

UDK/UDC: 359.42:628.144

Prejeto/Received: 18.05.2017

Izvirni znanstveni članek – Original scientific paper

Sprejeto/Accepted: 02.11.2017

UPORABA METODE SPEKTRALNEGA RAZBITJA GRAFOV ZA ZASNOVO MERILNIH OBMOČIJ V VODOVODNEM OMREŽJU

AN APPLICATION OF SPECTRAL GRAPH PARTITION FOR DESIGNING DISTRICT METERED AREAS IN WATER SUPPLY NETWORKS

Daniel Kozelj^{1,*}, Marjan Gorjup², Marjeta Kramar Fijavž¹

¹Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, Univerza v Ljubljani, Jamova 2, 1000 Ljubljana

²Petrol d.d., Dunajska cesta 50, 1000 Ljubljana, Slovenija

Izvleček

Pri upravljanju vodovodnih sistemov se spopadamo z velikim deležem neprodane vode, pri čemer največji delež odpade na dejanske vodne izgube. Za zmanjšanje količine neprodane vode lahko v vodovodnem sistemu oblikujemo merilna območja, kjer se na vtoku merita parametra tlak in pretok vode. Zasnova merilnih območij upravljalcem omogoča hitrejšo ugotavljanje vodnih izgub in učinkovitejši nadzor nad delovanjem celotnega sistema. Prikazana je metoda za razdelitev kompleksnih vodovodnih omrežij na posamezna območja, ki uporablja algoritem za spektralno razbitje grafov. Za določitev ustreznih realnih rešitev smo vključili tudi hidravlične vhodne podatke. Opisano metodo smo testirali na realnem primeru.

Ključne besede: vodovodni sistem, merilna območja, algoritem, teorija grafov, spektralno razbitje.

Abstract

One of the major challenges in managing water supply systems is the high percentage of non-revenue water, wherein the largest contributor is the actual loss of water. In order to decrease the volume of the non-revenue water, district metered areas (DMAs) are introduced, where hydraulic parameters such as pressure and flow are measured. Dividing water distribution systems into different DMAs allows the water management to identify water losses and effective control over the whole system more quickly. We present a method for partitioning complex networks, which uses the algorithm for spectral partitioning of a graph. In order to generate hydraulically suitable solutions also hydraulic input data was also used. The proposed method was tested on a real case study.

Keywords: water supply system, district metered areas, algorithm, graph theory, spectral partition.

* Stik / Correspondence: daniel.kozelj@fgg.uni-lj.si

© Kozelj D. et al.; Vsebina tega članka se sme uporabljati v skladu s pogoji [licence Creative Commons Priznanje avtorstva – Nekomercialno – Deljenje pod enakimi pogoji 4.0.](#)

© Kozelj D. et al.; This is an open-access article distributed under the terms of the [Creative Commons Attribution – Non Commercial – ShareAlike 4.0 Licence.](#)

1 Uvod

Merilno območje (angl. District Metered Area, DMA) je zaključen del vodovodnega sistema, za katerega lahko izmerimo količino vode, ki vanj vteka oziroma izteka (Morrison et al., 2007). Koncept uvedbe merilnih območij je ponazorjen na sliki 1. Na shemi so prikazana na novo ustvarjena merilna območja, lokacije merilnih mest (M) na vtokih v območja ter zaprte cevi (rdeče prečrtane), ki dovoljujejo pretok vode le preko merjenih cevni odsekov.

Na podlagi meritev izračunamo skupno bilanco vode v opazovanem merilnem območju v izbranem časovnem obdobju (Lambert, 2003). Z vpeljavo merilnih območij v vodovodni sistem enostavneje razumemo delovanje celotnega sistema. S pomočjo evidentiranih vrednosti tlakov in pretokov hitreje prepoznamo novo nastale vodne izgube zaradi poškodb cevi. Ker so posamezna merilna območja ločena od preostalega dela vodovodnega sistema, jih lahko enostavneje upravljamo in nadziramo (Morrison, 2004). Običajno na merilnih mestih merimo pretok in tlak, možno pa je tudi merjenje parametrov, povezanih s kakovostjo vode.

Poleg vzpostavitve merilnih območij lahko vodovodne sisteme upravljamo in nadziramo tudi s pomočjo numeričnih modelov, t. i. *hidravličnih modelov* vodovodnih sistemov. Hidravlični model vodovodnega sistema je sestavljen iz numeričnega opisa objektov, ki jih delimo na linijske in točkovne elemente. Med linijske elemente prištevamo cevi, ventile in črpalke, medtem ko so točkovni elementi vozlišča, vodni viri in vodohrani. Takšna struktura gradnikov hidravličnega modela ustreza matematičnemu objektu, imenovanem *graf*, pri čemer linijski elementi predstavljajo *povezave* in točkovni elementi *točke* ali *vozlišča* grafa. Matematično področje, ki se ukvarja s takimi objekti, se imenuje teorija grafov (Wilson & Watkins, 1997). Namen našega dela je poiskati in primerno prirediti algoritme iz teorije grafov

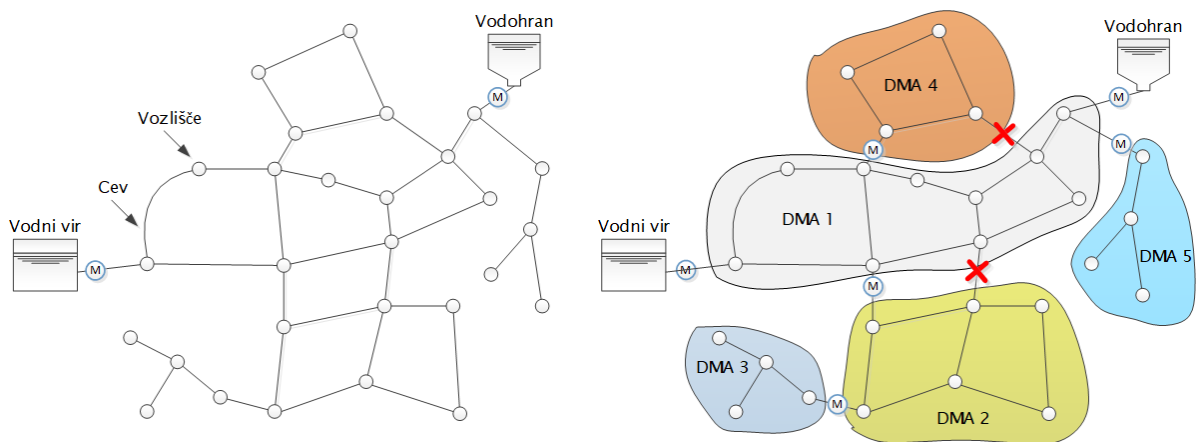
za učinkovito razdelitev vodovodnega omrežja na merilna območja, pri čemer bi radi dodatno upoštevali tudi hidravlične kriterije.

Mnogi raziskovalci so si pri zasnovi merilnih območij že pomagali s teorijo grafov. Dobljene metode so bile sprva bolj robustne in so podale manj ustrezne rešitve končno zasnovanih merilnih območij, tudi hidravlični kriteriji so bili manj upoštevani. Prvi so se s tem problemom ukvarjali Tzachkov, Alcocer-Yamanaka in Bourguett-Ortíz (Tzatchkov et al., 2006). Za določitev neodvisnih območij so uporabili t. i. načelo LIFO (angl. last in first out). Sempewo, Pathirana in Vairavamoorthy (Sempewo et al., 2009) so razvili orodje za oblikovanje območij, ki so ga poimenovali METIS. To orodje je že imelo možnost vključitve nekaterih hidravličnih kriterijev v obliki uteži na povezavah grafa.

Di Nardo in soavtorji (Di Nardo et al., 2014) so uporabili Dijkstrov algoritem iskanja najkrajših poti, za uteži so vzeli energijo v sistemu. Gomes, Sa Marques in Sousa (Gomes et al., 2012) so uporabili Floyd-Warshallov algoritem. Pri novih zasnovah so preverjali spremenjene vrednosti hitrosti vode in tlaka. Upoštevana je tudi investicijska vrednost zaradi spremenjenega sistema. Herrera in soavtorji (Herrera et al., 2012) so izbrali algoritem kopičenja, ki pa je omejen po številu merilnih območij.

Alvisi in Franchini (Alvisi & Franchini, 2014) sta poskusila z algoritmom iskanja v širino. V metodi z algoritmom kumulativno seštevata porabo vode in hkrati iščeta najkrajšo pot od vodnega vira do preostalih vozlišč. Diao, Zhou in Rauch (Diao et al., 2013) so vozlišča pripisali posameznih skupnostim, ki so kasneje združene, če ne kršijo pogoja o velikosti.

Ferrari, Savic in Becciu (Ferrari et al., 2014) z rekurzivno uporabo bisekcije razpolavljajo območja, dokler obe novi podobmočji ne ustrezata predpisanim mejam glede porabe



Slika 1: Shema enovitega in na merilna območja razdeljenega vodovodnega sistema.

Figure 1: Scheme of a uniform and DMA water supply system.

vode. Tudi tu je uporabljen algoritem iskanja v širino. Hajebi in soavtorji (Hajebi et al., 2014) so predlagali metodo, v kateri je upoštevana večparameterska optimizacija in medsebojna neodvisnost območij. Galdiero (Galdiero, 2015) je ponovno uporabil Floyd-Warshallov algoritem. Pri metodi je upošteval več hidravličnih in ekonomskih kriterijev ter izmed dobljenih rešitev nato izbral optimalno.

V našem delu bomo prikazali uporabo algoritma, ki ga je razvil Hespanha (Hespanha, 2004) in temelji na spektralnem razbitju grafa. V naslednjem razdelku najprej razložimo osnovne enačbe hidravlike, ki nastopajo pri izračunu hidravličnih spremenljivk v vodovodnem sistemu. Nato predstavimo algoritem spektralnega razbitja grafov ter opišemo, kako ga primerno prilagodimo za uporabo na vodovodnih sistemih. Na koncu opisano metodo uporabimo na konkretnem primeru in komentiramo rezultate.

2 Hidravlično ozadje

2.1 Hidravlično modeliranje cevovodnih sistemov

Hidravlični modeli so pomembno orodje v procesu odločanja, ki omogočajo numerične simulacije delovanja realnega vodovodnega sistema. Na podlagi matematičnih formulacij fizikalnih zakonitosti toka vode je mogoče s podatki o fizikalnih karakteristikah sistema, obtežnih primerih in robnih pogojih simulirati delovanje vodovodnih sistemov, ki odraža stanje sistema v naravi. Za vzpostavitev hidravličnega modela se zahteva zajem fizikalnih in nefizikalnih lastnosti posameznih gradnikov vodovodnega sistema.

Matematične formulacije hidravličnih modelov so razdeljene v štiri skupine, ki se delijo po zajemu časovne spremenljivosti pretoka: stalni tok, razširjena časovna simulacija (kvazi) stalnega toka, nestalni nestisljivi tok in nestalni stisljivi tok oziroma analiza vodnega udara (Boulos et al., 2006). Najpogosteje uporabljeni simulaciji za analizo obsežnih vodovodnih sistemov sta statična simulacija stalnega toka in razširjena časovna simulacija stalnega toka. V

nadaljevanju bodo podani splošni izrazi za zapis zakona o ohranitvi mase za točkovne gradnike in zakona o ohranitvi energije za linijske gradnike, ki jih obravnavamo kot “dolge cevovode”. Navedene enačbe tvorijo sistem nelinearnih enačb, katerega rešitev predstavlja tudi rešitev hidravličnega modela vodovodnega sistema.

Zakon o ohranitvi mase pove, da je za vsako vozlišče v dovedeni oziroma odvzeti pretok q_v enak razliki vsote pretokov Q_e v ceveh e , kjer tekočina v vozlišče v vteka, in vsote pretokov $Q_{e'}$ v ceveh e' , kjer tekočina iz vozlišča v izteka (Boulos *et al.*, 2006),

$$\sum_{\substack{e \\ \rightarrow v}} Q_e - \sum_{\substack{e \\ \leftarrow v}} Q_{e'} = q_v. \quad (1)$$

Zakon o ohranitvi energije pravi, da je razlika med energijama na odseku med dvema vozliščema v in v' enaka seštevku energijskih izgub v zaporednih cevovodih e_1, \dots, e_l obravnavanega odseka med v in v' (Boulos *et al.*, 2006):

$$H_v - H_{v'} = \sum_{i=1}^l K_{e_i} Q_{e_i} |Q_{e-i}|^{m-1} \quad (2)$$

V enačbi (2) člen K_{e_i} združuje koeficiente, ki predstavljajo karakteristike posameznega cevovoda za izračun energijskih izgub, eksponent m pa določimo glede na uporabljeni model za izračun energijskih izgub (npr. za Darcy-Weisbachov model je $m = 2$). Karakteristika cevovoda K_{e_i} je v Darcy-Weisbachovem modelu linijskih energijskih izgub podana z izrazom:

$$K_{e_i} = \frac{1}{2g} \cdot \frac{f_i L_i}{d_i S_i^2}, \quad (3)$$

kjer je f_i brezdimenzijski koeficient trenja $[-]$, L_i dolžina cevovoda $[m]$, d_i premer cevovoda $[m]$, g gravitacijska konstanta $[m/s^2]$ in S_i premer cevovoda $[m^2]$, $i = 1, \dots, l$.

Za vzporedne cevovode, ki tvorijo zanko, je seštevek energijskih izgub celotnega odseka zanke enak nič (Boulos *et al.*, 2006):

$$H_v - H_{v'} = \sum_{i=1}^l K_{e_i} Q_{e_i} |Q_{e-i}|^{m-1} = 0 \quad (4)$$

Nabor enačb (1)–(4) za vsa vozlišča in vse odseke cevovodov je osnova za določitev nelinearnega sistema hidravličnega modela vodovodnega sistema, katerega rešitev daje informacije o neznanih pretokih Q_e v cevovodih in neznanih količinah energije H_v v vozliščih. Skupno število neznank v sistemu je vsota vseh neznanih pretokov in neznanih energij v vozliščih. Za reševanje tega nelinearnega sistema enačb je bilo razvitih več metod. Najbolj razširjena med njimi je gradientna metoda, ki sta jo leta 1987 predlagala Todini in Pilati (Todini & Pilati, 1987) in je implementirana v hidravlični simulacijski model EPANET 2 (Rossman, 2000).

2.2 Todinijev odpornostni indeks I_r

Formulacijo odpornostnega indeksa I_r je podal Todini (Todini, 2000). Odpornostni indeks I_r prikaže, kolikšno stopnjo varnosti oskrbe s pitno vodo je mogoče še zagotoviti ob nastopu motenj (npr. požar ali lom cevi) v celotnem vodovodnem sistemu. Zaradi povečanega odjema oziroma iztekanja iz cevovoda se povečajo pretoki v ceveh in zmanjša tlak v vodovodnem omrežju. Vrednost indeksa I_r določa stopnjo varnosti oskrbe. Pove nam torej, ali je na odjemnih mestih na razpolago dovolj tlaka za zagotovitev nemotene oskrbe s pitno vodo. Brezdimenzijski indeks I_r je definiran s pomočjo razmerij različnih moči. Todini navaja tri različne primere moči: *celotno moč* P_A , *porabljeno moč* P_D in *razpoložljivo moč* P_N . Enačba (5) podaja zvezo med njimi:

$$P_A = P_D + P_N. \quad (5)$$

Celotna moč P_A (6) je določena z energijskim potencialom na vodnem viru oziroma na vtoku v vodovodni sistem. Definirana je s produktom specifične teže vode $\gamma [N/m^3]$ in vsote produkta izdatnosti vodnih virov $Q_i^s [l/s]$ ter hidravlične višine $H_i^s [m]$ (angl. head) vseh n_s vodnih virov:

$$P_A = \gamma \sum_{i=1}^{n_s} Q_i^s H_i^s. \quad (6)$$

Ker vodovodni sistemi vključujejo tudi črpalke, to dodatno moč P_p vključimo v enačbo (6) ter jo s tem preoblikujemo v:

$$P_A = \gamma \sum_{i=1}^{n_s} Q_i^s H_i^s + \sum_{i=1}^{n_p} P_p. \quad (7)$$

Moč P_D (8) predstavlja porabljeno moč v vodovodnem sistemu zaradi linijskih energijskih izgub, ki nastanejo zaradi trenja vodnega toka z ostenjem cevovoda. Skupno porabljeno moč P_D dobimo tako, da za vsako cev posebej določimo linijske energijske izgube $H_i^e [m]$, nato seštejemo produkte linijskih izgub in pretokov $Q_i^e [l/s]$ v vseh n_e ceveh v vodovodnem omrežju ter pomnožimo s specifično gostoto vode $\gamma [N/m^3]$:

$$P_D = \gamma \sum_{i=1}^{n_e} Q_i^e H_i^e. \quad (8)$$

Razliko celotne moči P_A in porabljene moči P_D predstavlja razpoložljiva moč P_N (9), ki ostane na razpolago posameznim vozliščem. Izračunamo jo kot produkt specifične teže vode $\gamma [N/m^3]$ in vsote produkta porabe vode $q_i^v [l/s]$ ter hidravlične višine $H_i^v [m]$ v vseh n_v vozliščih sistema:

$$P_N = \gamma \sum_{i=1}^{n_v} q_i^v H_i^v. \quad (9)$$

Če v vsakem vozlišču upoštevamo le minimalno hidravlično višino $\overline{H}_i^v [m]$, dobimo minimalno

preostalo moč. Minimalna hidravlična višina je v tem primeru seštevek nadmorske višine vozlišča in minimalno potrebnega tlaka v tem vozlišču za nemoteno oskrbo s pitno vodo. Z razliko celotne moči P_A in minimalne preostale moči v vozliščih dobimo maksimalno vrednost porabljene moči:

$$P_{D_{\max}} = P_A - \gamma \sum_{i=1}^{n_v} q_i^v \overline{H}_i^v. \quad (10)$$

Todinijev odpornostni indeks I_r končno izračunamo po enačbi:

$$I_r = 1 - \frac{P_D}{P_{D_{\max}}}. \quad (11)$$

Vrednost odpornostnega indeksa I_r je vedno manjša od 1. Večja kot je vrednost odpornostnega indeksa I_r , večja je zanesljivost oskrbe s pitno vodo končnih porabnikov, ki se oskrbujejo iz tega vodovodnega sistema (Todini, 2000).

3 Metoda

3.1 Algoritem spektralnega razbitja grafov

Denimo, da imamo povezan graf $G = (V, E)$, kjer je V množica n točk (vozlišč) grafa in E množica povezav med temi n točkami, za nek $n \in \mathbb{N}$. Graf želimo razdeliti na $k \leq n$ podgrafov G_1, G_2, \dots, G_k tako, da bo vsaka točka iz originalnega grafa pripadala natančno enemu izmed dobljenih podgrafov. Če z V_i označimo množico točk podgraфа G_i , torej velja:

$$V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k, \quad (12)$$

kjer $V_i \cap V_j = \emptyset, \quad i \neq j.$

Pri tem je vsak $G_i = (V_i, E_i)$, $i = 1, \dots, k$, inducirani podgraf grafa G , kar pomeni, da prevzame vse povezave grafa G med točkami znotraj V_i . Povezava originalnega grafa, ki ima

krajišči v različnih podmnožicah iz (12), ni vsebovana v nobenem od dobljenih podgrafov G_i . Opisano razbitje grafa označimo s \mathcal{P} :

$$\mathcal{P} := \{G_1, G_2, \dots, G_k\}. \quad (13)$$

Graf G je utežen: $c_{vv'} \geq 0$ označuje utež na povezavi $vv' \in E$. Te uteži se prenesejo na povezave v induciranih podgrafih G_i . Graf z utežmi podamo z *uteženo matriko sosednosti* $A = (A_{ij})$ z elementi:

$$A_{ij} := \begin{cases} c_{v_i v_j}, & v_i v_j \in E, \\ 0, & \text{sicer,} \end{cases} \quad (14)$$

$i, j = 1, \dots, n$.

Ker povezave niso usmerjene, velja $c_{vv'} = c_{v'v}$, torej je matrika A simetrična. Privzeli bomo, da so vse uteži na povezavah pozitivne in normirane tako, da je matrika A tudi (dvojno) stohastična:

$$\sum_{v \in V} c_{vv'} = 1 \text{ za vse } v' \in V. \quad (15)$$

Če je vrednost uteži na povezavi enaka 0, je to enako, kot da ta povezava v grafu ni prisotna.

Razbitju \mathcal{P} priredimo *vrednostno funkcijo* $C(\mathcal{P})$, ki je definirana z naslednjo enačbo:

$$C(\mathcal{P}) := \sum_{i \neq j} \sum_{\substack{vv' \in E \\ v \in V_i, v' \in V_j}} c_{vv'}. \quad (16)$$

Funkcija $C(\mathcal{P})$ sešteje uteži na povezavah, ki v G povezujejo različne podgrafe iz razbitja \mathcal{P} . Naš cilj je poiskati razbitje, za katero je vrednost te funkcije čim manjša.

Naslednji pogoj, ki ga za razbitje zahtevamo, je maksimalno dovoljeno število točk ℓ v posameznem podgrafu. Število ℓ izračunamo kot navzgor zaokroženi celi del kvocienta med n , številom vseh vozlišč v grafu G , in k , številom podgrafov v razbitju \mathcal{P} :

$$\ell = \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil. \quad (17)$$

S tem zagotovimo, da posamezni podgrafi niso preveliki. Ker želimo tudi, da imajo vsi podgrafi našega razbitja približno enako število točk, bomo iskali razbitje, kjer je $|V_i| \approx \ell$ za vse $i = 1, \dots, k$.

Imamo torej dve zahtevi, ki jima skušamo zadostiti:

- minimalna vrednost funkcije $C(\mathcal{P})$,
- število točk v vsakem podgrafu razbitja je kar se da enako in navzgor omejeno z ℓ .

V kolikor teh dveh zahtev ni mogoče izpolniti, želimo poiskati enolično rešitev, ki se jima najbolj približa. Opišimo postopek, po katerem bomo to rešitev dobili.

Vsakemu razbitju množice točk (12) lahko priredimo matriko $M := (M_{ij})$ velikosti $n \times k$, katere elementi so:

$$M_{ij} := \begin{cases} 1, & v_i \in V_j, \\ 0, & \text{sicer,} \end{cases} \quad (18)$$

$i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, k$. Matriko M imenujemo *matrika k -razbitja*. Opazimo, da velja tudi obratno: vsaka matrika k -razbitja poda neko razbitje točk grafa oblike (12).

Za matriko k -razbitja M lahko enostavno preverimo naslednje lastnosti:

- (i) V vsaki vrstici matrike M je samo en element neničeln (to je, enak 1). To pomeni, da vsaka točka grafa pripada natančno enemu podgrafu v razbitju.
- (ii) Vsota elementov (oziroma število neničelnih elementov) v j -tem stolpcu matrike M je enaka številu točk v j -tem podgrafu razbitja, to je v množici V_j .
- (iii) $M \mathbb{1}_k = \mathbb{1}_n$, kjer z $\mathbb{1}_m$ označimo vektor z m kooordinatami, ki so vse enake 1.

$$(iv) M^T M = \text{diag}(|V_1|, |V_2|, \dots, |V_k|).$$

(v) Za Frobeniusovo normo matrike M velja

$$\begin{aligned} \|M\|_F &:= \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k M_{ij}^2} \\ &= \sqrt{\text{sl}(M^\top M)} = \sqrt{n} \end{aligned}$$

(tu sl označuje sled matrike, tj. vsoto diagonalnih elementov (Meyer, 2000)).

Z upoštevanjem teh lastnosti lahko vrednostno funkcijo $C(\mathcal{P})$ iz (16) zapišemo s pomočjo matrike sosednosti A in matrike k -razbitja M kot:

$$\begin{aligned} C(\mathcal{P}) &= \sum_{i \neq j} (M^\top A M)_{ij} \\ &= \mathbb{1}_k^\top M^\top A M \mathbb{1}_k - \sum_i (M^\top A M)_{ii} \\ &= \mathbb{1}_n^\top A \mathbb{1}_n - \text{sl}(M^\top A M). \end{aligned} \quad (19)$$

Torej, če želimo, da je vrednost funkcije $C(\mathcal{P})$ čim manjša, mora biti sled produkta matrik $M^\top A M$ čim večja. Poleg tega zahtevamo še

$$M^\top M \leq \ell I_k, \quad (20)$$

da zadostimo tudi pogoju o čimbolj enakomernem razbitju.

Ker so vse lastne vrednosti simetrične stohastične matrike A realne in je največja med njimi enaka 1 (Meyer, 2000), velja

$$\text{sl}(M^\top A M) \leq \text{sl}(M^\top M) = n. \quad (21)$$

Označimo k največjih lastnih vrednosti A :

$$\lambda_1 = 1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k,$$

in njim pripadajoče ortonormirane lastne vektorje: u_1, u_2, \dots, u_k . Te lastne vrednosti zapišemo po diagonali v diagonalno matriko D velikosti $k \times k$, lastne vektorje pa po stolpcih v matriko U velikosti $n \times k$:

$$\begin{aligned} D &:= \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) \quad \text{in} \\ U &:= [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_k]. \end{aligned}$$

Pri vsakem k -razbitju potrebujemo le k največjih lastnih vrednosti matrike A , tako da se velikosti matrik D in U spreminjata s številom k . Vedno velja:

$$U^\top U = I_k \quad \text{in} \quad AU = UD, \quad (22)$$

kjer smo z I_k označili enotsko matriko velikosti $k \times k$.

Denimo, da znamo poiskati tako $k \times k$ matriko Z , da je: $M = UZ$. Iz enačb (22) in (23) sledi:

$$M^\top M = Z^\top U^\top U Z = Z^\top Z$$

in:

$$\text{sl}(M^\top A M) = \text{sl}(Z^\top U^\top A U Z) = \text{sl}(Z^\top D Z).$$

Vrednost tega izraza je največja, če je $D = I_k$, zahteva (20) pa se prepíše v:

$$Z^\top Z \leq \ell I_k. \quad (23)$$

To seveda ni vedno dosegljivo. Hespanha (Hespanha, 2004) pokaže, da se tema dvema pogojema zadovoljivo približamo, če matriko k -razbitja M poiščemo z optimizacijsko enačbo:

$$M = \underset{M'}{\text{argmin}} \|M' - UZ\|_F, \quad (24)$$

kjer M' predstavlja vse možne matrike k -razbitja (tj., preverimo vsa možna k -razbitja grafa) in je Z taka $k \times k$ matrika, da zanjo (približno) velja (23) in je UZ dovolj blizu neki matriki k -razbitja.

Za poznano matriko Z dobimo matriko M iz enačbe (24) z metodo projekcije. S pomočjo lastnosti matrik k -razbitja in linearnosti operatorja sledi namreč dobimo

$$\begin{aligned} \|M' - UZ\|_F^2 &= \text{sl} \left((M' - UZ)^\top (M' - UZ) \right) \\ &= n + \|Z\|_F^2 - 2 \cdot \text{sl}(M'^\top UZ). \end{aligned}$$

Posebej, če označimo $\bar{M} := UZ$, je

$$\begin{aligned} \text{sl} \left(M'^T \bar{M} \right) &= \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n M'_{ij} \bar{M}_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^n \bar{M}_{ij_i}, \end{aligned}$$

kjer smo upoštevali lastnost (i) matrike k -razbitja M' in z_{j_i} označili njen edini neničelni element v i -ti vrstici (ki je enak 1). Vrednost izraza $\|M' - UZ\|_F$ bo torej najmanjša, če v matriki M' enice postavimo na mesta (i, j_i) , kjer indekse določimo tako, da je \bar{M}_{ij_i} največji element v i -ti vrstici matrike $\bar{M} = UZ$.

Zdaj moramo povedati le še, kako poiskati ustrezno matriko Z . Denimo, da lahko n vrstic $n \times k$ matrike U združimo v skupine oziroma kopice (angl. clusters) okoli k ortonormiranih vektorjev z_1, z_2, \dots, z_k . To pomeni, da je vsaka od vrstic blizu natanko enemu od vektorjev z_j . Razdaljo definiramo s skalarnim produktom tako, da je za vrstico v j -ti skupini skalarni produkt z_j najbližje 1 in z ostalimi vektorji $z_l, l \neq j$, blizu 0. Če definiramo matriko

$$Z := [z_1 \ z_2 \ \dots \ z_k],$$

bo i -ta vrstica matrike $\bar{M} = UZ$, ki je sestavljena iz skalarnih produktov i -te vrstice matrike U z vektorji z_j , blizu nekemu standardnemu enotskemu vektorju v \mathbb{R}^k . To pomeni, da je matrika $\bar{M} = UZ$ blizu neki matriki k -razbitja.

Stolpce matrike Z torej lahko poiščemo z znano metodo kopičenja z voditelji (angl. k -means clustering), ki je implementirana v različna programska orodja, mi smo uporabili MATLAB 2015b (MATLAB, 2015). Algoritem lahko prilagodimo tako, da so velikosti razredov navzgor omejene z ℓ (Hespanha, 2004; Zhong & Ghosh, 2003).

Povzemimo zdaj osnovne korake algoritma spektralnega razbitja:

1. poišči k največjih lastnih vrednosti matrike A in pripadajoče ortonormirane lastne vektorje, iz katerih sestavi matriko U ;
2. z metodo kopičenja z voditelji s pomočjo matrike U določi ustrezno matriko Z ;
3. s projekcijo na mesta največjih elementov po vrsticah matrike UZ zapiši matriko k -razbitja M .

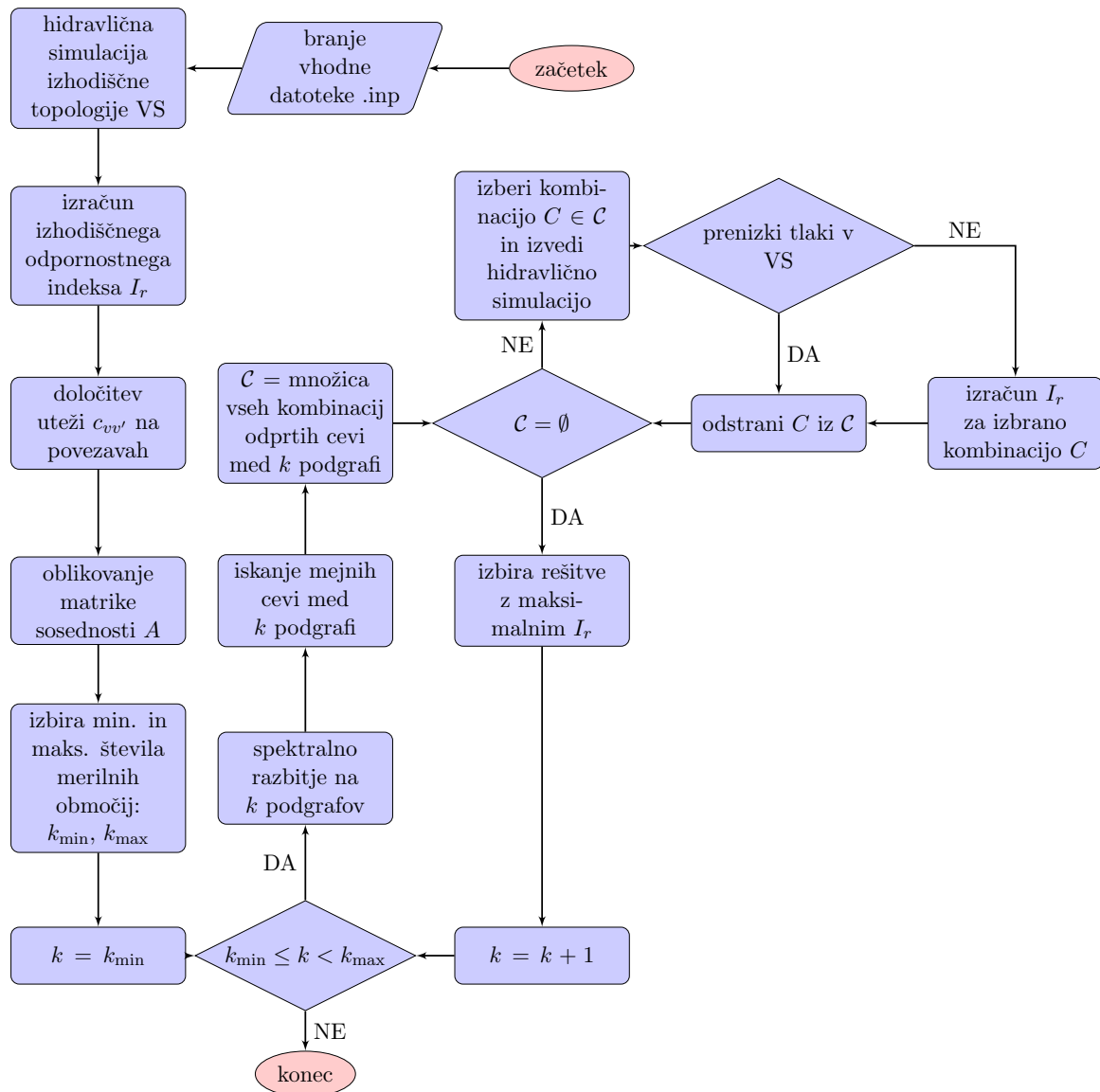
Opisani algoritem za izvajanje potrebuje dva vhodna podatka:

- uteženo matriko sosednosti A ,
- število podgrafov v razbitju: k .

Matrika sosednosti A je nespremenljiv vhodni podatek, ki je definiran s topologijo vodovodnega omrežja. Število podgrafov k je spreminljiv vhodni podatek, ki potem v končni fazi predstavlja število merilnih območij.

3.2 Implementacija algoritma spektralnega razbitja grafov v algoritmu za zasnovno merilnih območij

Algoritem za zasnovno merilnih območij smo implementirali v programskem orodju MATLAB 2015b (MATLAB, 2015). Poleg algoritma za spektralno razbitje grafov smo v algoritmu uporabili tudi hidravlični simulacijski program EPANET 2.0 (Rossman, 2000). Izvedba hidravličnih simulacij znotraj programskega okolja MATLAB je mogoča s programskim orodjem EPANET-MATLAB (Eliades et al., 2016). To programsko orodje uporablja pristop objektnega programiranja z določitvijo razredov v MATLAB-u, ki zagotavlja standardiziran način upravljanja podatkovne strukture hidravličnega modela. Programsko orodje EPANET-MATLAB ponuja obsežen nabor funkcij, ki uporabniku omogočajo pridobivanje in spremljanje podatkov hidravličnega modela ter simulacije hidravličnih stanj in dinamike kakovosti vode v vodovodnem sistemu.



Slika 2: Shema algoritma zasnovne merilnih območij.

Figure 2: Algorithm of the design of district metering areas.

Prvi korak algoritma za zasnovno merilnih območij je branje vhodne datoteke hidravličnega modela v tekstovnem formatu datoteke *.inp, ki je običajno ustvarjena v samostojnem programskem okolju EPANET 2.0. V tem izhodiščem koraku se ustvari objekt in inicializirajo spremenljivke objekta glede na podatke iz EPANET-ove vhodne datoteke *.inp. V naslednjem koraku se izvede hidravlična simulacija izhodiščne topologije vodovodnega sistema, ki najpogosteje predstavlja obstoječe ali predvideno stanje obravnavanega vodovodnega sistema. Rezultati hidravlične simulacije, kot npr. tlaki v vozliščih p , pretoki po ceveh Q in vozliščna poraba q , se shranijo in uporabijo v nadaljevanju algoritma. Kot prvo so uporabljeni za izračun odpornostnega indeksa I_r (11).

Za uporabo algoritma spektralnega razbitja grafov je treba oblikovati uteženo matriko sosednosti A (14) danega grafa, ki ustreza topologiji obravnavanega vodovodnega omrežja. Uteži na povezavah $c_{v_i v_j}$ morajo odražati ustrezne hidravlične lastnosti vodovodnega sistema. Paziti moramo tudi, da so uteži pozitivne in normirane tako, da je matrika A tudi (dvojno) stohastična (15).

Poleg utežene matrike sosednosti A algoritem spektralnega razbitja potrebuje še podatke o številu podgrafov v razbitju k , ki ustreza številu merilnih območij. Za iskanje optimalnega razbitja želimo preveriti rešitve pri različnih vrednostih k , zato je treba določiti spodnjo in zgornjo mejo, k_{\min} in k_{\max} . Vedno formiramo čimbolj enakomerna merilna območja, za kar poskrbi pogoj o velikosti podgrafov (20). Z večanjem števila merilnih območij se velikost posameznega merilnega območja manjša. Zato število k spreminjamo, dokler so rešitve še smiselne oziroma se formirajo dovolj velika merilna območja.

Algoritem spektralnega razbitja grafov nam pri izbranem številu k vrne k podgrafov in označi pripadnost vsakega vozlišča posame-

znemu podgrafu. Ker algoritem ne določi tudi ustrezne pripadnosti povezav, moramo to storiti naknadno. Z analizo pripadnosti za vse pare vozlišč $v_i, v_j \in V$ preverimo, ali pripadajo istemu podgrafu G_l v razbitju (13). Če je to izpolnjeno, je v podgrafu G_l posledično vsebovana tudi povezava $v_i v_j$. V nasprotnem primeru pa imamo *mejno povezavo* oziroma mejno cev. Identifikacija mejnih povezav med posameznimi podgrafi G_l je pri oblikovanju merilnih območij ključna. Med sosednjimi podgrafi želimo največ eno mejno povezavo, na kateri se spremljajo hidravlične količine, tj. pretok Q , ostale mejne povezave pa naj bi se zaprle oziroma ukinile.

Iz nabora vseh mejnih povezav m želimo ohraniti odprtih $k - 1$ povezav, kar zagotavlja povezanost celotnega grafa in prisotnost minimalnega vpetega drevesa (Wilson & Watkins, 1997). Vzpostavimo množico vseh možnih kombinacij odprtih povezav C med k podgrafi, ki jih je v tem primeru $\binom{m}{k-1}$. Z uporabo funkcij programskega orodja EPANET-MATLAB je mogoče cevi, ki so v posamezni kombinaciji $C \in \mathcal{C}$ predvidene za zaprtje, tudi v hidravličnem modelu zapreti in s tem zasnovati novo topologijo vodovodnega sistema. Po posodobitvi topologije se izvede hidravlični preračun, s katerim preverjamo ustreznost zasnov merilnih območij glede na kriterij minimalnega preostalega tlaka v vodovodnem sistemu. Če so izračunani tlaki pri izbrani kombinaciji odprtih mejnih povezav nižji od minimalno zahtevanih, to kombinacijo odstranimo.

V primeru ustreznih tlačnih razmer pri izračunu hidravlične simulacije za dano kombinacijo odprtih cevi izračunamo odpornostni indeks I_r . Nato vse kombinacije mejnih povezav $C \in \mathcal{C}$, ki ustrezajo hidravlični preverbi minimalnih tlakov, med seboj primerjamo glede na odpornostni indeks I_r . Za posamezni k kot najustreznejšo zasnovno merilnih območij izberemo tisto rešitev, ki izkazuje najvišjo vrednost odpornostnega indeksa I_r .

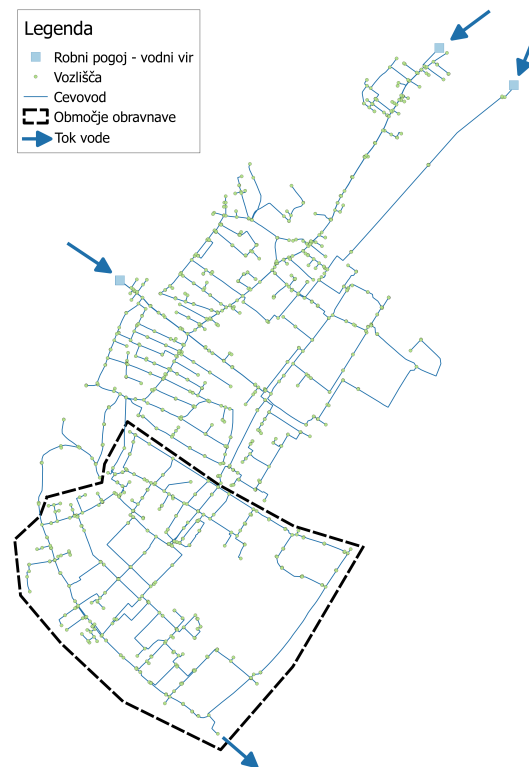
Algoritem zasnovane merilnih območij nato preveri rešitve, ki ustrezajo $k + 1$ merilnim območjem, in zaključi z izvajanjem, ko je $k = k_{\max}$. Slika 2 prikazuje shematski potek celotnega algoritma zasnovane merilnih območij z vključenim algoritmom spektralnega razbitja grafov.

4 Delovni primer

Algoritem za zasnovane merilnih območij je bil preizkušen na podsistemu vodovodnega sistema Kranj. Ožje področje obravnave je območje Primskovega in severnega dela Planine. Vzpostavljeni hidravlični model je sestavljen iz 476 vozlišč in 500 cevi. Območje, na katerem smo uporabili algoritem zasnovane merilnih območij, je na sliki 3 označeno s črtkano črto.

Obravnavani del vodovodnega sistema Kranj ni hidravlično ločen od ostalega vodovodnega sistema, zato je bilo v hidravlično analizo zajeto širše območje vodovodnega sistema, ki pa ni neposredno vključeno v analizo določevanja merilnih območij. Vključitev širšega območja vodovodnega sistema je bila potrebna zaradi robnih pogojev hidravličnega izračuna, saj spreminjanje topologije cevovodnega omrežja lahko bistveno vpliva na robne pogoje hidravličnega modela. Z zajemom širšega območja so bili vplivi na robne pogoje bistveno zmanjšani, kar daje večje zaupanje v hidravlične simulacije, izračune odpornostnih indeksov I_r in pridobljene zasnove merilnih območij.

Določitev utežene matrike sosednosti A zahteva oblikovanje uteži, ki naj čim boljje vključuje cilje in vodila pri zasnovi merilnih območij. V ta namen sta bila izbrana dva parametra vodovodnega sistema, to sta notranji premer cevi d in hidravlična višina H v vozliščih. Oba parametra v uteži povezave posredno predstavljata mero hidravlične prevodno-



Slika 3: Delovni primer Planine (smeri vtokov in iztokov so označene s puščicami).

Figure 3: Case study Planina (directions of inflows and outflows are denoted by arrows).

sti vodovodnega sistema in zajemata vplive, ki so zajeti v izračunu odpornostnega indeksa I_r . Medtem ko je hidravlična višina neposredni parameter pri izračunu odpornostnega indeksa, je premer cevovoda d nadomestni parameter za pretok Q po cevi. Ker ima vsaka povezava dve vozlišči, smo za izračun uteži izbrali nižjo vrednost hidravlične višine, saj se tako ohranja informacija o usmeritvi pretokov v vodovodnem sistemu. Oba parametra sta normirana in v enakem deležu prispevata k vrednosti posameznih uteži na povezavah grafa G .

Dodatno k izbiri uteži je v algoritmu za zasnovane merilnih območij treba nastaviti še nekatere vhodne podatke. Pri algoritmu za spek-

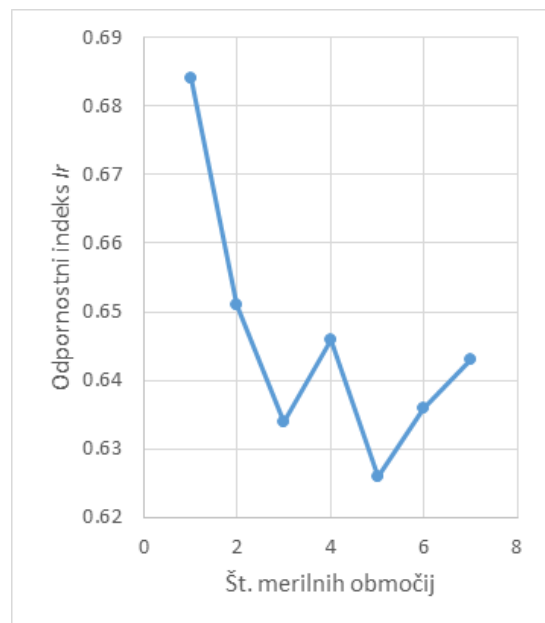
tralno razbitje grafov so bile analizirane zasnove za različno število merilnih območij. Za minimalno število merilnih območij smo vzeli $k_{\min} = 2$, za maksimalno pa $k_{\max} = 8$. Hidravlično preverjanje zasnov merilnih območij smo opravili z mejo minimalnega preostalega tlaka, ki je znašala 2,5 bar oziroma 25 m vodnega stolpca. Obtežbeni primer, ki smo ga uporabili za preverjanje hidravlične ustreznosti različnih zasnov merilnih območij, je bila srednja poraba v vodovodnem sistemu. Pri tem smo uporabili hidravlične simulacije stalnega toka.

5 Rezultati

Analiza rezultatov algoritma zasnove merilnih območij z uporabo algoritma spektralnega razbitja grafov je pokazala, da je med vrednostmi od k_{\min} do k_{\max} najustreznejša rešitev pri $k = 4$. Ključna mera, na podlagi katere smo izbrali najustreznejšo rešitev, je vrednost odpornostnega indeksa I_r . Slika 4 prikazuje maksimalne vrednosti odpornostnega indeksa I_r gleda na k podgrafov.

Odpornostni indeks I_{r_1} za obstoječe stanje je enak 0,684 (glej preglednico 1). Po vzpostavitvi merilnih območij se vrednost I_r zniža na 0,626 pri $k = 5$. Kot najboljša je bila izbrana rešitev pri $k = 4$, kjer je odpornostni indeks dosegel vrednost 0,646. Iz slike 4 je razvidno, da pride pri $k = 4$ do povišanja vrednosti odpornostnega indeksa I_r , kar nakazuje na dobro ravnovesje med izbranimi vozlišči za posamezne podgrafe G_l , ki določajo merilna območja, in mejnimi povezavami oziroma cevmi, ki omogočajo boljšo pretočnost in s tem boljše hidravlične razmere tako zasnovanega vodovodnega sistema.

Primerjava podatkov o številu mejnih povezav in številu merilnih območij je prikazana na sliki 5. Zaradi uporabe koncepta minimalnega vpetega drevesa je število pretočnih oziroma

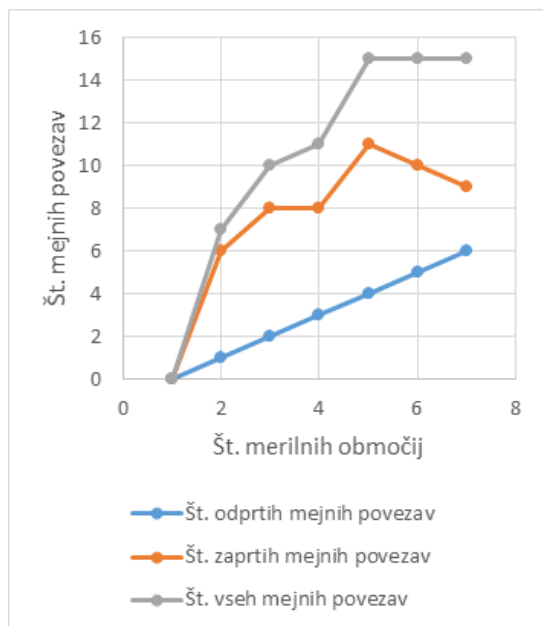


Slika 4: Odpornostni indeks I_r v odvisnosti od števila merilnih območij (Gorjup, 2016).

Figure 4: Resilience index I_r depending on the number of DMAs (Gorjup, 2016).

odprtih mejnih povezav enako vrednosti $k - 1$ in s tem linearno naraščajoče s številom merilnih območij k . Ob pogledu na podatke o številu vseh mejnih povezav je razvidno, da se te povečujejo do $k = 5$, nato pa se skupno število mejnih povezav ustali. To je posledica definicije vrednostne funkcije $C(\mathcal{P})$ (16), ki lahko vpliva tudi na število mejnih povezav. Razlika med številom mejnih povezav in številom odprtih cevi, na katerih se merijo hidravlične količine, predstavlja število zaprtih mejnih cevi (slika 5). Tudi v tem pogledu je razvidno, da se število zaprtih povezav povečuje do $k = 5$, pri čemer nato število upada.

Interpretacije podatkov iz slike 5 imajo velik vpliv na sprejemanje odločitev o zasnovi merilnih območij na vodovodnem sistemu. Razvidno je, da z večanjem števila merilnih območij



Slika 5: Mejne povezave pri različnih vrednostih k (Gorjup, 2016).

Figure 5: Boundary links for different k values (Gorjup, 2016).

prihaja do razčlenjenosti omrežja in s tem tudi večjega števila ukrepov, ki jih je treba izvesti na cevovodnem omrežju. Zagotavljanje povezanosti celotnega vodovodnega sistema in uporaba koncepta minimalnega vpetega drevesa omogoča generiranje rešitev, ki imajo minimalno število odprtih povezav med merilnimi območji in s tem minimalno število merilnih jaškov. Zagotovitev merilnih jaškov lahko predstavlja finančno intenziven ukrep (Farley, 2001), (De Paola *et al.*, 2013). Ravno tako pa tudi število zaprtih mejnih povezav zahteva ukrepe na cevovodnem omrežju, pri čemer pa ti nimajo tako močnih finančnih posledic. Pri sprejemanju odločitev o številu merilnih območij je tako gotovo potrebno večkriterijsko odločanje, kjer se upoštevajo različni in včasih nasprotujoči si tehnični, finančni in prostorski vidiki.

Preglednica 1: Povzetek ključnih vrednosti za $k = 4$.

Table 1: Summary of results for $k = 4$.

| Količina | Vrednost |
|-------------------|----------|
| k | 4 |
| I_{r_1} | 0,684 |
| I_{r_4} | 0,646 |
| Št. rešitev | 20 (120) |
| Št. mejnih cevi | 10 |
| Št. zaprtih cevi | 7 |
| Št. merilnih mest | 3 |

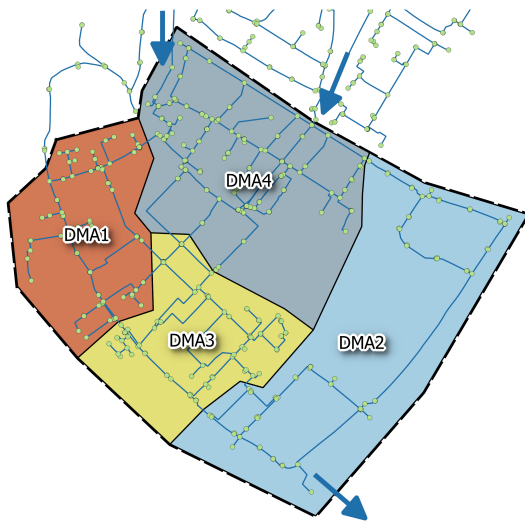
Na podlagi analiziranih rezultatov o odpornostnih indeksih I_r in mejnih povezavah pri različnem številu merilnih območij, smo rešitev s $k = 4$ merilnimi območji izbrali za najustrežnejšo z vidika zagotavljanja hidravličnih sposobnosti in z vidika zahtevanih ukrepov vzpostavitve merilnih območij.

Preglednica 1 in slika 6 podajata podatkovni in grafični prikaz rešitve pri $k = 4$. Pri $k = 4$ je bilo vseh kombinacij mejnih povezav 120, a so nekatere rešitve izkazovale neustrezno hidravlično zasnovo. Število rešitev, pri katerih so se pojavili negativni tlaki, je bilo kar 57 od skupnih 120. Dodatno je bilo iz preostalega nabora kombinacij 43 rešitev takšnih, ki so imele vsaj v enem vozlišču tlak manjši od meje minimalnega preostalega tlaka, ki je znašala 25 m vodnega stolpca. Tako je bilo le 20 rešitev pri $k = 4$ hidravlično ustreznih.

Rešitev za $k = 4$ pri maksimalnem odpornostnem indeksu I_r je prikazana na sliki 6, medtem ko je povzetek lastnosti ustvarjenih štirih merilnih območij podan v preglednici 2.

6 Zaključek

V prispevku obravnavamo zasnovo merilnih območij vodovodnega sistema, za katero smo uporabili algoritem spektralnega razbitja gra-



Slika 6: Zasnova merilnih območij pri $k = 4$.

Figure 6: Designed DMA at $k = 4$.

fov. Za oblikovanje utežene matrike sosednosti smo upoštevali dva normirana hidravlična kriterija, notranji premer cevi d in hidravlično višino vozlišč H , ki sta v enakih deležih prispevala k oblikovanju uteži na povezavah celotnega grafa. Spektralno razbitje grafa smo implementirali v programsko okolje MATLAB, skupaj z evalvacijskim algoritmom hidravličnih razmer v povezavi s kombinacijami odprtosti mejnih povezav med različnimi merilnimi območji.

Predstavljena metoda zasnove merilnih mest omogoča učinkovito in uspešno razbitje na podgrafe, ki ponazarjajo merilna območja v vodovodnem sistemu. Implementirani algoritem s spektralnim razbitjem na grafe smo preizkusili na realnem delovnem primeru.

Med analiziranimi zasnovami za k merilnih območij so bile izbrane tiste, ki so izkazovale najvišje vrednosti odpornostnega indeksa I_r . Rezultati kažejo na obstoj rešitev, ki imajo glede na hidravlične karakteristike in obseg ukrepov za vzpostavitev merilnih območij prednosti pred drugimi zasnovami. Podrobna

Preglednica 2: Osnovne značilnosti merilnih območij pri $k = 4$ (Gorjup, 2016).

Table 2: Main properties of DMAs at $k = 4$ (Gorjup, 2016).

| | Št. vozlišč | Št. cevi | Skupna poraba | Skupna dolžina cevi | Povprečna nadmorska višina |
|------|-------------|----------|---------------|---------------------|----------------------------|
| | [-] | [-] | [l/s] | [m] | [m] |
| DMA1 | 92 | 94 | 7,55 | 1743 | 383,63 |
| DMA2 | 83 | 85 | 1,51 | 3410 | 384,09 |
| DMA3 | 107 | 108 | 5,53 | 3282 | 384,00 |
| DMA4 | 170 | 179 | 14,58 | 4662 | 387,36 |

hidravlična in topološka analiza kaže na dejstvo, da rešitvam, ki uporabljajo enake transportne poti vode, kot so prisotne v obstoječem vodovodnem sistemu, ustrezajo višje vrednosti odpornostnega indeksa. Na primeru je bilo ugotovljeno, da imajo te rešitve topološke lastnosti, ki so blizu lastnostim obstoječega celovitega vodovodnega sistema.

Viri

Alvisi, S., Franchini, M. (2014). Heuristic procedure for the automatic creation of district metered areas in water distribution systems, *Urban Water Journal* 11 (2), 137–159.

Boulos, P. F., Lansley, K. E., Karney, B. W. (2006). Comprehensive water distribution systems analysis handbook for engineers and planners. MWH Soft, Inc., Pasadena, California, USA.

De Paola, F., Fontana, N., Galdiero, E., Giugni, M., Sorgenti degli Uberti, G., Vitaletti, M. (2013). Optimal design of district me-

- tered areas in water distribution networks, “12th International Conference on Computing and Control for the Water Industry, CCWI2013”, *Procedia Engineering* **70**, 449–457.
- Di Nardo, A., Di Natale, M., Guida, M., Musmarra, D. (2013). Water Network Protection from Intentional Contamination by Sectorization, *Water Resources Management* **27** (6), 1837–1850.
- Diao, K., Zhou, Y., Rauch, W. (2013). Automated creation of district metered areas boundaries in water distribution systems, *Journal of Water Resources Planning and Management* **139** (2), 184–190.
- Eliades, D. G., Kyriakou, M., Stelios Vrachimis, S., and Polycarpou, M. M. (2016). EPANET-MATLAB Toolkit: An Open-Source Software for Interfacing EPANET with MATLAB, “14th International Conference on Computing and Control for the Water Industry, CCWI 2016”, Amsterdam, Netherlands, str. 8.
- Farley, M. (2001). Leakage management and control. *A best practice training manual*, World Health Organization, Geneva.
- Ferrari, G., Savic, D., and Becciu, G. (2014). Graph-Theoretic Approach and Sound Engineering Principles for Design of District Metered Areas, *J. Water Resources Planning and Management* **140** (12), 04014036-1–04014036-13.
- Galdiero, E. (2015). Multi-Objective Design of District Metered Areas in Water Distribution Networks, PhD Thesis, Department of Civil, Architectural and Environmental Engineering, University of Naples Federico II.
- Gorjup, M. (2016). Uporaba teorije grafov za zasnovu merilnih območij v vodovodnih omrežjih. Magistrsko delo, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, 68 str.
- Gomes, R., Sa Marques, A., Sousa, J. (2012). Identification of the optimal entry points at District Metered Areas and implementation of pressure management, *Urban Water* **9** (6), 365–384.
- Hajebi, S., Temate, S., Barrett, A., Clarke, A., Clarke, S. (2014). Distribution Network Sectorization Using Structure Partitioning and Multi-Objective Optimization, “16th Water Distribution System Analysis Conference, WDSA2014 – Urban Water Hydroinformatics and Strategic Planning”, *Procedia Engineering* **89**, 1144–1151.
- Herrera, M., Izquierdo, J., Perez-Garcia, R., Montalvo, I. (2012). Multi-agent adaptive boosting on semi-supervised water supply clusters, *Advances in Engineering Software* **50**, 131–136.
- Hespanha, J. (2004). An efficient MATLAB Algorithm for Graph Partitioning, Technical Report, University of California.
- MATLAB 2015b, The MathWorks, Inc., Natick, Massachusetts, United States.
- Meyer, C. (2000). *Matrix analysis and applied linear algebra*, SIAM, Philadelphia.
- Morrison, J. (2004). Managing leakage by District Metered Areas: A practical approach, *Water* **21** (2), 44–46.
- Morrison, J., Rogers, D., Tooms, S. (2007). District Metered Areas Guidance Notes, Water Loss Task Force, IWA Publication.
- Lambert, A (2003). Assessing non-revenue water and its components: A practical approach, *Water* **21**, IWA, Issue 5.4, 50–51.

Rossman, L. A. (2000). Epanet2 Users Manual. “U. S. Environmental Protection Agency, National Risk Management Research Laboratory”, Cincinnati, Ohio, USA.

Sempewo, J., Pathirana, A., Vairavamoorthy, K. (2009). Spatial analysis tool for development of leakage control zones from the analogy of distributed computing, “Proc. 10th Annual Water Distribution Systems Analysis Conference (WDSA2008)”, Kruger National Park, South Africa, 1–15.

Todini, E., Pilati, S. (1987). A gradient method for the analysis of pipe networks, *International Conference on Computer Applications for Water Supply and Distribution*, Leicester Polytechnic, UK.

Todini, E. (2000). Looped water distribution networks design using a resilience index based heuristic approach, *Urban Water* **2**, 115–122.

Tzatchkov, V. G., Alcocer-Yamanaka, V. H., Bourguett-Ortíz, V.J. (2006). Graph theory based algorithms for water distribution network sectorization projects, “Proc. 8th Annual Water Distribution Systems Analysis Symposium, WDSA 2006”, Cincinnati, Ohio, USA.

Wilson, R.J., Watkins, J.J. (1997). *Uvod v teorijo grafov*. DMFA Slovenije.

Zhong, S., Ghosh, J. (2003). Scalable balanced model-based clustering, “Proc. 3rd SIAM Int. Conf. Data Mining”, San Francisco, California, USA, 71–82.