1 fl. 25 kr.

3. Eine Vereinfachung der Rechnung tritt auch dann ein, wenn die Mehrheit des Frage- und des Bedingungssatzes ein gemeinsames Maß haben. In diesem Falle enthält die Schlussrechnung die Verbindung der in 2. angewendeten Schlüsse. (Schluss von einer Mehrheit auf eine andere mittelst eines gemeinsamen Maßes.) Z. B.

a) 20 *kg* kosten 32 fl.; wie viel kosten 15 *kg*?

20 *kg* kosten 32 fl.;
5 „ „ den 4ten Theil, also 8 fl.;
15 „ „ 3mal so viel, somit 24 fl.

b) Aus einer bestimmten Menge Garn kann der Weber 84 *m* Leinwand, welche 75 *cm* breit ist, weben; wie viel Meter 80 *cm* breiter Leinwand kann er daraus erzeugen?

Bei 75 *cm* Breite erhält man 84 *m*;
„ 5 *cm* „ „ „ 15mal so viel Länge $= 84 \,.\, 15\, m$;
„ 80 *cm* „ „ „ nur den 16. Theil $= \frac{84 \,.\, 15}{16}\, m = 78^3/_4\, m$.

4. Manchmal kann bei der Lösung von Regeldetri-Aufgaben auch eine passende Zerfällung der Mehrheit des Fragesatzes mit Vortheil angewendet werden. (Schluss durch Zerfällung.) Z. B.

a) 14 *kg* kosten 43 fl. 82 kr.; wie viel kosten 30 *kg*?

14 *kg*	43 fl. 82 kr.
28 *kg* = 2mal 14 *kg*	87 fl. 64 kr.
2 „ = $^1/_7$ von 14 *kg* ...	6 „ 26 „
	93 fl. 90 kr.

b) Ein Capital bringt in 1 Jahre 74 fl. 40 kr. Zinsen; wie viel in 5 Monaten 18 Tagen?

1 Jahr........................	74·40 fl.
4 Mon. = $^1/_3$ v. 1 Jahr	24·80 fl.
1 „ = $^1/_4$ v. 4 Mon............	6·20 „
15 Tage = $^1/_2$ v. 1 Mon...........	3·10 „
3 „ = $^1/_5$ v. 15 Tagen........	0·62 „
	34·72 fl.

Aufgaben.

(Großentheils Kopfrechnungen.)

1. 9 *m* kosten 54 fl.; wie viel kosten 7 *m*?
2. 7 *hl* „ 217 „ „ „ „ 20 *hl*?
3. 8 *m* „ 44 „ „ „ „ 11 *m*?
4. Wenn 9 *l* 2 fl. 16 kr. kosten, wie hoch kommt 1 *hl*?
5. 6 *hl* kosten 114 fl.; wie viel *hl* erhält man für 551 fl.?
6. Für 43 fl. erhält man 25 *m* Tuch; wie viel für 301 fl.?
7. Man kauft 83 *hl* Wein für 1826 fl.; wie viel kosten 100 *hl*?
8. Ein Rad macht in 76 Minuten 1007 Umdrehungen; wie viele Umdrehungen macht es in 56 Minuten?
9. Eine gleichmäßig ansteigende Straße steigt auf $2^1/_4$ *km* um 38 *m*; wie groß ist die Steigung auf $^2/_5$ *km*?
10. Werden die Bäume einer Allee in einer Entfernung von 4 *m* gesetzt, so braucht man 840 Stück; wie viel Stück sind erforderlich, wenn sie 5 *m* von einander abstehen sollen?
11. 7 *hl* kosten 105 fl.; wie viel kosten 35 *hl*?
12. 4 *kg* „ 3 „ „ „ „ 8, 20, 36 *kg*?
13. 5 *m* „ 17 „ „ „ „ 10, 25, 40 *m*?
14. Ein Arbeiter macht in 5 Tagen 320 Ziegel; wie viel in 30 Tagen?
15. 15 *kg* kosten 9 fl. 30 kr.; wie viel kosten 3 *kg*?
16. 24 *m* „ 66, 82 fl.; „ „ „ 6 *m*?
17. Ein Capital trägt in einem Jahre 376 fl. 44 kr. Zinsen; wie viel in 6, 4, 3, 2 Monaten?
18. Wenn eine Geldsumme unter 48 Personen getheilt wird, kommt auf jede 3 fl.; wie viel erhält jede Person, wenn dieselbe Summe unter 16 Personen getheilt wird?
19. 24 *m* kosten 52 fl.; wie viel kosten 30 *m*?
20. 16 *kg* „ 6 fl. 40 kr.; „ „ „ 28 *kg*?
21. 48 *m* „ 60 fl. 72 kr.; wie viel kosten 36 *m*?
22. Wenn 36 *kg* mit 28 fl. bezahlt werden; wie viel *kg* erhält man für 42 fl.?
23. 10 Stück einer Ware kosten 24 fl.; wie viel Stück bekommt man für 60 fl.?
24. Aus einer Röhre fließen in 18 Minuten 392 *l* Wasser; wie viel *l* fließen aus derselben Röhre in 30 Minuten?
25. Wenn jemand täglich 42 *km* zurücklegt, so erreicht er sein Ziel in 10 Tagen; wie viel Tage braucht er, wenn er täglich 56 *km* zurücklegt?

26. Wenn ein bestimmter Vorrath für 600 Mann auf 10 Monate reicht, wie lange werden damit 400 Mann auskommen?

27. 100 *kg* kosten 16 fl. 40 kr.; wie viel kosten 60 *kg*?

28. Wie viel kosten $16^1/_2$ *a* Gartengrund, wenn 4 *a* $74^2/_5$ fl. kosten?

29. 5 *hl* Wein kosten 92 fl.; wie hoch kommen 19 *hl*?

/ **30.** Ein Capital von 100 fl. gibt jährlich 6 fl. Zins; wie viel Zins geben 350 fl., 620 fl., 560 fl., 835 fl., 975 fl.?

31. Ein Capital trägt in einem Jahre 2310 fl. Zinsen; wie viel in 8 Monaten?

32. Ein *hl* Wein kostet 32 fl.; wie hoch kommen 10 *l*?

33. Eine Wiese kann von 12 Mähern in 6 Tagen abgemäht werden; wie viel Mäher muss man aufnehmen, wenn die Wiese in 4 Tagen abgemäht werden soll?

34. 15 *l* kosten 3 fl. 42 kr.; wie viel kosten 35 *l*?

35. 100 fl. Capital geben 6 fl. Zinsen; wie viel Zinsen geben 300, 800, 1500 fl. Capital?

36. Aus 40 *kg* Garn verfertigt man 265 *m* Zeug; wie viel *m* aus 56 *kg*?

/ **37.** 32 Arbeiter verdienen wöchentlich $118^1/_4$ fl.; wie viel fl. verdienen in derselben Zeit 56 Arbeiter?

38. Die Anfuhr von 4 m^3 Steine kostet $13^3/_4$ fl.; wie viel unter gleichen Verhältnissen die Anfuhr von $17^7/_{10}$ m^3?

39. 35 *m* kosten 65 fl.; wie viel kosten 49 *m*?

40. Wenn eine Lampenflamme täglich 6 Stunden brennt, reicht ein Ölvorrath 15 Tage aus; wie viel Tage reicht derselbe, wenn die Flamme täglich nur 5 Stunden brennt?

41. A und B sollen 1280 fl. so theilen, dass A 5 und B 3 ebenso große Theile erhält; wie viel erhält jeder?

42. 30 *m* kosten 84 fl.; wie viel kosten 25 *m*?

43. Wenn 16 Maurer täglich 12 Stunden arbeiten, so wird eine Mauer in 15 Tagen fertig; in welcher Zeit wird die Mauer fertig, wenn dieselben Maurer täglich nur 10 Stunden arbeiten?

44. Wie viel kosten $25^1/_2$ *hl* Wein, wenn $2^1/_5$ *hl* mit $37^9/_{50}$ fl. bezahlt werden?

45. Das vordere Rad an einem Wagen macht 80 Umdrehungen, während das hintere 64 macht; wie viel macht das vordere, wenn das hintere 1320 Umdrehungen macht?

46. Ein Fußgänger, der in jeder Secunde $1^1/_5$ *m* fortschreitet, legt eine Strecke in $1^1/_3$ Stunden zurück; wie viel Zeit braucht dazu ein Bahnzug, der in jeder Secunde 8 *m* zurücklegt?

§. 70.

Auflösung mittelst der Proportion.

Jede Regeldetri-Aufgabe kann mit Hilfe einer Proportion aufgelöst werden. Man darf nur das Verhältnis zwischen zwei Zahlen der einen Art dem Verhältnisse der zugehörigen Zahlen der andern Art, in derselben oder in umgekehrter Ordnung genommen, gleich setzen, je nachdem die beiden Arten gerade oder verkehrt proportioniert sind, und die so angesetzte Proportion auflösen. Z. B.

a) 45 *m* Tuch kosten 144 fl., wie viel kosten 18 *m* von demselben Tuch?

Da 2-, 3-, 4mal so viel *m* auch 2-, 3-, 4mal so viel Gulden kosten, somit die beiden Arten von Zahlen gerade proportioniert sind, so ergibt sich folgende Rechnung:

45 *m* 144 fl. $\quad x : 144 = 18 : 45$

18 *m* x „ $\quad x = \frac{144 \times 18}{45} = 57^3/_5$ fl.

b) 16 Maurer können eine Mauer in 20 Tagen aufführen; in wie viel Tagen würde dieselbe Mauer von 10 Maurern aufgeführt werden?

Die beiden Arten von Zahlen sind hier verkehrt proportioniert, da 2-, 3-, 4mal so viele Maurer zur Ausführung derselben Mauer nur die Hälfte, den dritten, vierten Theil so viel Zeit brauchen; man hat daher

16 Maurer 20 Tage $\quad x : 20 = 16 : 10$

10 „ x „ $\quad x = \frac{20 \times 16}{10} = 32$ Tage.

Um die Probe für die richtige Lösung einer Regeldetri-Aufgabe zu machen, darf man nur in der Aufgabe die gefundene Zahl einstellen, dann eine andere gegebene Zahl als unbekannt annehmen und diese durch Lösung der neuen Aufgabe suchen.

Aufgaben.

Die nachfolgenden Aufgaben sollen theils nach der Schlussrechnung, theils mit Hilfe der Proportion, und, wo die Einfachheit der Zahlen es zuläst, auch im Kopfe gelöst werden.

1. 8 *m* Tuch kosten 42 fl.; wie hoch kommen 12 *m*?
2. 9 *ha* Wald kosten 1035 fl.; wie viel *ha* erhält man für 690 fl.?
3. Wenn 8 Arbeiter 136 fl. verdienen, wie viel verdienen in derselben Zeit 20 Arbeiter?

4. Wenn 12 Arbeiter 180 fl. verdienen, wie viel Arbeiter verdienen in derselben Zeit 105 fl.?

5. 54 Arbeiter vollenden eine Arbeit in 16 Tagen; wie viele Tage brauchen dazu 72 Arbeiter?

6. 24 Arbeiter vollenden eine Arbeit in 4 Monaten; wie viele Arbeiter werden dieselbe in 3 Monaten vollenden?

+ 7. Aus einer Röhre fließen in 11 Minuten 308 *l* Wasser; in wie viel Minuten fließen aus derselben Röhre 980 *l*?

8. Zu einem Buche sind 24 Bogen erforderlich, wenn auf jede Seite 50 Zeilen gedruckt werden; a) wie viel Bogen sind erforderlich, wenn auf die Seite nur 40 Zeilen kommen; b) wie viele Zeilen müssen auf jede Seite kommen, damit das Buch 25 Bogen erhalte?

9. Ein Mühlgang mahlt in 16 Stunden 28 *hl* Korn; a) wie viel *hl* in 8 Stunden; b) in wie viel Stunden 24 *hl*?

10. Ein Capital bringt in 12 Monaten 246 fl. Zins; a) wie viel Zins gibt es in 30 Monaten, b) in wie viel Monaten gibt es 369 fl. Zins?

11. Aus einer gewissen Menge Garn können 55 *m* Leinwand, die 84 *cm* breit ist, gewebt werden; a) wie viel *m* einer 70 *cm* breiten Leinwand können daraus gewebt werden, b) wie breit wird die Leinwand, wenn aus demselben Garn 60 *m* gewebt werden sollen?

// 12. In einer Familie braucht man alle 12 Tage 1 *kg* Kaffee; a) wie viel *kg* braucht man in 365 Tagen, b) wie viele Tage wird man mit 18 *kg* ausreichen?

13. Wenn ein Rad in 27 Minuten 2295 Umdrehungen macht, a) wie viele Umdrehungen macht es in 10 Minuten, b) in wie viel Minuten macht es 3655 Umdrehungen?

---

14. 20 *m* kosten 83 fl. 40 kr.; wie viel *m* erhält man für 62 fl. 55 kr.?

15. Wie viel *hl* Gerste kann man für 245 fl. kaufen, wenn 10 *hl* 49 fl. kosten?

// 16. Jemand hat durch 35 Tage gearbeitet und erhält für je 6 Tage $5^1/_{10}$ fl. Lohn; wie viel erhält er im ganzen?

17. Ein Arbeiter verdient in 7 Tagen so viel wie ein anderer in 9 Tagen; der erste verdient in einer bestimmten Zeit 35·9 fl., wie viel verdient der zweite in derselben Zeit?

18. Auf welche Länge erreicht das Ansteigen einer Eisenbahn $1^1/_4$ *m* Höhe, wenn dieselbe auf je 50 *m* Länge um $^1/_4$ *m* ansteigt?

19. 30 Maurer können eine Mauer in 25 Tagen aufführen; wie viel Maurer muss man aufnehmen, damit dieselbe in 10 Tagen fertig werde?

20. In einer Fabrik braucht man 4560 m^2 Brennholz von 80 *cm* Scheitlänge; wie viel m^2 Brennholz von 60 *cm* Scheitlänge und übrigens gleicher Beschaffenheit würde man benöthigen?

21. Das m^2 Holz kostet $3^3/_5$ fl., wenn die Scheite 64 *cm* lang sind; welcher Preis für das m^2 entspricht demnach einer Scheitlänge von 80 *cm*?

22. Zu beiden Seiten einer Straße sind 2600 Stück Bäumchen nöthig, wenn dieselben $3^1/_4$ *m* weit auseinander gepflanzt werden; in welcher Entfernung von einander müssen die Bäumchen gesetzt werden, wenn nur 2100 Stück verwendet werden sollen?

23. Auf den Umfang eines Rades gehen 60 Zähne, wenn dieselben $8^1/_2$ *mm* weit von einander entfernt sind; wie viele Zähne gehen darauf, wenn sie $10^1/_5$ *mm* von einander abstehen?

24. Ein verticaler Stab, welcher 1·2 *m* lang ist, wirft einen 1·7 *m* langen Schatten; wie hoch ist ein Baum, welcher um dieselbe Zeit einen 15·3 *m* langen Schatten wirft?

25. Um die Wände eines Saales zu tapezieren, braucht man 704 *m* Tapeten von 42 *cm* Breite; wie viel *m* Tapeten braucht man, wenn diese 64 *cm* breit sind?

26. Die Achse unserer Erde beträgt 6356 *km*, der Durchmesser des Äquators 6377 *km*; wenn man nun bei einem Erdglobus die Erdachse 395 *mm* lang annimmt, wie groß muss dabei der Durchmesser des Äquators angenommen werden?

27. Ein Acker von $6^2/_5$ *ha* gibt einen Ertrag von $96^2/_5$ *hl* Weizen; a) auf wie viel *ha* erhält man $36^3/_{20}$ *hl* Weizen?

28. Ein Land von 15806 km^2 zählt 688564 Einwohner; wie viele Einwohner entfallen bei gleicher Dichte der Bevölkerung auf 3750 km^2?

29. Wenn die Luft bei einem mittleren Barometerstande auf eine Fläche von $1^1/_2$ dm^2 einen Druck von $150^1/_5$ *kg* ausübt, welcher Luftdruck lastet auf einer Fläche von $65^3/_4$ dm^2?

---

30. Wie viel *hl* Hafer erhält man für $34^1/_2$ *hl* Weizen, wenn sich Hafer zu Weizen dem Preise nach wie 2 zu 5 verhält?

31. Zwei Linien verhalten sich wie $1^3/_8 : 4^3/_4$; wenn nun die erste 187 *m* misst, wie groß ist die zweite?

32. Die Geschwindigkeiten zweier Eisenbahnzüge A und B verhalten sich wie 5 : 6; wie viel Stunden braucht A zu einer Strecke, welche B in 13 Stunden zurücklegt?

33. Die Heizkraft des Fichtenholzes verhält sich zu jener des Birkenholzes wie 39 : 40; wie viel m^3 von ersterem sind 100 m^3 von letzterem wert?

34. Die Halbmesser der Erde und des Mondes verhalten sich wie 11 : 3; wenn nun der mittlere Halbmesser der Erde $858^2/_5$ geogr. Meilen beträgt, wie groß ist der Halbmesser des Mondes?

35. 100 engl. Fuß = $30^1/_2$ *m*; a) wie viel engl. Fuß sind 315 *m*, b) wie viel *m* sind 307 engl. Fuß?

36. 18 russische Tschetwert = 21 *hl*; wie viel *hl* sind a) 35, b) 218, c) 1088 russische Tschetwert?

37. 142 Londoner Pfd. betragen 53 *kg*; wie viel *kg* sind a) 240, b) 325, c) 739 Londoner Pfund?

38. Das *kg* feinen Silbers kostet 90 fl.; welchen Wert hat das *kg* Silber à 750 Tausendtheile?

39. Aus einem *kg* Gold, das $^9/_{10}$ fein ist, werden 155 Achtguldenstücke geprägt; wie viel Achtguldenstücke gehen auf ein *kg* feinen Goldes?

40. 90 deutsche Mark betragen 45 fl. ö. W.; a) wie viel fl. ö. W. sind 920 Mark? b) wie viel Mark sind 890 fl. ö. W.?

41. Ein Wiener Kaufmann stellt auf Hamburg einen Wechsel*) von 3408 Mark aus; wie viel Gulden ö. W. wird er dafür beziehen, wenn der Curs auf Hamburg 60·55 ist (100 Mark gleich 60·55 fl. ö. W.)?

42. Wie viel fl. ö. W. betragen 358 fl. holl. Courant, wenn 100 fl. holl. Courant = 103·25 fl. ö. W. gerechnet werden?

43. Ein Handlungshaus in Marseille hat von einem Wiener 5682 Franken 56 Centim. zu fordern; wie groß ist diese Forderung in ö. W., wenn 100 Franken = 49·35 fl. ö. W. gerechnet werden?

44. Ein Londoner Kaufmann schuldet an einen Wiener 5334 fl.; welchen Wechselbetrag in Pfund Sterling wird der Wiener dafür entnehmen, wenn der Curs auf London 124·80 steht (10 Pfd. Sterl. = 124·80 fl. ö. W.)?

---

*) Ein Wechsel ist eine Urkunde, durch welche sich der Aussteller unter wechselrechtlicher Haftung verpflichtet, eine Summe Geldes an eine bestimmte Person und zu einer bestimmten Zeit entweder selbst zu zahlen oder von einem Dritten zahlen zu lassen.

45. Ein Kaufmann erhielt in drei Säcken $108^3/_4$ *kg*, $120^1/_2$ *kg*, $96^1/_2$ *kg* Reis, worüber die Rechnung auf 104 fl. 24 kr. lautete; wie hoch berechnen sich 100 *kg*?

46. Zwei Kaufleute kaufen zusammen 2385 *kg* Öl; A nimmt davon 1845 *kg* und bezahlt $1328^2/_5$ fl.; wie viel Öl bleibt für B und wie viel muss er dafür bezahlen?

47. 35 m^3 Holz wurden um $166^1/_4$ fl. ersteigert; davon nimmt A $8^3/_5$ m^3, B $15^1/_5$ m^3 und C den Rest; wie viel muss jeder bezahlen?

48. Eine Fuhre Heu kostete $32^9/_{10}$ fl. und wog mit dem Wagen 1455 *kg*, wenn nun der Wagen für sich 280 *kg* wog, wie hoch kommen 100 *kg* Heu?

49. Wenn ein Maurer bei Grundmauern täglich 500, bei Gewölbemauern dagegen nur 325 Ziegelsteine legt, und 1 m^3 des ersteren Mauerwerkes 1·2 fl. an Arbeitslohn kostet, wie hoch kommt dann der Arbeitslohn für 1 m^3 Gewölbemauern?

50. Ein Holzhändler hatte für eine Fabrik 4260 m^2 Holz von 80 *cm* Scheitlänge zu liefern, wovon er bereits 2750 m^2 abgeführt hat; für den Rest verlangt man Holz von 64 *cm* Länge; wie viel muss davon geliefert werden?

51. 24 Maurer können eine Mauer in 20 Tagen aufführen; in wie viel Tagen wird die Mauer fertig, wenn nach 5 Tagen noch 6 Maurer aufgenommen werden?

Nach 5 Tagen wären 24 Maurer noch 15 Tage beschäftigt gewesen, nach dieser Zeit steigt aber die Zahl der Maurer auf 30; in wie viel Tagen werden nun 30 Maurer dieselbe Leistung vollbringen, welche 24 Arbeiter in 15 Tagen vollbracht hätten?

52. Um einen Graben herzustellen, werden 32 Arbeiter aufgenommen, welche die Arbeit in 25 Tagen vollenden würden; nach 7 Tagen werden jedoch 8 Arbeiter entlassen; wie lange werden die übrigen noch zu arbeiten haben?

53. 48 Arbeiter sind an einer Arbeit beschäftiget, die sie in 12 Tagen beenden würden. Nachdem sie 2 Tage gearbeitet haben, wird gefordert, dass die Arbeit nun in 8 Tagen fertig sein soll; wie viele Arbeiter muss man dann noch aufnehmen?

54. Eine Straße kann von 30 Mann in 12 Wochen hergestellt werden; anfangs haben 45 Mann 6 Wochen daran gearbeitet; wie viel Mann muss man dann aufstellen, damit sie den noch übrigen Theil der Straße in $4^1/_2$ Wochen vollenden?

100 von 4%

96 ist

104 mit

VII. Procentrechnung.

§. 71.

Unter **Procent** versteht man die Zahl, welche angibt, wie viele Einheiten einer bestimmten Art von 100 **Einheiten** derselben Art zu nehmen sind. Die Angabe 5 Procent (5%) drückt z. B. aus, dass von 100 Einheiten einer bestimmten Art 5 Einheiten zu nehmen sind, also von 100 fl. 5 fl., oder von 100 *kg* 5 *kg*. Man kann hiernach auch sagen: 1% ist der 100ste Theil einer Zahl; 2%, 3%, 4%... sind $^2/_{100}$, $^3/_{100}$, $^4/_{100}$... dieser Zahl.

Bei jeder Procentrechnung kommen drei Größen vor; 1. das **Procent**, d. i. der Antheil, der sich auf 100 bezieht; 2. der **Grundwert**, von welchem die Procente berechnet werden; 3. der auf diesen Grundwert entfallende **Procentantheil**. Sind von diesen drei Größen zwei gegeben, so kann aus denselben die dritte bestimmt werden.

Weitere Aufgaben ergeben sich noch, wenn die Summe oder die Differenz aus dem Grundwerte und dem Procentantheile gegeben ist.

Die zur Procentrechnung gehörigen Aufgaben werden am einfachsten durch die Schlussrechnung ausgeführt, können aber auch mit Hilfe der Proportion gelöst werden.

Berechnung des Procentantheiles.

§. 72.

Wie groß ist der Procentantheil von 4567 zu 5%?

4567 gibt zu 1% den 100sten Theil von 4567 = 45·67,
„ 5% 5mal so viel, also 45·67 × 5 = 228·35.

$$\text{Procentantheil} = \frac{\text{Grundwert}}{100} \times \text{Procent}.$$

Mit Hilfe der Proportion hätte man:

100 Grundwert	5 Antheil	$x : 5 = 4567 : 100$
4567 „	x „	$x = \dfrac{4567 \times 5}{100}$

... mit 100

Aufgaben.

1. Wie viel ist 1% von folgenden Zahlen:
   200, 300, 800, 1700, 650, 1280, 2542, 392·8?
2. Berechne 2%, 3%, 5%, 8%, 12% von:
   400, 1200, 560, 956, 1584, 27·44, 730·8.
3. Wie viel betragen
   a) 4% von 750? b) $7^1/_5$% von 2565?
   $6^1/_2$% „ 1280? 13% von 591·5?
4. Die Zahl 350 soll um 4% a) vermehrt, b) vermindert werden.

a)		b)	
350 à 4%		350 à 4%	
+ 14		— 14	
364		336	

5. Welche Zahl ist
   a) um 6% größer als 200, als 900, 1560, 867·5?
   b) um $5^1/_2$% kleiner als 340, als 750, 2148, 39·36?
6. Berechne
   a) 5% von 976 fl., b) 13% von 2090 *kg*,
   $4^1/_2$% „ 2680 „ $2^2/_5$% „ 835 *m*.
7. Eine Stadt zählt 6360 Einwohner; wie viel sind 15% davon?
8. Jemand hat ein jährliches Einkommen von 1842 fl., wovon 4% Einkommensteuer zu zahlen sind; wie viel beträgt diese Steuer?
9. Jemand soll 345 fl. Steuer zahlen, wobei ihm 3% Nachlass bewilligt werden; wie viel hat er zu entrichten?
10. Wie viel muss man für 516 fl. Steuer sammt einem Zuschlage von 23% zahlen?
11. Ein Arbeiter verdiente täglich 1 fl. 25 kr.; wie groß wird der Taglohn, wenn der Arbeiter täglich 8% mehr verdient?
12. Zu einem Baue hat man 64800 Ziegelsteine nöthig; wie viel Stück müssen geliefert werden, wenn man für Bruch und Verlust $8^1/_2$% dazu rechnet?
13. Eine Straßenstrecke von 6350 *m* hat eine Steigung von 1·8%; wie viel *m* beträgt die Steigung?
14. Von 409 35jährigen Menschen sterben 40% bis zum 60sten Jahre; wie viel erreichen demnach das 60ste Jahr?
15. Ein Capital von 2060 fl. trägt jährlich 5% Zinsen; wie viel fl. betragen die Zinsen?
16. Wie groß sind die jährlichen Zinsen
   a) von 575 fl. zu 4%? b) von 708 fl. zu 6%?
   c) von 1580 fl. zu $4^1/_2$%? d) von 2848 fl. zu $5^3/_4$%?

17. Welchen reinen Zinsertrag wirft ein Haus im Werte von 24800 fl. ab, wenn es $4^1/_4\%$ trägt?

18. Ein Schuldner vergleicht sich mit seinem Gläubiger dahin, dass er dessen Forderung von 2680 fl. mit 78% bezahlen wolle; wie viel wird dieser erhalten?

19. Jemand kauft um 928 fl. Waren ein und gewinnt bei deren Verkaufe 12%, d. h. er nimmt für je 100 fl., die er beim Einkaufe auslegt, beim Verkaufe 112 fl. ein; wie viel beträgt a) der ganze Gewinn, b) die Verkaufssumme?

20. Wie theuer wurde eine Ware mit 6% Gewinn verkauft, wenn der Einkaufspreis 795 fl. betrug?

21. Wenn das *m* Tuch im Einkaufe 3 fl. 20 kr. kostet, wie hoch muss es im Verkaufspreise gesetzt werden, wenn man 12% gewinnen will?

22. Jemand kauft das *m* Tuch zu 4 fl. 25 kr. und sieht sich genöthigt, das Tuch mit 4% Verlust zu verkaufen; wie theuer verkauft er 1 *m*?

23. Die Bevölkerung einer Stadt, welche im Jahre 1837 15860 Einwohner zählte, hat bis zum Jahre 1880 um 25% zugenommen; wie groß war die Bevölkerung dieser Stadt im Jahre 1880?

24. Böhmen nimmt 8·347% von der Fläche der österr.-ungarischen Monarchie ein; wie groß ist Böhmen, da die österr.-ungar. Monarchie einen Flächeninhalt von 624041 km^2 hat?

25. Niederösterreich hat einen Flächenraum von 19768 km^2, darunter befinden sich 31% Waldungen; wie viel km^2 betragen diese?

26. Das Bruttogewicht einer Ware beträgt 2350 *kg*, die Tara 8%; wie groß ist a) die Tara, b) das Nettogewicht?*)

a)	23·50 × 8	b) Bruttogew.	2350 *kg*
	188 *kg* Tara	Tara 8%	188 „
		Nettogewicht	2162 *kg*

27. Wie viel beträgt die Tara von 4500 *kg* à 2%, 5%, 8%, 10%?

28. Eine Ware wiegt Brutto 3780 *kg*; wie groß ist das Nettogewicht bei 3%, $5^1/_2\%$, 8%, 12%, 20% Tara?

29. Berechne das Nettogewicht

a) von 3420 *kg* Brutto bei 7% Tara;
b) „ 885 *kg* „ „ 12% „ ;
c) „ 2019 *kg* „ „ 9% „ .

*) Das Gewicht einer Ware mit Inbegriff der Umhüllung oder des Behältnisses, worin sie verpackt ist, nennt man das Bruttogewicht, das Gewicht der Ware allein das Nettogewicht. Das Gewicht des Behältnisses, oder vielmehr der Abzug, der wegen dieses Gewichtes vom Bruttogewichte gemacht wird, heißt Tara.

30. Wie viel kosten 6 Ballen Baumwolle Brutto 1180 *kg*, Tara 7 %, zu $107^3/_4$ fl. per Centner Netto?

31. Eine Sendung Feigen wiegt Brutto 735 *kg*; wie viel kosten die Feigen zu 36 fl. per Centner Netto, wenn die Tara zu 13 % gerechnet wird?

32. Wie viel beträgt die Provision zu 2 % von einem Warenbetrage von 500 fl.?*)

33. Wie viel beträgt die Provision von 8037·36 fl. zu $^1/_8$ %, $^5/_8$ %, $1^3/_4$ %, 2 %, $2^1/_2$ %?

34. Für eine um 348 fl. gekaufte Ware wird die Provision zu $1^1/_2$ % gerechnet; wie viel kostet die Ware?

35. Jemand besorgt den Verkauf einer Ware im Betrage von 2085 fl. 25 kr.; wie viel verblieb dem Verkäufer nach Abschlag der Provision à $1^3/_4$ %?

36. Für einen Prager Kaufmann werden um 2813·78 fl. Waren verkauft, die Spesen betragen 68·37, die Provision 2 %; wie groß ist der reine Ertrag?

37. Ein Commissionär in Paris kauft für einen Wiener Kaufmann Waren um 8563 Franken ein, berechnet 218 Franken Spesen und 2 % Provision; wie groß ist der Betrag der Factura (Einkaufsrechnung)?

38. Wie viel kosten 2108 *kg* Brutto einer Ware, die Tara zu 9 %, der Centner Netto zu 82 fl. 80 kr. und die Einkaufs-Provision zu $1^7/_8$ % gerechnet?

39. Wie viel beträgt die Sensarie bei einem Warenbetrage von 2640 fl. à $^1/_2$ %?**)

40. Wie groß ist die Sensarie à $^1/_2$ %
    a) von 618 fl.? b) von 506 fl. 58 kr.? c) von 2068 Mark?

41. Ein Warensensal unterhandelt eine Partie Waren im Betrage von 2181 fl. 7 kr. und berechnet die Sensarie, welche zur Hälfte vom Verkäufer, zur Hälfte vom Käufer gezahlt wird, zu $1^1/_4$ %; a) wie viel hat der Käufer für die Ware zu bezahlen, b) wie viel erhält der Verkäufer?

---

*) Wenn jemand die Vollziehung eines Geschäftes, z. B. den Einkauf oder Verkauf von Waren, einem andern aufträgt, so heißt die Person, welche diesen Auftrag erhält und vollzieht, der Commissionär, die Vergütung aber, welche der Commissionär für seine Bemühungen erhält, Provision.

**) Zur Abschließung von Geschäften zwischen Kaufleuten desselben Ortes gibt es beeidete Personen, welche Sensale oder Mäkler heißen. Die Vergütung für ihre Mühe wird Sensarie genannt.

42. Ein Kaufmann besorgt den Verkauf einer Ware im Betrage von 3518 fl., zahlt dem Sensalen $^1/_2$ % und berechnet für sich $1^3/_4$ % Provision; wie viel erhält der Verkäufer?
43. Wie groß ist die Versicherungsprämie von 5380 fl. à 2 %?*)
44. Wie groß ist die Versicherungsprämie für einen Wert von 5388 fl. a) zu 2 %, b) zu $1^3/_4$ %, c) zu $^1/_3$ %, d) $^1/_8$ %.
45. Bei einer Feuer-Assecuranz-Gesellschaft wird ein auf 17800 fl. geschätztes Haus zu $^1/_{10}$ % versichert; wie viel beträgt die Assecuranzprämie?
46. Jemand versichert seine Möbel auf 3600 fl.; wie viel hat er an Prämie zu $^1/_{10}$ % zu zahlen?
47. Eine Ware wird im Werte von 13750 fl. von Triest nach Alessandria gegen den Seeschaden zu $1^3/_8$ % versichert; wie hoch beläuft sich die Assecuranzprämie?
48. Wie viel fl. Silbergeld sind 1250 fl. in Gold bei 24 % Agio wert?**)
49. Das Goldagio steht auf 23 %; wie viel fl. in Silber muss man für 398 fl., 2045 fl., 3215 fl. in Gold zahlen?
50. Jemand bezieht von seiner Goldrente halbjährig 240 fl. Zinsen in Gold; wie viel fl. in Silber beträgt diese, wenn das Gold gegen Silber 24 % Agio hat?
51. Der Einfuhrzoll für eine Ware beträgt 103 fl. 25 kr. in Gold; wie viel in Silbergeld muss man dafür zahlen, wenn das Goldagio zu $23^1/_2$ % gerechnet wird?

Berechnung des Grundwertes.

§. 73.

5 % einer Zahl betragen 634; welches ist die Zahl?

1 %, d. i. $^1/_{100}$ der Zahl beträgt $\frac{634}{5}$,

*) Gesellschaften, welche gegen eine bestimmte Gebür den Schadenersatz für Unfälle und Verluste übernehmen, die durch den natürlichen Lauf der Dinge oder durch außerordentliche Ereignisse herbeigeführt werden, nennt man Assecuranz-Gesellschaften; die Gebür aber, welche ihnen für die Übernahme der Schadenvergütung voraus bezahlt wird, heißt die Versicherungsprämie.

**) Gewisse Münzsorten, besonders die Goldmünzen, genießen entweder wegen ihres größeren inneren Gehaltes oder wegen ihrer größeren Beliebtheit ein Aufgeld über ihren gesetzlichen oder Rechnungswert. Dieses Aufgeld heißt Agio und wird in Procenten von der besseren Münzsorte berechnet.

also ist die Zahl selbst 100mal so groß, somit $\frac{634}{5} \times 100 = 12680$.

$$\text{Grundwert} = \frac{\text{Procentantheil}}{\text{Procent}} \times 100.$$

Aufgaben.

1. Der Procentantheil einer Zahl zu 8 % ist 31·2; wie groß ist die Zahl?
2. Bestimme den Grundwert, dessen Procentantheil a) zu 4 % 78, b) zu $5^1/_2$ % 63·84, c) zu 12 % 169·2 ist.
3. Ein Haus trägt jährlich rein 548 fl.; wie groß ist der Wert desselben, wenn es sich zu 5 % verzinset?
4. Wie groß ist die Bevölkerung eines Ortes, wenn 22 % derselben 572 beträgt?
5. Die Bevölkerung einer Stadt hat während eines bestimmten Zeitraumes um 8 %, d. i. um 1716 zugenommen; wie groß war die Bevölkerung am Anfange dieses Zeitraumes?
6. Man nimmt an, dass aus Runkelrüben 5 % Rohzucker gewonnen wird; wie viel *kg* Runkelrüben sind erforderlich, um daraus 4720 *kg* Rohzucker zu gewinnen?
7. Ein Geschäft führt einen Verlust von 24 % herbei; mit welcher Summe war derjenige betheiligt, der dabei 528 fl. verliert?
8. Beim Verkaufe einer Ware beträgt der 15 %ige Gewinn 36 fl.; wie theuer war die Ware a) im Einkaufe, b) im Verkaufe?
9. Wenn der bei einem Verkaufe erlittene Verlust à 8 % 188 fl. beträgt, wie groß ist die Einkaufssumme?
10. Ein Haus wurde 6 % unter dem Einkaufspreise verkauft; wie groß war dieser, wenn der Verlust 1470 fl. beträgt?
11. Bei einer Ware betragen die 3 %igen Spesen 69 fl. 12 kr.; wie groß ist der Einkaufspreis?
12. Bei einer Warenzahlung betrug der Abzug zu $3^1/_4$ % $175^1/_2$ fl.; wie viel fl. zahlte der Käufer?

Berechnung des Procentes.

§. 74.

Wie viel % von 2480 ist 111·6?

1 % von 2480 ist $\frac{2480}{100}$; somit ist 111·6 so viel % von 2480, wie oft $\frac{2480}{100}$ in 111·6 enthalten ist, also

$$111 \cdot 6 : \frac{2480}{100} = \frac{111 \cdot 6 \times 100}{2480} = 4^1/_2 \%.$$

Mit Hilfe der Proportion hätte man

2480 Grundwert	111·6 Procentantheil	$x : 111 \cdot 6 = 100 : 2480$	
100 "	x "	$x = \frac{111 \cdot 6 \times 100}{2480}$.	

$$\text{Procent} = \frac{\text{Procentantheil} \times 100}{\text{Grundwert}}.$$

Aufgaben.

1. Wie viel % von 100 sind folgende Zahlen:
   25, 50, 20, 10, 5, 15, 60, 45, 70, $12^1/_2$, $16^2/_3$, $33^1/_3$?
2. Zur Deckung der Landesbedürfnisse werden auf jeden Steuergulden 24 kr. umgelegt; wie viel % beträgt diese Umlage?
3. Wie viel % sind
   a) 40 kr. von 5 fl.? 75 fl. von 1250 fl.?
   b) $4^1/_5$ fl. von 105 fl.? 39 fl. 27 kr. von 748 fl.?
4. An einem Gymnasium, welches 348 Schüler zählt, haben 261 Schüler einen guten Fortgang gemacht; wie viel % sind es?
5. Von 523 Menschen, welche 12 Jahre alt sind, erreichen im Durchschnitt 471 das 24ste Lebensjahr; wie viel % sterben hiernach im Alter von 12 bis 24 Jahren?
6. Von 169 *kg* Kalkstein erhält man $83^1/_5$ *kg* gebrannten Kalk; wie viel % verliert der Kalkstein beim Brennen?
7. Bei einem Concurse erhält jemand für seine Forderung von 1152 fl. nur 768 fl.; wie viel % beträgt der Verlust?
8. Wenn 4 *hl* Weizen so viel Nahrungsstoff enthalten als 5 *hl* Korn, um wie viel % ist der Nahrungsgehalt des Weizens höher als jener des Kornes?
9. Die Einnahmen einer Eisenbahn betrugen im Monate Mai 80368 fl., im Monate Juni 107435 fl., um wie viel % im letzteren mehr?
10. Wien hatte im Jahre 1840 356870, im Jahre 1880 726105 Einwohner; um wie viel % ist die Bevölkerung Wiens während dieses Zeitraumes gestiegen?
11. Böhmen zählte im Jahre 1780 2561794, im Jahre 1880 5560819 Einwohner; um wie viel % hat die Bevölkerung Böhmens in dieser Zeit zugenommen?
12. Die geogr. Meile verhält sich zur neuen deutschen Meile wie 231 zu 230; um wie viel % ist die erstere größer als die letztere?
13. Steiermark hat einen Flächenraum von 22354·75 km^2, Mähren einen Flächenraum von 22223·85 km^2; a) um wie viel % ist Steier-

mark größer als Mähren, b) um wie viel % ist Mähren kleiner als Steiermark?

14. Eine Ware wurde um 4250 fl. eingekauft und mit einem Gewinne von 340 fl. verkauft; wie viel % betrug der Gewinn?

15. Wie viel % werden gewonnen
 a) bei 136 fl. Einkaufspreis und 170 fl. Verkaufspreis?
 b) „ 275 „ „ „ 308 „ „
 c) „ 1224 „ „ „ 1444 „ 32 kr. „

16. Jemand kauft 168 *m* Tuch um 630 fl. und verkauft das *m* zu $4\frac{7}{20}$ fl.; wie viel gewinnt er a) im ganzen, b) nach Procenten?

17. Wie viel % beträgt die Tara, wenn man
 a) von 1625 *kg* Brutto 1565 *kg* Netto,
 b) „ 2160 „ „ 1836 „ „
 c) „ 948 „ „ 900·4 „ „ rechnet?

18. Ein Commissionär erhält 22 fl. 74 kr. als Provision für besorgte Ware im Betrage von 936 fl.; wie viel % beträgt die Provision?

19. Von einem Warenbetrage von 1480 fl. zahlt man dem Sensal 9 fl. 25 kr.; zu wie viel % wurde die Sensarie berechnet?

20. Wie viel % Goldagio wurden gerechnet, wenn für 1475 fl. in Gold 1829 fl. in Silber gezahlt wurden?

Berechnung des Grundwertes und des Procentantheiles aus ihrer Summe oder Differenz.

§. 75.

In vielen Aufgaben des Verkehrs wird als Wert, welcher der Procentrechnung zu unterziehen ist, nicht der Grundwert selbst, sondern die Summe oder die Differenz aus dem Grundwerte und dessen Procentantheile gegeben. Die Beschaffenheit und die Behandlung solcher Aufgaben wird aus folgenden Beispielen klar werden:

1. Bei einer Ware, welche für 875 fl. eingekauft wird, hat man 3% Spesen; wie viel fl. betragen die Spesen?

Hier sind von je 100 fl. Warenpreis 3 fl. Spesen zu rechnen; auf 875 fl. Warenpreis entfallen daher so vielmal 3 fl. Spesen, wie oft 100 in 875 enthalten ist, somit

$$\frac{875}{100} \times 3 = 26 \cdot 25 \text{ fl. Spesen.}$$

2. Eine Ware kostet mit Einrechnung von 3% Spesen 875 fl.; wie viel betragen die Spesen?

Der gegebene Wert 875 fl. enthält den reinen Warenpreis bereits vermehrt um die Spesen und ist daher entstanden, indem man je 100 fl. Warenpreis um 3 fl. Spesen vermehrt, statt 100 fl. also 103 fl. genommen hat. Man schließt daher:

Von je 103 fl. Warenpreis mit Spesen sind 3 fl. Spesen zu rechnen; auf 875 fl. Warenpreis mit Spesen entfallen also so vielmal 3 fl. Spesen, wie oft 103 in 875 enthalten ist, somit

$$\frac{875}{103} \times 3 = 25 \cdot 49 \text{ fl. Spesen.}$$

3. Der Verkaufspreis einer Ware nach Abzug von 3% Spesen ist 875 fl.; wie viel betragen die Spesen?

Der gegebene Wert 875 fl., in welchem von dem reinen Warenpreise die Spesen bereits abgezogen sind, ist entstanden, indem man von je 100 fl. Warenpreis 3 fl. Spesen in Abzug gebracht, also statt 100 fl. nur 97 fl. angenommen hat. Man schließt daher:

Zu je 97 fl. Warenpreis nach Abzug der Spesen gehören 3 fl. Spesen; zu 875 fl. gehören somit so vielmal 3 fl. Spesen, wie oft 97 in 875 enthalten ist, also

$$\frac{875}{97} \times 3 = 27 \cdot 06 \text{ fl. Spesen.}$$

Würde man zur Bestimmung des Procentantheiles die Proportion anwenden, so hätte man

bei 1. ... $x : 3 = 870 : 100$,
„ 2. ... $x : 3 = 875 : 103$,
„ 3. ... $x : 3 = 875 : 97$.

Während in der Aufgabe 1. der Grundwert selbst, nämlich der Warenpreis angegeben wird, ist in 2. die Summe und in 3. die Differenz aus dem Warenpreise und den Spesen gegeben. In 1. rechnet man die 3 fl. Spesen von je 100 fl., in 2. von je 103 fl. und in 3. von je 97 fl. des gegebenen Wertes. Man pflegt deshalb auch die Procentrechnung in 1. eine Rechnung *von Hundert*, in 2. *auf Hundert* und in 3. *in Hundert* zu nennen.

Aus der Summe oder Differenz des Grundwertes und seines Procentantheiles erhält man, nachdem der Procentantheil gefunden wurde, durch bloße Subtraction oder Addition sofort auch den Grundwert. So hat man für 2.

Warenpreis mit Spesen	875	fl.
ab Spesen	25·49	„
Warenpreis	849·51	fl.

Dieser Grundwert kann übrigens auch unmittelbar bestimmt werden, indem man schließt:

Je 103 fl. Warenpreis mit Spesen enthalten 100 fl. reinen Warenpreis; 875 fl. enthalten daher so vielmal 100 fl. Warenpreis, wie oft 103 in 875 enthalten ist, somit

$$\frac{875}{103} \times 100 = 849\cdot51 \text{ fl. Warenpreis.}$$

Aufgaben.

1. Der Mietzins für eine Wohnung wurde um 16 % gesteigert und beträgt jetzt 406 fl.; wie viel zahlte man früher?
2. Der Weizen ist um 15% im Preise gefallen und kostet jetzt 7 fl. 14 kr. pr. *hl*; wie theuer war er früher?
3. Wie viel Gulden in Gold sind 3565 fl. Silbergeld, wenn das Goldagio 24% beträgt?
4. Ein Beamter erhält zu seinem Gehalte einen Theuerungszuschuss von 15% und bezieht mit diesem monatlich 172 fl. 50 kr.; wie groß ist sein jährlicher Gehalt?
5. Für eine Steuer sammt 32% Umlage werden 125 fl. 40 kr. gezahlt; wie groß ist die ursprüngliche Steuer?
6. Jemand zahlte für eine Steuer, bei welcher ihm 4% nachgelassen werden, 398 fl. 40 kr.; wie viel Steuer war ihm berechnet worden?
7. Ein zu 6% angelegtes Capital beträgt nach 1 Jahre mit den Zinsen 689 fl.; wie groß sind a) die Zinsen, b) das Capital?
8. Wie groß ist der Gewinn à 15% bei einer für 1860 fl. verkauften Ware?
9. Berechne den Einkaufswert einer Ware, welche

   a) mit 12% Gewinn für 476 fl.
   b) „ 9% „ „ 2628 „
   c) „ $16^1/_2$% „ „ 1379 „ 36 kr.

   verkauft wird.
10. Für eine mit 3% Verlust verkaufte Ware werden 1040 fl. gelöst; wie groß ist a) der Verlust, b) der Einkaufspreis?
11. Berechne das Bruttogewicht:

    a) für 2088 *kg* Netto bei 13% Tara;
    b) „ 966 „ „ „ 8 „ „
    c) „ 330 „ „ „ 12 „ „
12. Eine Ware kommt mit Einrechnung von 2% Provision auf 628 fl. 48 kr.; wie viel beträgt die Provision?

13. Für eine verkaufte Ware erhält man nach Abzug von 2% Provision 3727 fl.; a) wie viel beträgt die Provision, b) um wie viel wurde die Ware verkauft?

14. Eine Ware kommt mit 12% Spesen auf 3500 fl. zu stehen; wie viel betragen die Spesen?

15. Wenn der Centner einer Ware mit Einschluss von 10% Spesen und 14% Gewinn mit 155 fl. verkauft wurde, wie viel hat er im Einkaufe gekostet?

Unterschied zwischen Zins u. Procent-Rechnung ist d. bei d. Zinsr. nur mit Geld und auf das Zeit zu sehen

VIII. Zins- und Discontrechnung.

1. Einfache Zinsrechnung.

§. 76.

Eine Geldsumme, welche man jemandem unter der Bedingung leiht, dass er für die Benützung einen bestimmten Geldbetrag entrichtet, endlich aber die Geldsumme zurückzuzahlen verpflichtet ist, wird Capital genannt. Das Geld, welches für die Benützung des Capitals entrichtet wird, heißt Zins oder Interesse; es wird nach Procenten bestimmt, welche sich, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt wird, auf ein Jahr beziehen; z. B. ein Capital ist zu 5% angelegt, heißt: von je 100 fl. Capital erhält man in einem Jahre 5 fl. Zins.

Die Zinsrechnung ist demnach eine Procentrechnung, in welcher außer den bei dieser zusammentretenden Größen noch eine weitere Größe, die Zeit, in Berücksichtigung kommt. Das Jahr wird dabei im allgemeinen zu 360 Tagen, der Monat zu 30 Tagen angenommen.

Sind von den vier Größen Capital, Zeit, Procent und Zinsen drei gegeben, so kann aus denselben die vierte bestimmt werden.

Bleibt das Capital während der ganzen Verzinsungszeit unverändert, so heißen die davon entfallenden Zinsen einfache Zinsen; werden aber am Ende eines jeden Jahres oder Halbjahres die Zinsen zum Capitale geschlagen und selbst wieder verzinst, so heißen die Zinsen zusammengesetzte oder Zinseszinsen.

Hier soll nur von den einfachen Zinsen die Rede sein.

Berechnung der Zinsen.

§. 77.

Ein Capital von 3457 fl. ist zu 5% angelegt; wie viel Zinsen trägt es in 3 Jahren?

3457 fl. Capital geben

zu 1%	in 1 Jahre	den 100sten Theil...	34·57	fl. Zins.
„ 5%	„ 1 „	5mal so viel.......	34·57 × 5	„ „
„ 5%	„ 3 „	3mal so viel.......	34·57 × 5 × 3	„ „
			= 518·55	„ „

Durch Anwendung derselben Schlüsse werden auch die unten folgenden Aufgaben gelöst. Es ergibt sich dabei allgemein:

$$\text{Zinsen} = \frac{\text{Capital}}{100} \times \text{Procent} \times \text{Zeit in Jahren.}$$

Ist die Zeit als mehrnamige Zahl gegeben, so geschieht die Auflösung am einfachsten mittelst Zerfällung, indem man nämlich die Monate in passende Theile eines Jahres und die Tage in passende Theile eines Monates zerlegt und als solche berechnet.

Aufgaben.

(Nach der Schlussrechnung aufzulösen.)

1. Berechne die einjährigen Zinsen
   a) von 3124 fl. zu 5%   b) von 4181 fl. zu 4%
   zu 1%..31·24 fl.   167·24 fl.
   „ 5%.156·20 fl.

2. Wie viel Zinsen erhält man jährlich
   a) von 300 fl., 500 fl., 800 fl., 1200 fl. zu 5%?
   b) von 200 fl., 700 fl., 1000 fl., 2500 fl. zu 4%?

3. Wie viel betragen die jährlichen Zinsen
   a) von 1834 fl. à 5%?   b) von 3307 fl. à 6%?
   c) von 2095 fl. 50 kr. à $6^1/_2$%?   d) von 9126 fl. à $4^3/_4$%?

4. Wie viel Zins geben a) 2183 fl. zu 4% in 3 Jahren? b) 14788 fl. zu $5^1/_4$% in 2 Jahren? c) 7350 fl. zu $5^3/_4$% in 4 Jahren?

5. Wie viel Zins geben 1948 fl. in $2^1/_2$ Jahren zu a) $4^3/_4$%, b) 5%, c) $6^1/_2$%?

6. Wie viel Zinsen geben 3888 fl. Capital zu $4^1/_2$% in 3 Jahren 7 Monaten 10 Tagen?

3888 fl.	Capital	
155·52 fl.	à 4%	
19·44 „	„ $^1/_2$%	
174·96 fl.	in 1 Jahr	
524·88 fl.	„ 3 Jahren	
87·48 „	„ 6 Mon.	= $^1/_2$ Jahr.
14·58 „	„ 1 „	= $^1/_6$ von 6 Mon.
4·86 „	„ 10 Tagen	= $^1/_3$ Mon.
631·80 fl.	Zins.	

7. Wie viel Zins geben 2848 fl. zu 5% in 3 Jahren und 4 Monaten?
8. ~~Ein Capital von 8425 fl. 18 kr. liegt durch 4 Jahre 11 Monate~~ zu $4^1/_2$% an; wie viel Zinsen bringt es?
9. Wie groß sind die Zinsen von 5244 fl. 55 kr. zu $5^1/_4$% in 3 Jahren 5 Monaten 20 Tagen?
10. Wie viel Zinsen geben
 a) 9006 fl. Capital zu 5% in 10 Monaten?
 b) 2514 fl. zu 6% in 4 Jahren 9 Mon. 20 Tagen?
 c) 950·4 fl. zu $4^1/_2$% in 3 Jahren 7 Mon. 18 Tagen?
 d) 4392·6 fl. zu $5^1/_4$% in 2 Jahren 5 Mon. 12 Tagen?

§. 78.

Häufig sind die Zinsen eines Capitals bloß für eine **bestimmte Anzahl von Tagen** zu berechnen. In diesem Falle sucht man gewöhnlich zuerst die Zinsen zu 6% und leitet daraus mittelst Zerfällung die Zinsen für das gegebene Procent ab.

Es seien die Zinsen von 3516 fl. Capital zu 6% für 139 Tage zu berechnen.

100 fl. geben in 360 Tagen		6 fl. Zins	
„ „ „ „ 1 Tage	$\frac{6}{360}$	$= \frac{1}{60}$ „	„
„ „ „ „ 139 Tagen		$\frac{139}{60}$ „	„
1 „ gibt „ „ „		$\frac{139}{6000}$ „	„
3516 „ geben „ „ „		$\frac{3516 \times 139}{6000}$ „	„

$$\text{Zinsen zu } 6\% = \frac{\text{Capital} \times \text{Tage}}{6000}.$$

Aufgaben.

1. Wie viel Zins geben 2790 fl. zu 6% in 85 Tagen?
2. Wie viel betragen die Zinsen zu 6%
 a) von 925 fl. in 48 Tagen? b) von 1019 fl. in 153 Tagen?
 c) von 1512 fl. in 260 Tagen? d) von 2349·25 fl. in 186 Tagen?

3. Wie viel Zinsen geben 758 fl. zu 6% vom 13. April bis letzten December?

Vom 13. April bis 13. Dec. sind 8 Mon. = 240 Tage
" 13. Dec. " 30. " 17 "
Zusammen 257 Tage.

4. Wie viel Zinsen à 6% geben
   a) 750 fl. vom 1. August bis 27. October?
   b) 2370 fl. vom 18. März bis 30. Juni?
   c) 1644 fl. vom 25. April bis 15. August?

5. Wie viel betragen die Zinsen von 1242 fl. zu 4% in 230 Tagen?

100 fl. in 360 Tag.	4 fl.
" " " 1 "	$\frac{4}{360} = \frac{1}{90}$ "
" " " 230 "	$\frac{230}{90}$ "
1 " " " "	$\frac{23}{900}$ "
1242 " " " "	$\frac{1242 \times 23}{900}$ "
	= 31·74 fl.

oder:

1242 × 230
2484
3726
285660 : 6000
47·61 fl. à 6%
— 15·87 " à 2%
31·74 fl. à 4%.

6. Wie viel Zinsen geben 9110 fl. zu 5% vom 2. Mai bis 15. October?
7. Wie viel Zinsen erhält man von 9217 fl. zu 3% in 174 Tagen?
8. Wie viel Zinsen geben 4856·5 fl. zu 7% in 72 Tagen?
9. Jemand hat zu beziehen:
   die Zinsen von 3045 fl. zu 6 % für 233 Tage,
   " " " 2813 " " 5 % vom 17. April bis 22. Sept.,
   " " " 4008 " " $6^3/_4$% " 24. Mai " 7. August;
   wie groß ist der ganze Zinsenbetrag?
10. 3450 fl. Capital geben in 7 Monaten $120^3/_4$ fl. Zins; wie viel Zins geben hiernach 4650 fl. Capital in 10 Monaten?
11. Jemand kauft am 27. April 2000 fl. Staatspapiere zum Curse 84 (d. i. 100 fl. Nominalwert zu 84 fl. Bezahlung); wie viel muss er dafür bezahlen, wenn die Zinsen à $4^1/_5$% seit 1. Jänner zu vergüten sind?

2000 fl. à 84	1680 fl.
$4^1/_5$% Zinsen für 117 Tage . .	27·3 "
	1707·3 fl.

12. Am 4. August werden 4400 fl. österr. Goldrente à 108 fl. verkauft; wie viel erhält man dafür, wenn die Zinsen zu 4% seit 1. April zu vergüten sind?

13. Wie viel muss man am 10. December für 8 Stück ganze Staatslose vom Jahre 1860 à 132 fl. bezahlen? (Nominalwert eines Stückes 500 fl., Zinsen zu 4% seit 1. November.)

14. Jemand verkauft am 15. Mai 2500 fl. Pfandbriefe zum Curse 100·80; wie viel nimmt er dafür ein? (Zinsen à $4^1/_2$% seit 1. Jänner.)

Berechnung des Capitals.

§. 79.

Welches Capital gibt zu 4% in 3 Jahren $154^1/_5$ fl. Zinsen? Die Zinsen für 1 Jahr zu 4%, d. i.

$\frac{4}{100}$ des Capitals .... $\frac{154^1/_5}{3}$ fl., also

$\frac{1}{100}$ „ „ .... $\frac{154^1/_5}{4 \times 3}$ fl., somit

das Capital selbst ...... $\frac{154^1/_5 \times 100}{4 \times 3}$ fl. $=$ 1285 fl.

Man kann auch so schließen:

Das Capital enthält so vielmal 100 fl., als die Zinsen von 100 fl. in den gegebenen Zinsen enthalten sind.

100 fl. geben zu 4% in 3 Jahren 4×3 fl. Zinsen; also

$$\text{Capital} = 100 \text{ fl.} \times \frac{154^1/_5}{4 \times 3}, \text{ wie oben.}$$

$$\text{Capital} = \frac{\text{Zinsen} \times 100}{\text{Procent} \times \text{Zeit in Jahren}}.$$

Aufgaben.

1. Wie groß ist das Capital, welches zu $5^1/_2$% jährlich 202 fl. 40 kr. Zinsen abwirft?
2. Ein Haus gibt im Durchschnitte jährlich 586 fl. reinen Ertrag; welchen Kaufpreis wird man dafür ansetzen, wenn man es zu 5% verkaufen, d. i. für jede 5 fl. Reinertrag 100 fl. Kaufschilling oder Capital haben will?
3. Jemand bezieht in 3 Jahren 556 fl. Zinsen; wie groß ist das Capital bei 6% Verzinsung?
4. Wie groß muss ein Capital sein, damit es zu $5^1/_2$% in $2^2/_5$ Jahren $735^9/_{10}$ fl. Zinsen bringt?
5. Welches Capital gibt
   a) zu $4^1/_2$% in 3 Jahren 837 fl. Zins?

b) zu $6\frac{1}{2}$ % in $1\frac{1}{2}$ Jahren 390 fl. Zins?

c) zu $5\frac{1}{4}$ % in 2 Jahren 7 Mon. 398·5 fl. Zins?

6. Von welchem Capitale erhält man

a) zu 4 % in $2\frac{3}{4}$ Jahren 213·5 fl. Zins?

b) zu $5\frac{1}{2}$ % in 1 Jahre 9 Mon. 247 fl. 17 kr. Zins?

c) zu 6 % in $7\frac{1}{2}$ Monaten 318·75 fl. Zins?

7. Welches Capital gibt zu 4 % in 108 Tagen 108 fl. Zinsen?

8. Ein Capital bringt zu $4\frac{1}{2}$ % jährlich 18 fl. Zins; wie viel jährlichen Zins bringt ein um 300 fl. größeres Capital zu 5 %?

9. Zwei Capitalien bringen jährlich 250 fl. Zinsen; das eine beträgt 2400 fl. und ist zu $4\frac{1}{2}$ % angelegt, das andere ist zu 5 % ausgeliehen; wie groß ist das letztere?

10. Welches Capital bringt zu 6 % in 4 Jahren ebenso viel Zinsen wie ein Capital von 4560 fl. zu 5 % in $2\frac{1}{2}$ Jahren?

Berechnung der Zeit.

§. 80.

Wie lange ist ein Capital von 2480 fl. zu 6 % angelegt, damit es 744 fl. Zinsen einbringt?

Man schließt: Das Capital ist so viele Jahre angelegt, wie oft die jährlichen Zinsen in den gegebenen Zinsen enthalten sind.

Die Zinsen von 2480 fl. zu 6 % für 1 Jahr betragen $\frac{2480 \times 6}{100}$ fl.; also ist

$$\text{Anzahl Jahre} = 744 : \frac{2480 \times 6}{100} = \frac{744 \times 100}{2480 \times 6} = 5.$$

$$\text{Anzahl Jahre} = \frac{\text{Zinsen} \times 100}{\text{Capital} \times \text{Procent}}.$$

Aufgaben.

1. In wie viel Jahren geben 225 fl. Capital zu 4 % 45 fl. Zinsen?
2. 900 fl. Capital gaben zu 5 % 112 fl. 50 kr. Zinsen; wie lange sind dieselben ausgeliehen worden?
3. In wie viel Zeit geben 3855 fl. zu 4 % 423·05 fl. Zins?
4. In welcher Zeit erhält man von 9420 fl. zu $4\frac{1}{2}$ % 1413 fl. Zinsen?
5. In wie viel Zeit geben

a) 4715 fl. Capital zu 4 % 377·2 fl. Zins?

b) 5212 fl. Capital zu $5\frac{1}{2}$ % 916 fl. 65 kr. Zins?

c) $9822\frac{3}{4}$ fl. Capital zu $5\frac{3}{4}$ % 1125·16 fl. Zins?

6/5 6. Wie lange muss ein Capital von 2800 fl. zu $5^1/_2$ % ausstehen, damit es mit Einrechnung der Zinsen auf 3185 fl. anwachse?

7. Wie lange muss ein Capital angelegt bleiben, damit die Zinsen a) zu 4 %, b) zu 5 %, c) zu 6 % ebenso viel betragen, als das Capital?

8. Am 1. Mai wurden 1550 fl. zu 4 % ausgeliehen; als die Rückerstattung erfolgte, betrug das Capital mit den Zinsen $1619^3/_4$ fl.; wann ist das Capital zurückgezahlt worden?

/ 9. Wie lange muss ein Capital von 1863 fl. zu 5 % anliegen, damit es so viel Zins bringe wie 8280 fl. zu $4^1/_2$ % in 9 Monaten?

Berechnung des Procentes.

§. 81.

Zu wie viel Procent muss ein Capital von 3445 fl. angelegt werden, um in 4 Jahren 689 fl. Zinsen zu geben?

Hier ist zu bestimmen, wie viel Zins 100 fl. Capital in 1 Jahre geben. Man schließt:

$$1 \text{ fl. Cap. gibt in 4 Jahren } \frac{689}{3445} \text{ fl. Zinsen}$$

$$1 \;\text{„}\;\; \text{„}\;\; \text{„}\;\; \text{„}\; 1 \text{ Jahre } \frac{689}{3445 \times 4} \text{ fl. Zinsen}$$

$$100 \;\text{„}\;\; \text{„ geben „}\; 1 \;\text{„}\;\; \frac{689 \times 100}{3445 \times 4} = 5 \text{ fl. Zinsen.}$$

Das Capital ist also zu 5 % angelegt.

$$\text{Procent} = \frac{\text{Zinsen} \times 100}{\text{Capital} \times \text{Zeit in Jahren}}.$$

Aufgaben.

1. 800 fl. Capital bringen in 1 Jahre 32 fl. Zinsen; zu wie viel % ist das Capital ausgeliehen?
2. Ein Capital von 5500 fl. gibt jährlich 330 fl. Zins; zu wie viel % verzinset es sich?
3. Jemand leihet 16000 fl. aus; wie viel % muss er verlangen, um davon ein jährliches Einkommen von 900 fl. zu genießen?
4. Ein Kaufmann hat in seinem Geschäfte ein Capital von 18356 fl.; am Schlusse des Jahres stellt sich ein reiner Gewinn von 1376 fl. 70 kr. heraus; wie viel % hat ihm das Capital eingebracht?
5. Ein Capital, das bei 4 % jährlich 218 fl. Zinsen trägt, soll künftighin jährlich um $81^3/_4$ fl. Zinsen mehr tragen; wie groß ist das Capital und zu wie viel % muss es angelegt werden?

6. Zu wie viel % geben
   a) 1648 fl. Cap. in $2^1/_2$ Jahren 185·4 fl. Zinsen?
   b) 1080 fl. Cap. in 3 Jahren 4 Mon. 144 fl. Zinsen?
   c) 3150 fl. Cap. in 8 Monaten $73^1/_2$ fl. Zinsen?
7. Zu wie viel % muss man 9110 fl. anlegen, damit sie vom 2. Mai bis 15. October 206 fl. 23 kr. Zins bringen?
8. Jemand kauft Staatspapiere, welche 5 % Zins tragen, zum Curse 95, d. i. er kauft je 100 fl. des Papieres für 95 fl.; zu wie viel % verzinset sich das Capital?
9. Jemand lieh 460 fl. auf ein Jahr zu 5%, musste sich aber die Zinsen gleich bei Empfang des Capitals abziehen lassen; um wie viel wurde er dabei übervortheilt und wie viel % wurden eigentlich gerechnet?
10. Ein Capital bringt in 3 Jahren zu $4^1/_2$% $60^3/_4$ fl. Zins, ein um 150 fl. größeres Capital bringt in derselben Zeit 90 fl. Zins; zu wie viel % ist das letztere verzinst?
11. Ein Haus wurde für 28500 fl. gekauft; der jährliche Mietzinsertrag ist 1980 fl.; zu wie viel % verzinset sich das Capital, wenn für Reparaturen 147 fl. in Abschlag gebracht werden und wenn die Hauszinssteuer sammt Zuschlägen 35% beträgt?
12. Bei wie viel % würde man von einem Capitale in 5 Jahren 1022 fl. Zinsen erhalten, wenn dasselbe Capital bei 5 % in 4 Jahren 876 fl. Zinsen bringt?

Berechnung des Endwertes eines Capitals.

§. 82.

Der Wert, zu welchem ein Capital nach einer bestimmten Zeit mit Zurechnung der Zinsen anwächst, heißt der **Endwert** des Capitals, im Gegensatze zu dem **Anfangswerte**, d. i. dem Werte desselben im Anfange dieser Zeit.

Um den **Endwert** eines Capitals nach einer bestimmten Zeit zu berechnen, darf man nur zu dem Anfangscapitale die Zinsen für diese Zeit addieren. Z. B.

Ein Capital von 3640 fl. ist zu 5 % angelegt; wie groß ist dessen Endwert nach $2^1/_2$ Jahren?

Anfangswert	3640 fl.
Zinsen à 5 % für $2^1/_2$ Jahre	455 „
Endwert	4095 fl.

Die Lösung könnte auch unmittelbar so geschehen:

100 fl. wachsen mit den Zinsen zu 5 % nach $2\frac{1}{2}$ Jahren auf 112·5 fl. an, somit ist

Endwert von 1 fl. . . . . 1·125 fl., also
„ „ 3640 „ . . 3640 × 1·125 = 4095 fl.

Der Endwert eines Capitals ist demnach gleich dem Producte aus dem Anfangswerte desselben und dem Endwerte eines Guldens.

Aufgaben.

1. Jemand nimmt 2480 fl. zu 5 % auf 3 Jahre auf; wie viel wird er nach dieser Zeit an Capital und Zinsen zu zahlen haben?
2. Jemand hat 750 fl. nach 6 Monaten sammt den Zinsen zu 4 % zu berichtigen; wie viel hat er zu zahlen?
3. Für eine nach 3 Jahren fällige Schuld werden sogleich 360 fl. gezahlt; wie groß war dieselbe, wenn die Zinsen mit 5 % in Abzug gebracht wurden?
4. Wenn 3050 fl. durch 2 Jahre 4 Monate zu $5\frac{1}{2}$% ausstanden, wie viel muss nach dieser Zeit an Capital und Zins zurückgezahlt werden?
5. Ein Capital von 4840 fl. ist zu $4\frac{1}{2}$% angelegt; wie groß ist sein Endwert nach $2\frac{1}{2}$ Jahren?
6. Welchen Endwert haben
   a) 3216 fl. bei $4\frac{3}{4}$% Zins nach 4 Jahren?
   b) 3580 „ „ $5\frac{1}{4}$% „ „ 2 Jahren 8 Mon.?
   c) 4050 „ „ 6 % „ „ 3 J. 9 Mon. 15 Tagen?
7. Für ein Haus bietet A 18500 fl. bar, B 19540 fl. nach 9 Monaten zahlbar; wenn nun der Verkäufer das Geld zu 6 % ausleihen kann, welches Anbot ist für ihn vortheilhafter?
8. Jemand ist seit 6. März 1547 fl. schuldig, die er zu $5\frac{1}{2}$% verzinset; wie viel beträgt seine Schuld am 30. Juni?
9. Jemand nimmt 2345 fl. auf 42 Tage zu 7 % auf Zins; wie viel wird er nach Verlauf dieser Zeit zurückzuzahlen haben?
10. Wie groß ist der Endwert eines zu $6\frac{1}{2}$% angelegten Capitals von 5460 fl. nach 174 Tagen?
11. Ein Kaufmann, der am 18. Sept. 3550 fl. und am 5. Nov. 1749 fl. zu zahlen hat, bezahlt beide Beträge sammt 5 % Zinsen am 31. Dec.; wie viel zahlt er da zusammen?

Berechnung des Anfangswertes eines Capitals.

§. 83.

Ein zu 5% angelegtes Capital beträgt nach 3 Jahren sammt den Zinsen 3289 fl.; wie groß ist der Anfangswert des Capitals?

Bei 5% Verzinsung hat 1 fl. nach 3 Jahren einen Endwert von 1·15 fl. Umgekehrt ist

Anfangswert von 1·15 fl. .... 1 fl., also

„ „ 1 fl. .... $\frac{1}{1\cdot15}$ fl., und somit

„ „ 3289 fl. .... $\frac{3289}{1\cdot15}$ fl. = 2860 fl.

Der Anfangswert eines Capitals enthält also so viele Gulden, wie oft der Endwert eines Guldens in dem Endwerte des Capitals enthalten ist; oder

$$\text{Anfangswert des Capitals} = \frac{\text{Endwert des Capitals}}{\text{Endwert eines Guldens}},$$

welche Beziehung auch aus §. 82 durch Umkehrung folgt.

Aufgaben.

1. Ein zu 4% ausgeliehenes Capital betrug nach $2^1/_2$ Jahren mit den Zinsen 825 fl.; wie groß war der Anfangswert desselben?
2. Jemand zahlt für ein durch 6 Jahre benütztes Capital sammt den $5^1/_2$% Zinsen 452·20 fl. zurück; wie groß war das ursprüngliche Capital?
3. Für ein Capital, welches durch 3 Jahre zu $5^1/_2$% ausgestanden ist, erhält man an Capital und Zinsen 5359 fl.; wie groß war das Capital?
4. Welches Capital muss man ausleihen, um bei $4^3/_4$% Zinsen nach $2^1/_2$ Jahren 5549 fl. Capital sammt Zinsen zu erhalten?
5. Welchen Anfangswert hat ein Capital, das bei 5% Verzinsung in 3 Jahren zu 883·55 fl. anwächst?
6. Wie groß ist der Anfangswert eines Capitals, welches
   a) zu 6% nach $3^1/_2$ Jahren den Endwert 907·5 fl.,
   b) „ $4^1/_2$% „ $2^1/_3$ „ „ „ 5967 „
   c) „ $5^1/_4$% „ 6 Monaten „ „ 3546·72 „
   hat?
7. Ein Capital war sammt den Zinsen zu 5% in 72 Tagen auf 1575·6 fl. angewachsen; welchen Anfangswert hatte das Capital?

2. Die Discontrechnung.

§. 84.

Wenn Jemand eine Summe Geldes, die er erst nach einer gewissen Zeit ohne Zinsen zu zahlen verpflichtet ist, sogleich bezahlt, so ist es billig, dass ihm wegen der früheren Bezahlung ein bestimmter Abzug gewährt werde. Dieser Abzug heißt **Discont** oder **Rabatt**, und das um den Discont verminderte Schuldcapital der **Barwert** oder **gegenwärtige** (auch discontierte) Wert des Capitals.

Z. B. Jemand will ein unverzinsliches Capital von 4230 fl., das er nach $2^1/_2$ Jahren abzutragen hat, sogleich bezahlen; a) wie groß ist der Barwert dieses Capitals, b) wie groß ist der Discont, wenn man 5 % rechnet?

Soll durch die frühere Bezahlung der Schuldsumme weder dem Gläubiger noch dem Schuldner ein Nachtheil erwachsen, so muss der Barwert vermehrt um die Zinsen, die er bis zum Zahlungstermine tragen würde, der Schuldsumme gleich werden. Hiernach ist die Aufgabe, den Barwert eines später fälligen Schuldcapitals zu bestimmen, gleichbedeutend mit der in §. 83 behandelten Aufgabe: aus dem Endwerte eines Capitals dessen Anfangswert zu berechnen; daher ist

$$\text{Barwert} = \frac{\text{Schuldcapital}}{\text{Endwert eines Guldens}}.$$

Für das obige Beispiel hat man:

Endwert von 100 fl. zu 5 % nach $2^1/_2$ Jahren . 112·5 fl., daher
" " 1 " . . . . 1·125 "
somit ist

$$\text{der gesuchte Barwert} = \frac{4230}{1\cdot125}\ \text{fl.} = 3760\ \text{fl.}$$

Probe: Barwert	3760 fl.
Zinsen von 3760 fl. à 5 % in $2^1/_2$ J.	470 "
Schuldcapital	4230 fl.

Den Discont kann man entweder als Differenz zwischen dem Schuldcapitale und dem bereits gefundenen Barwerte desselben oder auch unmittelbar berechnen. Man hat

Discont = 4230 fl. — 3760 fl. = 470 fl.

Oder unmittelbar. Da 100 fl. Barzahlung zu 5 % nach $2^1/_2$ Jahren 112·5 fl. wert sind, so sind umgekehrt 112·5 fl., welche unverzinslich nach $2^1/_2$ Jahren gezahlt werden sollen, gegenwärtig 100 fl. wert, d. h. von je 112·5 fl. werden, wenn sie $2^1/_2$ Jahre vor der Verfallszeit gezahlt werden, 12·5 fl. als Discont in Abzug gebracht. Hieraus ergibt sich, dass der Discont nicht von 100 selbst, sondern von der Summe aus 100 und den Discontprocenten gerechnet werden müsse (Rechnung auf Hundert). Man schließt also:

$$\begin{array}{lll} \text{Discont von } 112\cdot5 \text{ fl.} \ldots\ldots\ldots & 12\cdot5 \text{ fl.} & \\ \quad\text{,,} \quad\text{,,} \quad 1 \quad\text{,,} \ldots\ldots\ldots & \frac{12\cdot5}{112\cdot5} \text{ fl.} = \frac{1}{9} & \\ \quad\text{,,} \quad\text{,,} \quad 4230 \text{ ,,} \ldots\ldots\ldots & \frac{4230}{9} \text{ fl.} = 470 \text{ fl.} & \end{array}$$

Unrichtig, wenn auch bequemer wäre es, wenn man den Discont einfach als Zinsen des später fälligen Schuldcapitals bestimmen, also bei der Berechnung die Zahl 100 selbst zugrunde legen würde (Rechnung von Hundert). Man hätte:

4230 fl. à 5%			
211·50 fl. für 1 Jahr		Schuldsumme	4230 fl.
211·50 „ „ 1 „		ab Discont	528·75 „
105·75 „ „ $^1/_2$ „		Barwert	3701·25 fl.
528·75 fl. Discont.			

Eine Barzahlung von 3701·25 fl. würde aber mit den 5% Zinsen nach $2^1/_2$ Jahren nicht die Schuldsumme 4230 fl., sondern nur 4163·91 fl. geben; also wäre dabei der Gläubiger im Nachtheile.

Besonders grell tritt die Unrichtigkeit dieser Berechnungsweise hervor, wenn es sich um längere Zeiträume handelt. Z. B. Jemand will eine Schuld von 100 fl., die unverzinslich nach 20 Jahren fällig ist, gegen 5% Discont sogleich zahlen; da der Discont ebenfalls 100 fl. betragen würde, so bekäme der Gläubiger gar nichts. Wären die 100 fl. erst nach 40 Jahren zu zahlen, so würde der Discont 200 fl. betragen und müssten dem Schuldner gar noch 100 fl. ausgefolgt werden.

Aufgaben.

1. Eine Summe von 920 fl., welche a) nach 3 Jahren, b) nach 36 Tagen unverzinslich fällig ist, wird sogleich bar gezahlt; wie viel beträgt in jedem Falle der Discont à 5%? Wie viel würde der Discont bei der Rechnung von Hundert betragen?
2. Wie viel sind 850 fl., welche nach 2 Jahren bezahlt werden sollen, bei 5% Discont jetzt wert?
3. Welchen Barwert haben
   a) 3953 fl., zahlbar nach 4 Jahren, bei $4^1/_2$% Discont?
   b) 5893 „ „ „ $2^2/_3$ „ „ 4 „ „
   c) 5247 „ „ „ $3^1/_2$ „ „ 5 „ „
4. Jemand hat 2620 fl. nach 4 Monaten zu bezahlen; er wünscht aber seine Schuld sogleich zu berichtigen; wie viel beträgt die contante Zahlung bei 6% Discont?

5. A soll an B nach 5 Jahren 1245 fl. bezahlen; wie viel hätte er bei $5\frac{1}{4}\%$ Discont nach 2 Jahren zu zahlen?

6. Jemand erbt 4850 fl., welche aber erst nach 5 Jahren ausgezahlt werden sollen; man will ihm auf seinen Wunsch gegen $6\frac{1}{2}\%$ Discont das Geld gleich auszahlen; wie viel beträgt die Erbschaft in barer Summe?

7. Für ein Haus bietet A 25200 fl. nach 1 Jahre, B 26350 fl. nach 2 Jahren unverzinslich zahlbar; welches Anbot hat bei 5% Discont einen größeren Barwert?

8. Jemand kauft einen Weingarten für 8000 fl. mit der Bedingung, dass er 2580 fl. sogleich, 2380 fl. nach einem Jahre und den Rest nach 3 Jahren ohne Zinsenvergütung zahlt; er entschließt sich aber, auch die beiden letzten Posten mit $6\frac{1}{4}\%$ jährlichem Discont sogleich zu entrichten; wie groß ist die ganze Barzahlung?

9. Für eine nach $2\frac{1}{2}$ Jahren fällige Schuld erhielt Jemand bar 2480 fl.; wie groß war die Schuld, wenn 5% Discont für das Jahr gerechnet wurden?

10. Jemand ist nach einer gewissen Zeit 5355 fl. schuldig; er bezahlt bei 6% jährlichem Discont bar 5250 fl.; nach welcher Zeit hätte er zahlen müssen?

11. Wie lange vor der Verfallszeit fand die Barzahlung einer Schuld von 982 fl. statt, wenn der Discont à 5% jährlich, 228 fl. betrug?

~~12.~~ Jemand bezahlte für ein Capital, das nach 4 Jahren zahlbar war, bar 1600 fl.; der Discont betrug 288 fl.; wie viel % jährlich sind gerechnet worden?

13. Jemand hatte nach $3\frac{1}{3}$ Jahren 598 fl. zu zahlen; er erbot sich dafür sogleich 520 fl. bar zu zahlen; wie viel % Discont hat er gerechnet?

14. Jemand kauft ein Haus für 29000 fl., welche vertragsmäßig nach 5 Jahren unverzinslich zahlbar sind; er bezahlt nun 6000 fl. bar, 7500 fl. nach $2\frac{1}{3}$ Jahren und den Rest nach 4 Jahren; wie groß ist dieser Rest, wenn für jede Vorausbezahlung 5% jährlicher Discont bewilligt wird?

§. 85.

Wenn auch die Bestimmung des Discontes nach der Rechnung von Hundert unrichtig ist, so findet sie doch im kaufmännischen Verkehr bei Waren- und Wechselbeträgen allgemeine Anwendung, weil sie bequemer ist als die Rechnung auf Hundert und weil es sich dabei nur um kürzere Zeiträume handelt, für welche auch die Differenz zwischen den Resultaten der beiden Berechnungsarten nur unbedeutend ist.

Den Wechseldiscont berechnet man so, wie die Zinsen auf Tage, für die Zeit vom Kauftage bis zum Verfallstage, wobei jedoch der Tag des Discontierens nicht gezählt wird. Die Monate rechnet man nach der Zahl der Kalendertage, das Jahr aber zu 360 Tagen.

Beim Warendiscont oder Warensconto wird das Procent gewöhnlich schon für die Zeit, um welche die Barzahlung vor der bedungenen Verfallszeit erfolgt, angegeben.

Aufgaben.

1. Ein Wechsel von 1249 fl. per 15. Juni wird am 8. Mai mit $4^1/_2\%$ Discont verkauft; wie viel beträgt a) der Discont, b) der discontierte Wert?

Im Mai	23 Tage	
„ Juni	15 „	
	38 Discounttage.	
Wechselsumme	1249	fl.
ab $4^1/_2\%$ Discont für 38 Tage	5·93	„
Discontierter Wert	1243·07	fl.

$$
\begin{array}{rl}
12\,49 \times 38 & \\
\hline
37\,47 & \\
9\,992 & \\
\hline
47{\cdot}462 & \\
\hline
7{\cdot}910 & \text{à } 6\% \\
-\ 1{\cdot}978 & \text{à } 1^1/_2\% \\
\hline
5{\cdot}932 & \text{fl. Discont.}
\end{array}
$$

2. Ein Wechsel von 3485 fl., welcher nach 35 Tagen zahlbar ist, wird zu 5% discontiert; wie viel beträgt der Discont und wie viel der discontierte Wert?

3. Ein Wechsel von 4235 Mark wird in Hamburg den 17. Juli mit $3^1/_2\%$ discontiert; wie viel ist dafür zu zahlen, wenn derselbe erst den 7. September fällig ist?

4. Ein per 15. August ausgestellter Wechsel über 849 fl. wird am 26. Juni zu $6^1/_2\%$ discontiert; wie viel ist der Wechsel an diesem Tage wert?

5. Wie groß ist bei einem Warenbetrage von 5192 fl. a) der Sconto à 2%, b) die Barzahlung?

Warenbetrag	5192	fl.
Sconto 2%	103·84	„
contante Zahlung ..	5088·16	fl.

6. Wie viel beträgt der Sconto bei einem Warenbetrage von 2063 fl. a) zu 1%, b) zu $1^1/_2\%$, c) zu $1^3/_4\%$, d) zu 2%?

7. 4 Fässer Öl, Brutto 1118 *kg*, Tara 10%, werden zu 64·18 fl. per 100 *kg* Netto mit $2^1/_2\%$ Sconto gekauft; wie viel beträgt die Barzahlung?

8. Jemand kauft in Triest 5 Fässer einer Ware, gewogen Brutto 5219 *kg* mit 10% Tara; wie viel wird er dafür bar bezahlen, wenn man 100 *kg* Netto zu 84·25 fl. mit 2% Sconto rechnet?

Vermischte Aufgaben
über die Verhältnis- und Procentrechnungen.

§ 86.

1. Wie viele Zinsen geben jährlich $749\frac{3}{4}$ fl. Capital
 a) à $4\frac{1}{2}$ %? b) à $5\frac{3}{4}$ %? c) à 6 %?
2. Welches Capital gibt zu $5\frac{1}{2}$ % jährlich 189 fl. Zinsen?
3. Zu wie viel % muss ein Capital von 3127 fl. angelegt werden, damit es jährlich 125 fl. 8 kr. Zinsen trage?
4. Ein senkrecht in die Erde gesteckter Stab von $1\frac{2}{5}$ *m* Länge wirft einen $2\frac{7}{10}$ *m* langen Schatten; wie hoch ist ein Thurm, welcher zu derselben Zeit einen Schatten von $30\frac{1}{4}$ *m* Länge wirft?
5. Von 461 20jährigen Personen erreichen 300 das 50. Lebensjahr; wie viel % sterben in dem Alter von 20 bis 50 Jahren?
6. Wie hoch kommen 8 Fässer Honig, gewogen 2538 *kg* Brutto, wenn die Tara zu 13 % und der Centner Netto zu 64 fl. 45 kr. gerechnet wird?
7. $111\frac{1}{9}$ griechische Drachmen betragen 45 fl. ö. W.; wie viel Gulden ö. W. sind 2085 Drachmen?
8. Jemand kauft zwei Fässer Wein von gleicher Güte, zusammen 26 *hl* 26 *l*; das erste Fass enthält 15 *hl* 66 *l* und kostet $391\frac{1}{2}$ fl.; wie viel kostet der im zweiten Fasse enthaltene Wein?
9. Wie viel betragen die Zinsen
 a) von 2520 fl. zu $5\frac{1}{4}$ % in 3 Jahren 4 Mon.?
 b) „ 5400 „ „ $4\frac{1}{2}$ % „ $2\frac{1}{2}$ „ ?
 c) „ 3075 „ „ 4 % „ 9 Monaten?
10. Wie viel muss man heute zu 6 % anlegen, damit man nach 3 Jahren sammt Zinsen 1475 fl. zurück erhalte?
11. Ein Wechsel von 2379 fl., welcher den 15. October fällig ist, wird am 9. September mit 6 % Discont verkauft; wie groß ist der discontierte Wert des Wechsels?
12. Die Bevölkerung einer Stadt, welche in der Zeit vom Jahre 1840 bis 1880 um 49 % zugenommen hat, betrug im Jahre 1880 28032 Einwohner; wie groß war die Volkszahl jener Stadt im Jahre 1840?
13. Eine Arbeit wäre von 15 Arbeitern in 10 Tagen zustande gebracht worden; nach 3 Tagen verließen 3 Arbeiter, und nach folgenden 5 Tagen wieder 3 Arbeiter die Arbeit; in wie viel Tagen wird sie beendigt?

Zur 13

14. Eine nach 3 Jahren zahlbare Schuld von 15000 fl. wird mit 6% jährlichem Discont sogleich bezahlt; wie viel beträgt a) der Discont, b) die Barzahlung?
15. Es kauft jemand zwei Sorten Kaffee; 4 *kg* der ersten Sorte kosten 6 fl. 40 kr. und 6 *kg* der zweiten Sorte 8 fl. 64 kr.; wie verhalten sich die Preise beider Sorten?
16. Ein Kaufmann kann das *kg* Kaffee für 1 fl. 60 kr. verkaufen; wie theuer darf er das *kg* einkaufen, wenn er beim Verkaufe 15% gewinnen will?
17. Bei einer um 18 fl. per Centner eingekauften Ware werden 12 % gewonnen; wie viel % werden gewonnen, wenn man bei demselben Verkaufspreise den Centner um 5 fl. theurer einkauft?
18. Jemand ist in Berlin 250 Goldmark schuldig; wie viel Gulden österr. Silbergeld wird er dafür zu zahlen haben, wenn 100 Goldmark = 50 fl. in Gold sind und das Gold gegen Silber 24 % Agio genießt?

---

19. Ein Wucherer leiht ein Capital zu 10 % auf ein Jahr aus, zieht jedoch die Zinsen sogleich ab; wie viel % berechnet er eigentlich?
20. Wie lange hatten 364 fl. Capital ausgestanden, damit sie so viel Zinsen gaben, als man von 390 fl. Capital in $9^1/_2$ Monaten bekam?
21. Ein Capital gibt in einer gewissen Zeit zu 6 % 508·24 fl. Zinsen; wie viel Zinsen gibt es in derselben Zeit a) zu $4^3/_4$ %, b) zu $5^1/_2$ %?
22. Einem Tuchhändler kommen 4 Stück Tuch à 30 *m* beim Einkaufe auf 512 fl.; wie theuer wird er das *m* verkaufen, wenn er dabei 15 % gewinnen will?
23. Welche Strecke wird eine Locomotive bei gleichmäßiger Bewegung in 4 Stunden 24 Minuten durchlaufen, wenn sie in 2 Stunden 15 Minuten eine Strecke von 69 *km* 355 *m* zurücklegt?
24. Den Arbeitern einer Fabrik wurde eine Lohnerhöhung von 16 % zugestanden; dann erhielten 80 Arbeiter zusammen täglich 134 fl. 56 kr. Wie groß war der tägliche Lohn eines Arbeiters vor der Lohnerhöhung?
25. Welches Capital gibt

a) zu 6 %	in 1 Jahr 4 Mon.	209·2	fl.	Zinsen?
b) „ $4^1/_2$ %	„ 1 Jahr 8 Mon.	417	„	„ ?
c) „ $4^3/_4$ %	„ 2 J. 6 Mon. 15 Tagen	574·75	„	„ ?

26. Jemand kauft am 18. März 4000 fl. 5 % Pfandbriefe der österr.-ungar. Bank mit Coupons vom 1. Jänner à 102·45; wie viel muss er dafür zahlen?

27. Eine Ware kommt sammt 2 % Einkaufs-Provision auf 3207 fl. 90 kr.; a) wie viel beträgt die Provision? b) wie groß ist der reine Warenbetrag?

28. Für eine verkaufte Ware erhält man nach Abzug von 2 % Provision 2158 fl. 85 kr.; wie viel beträgt die Provision?

29. Wie viel Silber wird man für $4\frac{5}{8}$ *kg* Gold erhalten, wenn sich das Silber zum Golde dem Preise nach wie 1 zu $23\frac{1}{2}$ verhält?

30. Wie viel Achtguldenstücke sind gleich 1 nordamerikanischen Goldadler (Eagle), da 1 Achtguldenstück 5·80643 *g* feines Gold enthält, 1 Adler 16·7183 *g* wiegt und $\frac{9}{10}$ fein ist?

31. Ein Holzhändler kauft für $917\frac{1}{2}$ fl. Holz und verkauft dasselbe für $1027\frac{3}{5}$ fl.; wie viel % gewinnt er beim Verkaufe?

32. Jemand zahlte für eine Schuld, von welcher ihm ein Nachlass von 3 % bewilligt wurde, 2913 fl. 60 kr.; wie groß war a) der nachgelassene Betrag, b) die Schuld?

33. Den 5ten Theil eines Grabens haben 22 Arbeiter in 12 Tagen gemacht; wenn nach dieser Zeit 6 Arbeiter entlassen werden, in wie viel Tagen werden die übrigen das Fehlende zustande bringen?

34. Jemand kauft 27 *hl* Wein à $28\frac{3}{4}$ fl. und 32 *hl* à $25\frac{2}{5}$ fl., von dem ersten verkauft er das *l* zu 36 kr., von dem zweiten zu 32 kr.; wie viel % und wie viel in Gulden beträgt sein ganzer Gewinn?

// **35.** Jemand ist an A 500 fl., an B 700 fl., an C 400 fl., an D 300 fl. schuldig, er hat aber nur 1710 fl. im Vermögen; wie viel erhalten die Gläubiger nach Verhältnis ihrer Forderung?

36. Ein Triester kauft in Amsterdam 3214 Pfd. Kaffee und bezahlt das Pfd. mit $\frac{3}{5}$ fl. holländisch; die Spesen betragen 20 %; wie viel fl. ö. W. muss er bezahlen, wenn 100 fl. holl. = 103 fl. ö. W. berechnet werden?

---

37. Eine Ware, welche 4192 *kg* Brutto wog, wurde mit 880 fl. bezahlt; wie theuer kommt der Centner Netto, wenn man $16\frac{2}{3}$ % Tara rechnet?

38. Wenn die Provision von einem Warenbetrage à 2 % 184 fl. 50 kr. beträgt, wie groß wäre die Provision zu $2\frac{1}{2}$ %?

39. Ein Capital ist sammt Zinsen à 5 % in 6 Jahren auf 455 fl. angewachsen; wie groß war das Capital?

40. Jemand hat drei Capitalien ausgeliehen; 541 fl. zu $4\frac{1}{2}$ %, 853 fl. 80 kr. zu 5 %, 1356 fl. zu $6\frac{1}{4}$ %; welches Capital müsste er zu $5\frac{1}{2}$ % ausleihen, um eben so viel jährliche Zinsen zu erhalten?

41. 1840 fl., fällig in 3 Jahren, werden sogleich mit 240 fl. Discont bezahlt; wie viel % jährlicher Discont wurde in Rechnung gebracht?

42. Eine Arbeit kann von 12 Mann in 8 Tagen vollendet werden; nun haben 16 Mann schon 4 Tage gearbeitet; wie lange haben jetzt noch 4 Mann daran zu arbeiten?

43. In wie viel Jahren geben

a) 650 fl. Cap. zu 6 % 143 fl. Zinsen?
b) 3840 „ „ „ $5^3/_4$% 552 „ „ ?
c) $793^3/_4$ „ „ „ 4 % 155·25 „ „ ?

44. Auf einem Hause lasten zwei Schuldcapitalien, welche zusammen jährlich mit 640 fl. verzinst werden; von dem einen Capital, welches 6000 fl. beträgt, bezahlt man 4%, von dem andern dagegen 5%; wie groß ist das zweite Capital?

45. A erhielt bei der Vertheilung eines Gewinnes 891 fl. 30 kr.; wie viel wird B erhalten, wenn sich der Antheil des A zu dem des B wie $3^1/_2 : 7^1/_4$ verhalten soll?

46. Bei einer Concursmassa betragen die Activa 37500 fl., die Passiva 210000 fl.; wie viel % erhalten die Gläubiger, wenn die Vertheilung unter alle gleichmäßig erfolgen soll?

47. Ein am 15. October zahlbarer Wechsel pro 928 fl. wird am 2. September zu 6% discontiert; wie viel beträgt der Discont?

48. Aus einer Partie Garn sollen 20 Stück Zeug, jedes 36·8 *m* lang, gefertigt werden. Als jedoch bereits 11 Stück fertig waren, wurde angeordnet, dass aus dem Reste noch 12 Stück hergestellt werden sollen; wie lang wird nun jedes dieser Stücke werden?

49. Ein Körper legt in 81 Secunden 672·3 *m* zurück; wie viel Zeit braucht er zu einer 215·8 *m* kürzeren Strecke?

50. Von welchem Capital betragen die monatlichen Zinsen à $5^3/_4$% 26 fl. 76 kr.?

51. Ein zu 5% ausgeliehenes Capital wurde nach 2 Jahren sammt den Zinsen zurückgezogen und dann die ganze Summe zu 6% angelegt; wie groß war das ursprüngliche Capital, wenn die jährlichen Zinsen des gegenwärtigen Capitals 429 fl. betragen?

52. Ein Kaufmann hat zwei Stück Tuch von verschiedener Güte eingekauft, 36 *m* à 3·75 fl. und 30 *m* à 4·20 fl.; beim Verkaufe des ersten Stückes gewinnt er 16%; wie viel % gewinnt er an dem zweiten Stücke, wenn er beim Verkaufe beider Stücke zusammen 301·5 fl. einnimmt?

53. Jemand zahlte für einen Warenbetrag, von welchem ihm ein Sconto von $1^3/_4$ % bewilligt wurde, 1551 fl.; wie groß war a) der Sconto, b) der Warenbetrag?

54. Wie viel Zinsen trägt ein Capital von 2896 fl. zu $5^1/_2$ % in 2 Jahren 6 Monaten?

55. Welches Capital gibt in 1 Jahre 8 Monaten eben so viel Zinsen, als $3715^1/_2$ fl. in 2 Jahren 4 Monaten?

56. Wie groß ist bei 5% Zinsen der gegenwärtige Wert von 100 fl., zahlbar a) nach 1 Jahre, b) nach 2 Jahren, c) nach 6 Monaten?

57. Für eine Ware, welche im Einkaufe 1740 fl. kostete, wurden wegen der Provision 1770 fl. 45 kr. gezahlt; wie viel % betrug die Provision?

58. Von einer Partie Seide im Einkaufspreise von 9842·47 fl. beträgt die Provision 147·39 fl.; wie viel % sind es?

59. 1 Centner Öl kostet im Einkaufe 56 fl.; wie theuer muss das *kg* verkauft werden, um 12% zu gewinnen?

60. Der Verkaufspreis einer Ware von 1590 fl. enthält einen Gewinn von 90 fl.; wie viel % beträgt dieser?

61. Von zwei Röhren füllt die eine einen Wasserbehälter in 2 Stunden 10 Minuten, die andere in 1 Stunde 45 Minuten; wenn nun die erste Röhre in jeder Stunde 4·2 *hl* Wasser liefert, wie viel liefert die zweite in 1 Stunde?

62. Zu wie viel % geben

a)	2092 fl. Cap.	in $2^1/_2$ Jahren	621·5 fl.	Zinsen?
b)	8250 „ „	„ 2 Jahren 7 Mon.	852·5 „	„ ?
c)	3690 „ „	„ 4 Jahren	811·8 „	„ ?

63. Ein Haus, dessen Bau ein Capital von 28500 fl. erforderte, trägt jährlich 2096 fl. Mietzins; die jährlichen Abgaben betragen 554 fl.; für die Reparaturen werden jährlich 130 fl. gerechnet. Zu wie viel % verzinst sich das Baucapital?

64. Der Nahrungsgehalt der Kartoffeln verhält sich zu jenem der Runkelrüben wie $16^7/_{10} : 10^3/_4$; wie viel *kg* Runkelrüben haben den gleichen Nahrungsstoff wie 100 *kg* Kartoffeln?

65. Die neuen österr. Zehner haben einen Feingehalt von 400 Tausendtheilen und ein Gewicht von $1^2/_3$ *g*; wie viel feines Silber ist in einem solchen Münzstücke?

66. 375 Stück neue österr. Zwanziger enthalten $^1/_2$ *kg* feinen Silbers, der Feingehalt ist 0·5; wie viel *kg* wiegt eine Post von 750 Zwanzigern?

67. Wie viel darf ein Kaufmann beim Einkaufe für 1 Centner zahlen, wenn er 2 % Provision geben muſs und das *kg* mit 10 % Gewinn für 60 kr. verkaufen will?
68. Bei $4^3/_4$ % jährlichem Discont werden von einer nach $6^2/_3$ Monaten zahlbaren Schuldsumme $47^1/_2$ fl. abgezogen; wie groß ist die Schuldsumme?
69. Bei dem Kaufe eines Ackers wird bestimmt, daſs von der Kaufsumme 600 fl. sogleich, die übrigen 636 fl. aber nach 1 Jahre ohne Zinsenvergütung gezahlt werden sollen; der Käufer zahlt jedoch auch diese sogleich und erhält 6 % Discont; wie viel hat er zusammen bar zu zahlen?

---

70. Wie viel beträgt die Barzahlung eines Warenbetrages von 818 fl. nach Abzug von $1^1/_3$ % Sconto?
71. Zu wie viel % ist ein Capital ausgeliehen, welches jetzt 180 fl. Zinsen bringt, während es früher à 5 % einen Zinsenertrag von 200 fl. ergab?
72. A und B treten zu einem Geschäfte zusammen und legen 12000 fl. ein; wenn nun A 7000 fl. eingelegt hat und das Geschäft einen Gewinn von 960 fl. abwirft, wie viel gewinnt A, wie viel B?
II 73. Ein Maurermeister forderte zu einem Baue 15000 Ziegel, zu $2^3/_5$ dm^3 groß; nachdem er 9600 solche Ziegel erhalten, können ihm nur Ziegel von $2^1/_5$ dm^3 geliefert werden; wie viel solche Ziegel muſs man ihm noch geben?
74. Wie viel beträgt der in dem Verkaufspreise von 828 fl. enthaltene Gewinn à 15 %?
75. Ein Getreidehändler kaufte um 1215 fl. Gerste und verkaufte bei 12 % Gewinn das *hl* zu $5^1/_{25}$ fl.; wie viel *hl* hatte er gekauft?
76. Wie viel Zinsen geben
    a) 1350 fl. à 6 % in 72 Tagen?
    b) 4065 fl. à 4 % in 123 Tagen?
    c) 2104 fl. à $5^1/_4$ % in 182 Tagen?
77. Jemand nimmt 2400 fl. zu 4 % auf und leiht dieselbe Summe zu $6^1/_2$ % weg; wie viel gewinnt er in 3 Jahren?
78. Jemand kauft 4 % österr. Goldrente, je 100 fl. für 109 fl.; zu wie viel % verzinst sich sein Capital, wenn das Goldagio 24 % beträgt?
79. Jemand kauft 28 Centner Ware für 1148 fl. in Gold, welches $23^1/_2$ % Agio hat und verkauft das *kg* für 64 kr. Silbergeld; wie viel % gewinnt er?

80. Ein Vorrath von Lebensmitteln reicht für 207 Personen auf 54 Tage; von demselben werden 243 Personen 29 Tage lang verpflegt; wie lange reicht der Rest für 243 Personen?

81. Ein Canal kann von 24 Mann in 10 Wochen hergestellt werden; nachdem durch 4 Wochen 30 Mann daran gearbeitet haben, entläſst man 10 Mann; in wie viel Wochen wird dann der noch übrige Theil des Canals fertig gebracht werden?

82. Wenn man eine Ware für 150 fl. verkauft, so verliert man 10 %; wie theuer muſs man sie verkaufen, um 5 % zu gewinnen?

83. Beim Verkauf einer Ware zu 462 fl. gewinnt man $16\frac{2}{3}$ %; wie viel % gewinnt man, wenn sie für 420 fl. verkauft wird?

84. Für ein Landgut bietet A 25000 fl. bar, B 26400 fl. nach 1 Jahre, C 27500 fl. nach 2 Jahren ohne Zinsen zahlbar; welches Anbot ist bei 5 % einfacher Verzinsung für den Verkäufer das vortheilhafteste?

85. Ein Wiener kauft einen Wechsel auf Paris über 2705 Franken im Curse zu 49·50 (100 Franken = 49·50 fl. ö. W.); wie viel in ö. W. muſs er dafür bezahlen?

86. Ein Triester Kaufmann hat in Hamburg 3182 Mark zu fordern; wie viel fl. ö. W. wird er dafür beziehen, wenn der Curs auf Hamburg 61·25 ist? (100 Mark = 61·25 fl. ö. W.)

87. Ein Wiener Kaufmann erhält aus Triest 4 Kisten Weinbeeren, gewogen Brutto 972 *kg*, Tara 18 *kg* pr. Kiste, zu 30 fl. pr. 100 *kg* Netto, Provision 2 %; Einfuhrzoll, Fracht und andere Spesen betragen 54 fl. 60 kr.; wie theuer muſs er das *kg* verkaufen, um 20 % zu gewinnen?

Anhang.

Übersicht der wichtigsten Maße, Gewichte und Rechnungsmünzen.

1. Zeit- und Bogenmasse.

Die Zeit wird nach Jahren, Monaten, Wochen, Tagen u. s. w., und zwar nach folgender Eintheilung bestimmt:

1 Jahr	hat	12 Monate,	1 Tag	hat	24 Stunden,
1 Monat	„	30 Tage,	1 Stunde	„	60 Minuten,
1 Woche	„	7 „	1 Minute	„	60 Secunden.

In der Zinsrechnung wird zwar gewöhnlich der Monat zu 30 Tagen, und somit das Jahr zu 360 Tagen angenommen; nach dem Kalender aber hat der Februar 28 oder 29 Tage, April, Juni, September, November haben je 30 und die übrigen Monate haben je 31 Tage, so dass auf ein gemeines Jahr 365, auf ein Schaltjahr 366 Tage kommen.

Der Umfang eines Kreises wird in 360 gleiche Bogen getheilt, welche Grade heißen. Jedem Bogengrade entspricht am Mittelpunkte des Kreises ein Winkel, welcher auch ein Grad und zwar ein Winkelgrad genannt wird. Sowohl bei den Bogen als bei den Winkeln wird jeder Grad (°) in 60 Minuten (′) und jede Minute in 60 Secunden (″) eingetheilt.

2. Zählmasse.

Ein Schock hat 60, ein Schilling 30, ein Mandel 15, ein Dutzend 12 Stücke.

Ein Ballen Papier hat 10 Ries, ein Ries 10 Buch, ein Buch 10 Lagen, eine Lage 10 Bogen.

3. Masse, Gewichte und Münzen der österreichisch-ungarischen Monarchie.

Der neuen österr. Maß- und Gewichtsordnung vom 25. Juli 1871 liegt das metrische System, das zuerst in Frankreich und später in den meisten europäischen Staaten eingeführt wurde, zugrunde.

Die Normaleinheit dieses Systems bildet das Meter, welches französische Gelehrte als den 10000000sten Theil der Länge eines Meridianquadranten unserer Erde annahmen, welches aber nach späteren astronomischen Messungen genauer nur als der 10000855ste Theil des Meridianquadranten befunden wurde.

Aus der Länge des Meters werden nicht nur die Flächen- und Körpermaße, sondern auch die Gewichte dieses Systems auf eine sehr einfache Art abgeleitet.

Längenmaße.

Die Einheit des Längenmaßes ist das Meter.

Die Vielfachen und Untertheilungen des metrischen Systems werden sowohl beim Längen- als bei den übrigen Maßen zur leichteren Auffassung und bequemeren Rechnung durchgängig nach dem Decimalsysteme gebildet. Die Vielfachen sind 10fache, 100fache, 1000fache, 10000fache; die Untertheilungen 10tel, 100stel, 1000stel. Sie bekommen jedoch nicht, wie in den alten Systemen, besondere Eigennamen, sondern behalten den Namen der Grundeinheit, welchem zur näheren Bestimmung gewisse Wörter vorgesetzt werden, die man, damit sie für alle Völker gleich bleiben, aus der griechischen und lateinischen Sprache entlehnt hat.

Die Vielfachen sowohl des Meters als der darauf beruhenden Flächen-, Körper- und Gewichtsmaße benennt man dadurch, dass man den Namen der Grundeinheit die griechischen Zahlwörter mit der Endung a oder o, und zwar

Deka	für	das	10fache,
Hekto	„	„	100fache,
Kilo	„	„	1000fache und
Myria	„	„	10000fache

vorsetzt. Die Untertheilungen werden durch Vorsetzen lateinischer Zahlwörter mit der Endung auf i bezeichnet, und zwar durch

Deci	für	den	10ten	Theil,
Centi	„	„	100sten	„
Milli	„	„	1000sten	„

Demgemäß ergibt sich für die Vielfachen und Untertheilungen des metrischen Längenmaßes folgende Stufenleiter:

1 Myriameter	=	10000	Meter,
1 Kilometer (*km*)	=	1000	"
1 Hektometer	=	100	"
1 Dekameter	=	10	"
1 Meter (*m*)	=	1	"
1 Decimeter (*dm*)	=	0·1	"
1 Centimeter (*cm*)	=	0·01	"
1 Millimeter (*mm*)	=	0·001	"

Jedes Maßglied aus der Stufenleiter der Längenmaße hat 10 Einheiten des nächstniedrigeren Maßgliedes.

In die österr. Maß- und Gewichtsordnung sind jedoch das Hektometer und das Dekameter, da sie für das praktische Leben und für die Wissenschaft entbehrlich erscheinen, nicht aufgenommen worden. In derselben besteht daher für die Längenmaße folgende Eintheilung:

$$1 \text{ Myriameter} = 10\,km = 10000\,m,$$
$$1\,km = 1000\,m;$$
$$1\,m = 10\,dm = 100\,cm = 1000\,mm,$$
$$1\,dm = 10\,cm = 100\,mm,$$
$$1\,cm = 10\,mm.$$

Flächenmaße.

a) Als Flächenmaße dienen allgemein Quadrate, deren Seiten den Längeneinheiten gleich sind. Ein Quadrat, dessen Seite 1 Meter lang ist, heißt ein Quadratmeter (m^2). Theilt man jede Seite eines Quadratmeters in 10 gleiche Theile und verbindet die gegenüberliegenden Theilungspunkte durch gerade Linien, so entstehen 100 Quadrate, deren jedes ein Decimeter zur Seite hat, also ein Quadratdecimeter (dm^2) ist; 1 m^2 hat demnach 100 dm^2. Verfährt man auf ähnliche Art mit dem Quadratdecimeter, so erhält man 100 Quadratcentimeter (cm^2); und ebenso ergibt sich 1 cm^2 100 mm^2. — In gleicher Weise folgt auch, dass 1 Quadratmyriameter = 100 km^2, 1 km^2 = 100 Quadrathektometer à 100 Quadratdekameter à 100 m^2 ist.

Jedes Maßglied aus der Stufenleiter der Flächenmaße hat also 100 Einheiten des nächstniedrigeren Maßgliedes.

Da das Quadrathektometer und das Quadratdekameter in der österreichischen Maß- und Gewichtsordnung nicht vorkommen, so hat man in dieser für die allgemeinen Flächenmaße folgende Scala:

$$1 \text{ Quadratmyriameter} = 100\ km^2 = 100000000\ m^2,$$
$$1\ km^2 = 1000000\ m^2,$$
$$1\ m^2 = 100\ dm^2 = 10000\ cm^2 = 1000000\ mm^2,$$
$$1\ dm^2 = 100\ cm^2 = 10000\ mm^2,$$
$$1\ cm^2 = 100\ mm^2.$$

b) Die Einheit des Bodenflächenmaßes bildet das Ar (a), d. i. ein Quadrat, dessen Seite 10 m lang ist; 1 Ar ist also gleich 100 m^2.

Vielfaches: Das Hektar (ha) = 100 a.

Es ist demnach

$$1\ ha = 100\ a = 10000\ m^2,$$
$$1\ a = 100\ m^2.$$

1 km^2 ist = 100 ha.

Körpermaße.

a) Wie das Flächenmaß, so beruht auch das Körpermaß auf dem Längenmaße. Man wählt dafür Würfel, deren Seiten oder Kanten den Längeneinheiten gleich sind. Ein Würfel, dessen Seite 1 Meter ist, heißt ein Cubikmeter (m^3). Jede Fläche eines Cubikmeters ist ein Quadratmeter und enthält 100 Quadratdecimeter. Denkt man sich das Cubikmeter hohl, die Grundfläche desselben in 100 dm^2, und die Höhe in 10 dm getheilt, so kann man zunächst auf der Grundfläche 100 Würfel auflegen, deren jeder 1 dm zur Seite hat und daher ein Cubikdecimeter (dm^3) heißt. Diese 100 Cubikdecimeter bilden eine Schichte von 1 dm Höhe. Da aber das Cubikmeter 10 dm hoch ist, so fasst es 10 solche Schichten von je 100 dm^3, daher im ganzen 1000 dm^3; also 1 m^3 = 1000 dm^3. Ebenso folgt, dass 1 dm^3 = 1000 cm^3, 1 cm^3 = 1000 mm^3, dass ferner 1 Cubikmyriameter = 1000 km^3, 1 km^3 = 1000 Cubikhektometer u. s. w. ist.

Jedes Maßglied aus der Stufenleiter der allgemeinen Körpermaße enthält also 1000 Einheiten des nächstniedrigeren Maßgliedes.

In der österr. Maß- und Gewichtsordnung entfallen das Cubikhektometer und das Cubikdekameter; es besteht daher für die allgemeinen Körpermaße folgende Eintheilung:

$$1 \text{ Cubikmyriameter} = 1000\ km^3 = 1000000000000\ m^3,$$
$$1\ km^3 = 1000000000\ m^3;$$
$$1\ m^3 = 1000\ dm^3 = 1000000\ cm^3 = 1000000000\ mm^3,$$
$$1\ dm^3 = 1000\ cm^3 = 1000000\ mm^3,$$
$$1\ cm^3 = 1000\ mm^3.$$

b) Die Einheit des Hohlmaßes sowohl für trockene als für flüssige Gegenstände ist das Liter (l), welches einem Cubikdecimeter gleich ist.

Vielfaches:	das Hektoliter (hl)	$= 100$	Liter,
Untertheilungen:	das Deciliter (dl)	$= 0 \cdot 1$	„
	das Centiliter (cl)	$= 0 \cdot 01$	„

Es ist demnach

$$1\ hl = 100\ l = 1000\ dl = 10000\ cl,$$
$$1\ l = 10\ dl = 100\ cl,$$
$$1\ dl = 10\ cl.$$

Gewichte.

Die neuen Gewichte werden aus den Körpermaßen hergeleitet.

Die Grundbenennung für die Gewichte bildet das Gramm (g), d. i. das Gewicht eines Cubikcentimeters destillierten Wassers im Zustande der größten Dichtigkeit.

Da jedoch eine so kleine Wassermenge, wie sie ein Cubikcentimeter fasst, nicht leicht genau gemessen und gewogen werden kann, füllte man, um das Urgewicht des metrischen Systems zu bestimmen, das 1000fache dieses Rauminhaltes, d. i. ein Cubikdecimeter, mit reinem Wasser im Zustande seiner größten Dichtigkeit, welche bei 4 Grad Wärme des 100theiligen Thermometers vorhanden ist, und wog dasselbe im luftleeren Raume ab. Das so gefundene Gewicht war das 1000fache eines Gramms, also ein Kilogramm (kg).

Das Kilogramm, gleich dem Gewichte eines Cubikdecimeter destillierten Wassers im luftleeren Raume bei der Temperatur von 4 Grad Wärme des 100theiligen Thermometers, ist die Einheit des österreichischen Gewichtes.

Vielfache: die Tonne (t) $= 1000\ kg$; der metrische Centner (q) $= 100\ kg$.

Untertheilungen:

das	Dekagramm (dkg)	$= 0 \cdot 01$	Kilogr.	$= 10$	Gramm,
„	Gramm (g)	$= 0 \cdot 001$	„	$= 1$	„
„	Decigramm (dg)	$= 0 \cdot 0001$	„	$= 0 \cdot 1$	„
„	Centigramm (cg)	$= 0 \cdot 00001$	„	$= 0 \cdot 01$	„
„	Milligramm (mg)	$= 0 \cdot 000001$	„	$= 0 \cdot 001$	„

Es ist demnach

$$1\ t = 10\ q = 1000\ kg = 100000\ dkg = 1000000\ g,$$
$$1\ q = 100\ kg = 10000\ dkg = 100000\ g;$$

$$1\,kg = 100\,dkg = 1000\,g,$$
$$1\,dkg = 10\,g;$$
$$1\,g = 10\,dg = 100\,cg = 1000\,mg,$$
$$1\,dg = 10\,cg = 100\,mg,$$
$$1\,cg = 10\,mg.$$

Zur Prüfung des Feingehaltes von Gold- und Silberlegierungen besteht kein besonderes Gewicht. Der Feingehalt wird nach Tausendtheilen bestimmt. Der Feingehalt des Goldes oder Silbers ist 900 Tausendtheile ($\frac{900}{1000}$ oder $\frac{9}{10}$), heißt: unter 1000 Gewichtstheilen des legierten Metalls sind 900 Theile Gold oder Silber, und 100 Theile Zusatz (Kupfer). Feines Gold oder Silber ist 1000theilig.

Geld und Rechnungsmünzen.

a) Der gesetzliche Münz- und Rechnungsfuß der österreichisch-ungarischen Monarchie ist der 45-Guldenfuß, wornach aus einem halben Kilogramm feinen Silbers 45 Gulden geprägt werden. Der Gulden (fl.) wird in 100 Kreuzer (kr.) eingetheilt. Dieses Geld wird die österreichische Währung genannt.

Vor dem 1. November 1858 rechnete man nach Gulden, Kreuzern und Pfennigen Conventions-Münze. 1 Gulden = 60 Kreuzer à 4 Pfennige. 20 fl. C.-M. enthielten eine kölnische Mark = 233·87 g feinen Silbers. 100 fl. C.-M. = 105 fl. ö. W.

b) Geprägte Münzen gibt es:

Goldmünzen:

Achtguldenstücke, von denen $77^1/_2$, und Vierguldenstücke, von denen 155 auf ein halbes Kilogramm Gold, das $^9/_{10}$ fein ist, gehen.

Diese Goldmünzen haben keinen festen, unabänderlichen Wert und werden nur als Handelsmünzen angesehen.

Auch werden noch die österreichischen Ducaten, von denen 67 Stück auf eine köln. Mark = 233·87 g Gold, das $986^1/_9$ Tausendtheile fein ist, gehen, als Handelsmünze ausgeprägt.

Silbermünzen:

Als Landesmünze: Zweigulden-, Eingulden- und Viertelguldenstücke der österr. Währung.

Als Silber-Scheidemünze: Stücke zu 20, 10 und 5 Kreuzer.

Nebstdem werden noch die sogenannten Levantiner Thaler mit dem Bildnisse der Kaiserin Maria Theresia und der Jahreszahl 1780 à 2 fl. C.-M. als Handelsmünze ausgeprägt.

Kupfer-Scheidemünzen:

Stücke zu 4, 1 und $^{1}/_{2}$ Kreuzer.

c) An Papiergeld hat man Banknoten zu 10, 100 und 1000 Gulden, und Staatsnoten zu 1, 5 und 50 Gulden österreichischer Währung.

4. Die wichtigsten ausländischen Masse, Gewichte und Rechnungsmünzen.

Deutschland.

Längenmaße: 1 Stab (Meter) = 100 Neuzoll (Centimeter) à 10 Strich (Millimeter), 10 Stab = 1 Kette (Dekameter), 1 Meile = 7·5 *km*.

Getreidemaße: 1 Cubikstab hat 1000, 1 Scheffel 50 Kannen (Liter).

Flüssigkeitsmaße: 1 Fass (Hektoliter) hat 100 Kannen (Liter) à 2 Schoppen.

Gewichte: 1 Centner hat 100 Pfund (Zollpfund) à 50 Neuloth à 10 *g* à 10 *dg* à 10 *cg* à 10 *mg*. 2 Pfund sind 1 *kg*, 1000 *kg* = 20 Centner = 1 Tonne.

Rechnungsmünze: Deutschland rechnet in der Goldwährung nach Mark à 100 Pfennige, 1 Zehnmarkstück = 5 fl. ö. W. in Gold, daher 1 Mark = $^{1}/_{2}$ fl. und 1 Pfennig = $^{1}/_{2}$ kr. ö. W.

England.

Längenmaße: 1 Yard 3 Fuß. 1 Fuß = 0·3048 *m*. 1 englische Meile = 1·6093 *km*.

Getreidemaße: 1 Quarter hat 8 Bushels à 8 Gallons. 1 Quarter = 2·9078 *hl*.

Flüssigkeitsmaß: Die Tonne Wein hat 252, für Ale 192 Gallons. 1 Gallon = 4·5435 *l*.

Gewichte: Das Handels- oder Avoir-du-poids-Gewicht (adp.): die Tonne hat 20 Centner zu 112 Pfund. 1 Pfund adp. = 0·4536 *kg*. Das Troy-Pfund = 0·3733 *kg*.

Rechnungsmünze: England rechnet in Gold nach Pfund oder Livres Sterling à 20 Shilling à 12 Pence oder Deniers. 1 Pfund Sterling = 10·1051 fl. ö. W. in Gold.

Frankreich.

Maße und Gewichte: die metrischen.

Rechnungsmünze: Frankreich rechnet in Gold und Silber nach Franken à 100 Centimes. 1 Frank = 0·405 fl. ö. W.

Italien.

Maße und Gewichte: die metrischen.

Rechnungsmünze: 1 Lira à 100 Centesimi = 1 Frank = 0·405 fl. ö. W.

Russland.

Längenmaße: 1 Saschen = 3 Arschin = 7 Fuß. 1 russ. Fuß = 0·3048 *m*. 1 Arschin = 0·7112 *m*. 1 Werst (Meile) = 1·0668 *km*.

Getreidemaße: 1 Tschetwert hat 8 Tschetwerik à 4 Tschetwerka. 1 Tschetwert = 2·099 *hl*.

Flüssigkeitsmaße: 1 Fass hat 40 Wedro à 10 Kruschke. 1 Kruschka = 1·2299 *l*.

Gewichte: 1 Pud hat 40 Pfund à 96 Solotnik. 1 Pfund = 0·4095 *kg*.

Rechnungsmünze: 1 Silberrubel à 100 Kopeken = 1·6192 fl. österr. W.

Delegierten { 60 aus Ung.

Wählen direkt 120 Personen } 60 aus Österreich

1 Delegation hat den Zweck

Cis- und Transleithanien

Kg.

4