



PRESEK LETNIK 44 (2016/2017) ŠTEVILKA 4

MATEMATIKA+FIZIKA+ASTRONOMIJA+RAČUNALNIŠTVO#4



- NESKONČNI HILBERTOV HOTEL
- OPTIČNE KOMUNIKACIJE
- MEDNARODNA OLIMPIJADA IZ ASTRONOMIJE IN ASTROFIZIKE
- FENWICKOVO DREVO

ISSN 0351-6652



Vzdrževanje ravnotežja

↓↓↓

→ Kritične točke so pomembna značilnost zapletenih sistemov; najdemo jih, recimo, v finančnem sistemu in v ekosistemu. V kritični točki lahko že malenkostna sprememba povzroči bistveno spremembo sistema; že zelo majhna sprememba teže na eni strani gugalnice npr. lahko podre ravnovesje. Večino takšnih sistemov preučujemo s pomočjo matematičnih modelov, ki temeljijo na sistemih diferencialnih enačb. Povezave med neznankami povzročijo spremembe sistema, ki so lahko ogromne in npr. povzročijo tudi ekonomsko katastrofo. Z raziskavami poskušamo odkriti kritične točke, še preden je prepozno.

Motnje v Zemljinem naravnem sistemu so povzročile že nekaj katastrofalnih dogodkov. Eden od njih se je zgodil pred več kot dvesto milijoni let, ko je izumrlo več kot 90% vseh vrst na planetu. Matematika je pomagala pri izoblikovanju teorije, ki poskuša razložiti izumrtje. Povzročili naj bi ga mikrobi, ki so proizvajali metan in so dobro uspevali s pomočjo niklja iz aktivnih vulkanov v Sibiriji. Rast deleža ogljika v tistem obdobju, ki je še hitrejša od eksponentne, kaže na biološki sprožilec, računska genomika pa kaže, da se je v času izumrtja pojavil prav ta mikrob. To je lep primer, kako je lahko kritična točka res miniatura.

Kogar tema posebej zanima, si lahko prebere članek Dane Mackenzie *Climate, Past, Present and Future*, ki je bil leta 2015 objavljen v reviji *What's happening in mathematical sciences*.



× × ×

→

Presek

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje letnik 44, šolsko leto 2016/2017, številka 4

Uredniški odbor: Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Mojca Čepič, Mirko Dobovišek, Vilko Domanjko, Bojan Golli, Andrej Guštin (astronomija), Marjan Jerman (matematika), Martin Juvan, Maja Klavžar, Damjan Kobal, Lucijana Kračun Berc (tekmovanja), Peter Legiša (glavni urednik), Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Aleš Mohorič (odgovorni urednik), Igor Pesek (računalništvo), Marko Razpet, Matjaž Vencelj, Matjaž Zaveršnik (tehnični urednik).

Dopisi in naročnine: DMFA–založništvo, Presek, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana, telefon (01) 4766 553, telefaks (01) 4232 460, 2517 281.

Internet: www.presek.si

Elektronska pošta: presek@dmfa.si

Naročnina za šolsko leto 2016/2017 je za posamezne naročnike 19,20 EUR – posamezno naročilo velja do preklica, za skupinska naročila učencev šol 16,80 EUR, posamezna številka 3,76 EUR, dvojna številka 6,89 EUR, stara številka 2,71 EUR, letna naročnina za tujino pa znaša 25 EUR.

Transakcijski račun: 03100–1000018787.

Devizna nakazila: SKB banka d.d. Ljubljana, Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana, SWIFT (BIC): SKBAS12X, IBAN: SI56 0310 0100 0018 787.

List sofinancira Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih poljudno-znanstvenih periodičnih publikacij.

Založilo DMFA–založništvo

Oblikovanje Tadeja Šekoranja

Tisk Collegium Graphicum, Ljubljana

Naklada 1300 izvodov

© 2017 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – 2021

Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

Poština plačana pri pošti 1102 Ljubljana.

NAVODILA SODELAVCEM PRESEKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Presek objavlja poljudne in strokovne članke iz matematike, fizike, astronomije in računalništva. Poleg člankov objavlja Priказe novih knjig s teh področij in poročila z osnovnošolskih in srednješolskih tekmovanj v matematiki in fiziki. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, učencem višjih razredov osnovnih šol in srednješolcem.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev) in sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo). Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Slike v elektronski obliki morajo biti visoke kakovosti (jpeg, tiff, eps, ...), velikosti vsaj 8 cm pri ločljivosti 300 dpi. V primeru slabše kakovosti se slika primerno pomanjša ali ne objavi. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Zaželena velikost črk je vsaj 12 pt, razmak med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku na naslov uredništva **DMFA–založništvo, Uredništvo revije Presek, p. p. 2964, 1001 Ljubljana** ali na naslov elektronske pošte **presek@dmfa.si**.

Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki oceni primernost članka za objavo. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem uredništvo prosi avtorja za izvirne datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejalnikov TeX oziroma LaTeX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

Kazalo

MATEMATIČNI TRENUTKI

- 2 Vzdrževanje ravnotežja

MATEMATIKA

- 4-5 Neskončni Hilbertov hotel
(Niko Tratnik)

- 6-8 Formula Strassnitzkega
(Marko Razpet)

- 8-10 Kovinska razmerja
(Marko Razpet)

FIZIKA

- 11-14 Optične komunikacije
(Jan Ravnik, Tadej Novak, Boštjan Golob in Irena Drevenšek Olenik)

- 14-15, 18-19 Barvna lestvica
(Andrej Likar)

ASTRONOMIJA

- 20-24 Slovenska reprezentanca mladih astronomov uspešna na 10. mednarodni olimpijadi iz astronomije in astrofizike v Indiji
(Dunja Fabjan, Maruša Žerjal in Andrej Guštin)

RAČUNALNIŠTVO

- 25-28 Fenwickovo drevo
(Aleksander Kelenc)

RAZVEDRILO

- 24 Barvni sudoku

- 16-17 Nagradna križanka
(Marko Bokalič)

- 29 Rešitev nagradne križanke Presek 44/3
(Marko Bokalič)

- 30-31 Naravoslovna fotografija -
Atmosferski tlak in platenka
(Aleš Mohorič)

TEKMOVANJA

- priloga** Tekmovanje srednješolcev v znanju fizike - šolsko tekmovanje

- priloga** 54. fizikalno tekmovanje srednješolcev Slovenije - regijsko tekmovanje

- priloga** 14. tekmovanje v znanju poslovne in finančne matematike ter statistike - državno tekmovanje

SLIKA NA NASLOVNICI: Na naslovnici prejšnje številke je bil Sončev halo, tokrat pa objavljamo Lunin halo. Halo nastane enako kot Sončev in opis si lahko preberete v prejšnji številki. Lunin halo najpogosteje opazimo v času polne lune in hladnega vremena. Foto: Aleš Mohorič

Neskončni Hilbertov hotel

↓↓↓

NIKO TRATNIK

→

Kaj je neskončnost?

Vsakdo se je verjetno že kdaj vprašal, kaj je neskončnost. Označujemo jo s simbolom ∞ , na preprost način pa bi jo lahko opisali kot koncept, ki opisuje nekaj, kar nima meje oziroma je večje od kateregakoli števila. Vendar pa neskončnost ne more biti običajno naravno število, saj bi takšna predpostavka pripeljala do očitnih protislovij. Če bi takšnemu številu npr. prišteli ena, bi dobili strogo večje število, ki pa bi bilo še vedno neskončno. Prav tako pa se ne bi mogli opredeliti, ali bi bilo takšno število sodo ali liho. Podobnih navideznih paradoksov, ki so povezani z neskončnostjo, je še veliko.

Beseda neskončnost je latinskega izvora in izhaja iz besede *infinitas*, kar pomeni nevezan oz. brezkončen. Pojem neskončnosti je zaradi svoje nepredstavljalivosti vedno vznemirjal človeka. Zgodovinsko gledano se je prvič pojavil v stari Grčiji, eden izmed prvih ljudi, ki so ta pojem raziskovali, pa je bil Zenon (starogrški filozof in matematik, okoli 450 pr. n. št.), ki je znan po svojih paradoksih, povezanih z neskončnostjo. Neskončnost pa je razburjala in sprožala številne debate v filozofiji in matematiki tudi v nadaljnjih stoletjih. Kljub temu pa je koncept neskončnosti našel svojo uporabo v sodobni matematiki, pa tudi v fiziki in v ostalih znanostih. V matematiki zasledimo uporabo neskončnosti na področjih, kot so analiza (limita, zaporedja, vrste, splošeni integral), teorija množic (neskončne množice), geometrija, topologija.

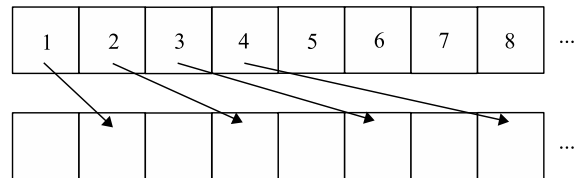
Hilbertov hotel

Prva resna teorija o neskončnosti je nastala konec 19. stoletja, ko je nemški matematik Georg Cantor odkrival začetke teorije množic, ki je danes ena izmed temeljnih matematičnih disciplin. Zanimale so ga predvsem neskončne množice, npr. množica naravnih števil in množica vseh točk na premici (množica realnih števil). Dokazal je, da so nekatere ne-

skončnosti večje kot druge in da obstaja neskončno različnih neskončnosti. Za tisti čas je bila njegova teorija veliko presenečenje in je sprožila veliko neodobranja med različnimi matematiki. Henri Poincaré je njegove ideje označil za bolezen, Leopold Kronecker pa ga je opisal kot znanstvenega šarlatana. Po drugi strani pa je nemški matematik David Hilbert, ki je bil v tistem času eden izmed najvplivnejših matematikov, Cantorjeve ideje sprejel z navdušenjem. David Hilbert je za ponazoritev Cantorjeve nenavadne teorije pogosto uporabljal zgodbo o neskončnem hotelu, ki je danes znan kot Hilbertov hotel.

Hilbertov hotel si lahko zamišljamo kot zelo velik hotel, ki nima samo več tisoč sob, ampak jih ima neskončno. Sobe v njem so označene z naravnimi števili, torej 1, 2, 3, ... Recimo, da je hotel popolnoma poln in v recepcijo pride nov gost. Receptor lahko premakne gosta iz sobe 1 v sobo 2, gosta iz sobe 2 v sobo 3, gosta iz sobe 3 v sobo 4 in tako naprej. Na ta način sprostijo sobo 1 za novega gosta. V hotelu je torej vedno prostor še vsaj za enega gosta. Zato v Hilbertovem hotelu velja, da izjavi *hotel je popolnoma zaseden in v hotelu ni prostora za novega gosta* nista ekvivalentni.

Kaj pa se zgodi, če v hotel prispe avtobus z neskončno gosti (ki jih je toliko, kot je naravnih števil)? V tem primeru lahko receptor prestavi gosta iz sobe 1 v sobo 2, gosta iz sobe 2 v sobo 4, gosta iz sobe 3 v sobo 6 in tako naprej. Na ta način sprostijo vse lihe sobe in dobi neskončno prostih sob. Prispele goste nato po vrsti razvrsti v sobe 1, 3, 5, ... in tako bo vsak prišel do svoje sobe, (glej sliko 1).



SLIKA 1.

Prerazporejanje gostov v sode sobe.

avtobus 1	11	12	13	14	...
avtobus 2	21	22	23	24	...
avtobus 3	31	32	33	34	...
	⋮	⋮	⋮	⋮	

SLIKA 2.

Situacija, ko v Hilbertov hotel prispe neskončno avtobusov.

avtobus 1	11 → 12	13 → 14	...
avtobus 2	21 ↓ 31	22 ↘ 32	23 ↘ 33
avtobus 3	31	32	33
	⋮	⋮	⋮

SLIKA 3.

Razporejanje gostov po diagonalnem postopku.

Naslednji dan pa v hotel prispe neskončno avtobusov. Da je situacija še hujša, je na vsakem izmed avtobusov neskončno gostov. Ali bo lahko hotel sprejel vse te goste? Da bomo problem lažje razumeli, bomo označili goste iz avtobusa 1 kot 11, 12, 13, ..., goste iz avtobusa 2 kot 21, 22, 23, ... in tako naprej (glej sliko 2).

Receptor podobno kot prej prestavi goste, ki so že v hotelu, in sprostijo vse lihe sobe v hotelu. Nato se loti razvrščanja ljudi v sobe in začne po vrsti razporejati ljudi iz avtobusa 1. Hitro pa ugotovi, da na ta način ne bo šlo, saj gosti iz avtobusa 2 ne bodo nikoli prišli na vrsto, ker je že gostov na avtobusu 1 neskončno.

Zato se spomni drugačnega trika in začne ljudi razporejati na drug način. Gosta 11 razporedi v sobo 1, gosta 12 v sobo 3, gosta 21 v sobo 5, gosta 31 v sobo 7, gosta 22 v sobo 9, gosta 13 v sobo 11, gosta 14 v sobo 13, gosta 23 v sobo 15 in tako naprej (glej sliko 3). S tem diagonalnim postopkom bo čisto vsak prispeli gost prišel na vrsto in dobil svojo sobo v hotelu.

Zelo podoben diagonalni postopek v teoriji množic uporabimo za dokaz, da je vseh racionalnih števil enako število kot naravnih. Vse, kar moramo narediti, je, da ulomke razporedimo v sobe Hilbertovega hotela. Če si gosta, ki smo ga zgoraj označili kot mn ,

predstavljamo kot ulomek $\frac{m}{n}$, smo to z opisanim postopkom že naredili.

Nazadnje razmislimo še, kaj se zgodi, če v recepcijo prispe toliko ljudi, kot je števil na odprtem intervalu $(0, 1)$. Recimo, da goste, ki jih bomo označevali kar z realnimi števili med 0 in 1, receptor nekako razporedi v sobe hotela. Dobi torej seznam sob in gostov, ki zгледа nekako takole:

številka sobe	gost
soba 1	0,3488657857...
soba 2	0,1284768311...
soba 3	0,6745213657...
soba 4	0,1188446782...
...	...

V tem seznamu morajo biti zajete vse sobe hotela in vsa realna števila med 0 in 1. Razmisliti moramo, ali je to sploh možno. Najprej z jemanjem števk po diagonalni tvorimo novo število (števke, ki so označene krepko v spodnji tabeli):

številka sobe	gost
soba 1	0, 3 488657857...
soba 2	0, 1 284768311...
soba 3	0, 6 745213657...
soba 4	0, 1 188446782...
...	...

Na ta način torej dobimo število 0,3248... Na koncu vsako števko tega novega števila nadomestimo z neko drugo števko med 1 in 8. Števko 3 lahko npr. zamenjamo z 2, 2 lahko zamenjamo s 5, 4 lahko zamenjamo s 7, 8 lahko zamenjamo s 3. Na ta način bomo dobili število med 0 in 1, ki ne bo spadalo k nobeni izmed sob, saj se bo od vsakega števila razlikovalo v vsaj eni števki. To pomeni, da gosta, ki je označen s tem številom, nismo razporedili v nobeno izmed sob hotela. Kakorkoli že receptor razporedi prispele goste, ne more zagotoviti sob za vse. S tem smo dokazali, da je števil na intervalu $(0, 1)$ strogo več kot naravnih števil. To seveda pomeni, da je tudi vseh realnih števil več kot naravnih. S tem smo preverili, da obstaja več kot samo ena neskončnost. Pravzaprav je Cantor pokazal še več, obstaja namreč neskončno različnih neskončnosti.

× × ×

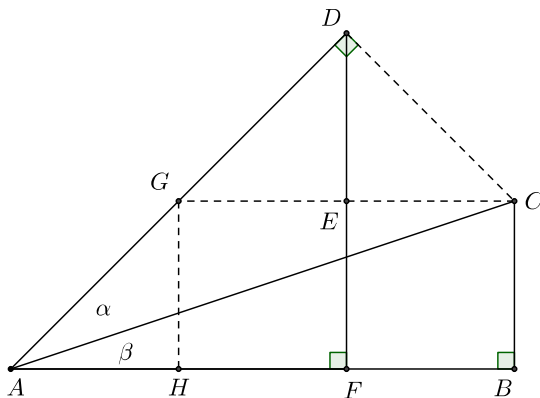
Formula Strassnitzkega

↓↓↓

MARKO RAZPET

→ Računanje približkov števila π , to je razmerja med obsegom in premerom kroga, je dolga stoletja, od Arhimedea, ki je živel v 3. stoletju pred našim štetjem, pa do Isaaca Newtona (1643–1727), temeljilo na metodi krogu včrtanih in očrtanih pravilnih večkotnikov. Računanje na nekaj deset decimalk je bilo dolgotrajno in naporno. Poleg osnovnih štirih računskih operacij je bilo treba izračunati tudi veliko kvadratnih korenov.

Newton je bil eden prvih, ki so za računanje približkov števila π uporabljali številске vrste. Z njimi so dosegli v razmeroma kratkem času mnogo več pravilnih decimalk kot s staro arhimedsko metodo. Newton in še nekateri so našli take formule, v katerih je še en kvadratni koren, drugi pa so našli take, kjer ni nobenega korena, ampak računanje poteka samo v okviru osnovnih štirih računskih operacij. Take možnosti ponuja funkcija arkus tangens (\arctg) in njen



SLIKA 1.

K izpeljavi formule (4)

razvoj v potenčno vrsto

$$\arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots, \quad (1)$$

ki konvergira za $|x| \leq 1$, in sicer tem hitreje, čim manjši je x . Vrsto (1) so v Evropi poimenovali po Jamesu Gregoryju (1638–1675), znana pa je bila v Indiji že v 14. stoletju. Ker je (1) alternirajoča (izmenična) vrsta, lahko ocenimo razliko med vsoto vrste in njeno n -to delno vsoto:

$$\left| \arctg x - \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \right) \right| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{2n+1}. \quad (2)$$

Izraz na desni strani relacije (2) omogoča oceniti, koliko členov vrste je treba sešteti, da dobimo $\arctg x$ s predpisano natančnostjo. Videti je, da bi približke števila π najlažje izračunali z vrsto

$$\frac{\pi}{4} = \arctg 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots, \quad (3)$$

ki pa zelo počasi konvergira. Samo za 10 decimalk števila $\pi/4$ bi morali sešteti zelo veliko členov. Koliko? Z oceno (2) nastavimo za $x = 1$ neenačbo $1/(2n+1) < 10^{-10}$, iz katere dobimo, da je n okroglo pet milijard. Zato je vrsta (3) za računanje števila π neuporabna.

Matematiki pa so našli formule, s katerimi so veliko decimalk števila π kar hitro izračunali, če so bili le dovolj potrpežljivi in se niso motili v računih. Take pripravne formule vsebujejo dve, tri ali več vrednosti funkcije \arctg racionalnih števil. Ena najpreprostejših formul, ki jo pripisujejo Leonhardu Eulerju (1707–1783) in Charlesu Huttonu (1737–1823), je

$$\frac{\pi}{4} = \arctg \frac{1}{2} + \arctg \frac{1}{3}. \quad (4)$$

Formulo (4) bomo izpeljali po geometrijski poti (slika 1). Do nje je mogoče priti tudi z uporabo enakosti, ki veljajo za funkcijo arctg.

Najprej načrtamo pravokotni trikotnik ABC , ki ima daljšo kateto AB dolgo tri enote, krajšo BC pa eno enoto. Nato načrtamo enakokraki pravokotni trikotnik AFD , katerega kateta AF je dolga dve enoti, oglišče F pa leži na kateti AB prvega trikotnika, druga kateta FD pa je nanjo pravokotna. Trikotnik ACD je pravokotni s pravim kotom ob oglišču D . Da se o tem prepričamo, konstruiramo daljico CG , ki je vzporedna kateti AB . Krajišče G razpolavlja hipotenuzo AD drugega pravokotnega trikotnika, tako da je $|AG| = |GD| = |CD|$. Kot GDC je pravi, ker ga razpolavlja daljica DF , ki očitno oklepa z daljicama DC in DG kot $\pi/4$. Kot CAD označimo z α , kot BAC pa z β . Ker je $\alpha + \beta = \pi/4$, $\text{tg } \alpha = 1/2$ in $\text{tg } \beta = 1/3$ oziroma $\alpha = \text{arctg}(1/2)$ in $\beta = \text{arctg}(1/3)$, res velja formula (4).

Leopold Karol Schulz pl. Strassnitzki (1803–1852) je našel formulo

$$\frac{\pi}{4} = \text{arctg } \frac{1}{2} + \text{arctg } \frac{1}{5} + \text{arctg } \frac{1}{8}, \quad (5)$$

ki jo imenujejo po njem. Tudi do nje lahko pridemo po geometrijski poti (slika 2).

Načrtamo pravokotni trikotnik ABC , ki ima daljšo kateto AB dolgo 24 enot, krajšo BC pa tri enote. Nato načrtamo pravokotni trikotnik ADE , katerega daljša kateta AE meri 15 enot in leži na kateti AB prvega trikotnika, krajša pa je dolga tri enote. Oglišči C

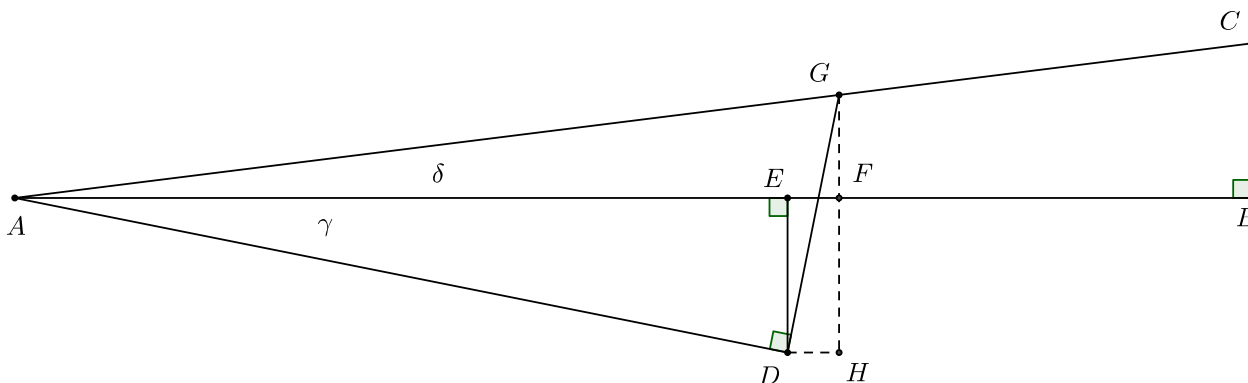
in D sta na nasprotnih bregovih premice nosilke katete AB . Nazadnje načrtamo še pravokotni trikotnik AFG , katerega daljša kateta AF je dolga 16 enot in leži na kateti AB , oglišče G pa na hipotenuzi AC .

Trdimo, da je trikotnik ADG pravokotni s pravim kotom ob oglišču D . Najprej je zaradi podobnosti trikotnikov ABC in AFG kateta FG dolga dve enoti. Poiščemo presečišče H vzporednice kateti AB skozi D in pravokotnice na to kateto skozi F . Očitno je daljica DH dolga eno enoto, tako kot daljica EF . Po Pitagorovem izreku dobimo:

$$\begin{aligned} |AD|^2 &= 15^2 + 3^2 = 234, & |DG|^2 &= 5^2 + 1^2 = 26, \\ |AG|^2 &= 16^2 + 2^2 = 260. \end{aligned}$$

Ker je $|AD|^2 + |DG|^2 = |AG|^2$, je trikotnik ADG res pravokotni. Kateti v njem pa sta v lepem razmerju: $|DG|/|AD| = 1/3$. Označimo z γ kot DAE , z δ pa kot BAC . Potem je očitno kot DAG enak vsoti $\gamma + \delta$. Ker je $\text{tg}(\gamma + \delta) = 1/3$, $\text{tg } \gamma = 3/15 = 1/5$ in $\text{tg } \delta = 3/24 = 1/8$, velja $\gamma + \delta = \text{arctg}(1/3) = \text{arctg}(1/5) + \text{arctg}(1/8)$. Če to upoštevamo v formuli (4), dobimo formulo (5). Kot zanimivost pripomnimo, da so števila 2, 5 in 8, ki nastopajo v (5), Fibonaccijeva števila, kar ni zgolj slučaj.

S formulo (5) je Johann Martin Zacharias Dase (1824–1861) v dveh mesecih izračunal približek števila π na točnih 200 decimal, kar je bila velika izboljšava približka Jurija Vege (1754–1802) iz leta 1794, ki je bil točen na 136 decimal. Formula (5) je ugodna za računanje, ker deljenje z 2 ni težko,



SLIKA 2.
Kako do $\text{arctg}(1/3)$?



deljenje s 5 pa je enakovredno množenju z 2 in nato deljenju z 10, kar tudi ni težko, deljenje z 8 pa je isto kot trikratno zapovrstno deljenje z 2. Dasejev izračun s komentarjem Strassnitzkega je bil objavljen leta 1844 v ugledni nemški matematični reviji Crelles Journal. Revija izhaja še danes, le da pod drugim imenom: Journal für die reine und angewandte Mathematik – Revija za čisto in uporabno matematiko. Dase, ki ni bil posebno dober matematik, je slovel kot izvrsten računar na pamet, s čimer se je preživljal. Sodeloval je tudi z matematikoma Gaussom (1777–1855) in Jacobijem (1804–1851).

Strassnitzki, po rodu iz Krakova, je od leta 1827 do leta 1834 poučeval matematiko na ljubljanskem liceju. Pot ga je zanesla v Ljubljano, ker bliže doma in Dunaja ni našel službe. Napisal je več matematičnih učbenikov, v Ljubljani je prirejal javna predavanja iz matematike in astronomije, ukvarjal pa se je tudi s kristalografijo. Odlično se je razumel z Matijo Čopom (1797–1835), ki je takrat služboval na isti ustanovi. Strassnitzki je navdušil za študij matematike tudi Franca Močnika (1814–1892), matematičnega pedagoga, šolskega nadzornika in pisca številnih učbenikov za matematiko. Študent Strassnitzkega je bil tudi Mihael Peternel (1808–1884), duhovnik, profesor, naravoslovec, polihistor, politehnik in samouk, ki je na Močnikov predlog postal leta 1852 ravnatelj prve trirazredne ljubljanske realke. Do razpada Avstro-Ogrske monarhije je bil edini Slovenec, ki je na tej šoli opravljal tako pomembno funkcijo.

Znane so podrobnosti, kako je Jurij Vega računal število π . Združeval je po dva in dva člena v vrsti (1), da je lahko računal samo s pozitivnimi členi. Ni pa znano, kako je računal Dase. Zagotovo je člene računal na malo več kot 200 decimalk zaradi nujnega zapisa le končnega števila decimalk, pri čemer nastane napaka na zadnjih decimalkah v končnem rezultatu.

- Preverite formuli (4) in (5) z uporabo enakosti

$$\text{tg}(u + v) = \frac{\text{tg } u + \text{tg } v}{1 - \text{tg } u \text{tg } v}.$$

- Z oceno (2) nastavite za vsak sumand v (5) neenakost za potrebnih 200 točnih decimalk. Ocenite, najmanj koliko členov je moral Dase v ta namen sešteti.

× × ×

Kovinska razmerja



MARKO RAZPET

→ **Obpravnavali bomo kovinska razmerja, ki so splošitev dobro znanega zlatega razmerja. Pot, ki jo bomo ubrali, bo najprej vodila preko verižnih ulomkov, nato pa bomo podali še geometrijsko razlago. Da pa bomo za to imeli motiv, začnimo pri pisarniških listih, s katerimi imamo opravka skoraj vsak dan.**

Pisarniški list papirja formata A4 je pravokotne oblike in ima to lastnost, da po prerezu po njegovi krajši srednjici dobimo dva lista, ki sta podobna začetnemu. Nova lista sta formata A5. Delitev lahko na ta način nadaljujemo in dobimo formate A6, A7 itd. Lahko pa gremo tudi v obratni smeri. Lahko rečemo, da je list formata A4 je nastal z opisano delitvijo lista formata A3, ta z delitvijo lista formata A2, ta z delitvijo lista formata A1. Ker se moramo nekje ustaviti, je začetni format A0 tisti, ki z opisano delitvijo da format A1. Pola papirja formata A0 pa je tako opredeljena, da meri ploščina izbrane strani 1 m^2 . Listi formata A so pripravni ravno zato, ker z razpolavljanjem dobimo spet liste formata A. Pri tem ne nastajajo nepotrebni odpadki. Pa tudi pakete, v katerih je po nekaj sto takih listov, lahko lepo zlagamo enega na drugega, ne da bi nastale med paketi velike špranje.

Kolikšne so stranice lista formata A0? Vsi listi formata A so pravokotne oblike. Če ima A0 krajšo stranico dolžine a in daljšo stranico dolžine b , potem ima A1 krajšo stranico dolgo $b/2$, daljšo pa a . Ker si morata biti ustrezna pravokotnika podobna, velja: $b/a = a/(b/2)$. Iz te relacije dobimo enačbo $b^2 = 2a^2$, kar pomeni $b = a\sqrt{2}$. Pri vseh formatih A je torej daljša stranica lista $\sqrt{2}$ -krat daljša od krajše stranice. Pri formatu A0 pa je po opredelitvi ploščina $p = ab = b^2/\sqrt{2} = 1 \text{ m}^2$. Torej ima format A0

stranici

- $a = 1/\sqrt[4]{2} \text{ m} = 841 \text{ mm}$,
 $b = \sqrt[4]{2} \text{ m} = 1189 \text{ mm}$.

Iz tega lahko izračunamo stranici papirja formata A4, ki ga najbolj pogosto uporabljajo po pisarnah in za tiskalnike. Daljša stranica je dolga 297 mm, krajša pa 210 mm. Bralec lahko sam izmeri list, da bo videl, koliko se izračunana podatka ujemata z meritvijo.

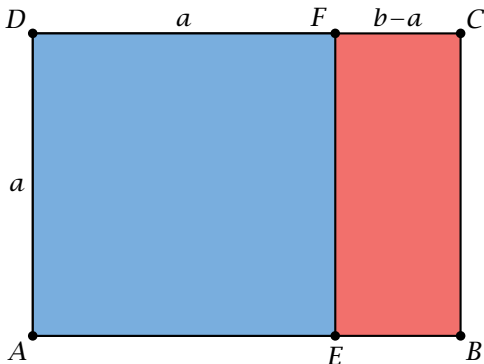
Po vsem tem ni težko ugotoviti, da ima papir formata A_n daljšo stranico dolgo $\sqrt[4]{2}/\sqrt{2^n} \text{ m}$, krajšo pa $\sqrt[4]{2}/\sqrt{2^{n+1}} \text{ m}$ in ploščino $1/2^n \text{ m}^2$.

Zakaj smo pravzaprav obravnavali vse te formate papirja? Zato, ker se v njih skriva zanimivo razmerje oziroma število. Če namreč vzamemo katerikoli pravokotnik $ABCD$ (slika 1), v katerem je razmerje daljše in krajše stranice enako $\sqrt{2}$, in ga razdelimo z daljico EF , ki je vzporedna krajši stranici, na kvadrat $AEFD$ in pravokotnik $EBCF$, potem ima slednji stranici $|EF| = a$ in $|EB| = b - a = a(\sqrt{2} - 1)$ v razmerju

- $\frac{|EF|}{|EB|} = \frac{a}{a(\sqrt{2} - 1)} = 1 + \sqrt{2}$.

Število $\psi = 1 + \sqrt{2}$ imenujemo *srebrno razmerje* ali *srebrno število*. Zakaj *srebrno*, bomo pojasnili v nadaljevanju. Vsak pravokotnik, ki ima za razmerje stranic število ψ , imenujemo *srebrni pravokotnik*. Na sliki 1 je $EBCF$ srebrni pravokotnik.

Število ψ zadošča enačbi $\psi^2 = 2\psi + 1$, o čemer se lahko prepričamo s kratkim računom. Iz nje hitro



SLIKA 1.

Nastanek srebrnega pravokotnika $EBCF$.

dobimo razvoj v verižni ulomek:

- $\psi = 2 + \frac{1}{\psi} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\psi}} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\psi}}}$.

Krajše ga zapišemo kot

- $\psi = [2; 2, 2, 2, \dots]$,

kjer dvojka pred podpičjem pomeni celi del števila ψ . Ker na velikih tekmovanjih v določeni disciplini drugi dobi srebrno odličje, je res smiselno imenovati ψ *srebrno število*.

Zlato razmerje ali *zlato število* ϕ ima temu ustrezno v verižnem ulomku enke:

- $\phi = [1; 1, 1, 1, \dots]$.

Število ϕ zadošča enačbi $\phi = 1 + 1/\phi$ oziroma $\phi^2 = \phi + 1$, iz katere najdemo $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$. Brez zadrege lahko vpeljemo tudi *bronasto razmerje* ali *bronasto število* (tretji najboljši prejme bronasto odličje)

- $\chi = [3; 3, 3, 3, \dots]$,

ki zadošča enačbi $\chi = 3 + 1/\chi$ oziroma $\chi^2 = 3\chi + 1$. Eksplicitno je $\chi = (3 + \sqrt{13})/2$.

Vsak pravokotnik, ki ima za razmerje stranic število ϕ , imenujemo *zlati pravokotnik*. Analogno pa imenujemo vsak pravokotnik, ki ima za razmerje stranic število χ , *bronasti pravokotnik*.

Na dlani je potem vpeljava n -tega *kovinskega razmerja* ali *kovinskega števila* $\kappa_n = [n; n, n, n, \dots]$, ki zadošča enačbi $\kappa_n = n + 1/\kappa_n$ oziroma $\kappa_n^2 = n\kappa_n + 1$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Seveda je $\kappa_1 = \phi, \kappa_2 = \psi, \kappa_3 = \chi$. V splošnem: $\kappa_n = (n + \sqrt{n^2 + 4})/2$. To število bi v športu ustrezalo za osvojeno n -to mesto. Če uporabimo enakost $\kappa_n = \sqrt{1 + n\kappa_n}$, lahko izrazimo tudi z vgnezenimi koreni:

- $\kappa_n = \sqrt{1 + n\kappa_n} = \sqrt{1 + n\sqrt{1 + n\kappa_n}}$
 $= \sqrt{1 + n\sqrt{1 + n\sqrt{1 + n\sqrt{1 + \dots}}}}$

Vsak pravokotnik, ki ima za razmerje stranic število κ_n , imenujemo *kovinski pravokotnik* reda n . Če





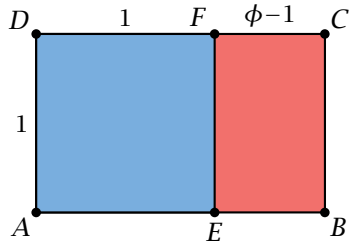
je njegova krajša stranica enaka 1, je daljša enaka κ_n . Tak pravokotnik lahko razdelimo na n skladnih kvadratov s stranico 1 in manjši pravokotnik s krajšo stranico $\kappa_n - n$ ter daljšo stranico 1. Manjši pravokotnik je tudi kovinski pravokotnik reda n , saj je podoben velikemu:

$$\blacksquare \frac{1}{\kappa_n - n} = \frac{\kappa_n}{\kappa_n^2 - n\kappa_n} = \frac{\kappa_n}{1}.$$

Slike 2, 3 in 4 kažejo kovinske pravokotnike $ABCD$ za $n = 1, 2, 3$. To so zlati, srebrni in bronasti pravokotnik. V vseh primerih je pravokotnik $ABCD$ podoben pravokotniku $EBCF$. Brez kakršnekoli škode za splošnost smo vzeli, da je krajša stranica pravokotnika $ABCD$ enaka 1. Tako je na splošno $|AE| = n$ in $|EB| = \kappa_n - n$.

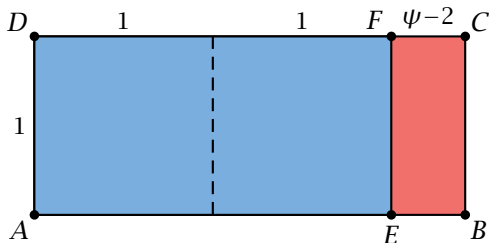
Pravokotnik $EBCF$ bi lahko spet razdelili na kvadrate in na manjši pravokotnik, ki je podoben začetnemu. Očitno to početje lahko nadaljujemo v nedogled.

Kovinska števila κ_n , imenovana tudi *kovinske sredine*, je vpeljala argentinska matematičarka Vera Martha Winitzky de Spinadel (1929–2017) konec pre-



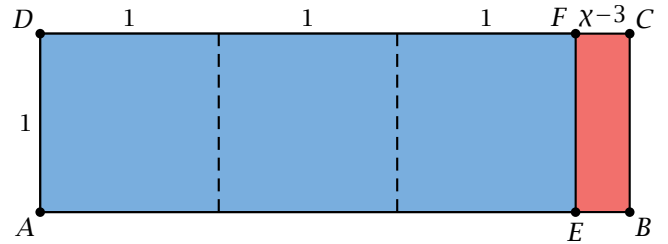
SLIKA 2.

Zlati pravokotnik je kovinski pravokotnik reda 1.



SLIKA 3.

Srebrni pravokotnik je kovinski pravokotnik reda 2.



SLIKA 4.

Bronasti pravokotnik je kovinski pravokotnik reda 3.

teklega tisočletja. Beseda *sredina* je uporabljena zato, ker velja $n < \kappa_n < n + 1$, kar ni težko dokazati.

Za konec še naloge. V veliko pomoč vam bodo primerne skice.

- Srebrnemu pravokotniku načrtajte diagonalo in nato skozi njeni krajišči daljici, ki oklepata s stranicami pravokotnika kot 45° . Preverite, da ste s tem razdelili pravokotnik na štiri trikotnike, in sicer dva skladna pravokotna enakokraka trikotnika in dva skladna topokotna enakokraka trikotnika. Nato poiščite kot med diagonalo in daljšo stranico pravokotnika, nazadnje pa še kot med diagonalama.
- Poiščite razmerje med stranico in njej vzporedno diagonalo v pravilnem osemkotniku. Pomagajte si s prejšnjo nalogo. Preverite, da pravilen osemkotnik lahko pokrijemo s štirimi skladnimi srebrnimi pravokotniki, ki imajo skupno središče v središču pravilnega osemkotnika. Pri tem krajše stranice srebrnih pravokotnikov sovpadajo s stranicami, daljše pa s srednje dolgimi diagonalami pravilnega osemkotnika.
- Poiščite razmerje med diagonalo in stranico pravilnega petkotnika. V njem načrtajte diagonalo, ki se sekata v notranjosti petkotnika, nato njuni krajišči povežite še s tretjo diagonalo. Do iskanega razmerja pridete nato z nastalima podobnima enakokrakima trikotnikoma.

Literatura

[1] V. M. W. de Spinadel, *From the Golden Mean to Chaos*, Nueva Libreria, Buenos Aires 1998.

× × ×

Optične komunikacije

↓↓↓

JAN RAVNIK, TADEJ NOVAK, BOŠTJAN GOLOB IN IRENA DREVENŠEK OLENIK

→ Sodobno družbo zaznamuje izjemen napredek v računalništvu in vse pogostejša uporaba interneta. V Sloveniji internet vsak dan uporablja 61 % prebivalcev, dostop do interneta pa ima že več kot 77 % slovenskih gospodinjstev [1]. Število uporabnikov interneta je v svetu že preseglo tri milijarde [2]. Zaradi vse večjega povpraševanja in vse bolj zahtevnih uporabnikov je bistvenega pomena hitrost prenašanja podatkov. Trenutno so daleč najhitrejša in najcenejša optična omrežja. Njihov osrednji element so optična vlakna, katerih delovanje bomo razložili v naslednjem sestavku.

Lomni količnik

Za razumevanje delovanja optičnih vlaken moramo najprej poznati lomni količnik in vedeti, kako se svetloba obnaša, ko potuje čez mejo dveh različnih snovi. Svetloba po vakuumu potuje s končno hitrostjo, ki znaša približno 300 000 km/s. V snoveh pa je hitrost svetlobe manjša in v vsaki snovi drugačna. Pravimo, da imajo snovi različno optično gostoto, kar si lahko predstavljamo, kot da snov zavira potovanje svetlobe in jo upočasnjuje. Lomni količnik snovi je definiran kot razmerje med hitrostjo svetlobe v vakuumu c_0 in hitrostjo svetlobe v snovi c :

$$\blacksquare n = \frac{c_0}{c}$$

Vakuum ima torej lomni količnik 1, v snoveh pa je lomni količnik večinoma večji od 1, saj svetloba v snovi potuje počasneje kot v vakuumu. Če za dve snovi velja $n_1 < n_2$, rečemo, da je druga snov optično gostejša.

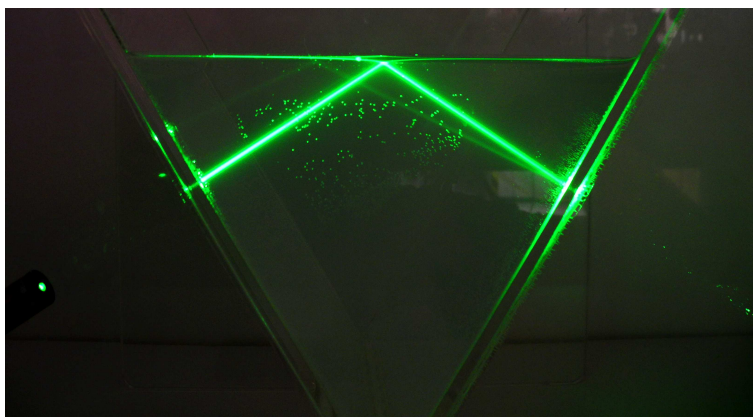
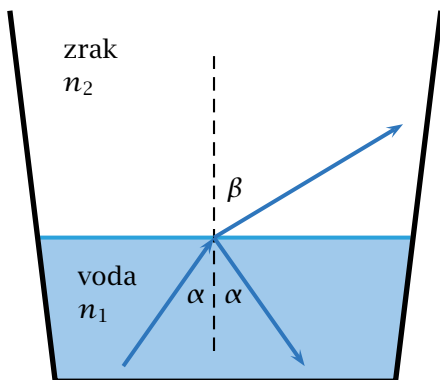
Prehod čez mejo dveh snovi

Na meji dveh snovi z različnima lomnima količnikoma se del svetlobe lomi, del pa odbije. Lom svetlobe lahko preprosto opazujemo v naravi. Če pod vodo delno potopimo palico in jo opazujemo skozi gladino vode, palica izgleda zlomljena. To je posledica spremembe hitrosti in ohranitve frekvence svetlobe na meji snovi. Lom svetlobe lahko opišemo z enačbo

$$\blacksquare \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{n_2}{n_1},$$

kjer sta α in β vpadni in lomni kot svetlobe (slika 1). Iz enačbe sledi, da se svetloba pri prehodu iz optično gostejšega v optično redkejšo sredstvo lomi stran od vpadne pravokotnice. Kot med žarkom in vpadno pravokotnico bo torej v optično redkejšem sredstvu večji. Del svetlobe se na meji med sredstvoma vedno tudi odbije. Odbojni kot je enak vpadnemu, saj svetloba ostane v istem sredstvu. Pri prehodu iz optično gostejše v optično redkejšo snov pri določenih pogojih opazimo zanimiv pojav, ki ga imenujemo totalni odboj. V tem primeru se vsa svetloba odbije od meje med sredstvoma, prepuščenega žarka pa ni. Meja dveh snovi ima v tem primeru enak učinek kot zrcalo. Do pojava totalnega odboja pride pri dovolj velikih vpadnih kotih α , in sicer mora biti kot α večji od mejnega kota. Mejni kot je tisti, pri katerem se svetloba lomi pod kotom $\beta = 90^\circ$, kar je največji možen kot loma svetlobe. Svetloba namreč ne more uiti iz sredstva pod kotom večjim od 90° glede na vpadno pravokotnico. Mejni kot je odvisen od lomnih količnikov obeh snovi. Pri prehodu svetlobe iz vode v zrak je mejni kot $\alpha_m = \arcsin\left(\frac{1}{1,33}\right) = 48,7^\circ$. Totalni odboj v naravi najlažje vidimo, če se potopimo pod mirno gladino vode in poskušamo pogledati ven. Kar dar gledamo pod majhnimi koti (navpično navzgor), lahko vidimo iz vode, če gledamo pod velikimi koti, pa površina na meji med vodo in zrakom deluje kot ogledalo.





SLIKA 1.

Skica loma in odboja svetlobe v kozarcu vode in fotografija popolnega odboja laserskega žarka na meji med vodo z dodano kapljico mleka in zrakom.

Optična vlakna

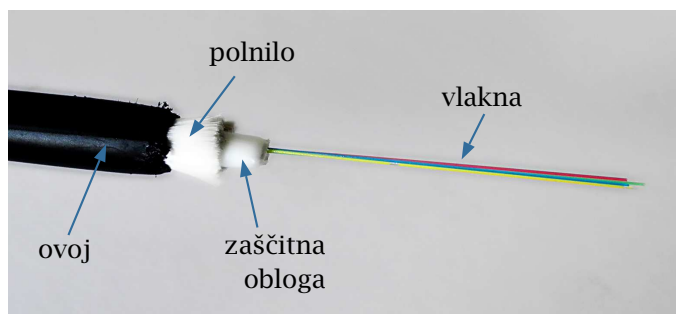
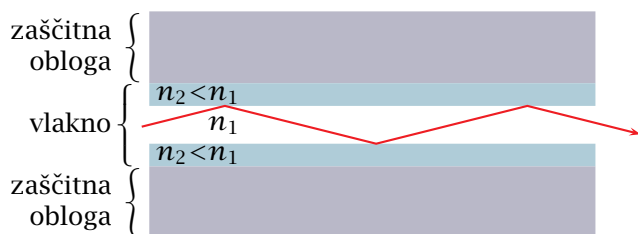
Optična vlakna delujejo na osnovi totalnega odboja svetlobe na meji med snovema z različnima lomnima količnikoma. V sredini optičnega vlakna je nitka (sredica) iz prozornega umetnega materiala, obdana s plaščem iz materiala, ki ima malo manjši lomni količnik. Razlika med lomnima količnikoma je zelo majhna, ponavadi le okoli 0,01. Lomni količnik sredice znaša okoli 1,5, iz česar lahko preprosto izračunamo, da je hitrost svetlobe, ki potuje po optičnem vlaknu, približno 200 000 km/s. Debelina sredice je nekaj mikrometrov. Enorodovna vlakna, v katerih se signal najmanj popači, imajo sredico tipične debeline $9\ \mu\text{m}$ in plašč debeline okoli $100\ \mu\text{m}$, večrodovna pa so debelejša. Okoli vlakna imamo nekaj milimetrov debelo zaščitno oblogo, ki vlakno varuje pred poškodbami in pretiranim prepogibanjem. Na koncih so vlakna pravokotno odrezana, tako da žarek lahko spravimo v njih, potem pa se žarki po načelu totalnega odboja odbijajo na meji med plaščem in sredico in tako potujejo po celotni dolžini optičnega vlakna ter na drugem koncu izstopijo.

Svetovni splet

Večina svetovnih internetnih komunikacij danes temelji na optičnih povezavah. Ves svet (ne le raz-

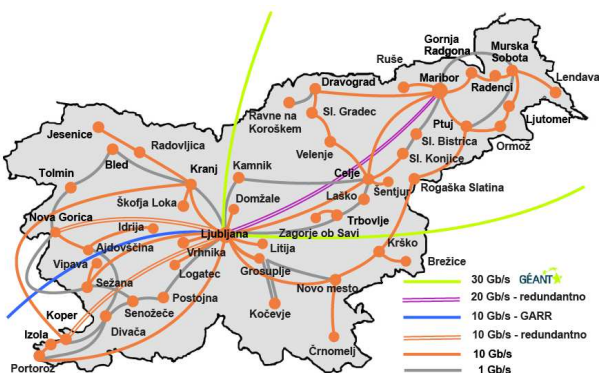
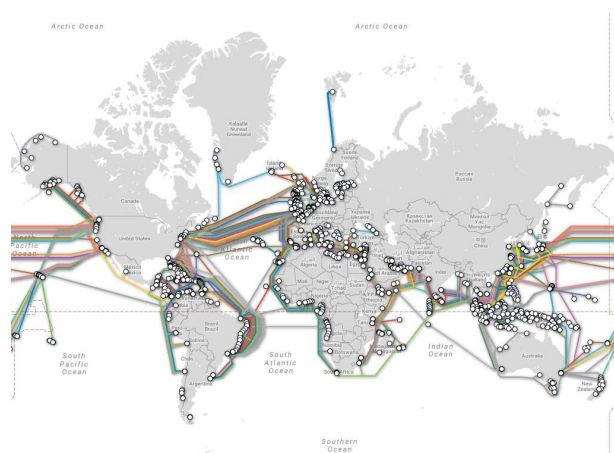
viti del) je med seboj povezan z optičnimi kabli, ki tečejo po dnu oceanov oziroma so zakopani pod zemljo. Na ta način lahko podatki iz Amerike pripotujejo v Evropo v manj kot 100 milisekundah. Ker so optični kabli sorazmerno poceni v primerjavi s stroški polaganja, jih je smiselno položiti skupaj z ostalo infrastrukturo. Optične povezave v Sloveniji zagotavlja več ponudnikov, in sicer ima vsak izmed njih položeno svoje optično omrežje. Tako imajo svoje optične kable Slovenske železnice, Dars, Stelkom, Arnes, Telekom Slovenije, Telemach in T2 [5]. Optični kabli med večjimi vozlišči niso novost, uporabljajo se že dobri dve desetletji. Uporabniki pa so dobili optične povezave šele v zadnjih letih, s čimer je hitrost interneta v gospodinjstvih bistveno narasla. Trenutni rekord za količino prenešenih podatkov po enem samem kablju je bil postavljen leta 2012 in znaša nekoliko več kot 10^{15} bitov na sekundo v kablju dolgem 52 kilometrov [6].

Z optičnimi omrežji se je bistveno spremenila uporabniška izkušnja. Danes se nam zdi nekaj povsej običajnega oziroma že precej počasi, če z interneta prenesemo 1 gigabajt podatkov v eni uri (kar približno ustreza povezavi 2 Mb/s). Veliko gospodinjstev ima že povezave, ki delujejo bistveno hitreje. Če bi enako datoteko prenašali z interneta pred približno dvajsetimi leti, ko je povezava potekala prek telefona (64 kb/s), bi za prenos enake datoteke potrebovali več kot en dan.



SLIKA 2.

Skica optičnega vlakna in fotografija optičnega kabla s štirimi vlakni in drugimi sestavnimi deli.



SLIKA 3.

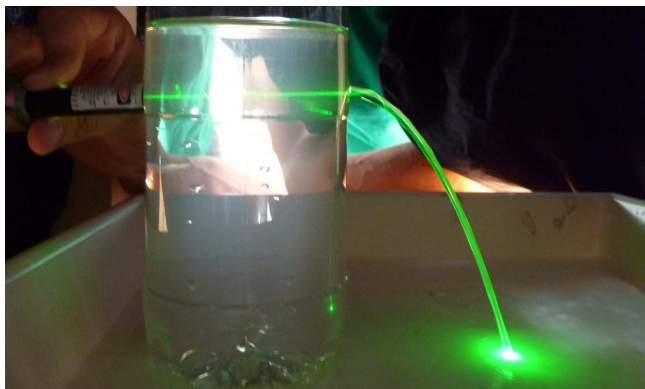
Podmorske optične povezave po svetu [3] in Arnesove povezave v Sloveniji [4].

Eksperimentirajmo doma

Preprost poskus za prikaz delovanja optičnega vlakna lahko naredimo tudi doma. Potrebujemo večjo prozorno plastenko (liter in pol je dovolj), vodo, nekaj kapljic mleka in laserski kazalnik. V plastenko izvrtamo luknjo približno na višini 10 cm od dna. Luknja naj bo lepo okrogla, tako da bo curek vode, ki bo tekel skozi, kar se da pravilne oblike. Okroglo luknjo najlažje naredimo tako, da segrejemo škarje in z vročo konico stalimo plastiko. Luknja naj bo premera malo manj kot pol centimetra. V plastenko natočimo vodo do vrha, pri čemer s prstom zatiskamo luknjo, da nam voda ne uide. Poskus je

najbolje izvajati v manjši kadi ali umivalnem koritu, da ne zmočimo okolice. V polno plastenko nato dodamo nekaj kapljic mleka. Ko z laserjem posvetimo skozi plastenko motne vode, majhni delci maščobe v mleku poskrbijo za sipanje svetlobe, zaradi česar je pot laserja dobro vidna. Zdaj lahko umaknemo prst z luknje in iz plastenke začne iztekati voda. Vodni curek predstavlja optično vlakno, saj je lomni količnik vode večji od lomnega količnika zraka. Z laserjem posvetimo skozi plastenko z nasprotne strani in z laserskim žarkom ciljamo luknjo. Če luknjo dobro zadanemo, se žarek ujame v curek vode tako, kot se ujame v optično vlakno, kar je prikazano na sliki 4. Če gledamo pod ustreznim kotom, lahko celo





SLIKA 4.

Preprost poskus, ki ponazarja delovanje optičnega vlakna. Od daleč se zdi, kot da se laserski žarek ukrivi skupaj z vodnim curkom. Če pogledamo od blizu, pa vidimo, da svetloba potuje po cikcakasti poti znotraj curka.

vidimo, kako se žarek cik-cakasto odbija po curku. V primeru, da eksperimenta ne morete izvesti sami, lahko na YouTubeu poiščete video posnetke pod geslom »optical fiber experiment« in zagotovo boste našli veliko posnetkov opisanega poskusa.

Literatura

- [1] <http://www.stat.si/StatWeb/pregled-podrocja?idp=2989&headerbar=8>, (ogled 29. 6. 2016).
- [2] <http://www.internetworldstats.com/stats.htm>, (ogled 29. 6. 2016).
- [3] <http://www.submarinecablemap.com/>, (ogled 29. 6. 2016).
- [4] <https://www.arnes.si/infrastruktura/>, (ogled 29. 6. 2016).
- [5] <http://www.monitor.si/clanek/slovenska-internetna-hrbtenica/166693/>, (ogled 29. 6. 2016).
- [6] https://en.wikipedia.org/wiki/Fiber-optic_communication, (ogled 29. 6. 2016).

× × ×

Barvna lestvica

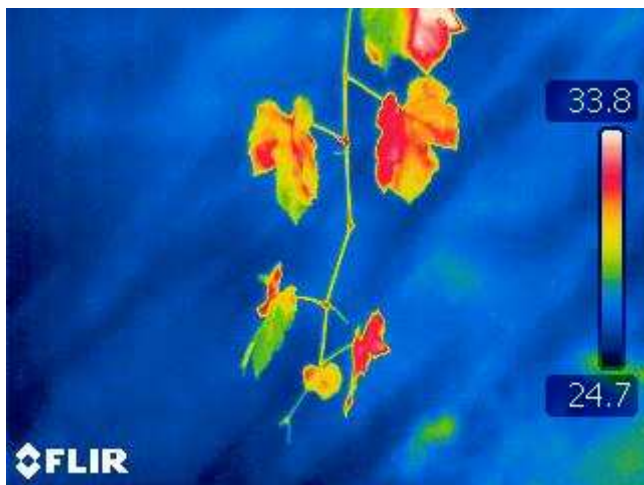
↓↓↓

ANDREJ LIKAR

→ Bela svetloba je sestavljena iz niza mavričnih barv. Leta 1666 je to pokazal Isaac Newton s prehodom svetlobe skozi stekleno prizmo. Z drugo prizmo je razstavljeno svetlobo spet setavil v belo. Danes vemo, da lahko vsaki mavrični barvi pripišemo njej lastno valovno dolžino. Tako dobimo možnost preglednega barvnega prikaza količin z barvno lestvico – vsaki mavrični barvi pripišemo pozitivno število. Temperature na predmetih, posnetih s termografsko kamero, so pregledno prikazane z mavričnimi barvami, ki se jim pridruži tudi bela. Modra barva tam označuje hladne predele, rdeča topla, bela pa vroča področja. Z barvno lestvico lahko pregledno ponazorimo funkcije dveh spremenljivk.

Za prevod števila v svetlobo z ustrezno mavrično barvo lahko uporabimo bodisi njeno valovno dolžino bodisi frekvenco, saj velja $\lambda v = c$, kjer je c hitrost svetlobe v vakuumu. Na termografskih slikah, modra barva npr. predstavlja nižjo temperaturo predmeta, rdeča pa večjo (glej sliko 1). Barve bomo prikazovali na računalniškem zaslonu, saj je kako drugače barvanje zelo zahtevno in zamudno. Moramo se torej na kratko seznaniti z barvanjem zaslona.

Zaslon je na gosto posejan z otočki, ki svetijo rdeče, zeleno ali modro. Lepo jih vidimo z močnejšo lupo, ko je zaslon bel. Kako močno svetijo posamezni otočki, lahko nastavimo v ustreznem programu s celim številom B od 0 do $255 + 255 \cdot 256 + 255 \cdot 256 \cdot 2 = 16777215$. Toliko barvnih odtenkov lahko torej predstavimo z zaslonom, saj se, gledano od daleč, svetloba otočkov v očesu zlije, kot da bi gledali en sam svetlobni vir. Otočku z izbrano barvo lahko nastavimo 256 različnih svetlosti, pri čemer je otoček ugasnjen pri vrednosti 0, najmočnejše pa sveti pri vre-



SLIKA 1.

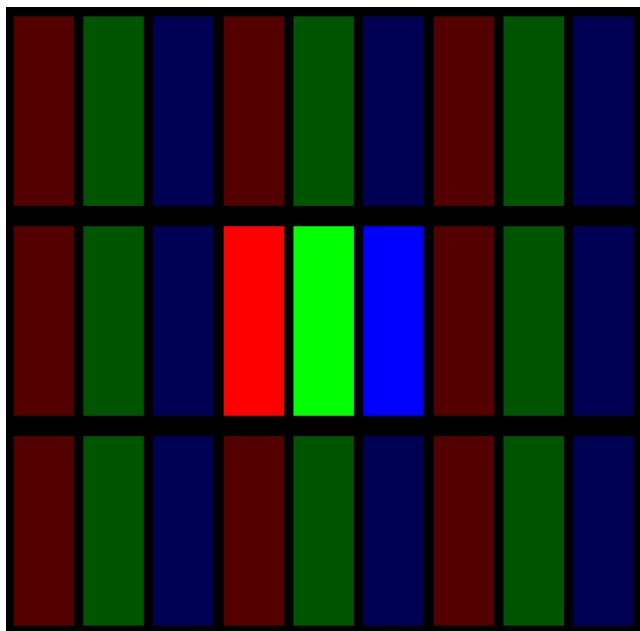
Slika iz termovizijske kamere je prikazana z barvno lestvico na desni, kjer sta navedeni skrajni temperaturi v stopinjah Celzija.

dnosti 255. Pri tem seveda verjamemo, da se je izdelovalcu zaslonov posrečilo izdelati tako natančno napravo. Barvno število B predstavimo takole:

$$B = R + 256Z + 256^2M.$$

Tu R predstavlja svetlost izbranega rdečega otočka, Z zelenega in M modrega. V programu potem izberemo tri bližnje otočke, ki jih imenujemo slikovni element, po angleškem vzoru tudi piksel. Na sliki 2 je prikazan del zaslona, osrednji piksel ima vse tri otočke polno osvetljene, sosednji pa so osvetljeni le deloma. Velikost stranice kvadratnega piksla je pri zaslonu na mojem računalniku 0,25 mm. Barvo piksla določimo tako, da povemo vrednosti za R , Z in M , izračunamo B in ta podatek predamo podprogramu, ki zna komunicirati z zaslonom. Tak podprogram je seveda del programskega jezika, v katerem programiramo računalnik.

Mavrične barve lahko kar dobro prikažemo na zaslonu tako, da prižigamo en ali dva otočka izbranega piksla. Rdečo barvo daje prižgan rdeč otoček, pri ugasnjenih ostalih dveh prav tako dobimo zeleno in modro barvo. Druge mavrične barve dobimo s prižiganjem dveh otočkov, npr. rumeno, s polno prižiganima rdečim in zelenim otočkom pri ugasnjenem modrem, barvo minerala turkiza, torej turkizno ali spet po angleškem vzoru barvo cian, pa s prižiganima zelenim in modrim otočkom. Škrlatno barvo,



SLIKA 2.

Trije raznobarvni otočki tvorijo slikovni element ali piksel.

znano tudi kot magenta, podobno vijolični, dobimo s prižiganima modrim in rdečim otočkom.

Sedaj je pot do barvne lestvice odprta. Denimo, da bi radi številom v intervalu med 0 in 1 priredili mavrične barve. Interval razdelimo na podintervale, in sicer $[0, \frac{2}{8})$, $[\frac{2}{8}, \frac{3}{8})$, $[\frac{3}{8}, \frac{4}{8})$, ... $[\frac{7}{8}, \frac{8}{8}]$. V prvem podintervalu bomo prižgali le rdeč otoček, in sicer tako, da bo številu 0 ustrezal ugasnjen otoček, številu $\frac{2}{8}$ pa najsvetleje prižgan otoček z $R = 255$. V naslednjem intervalu pustimo prižgan rdeči otoček, postopoma pa prižigamo zelenega od $Z = 0$ do $Z = 255$. V naslednjem pustimo polno prižgan zeleni otoček in ugašamo rdečega do $R = 0$. Potem pri polno prižganem zelenem postopoma prižigamo modri otoček. Tako nadaljujemo do zadnjega podintervala. V vsakem podintervalu tako določimo 256 enakomerno naraščajočih števil. Vsakemu številu pripada povsem določen odtенок mavrične barve. Rdeči, zeleni in modri barvi na zaslonu ustrezajo števila $\frac{2}{8}, \frac{4}{8}$ in $\frac{6}{8}$, rumeni $\frac{3}{8}$, turkizni $\frac{5}{8}$, vijolični pa $\frac{7}{8}$.

Seveda lahko lestvico priredimo tudi kako drugače, da npr. hkrati prižigamo ali ugašamo dva otočka, da je, denimo, svetlost piksla pri vseh barvah na videz enaka. To je pri prikazu gladke funkcije dveh spre-





15

nadaljevanje
s strani

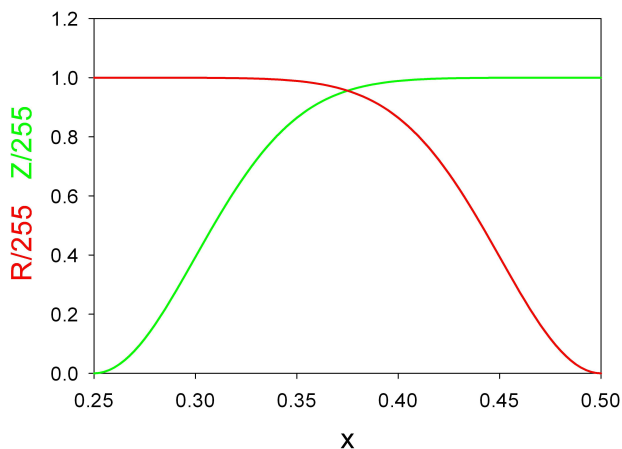
menljivk pomembno, da se oko ne ustavlja na nepomembnih mestih. Bolj »gladko«
lestvico smo dobili tako, da smo za prižiganje in ugašanje uporabili funkcijo

$$\blacksquare f = 1 - e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}},$$

kjer je pri $x = 0$ funkcija enaka nič, potem pa ustrezno hitro, glede na izbran parameter σ , preide v 1. Na sliki 3 smo prikazali, kako postopno prižigamo in ugašamo barvne otočke v intervalu $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$, kjer postopoma ugašamo rdeči otoček in prižigamo zelenega. Na levem koncu intervala imamo tako polno prižgan rdeči otoček in ugasnjen zeleni in modri otoček, na desni pa polno prižgan zeleni ter ugasnjena rdeči in modri otoček. Parameter σ izberemo tako, da je lestvica na pogled kar se da »gladka«, mi smo izbrali vrednost $\sigma = \frac{1}{20}$.

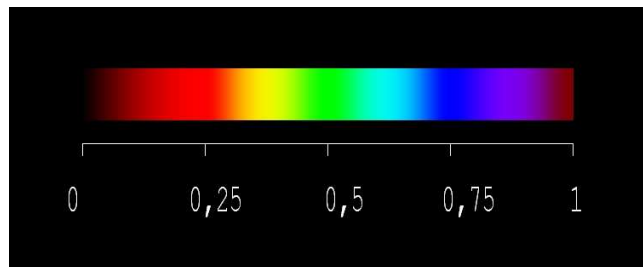
Na sliki 4 vidimo barvno lestvico, ki smo jo uporabili pri naslednjih slikah. Z izbranim parametrom σ je lestvica videti dovolj gladka in nima izrazitejših svetlejših ali temnejših prog, vmesne barve, rumena, turkizna in vijolična pa so dovolj izrazite.

Najprej smo lestvico preizkusili pri risanju mavrice, ki jo dobro poznamo. Na sliki 5 je prikazan naš mavrični lok, ki je seveda preveč izrazit, če ga primerjamo z lokom v naravi. A barve v mavrici se kar dobro prelivajo druga v drugo.



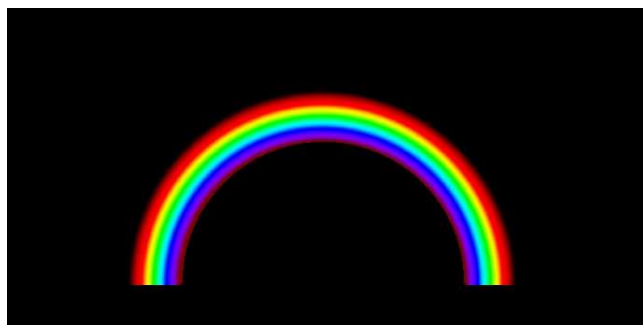
SLIKA 3.

Ugašanje-prižiganje



SLIKA 4.

Barvna lestvica



SLIKA 5.

Mavrični lok

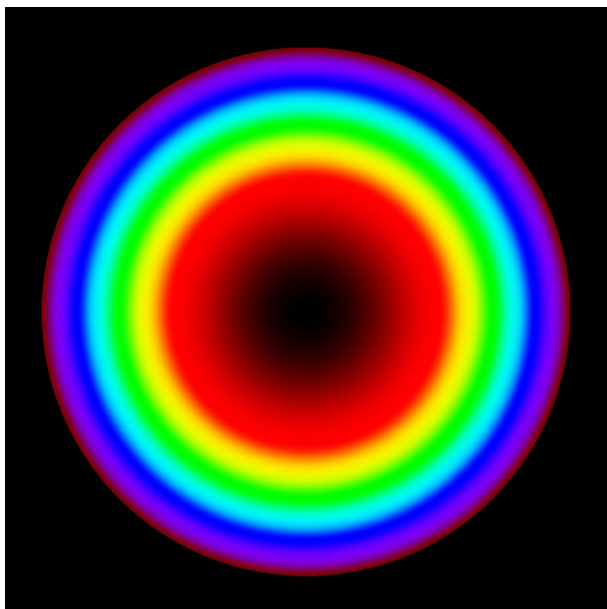
Slika 6 prikazuje paraboloidno ploskev, ki jo opiše enačba

$$\blacksquare z = x^2 + y^2.$$

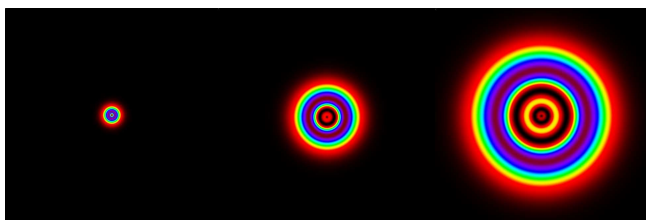
Tu je z barvno lestvico v intervalu $[0, 1]$ prikazana koordinata z te ploskve.

Na naslednji sliki smo z lestvico prikazali verjetnosti, da pri vodikovem atomu na dani oddaljenosti od protona naletimo na elektron. Na sliki 7 je atom v osnovnem stanju (levo), v prvem (na sredi) in drugem vzbujenem stanju (desno). Vidimo, da se vzbujeni atom precej poveča in da na določenih oddaljenostih elektrona ne zasledimo. Vijolična barva tu nakazuje razdaljo, kjer bi v miselnem poskusu z zelo drobno sondo najpogosteje zasledili elektron.

www.obzornik.si

**SLIKA 6.**

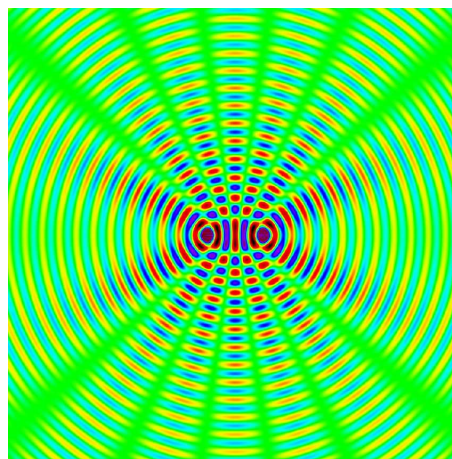
Paraboloidna ploskev

**SLIKA 7.**

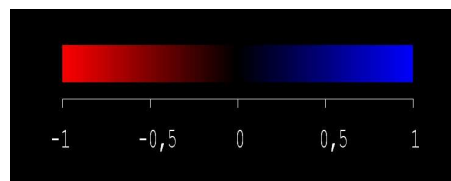
Vodikov atom – osnovno stanje 1s, prvo vzbujeno 2s, drugo vzbujeno 3s.

Barvna lestvica poživi slike valovanj na gladini, tako vidimo na sliki 8 interferenčno sliko valovanja iz dveh koherentnih virov.

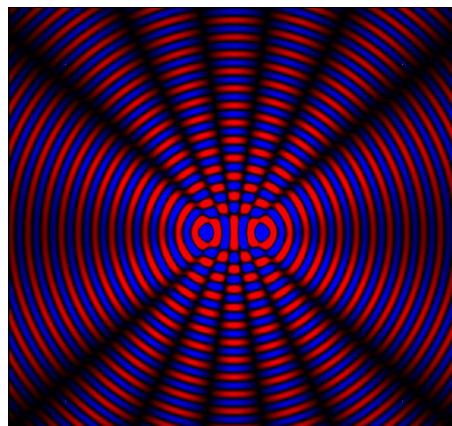
Barvno lestvico lahko tvorimo le iz dveh barv, kar pride prav pri prikazu tako pozitivnih kot negativnih števil. Na sliki 9 je taka lestvica z rdečo in modro barvo, kjer predstavlja svetla rdeča barva število -1 , svetla modra 1 , črna pa število 0 . S tako izbrano lestvico smo na sliki 10 spet prikazali valovanje iz dveh koherentnih virov; to pot je slika nekoliko manj pisana.

**SLIKA 8.**

Valovanje na gladini iz dveh koherentnih virov

**SLIKA 9.**

Dvobarvna lestvica z rdečo in modro barvo

**SLIKA 10.**

Valovanje na gladini iz dveh koherentnih virov, predstavljeno z dvobarvno lestvico.

× × ×

Slovenska reprezentanca mladih astronomov uspešna na 10. mednarodni olimpijadi iz astronomije in astrofizike v Indiji



DUNJA FABJAN, MARUŠA ŽERJAL, ANDREJ GUŠTIN

→ Slovenska srednješolska ekipa se je na Mednarodni olimpijadi iz astronomije in astrofizike (MOAA) odlično odrezala, saj je vseh pet tekmovalcev prejelo odlikovanja: tri pohvale, bronasto in srebrno medaljo.

Mladi predstavniki Slovenije so se od 9. do 19. decembra 2016 udeležili 10. mednarodne olimpijade iz astronomije in astrofizike v indijskem mestu Bhubaneswar.

Letošnjo olimpijsko ekipo so sestavljali Luka Govedič (II. gimnazija Maribor), Anže Jenko (bivši dijak Gimnazije Bežigrad), Aleksej Jurca (Gimnazija Bežigrad), Jakob Robnik (bivši dijak Gimnazije Bežigrad) in Urban Ogrinec (Gimnazija in srednja šola Rudolfa Maistra, Kamnik). Izbrani so bili izmed najbolje uvrščenih srednješolcev in srednješolk na tekmovanju iz znanja astronomije za Dominkovo priznanje, ki ga od Mednarodnega leta astronomije 2009 prireja Društvo matematikov, fizikov in astronomov (DMFA) Slovenije.

Pod vodstvom in mentorstvom Andreja Guština (DMFA Slovenije), prof. dr. Andreje Gomboc (Fakulteta za naravoslovje, Univerza v Novi Gorici), dr. Dunje Fabjan (Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani) in v spremstvu dr. Maruše Žerjal (Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani) se je ekipa podala na težavno tekmovanje, ki ga sestavljajo štirje sklopi: teoretični, opazovalni, skupinski del ter obdelava podatkov.

Na letošnji olimpijadi je tekmovalo 234 srednješolcev iz 42-ih držav vseh celin. Skupno so organizatorji podelili 14 zlatih, 28 srebrnih in 50 bronastih medalj ter 48 pohval. Letošnja slovenska ekipa je bila še posebej uspešna: Aleksej Jurca je prejel srebrno medaljo, Jakob Robnik bronasto medaljo, Luka Govedič, Anže Jenko in Urban Ogrinec pa pohvalo. Slovenske ekipe srednješolcev so na mednarodni olimpijadi sodelovale že četrto leto in doslej osvojile skupno pet medalj in devet pohval.

Spletna stran 10. MOAA: www.ioaa2016.in.

www.presek.si

www.dmfa.si



SLIKA 1.

Slovenska olimpijska reprezentanca, od leve proti desni: mentor Andrej Guštin (DMFA), Jakob Robnik (bronasta medalja), Luka Govedič (pohvala), Anže Jenko (pohvala), Aleksej Jurca (srebrna medalja), Urban Ogrinec (pohvala), Maruša Žerjal (FMF, Univerza v Ljubljani).

Primeri nalog 10. mednarodne olimpijade iz astronomije in astrofizike

Drži ali ne drži

Označi, ali so naslednje trditve pravilne ali napačne.

- Na fotografiji jasnega nočnega neba s polno Luno bi bila pri dovolj dolgem času osvetlitve barva neba modra, tako kot podnevi.
- Astronom v Bhubaneswarju si vsak dan ob 05:00 UT zapiše trenutni položaj Sonca na nebu. Če bi bila Zemljina vrtilna os pravokotna na njeno orbitalno ravnino, bi ti zabeleženi položaji opisali lok velikega kroga.
- Če je obhodni čas nekega malega telesa, ki je v orbiti okoli Sonca na ekliptični ravnini, manjši od obhodnega časa Urana okoli Sonca, potem je njegova orbita zagotovo v celoti znotraj Uranove orbite.
- Težišče Osončja je ves čas pod Sončevim površjem.
- Foton potuje po praznem prostoru. Ker se vesolje razširja, se gibalna količina fotona zmanjšuje.

Optika teleskopa

Nek optično popoln teleskop ima goriščno razmerje $f/5$, goriščna razdalja njegovega objektivna je 100 cm, okularja pa 1 cm.

- Kolikšna je povečava teleskopa m_0 ? Kolikšna je dolžina teleskopa L_0 – razdalja med objektivom in okularjem?

Pogosto goriščno razdaljo teleskopa povečamo tako, da med objektiv in njegovo primarno gorišče postavimo razpršilno lečo (Barlow). Prej omenjenemu teleskopu med objektiv in okular vtaknemo Barlowovo lečo z goriščno razdaljo 1 cm, tako da se njego povečava podvoji.

- Na kolikšni oddaljenosti d_B od primarnega gorišča objektivna moramo postaviti Barlowovo lečo, da bo povečava dvakrat večja kot prej?
- Za koliko se poveča dolžina teleskopa ΔL ?

V gorišče našega teleskopa pritrdimo CCD kamero brez okularja in Barlowa. Velikost slikovnega elementa (piksel) kamere je $10 \mu\text{m}$.

- Kolikšna bo oddaljenost n_p med središčema slik dveh zvezd na čipu te CCD kamere, če sta zvezdi na nebu $20''$ narazen? Razdaljo izrazi s številom slikovnih elementov (pikslov).

No.	T (tMDJ)	P (μs)	a (ms^{-2})
1	5740,654	7587,8889	$-0,92 \pm 0,08$
2	5740,703	7587,8334	$-0,24 \pm 0,08$
3	5746,100	7588,4100	$-1,68 \pm 0,04$
4	5746,675	7588,5810	$+1,67 \pm 0,06$
5	5981,811	7587,8836	$+0,72 \pm 0,06$
6	5983,932	7587,8552	$-0,44 \pm 0,08$
7	6005,893	7589,1029	$+0,00 \pm 0,08$
8	6340,857	7589,1350	$+0,00 \pm 0,04$
9	6335,904	7589,1358	$+0,00 \pm 0,02$

TABELA 1.

→ Dvojni pulzar

Med sistematičnim pregledovanjem neba v zadnjih desetletjih so astronomi odkrili veliko število milisekundnih pulzarjev. Rotacijska perioda (čas enega zasuka okoli lastne osi) milisekundnih pulzarjev je < 10 ms. Velika večina takih pulzarjev je dvojnih. Imajo skoraj krožne orbite.

V dvojnem sistemu pulzarjev se izmerjena rotacijska perioda posameznega pulzarja (P) in izmerjeni pospešek (a) (pospešek v smeri zveznice med Zemljo in pulzarjem), periodično spreminjata zaradi kroženja pulzarjev okoli skupnega težišča.

Za krožne orbite lahko te spremembe zapišemo z enačbo, ki vsebuje orbitalno fazo Φ ($0 \leq \Phi \leq 2\pi$):

$$\blacksquare P(\Phi) = P_0 + P_t \cos \Phi, \quad \text{kjer je } P_t = \frac{2\pi P_0 r}{c P_B}.$$

$$a(\Phi) = -a_t \sin \Phi, \quad \text{kjer je } a_t = \frac{4\pi^2 r}{P_B^2}.$$

P_B je orbitalna perioda dvojnega sistema, P_0 je lastna rotacijska perioda pulzarja, r pa je polmer orbite.

V tabeli 1 so podane meritve P in a za tak sistem, ob izbranih heliocentričnih časih T , ki so izraženi v modificiranem julijanskem datumu ($tMJD$). To je število dni po $MJD = 2440000$.

Če na graf narišemo $a(\Phi)$ v odvisnosti od $P(\Phi)$, dobimo parametrično krivuljo. Kot je razvidno iz zgornjih enačb, je taka krivulja elipsa.

V tej nalogi boš iz meritev v preglednici ocenil lastno rotacijsko periodo P_0 , orbitalno periodo P_B in polmer orbite r dvojnega sistema pulzarjev. Predpostavi, da sta orbiti pulzarjev krožnici.

D1.1) Iz podatkov v preglednici nariši graf pospeška v odvisnosti od periode. Za vsako točko nariši tudi velikost napake. Graf označi kot »D1.1«.

D1.2) Na isti graf »D1.1« nariši elipso, ki se najbolj prilaga podatkom.

D1.3) Iz grafa oceni P_0 , P_t in a_t . Pri tem oceni napake rezultatov, ki so posledica napake meritve.

D1.4) Zapiši izraza za P_B in r . Pri tem uporabi P_0 , P_t , a_t .

D1.5) Iz ocen iz naloge (D1.3) izračunaj približno vrednost P_B in r . Oceni napako rezultatov.

D1.6) Izračunaj orbitalno fazo Φ , ki ustreza opazovanjem z zaporednimi številkami 1, 4, 6, 8, 9 v preglednici.

D1.7) Izboljšaj oceno orbitalne periode P_B . Pri tem uporabi rezultate iz (D1.6) na sledeči način:

D1.7a) Najprej določi začetni čas T_0 , ki je najbližje ničelni fazi pred prvim opazovanjem ($\Phi = 0$).

D1.7b) Čas T_{calc} , ob katerem je sistem v fazi Φ ob posameznem opazovanju, podaja zveza:

$$\blacksquare T_{\text{calc}} = T_0 + \left(n + \frac{\Phi}{360^\circ} \right) P_B$$

n je število celih obhodov med časoma T_0 in T (ali T_{calc}). Oceni n in T_{calc} za vsako izmed petih opazovanj v nalogi (D1.6). Zapiši razliko $T_0 - C$ med opazovanima T in T_{calc} .

D1.7c) Nariši n v odvisnosti $T_0 - C$. Graf označi z »D1.7«.

D1.7d) S pomočjo grafa določi izboljšane vrednosti $T_{0,r}$ in $P_{B,r}$.

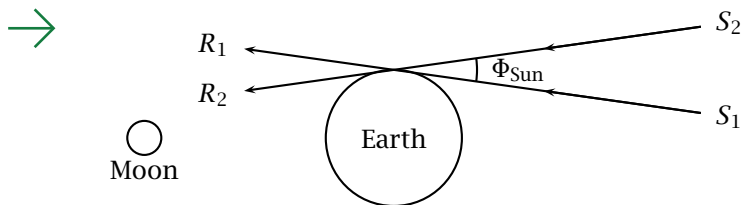


SLIKA 2.

Datum	R. A. (α)	Dec. (δ)	Kotna velikost (Θ)	Faza (Φ)	Elongacija
	h m s	" ' "	"		Lune
Sep 1	0 36 46,02	3 6 16,8	1991,2	0,927	148,6° W
Sep 2	1 33 51,34	7 32 26,1	1974,0	0,852	134,7° W
Sep 3	2 30 45,03	11 25 31,1	1950,7	0,759	121,1° W
Sep 4	3 27 28,48	14 32 4,3	1923,9	0,655	107,9° W
Sep 5	4 23 52,28	16 43 18,2	1896,3	0,546	95,2° W
Sep 6	5 19 37,25	17 55 4,4	1869,8	0,438	82,8° W
Sep 7	6 14 19,32	18 7 26,6	1845,5	0,336	70,7° W
Sep 8	7 7 35,58	17 23 55,6	1824,3	0,243	59,0° W
Sep 9	7 59 11,04	15 50 33,0	1806,5	0,163	47,5° W
Sep 10	8 49 0,93	13 34 55,6	1792,0	0,097	36,2° W
Sep 11	9 37 11,42	10 45 27,7	1780,6	0,047	25,1° W
Sep 12	10 23 57,77	7 30 47,7	1772,2	0,015	14,1° W
Sep 13	11 9 41,86	3 59 28,8	1766,5	0,001	3,3° W
Sep 14	11 54 49,80	0 19 50,2	1763,7	0,005	7,8° E
Sep 15	12 39 50,01	-3 20 3,7	1763,8	0,026	18,6° E
Sep 16	13 25 11,64	-6 52 18,8	1767,0	0,065	29,5° E
Sep 17	14 11 23,13	-10 9 4,4	1773,8	0,120	40,4° E
Sep 18	14 58 50,47	-13 2 24,7	1784,6	0,189	51,4° E
Sep 19	15 47 54,94	-15 24 14,6	1799,6	0,270	62,5° E
Sep 20	16 38 50,31	-17 6 22,8	1819,1	0,363	73,9° E
Sep 21	17 31 40,04	-18 0 52,3	1843,0	0,463	85,6° E
Sep 22	18 26 15,63	-18 0 41,7	1870,6	0,567	97,6° E
Sep 23	19 22 17,51	-17 0 50,6	1900,9	0,672	110,0° E
Sep 24	20 19 19,45	-14 59 38,0	1931,9	0,772	122,8° E
Sep 25	21 16 55,43	-11 59 59,6	1961,1	0,861	136,2° E
Sep 26	22 14 46,33	-8 10 18,3	1985,5	0,933	150,0° E
Sep 27	23 12 43,63	-3 44 28,7	2002,0	0,981	164,0° E
Sep 28	0 10 48,32	0 58 58,2	2008,3	1,000	178,3° E
Sep 29	1 9 5,89	5 38 54,3	2003,6	0,988	167,4° W
Sep 30	2 7 39,02	9 54 16,1	1988,4	0,947	153,2° W

TABELA 2.





SLIKA 3.

Oddaljenost Lune

V tabeli 2 so podane geocentrične efemeride Lune za september 2015. Vse meritve so bile opravljene ob 00:00 UT.

Sestavljena slika 2 prikazuje zaporedje posnetkov ob različnih fazah popolnega Luninega mrka, ki je bil septembra 2015. Posamezna fotografija Lune je bila narejena tako, da je bil posnetek centriran na Zemljino senco.

Pri tej nalogi predpostavi, da je opazovalec v središču Zemlje. Kotna velikost se nanaša na kotni premer nebesnega telesa oz. sence.

D2.1) Luna je bila septembra 2015 v apogeju. Kakšna je bila takrat približno njena mena? Razlaga ni potrebna. Možni odgovori so: mlaj / prvi krajec / ščip / zadnji krajec.

D2.2) V kateri meni je bila Luna septembra 2015, ko je bila najbližje dvižnemu vozlu svoje orbite? Razlaga ni potrebna. Možni odgovori so: mlaj / prvi krajec / ščip / zadnji krajec.

D2.3) Iz podatkov oceni ekscentričnost e Lunine orbite.

D2.4) Oceni kotno velikost (premer) Zemljine sence Φ_{umbra} v enotah kotne velikosti Lunine ploskvice Φ_{Moon} . Postopek meritve prikaži na sliki.

D2.5) Sončevi žarki iz enega in drugega roba Sonca S_1R_1 in S_2R_2 (glej sliko 3, ki seveda ni v merilu) se na robu Zemlje sekajo pod kotom Φ_{Sun} . Zaradi tega ima Zemlja Senco in polsenco. Na dan Luninega mrka iz te naloge je bil $\Phi_{\text{Sun}} = 1915,0''$. Izračunaj kotno velikost polsence Φ_{penumbra} . Rezultat izrazi s Φ_{Moon} . Predpostavi, da je opazovalec v središču Zemlje.

D2.6) Naj bo kot Φ_{Earth} kotna velikost Zemlje, kot bi jo videli iz središča Lune. Izračunaj kotno velikost Lune Φ_{Moon} , kot bi jo videli iz središča Zemlje na dan mrka. Rezultat izrazi s Φ_{Earth} .

D2.7) Iz zgornjih rezultatov oceni polmer Lune R_{Moon} v kilometrih.

D2.8) Oceni najmanjšo (r_{perigee}) in največjo oddaljenost (r_{apogee}) Lune od Zemlje.

D2.9) Iz podatkov za 10. september oceni razdaljo med Zemljo in Soncem d_{Sun} .

× × ×

Barvni sudoku

↓ ↓ ↓

→ V 8×8 kvadratkov morate vpisati začetna naravna števila od 1 do 8 tako, da bo v vsaki vrstici, v vsakem stolpcu in v kvadratih iste barve (pravokotnikih 2×4) nastopalo vseh osem števil.

	7	4					
3		8		1			
			1	3	2	6	8
		7			5	1	
			3		7		
		3			8	5	
				6			7

× × ×

Fenwickovo drevo



ALEKSANDER KELENC



Opis problema

Neki spletni portal se je odločil, da bo za potrebe analize starosti svojih uporabnikov le-te uvrščal v 15 različnih starostnih kategorij glede na njihovo starost ob prvi prijavi v portal. V tabeli 1 so prikazane posamezne kategorije in ustrezno število uporabnikov, ki so v določenem trenutku uvrščeni v to kategorijo.

Omenjeni portal v različnih trenutkih zanima, koliko njihovih uporabnikov je uvrščenih med dvema izbranimi kategorijama, npr. od kategorije 21–25 do kategorije 46–50 (vključno z mejama) je 13 uporabnikov. Seveda se z novimi uporabniki tabela kategorij nenehno spreminja. Ker spletni portal jemlje analizo podatkov zelo resno, želi takšna povpraševanja izvajati kolikor hitro je le mogoče. Dobili smo nalogo, da opišemo podatkovno strukturo, ki bo to omogočala.

Za lažje razmišljanje opišimo podan problem z računalniškimi jezikom. Podan imamo končen seznam števil a_1, a_2, \dots, a_n . Zanima nas vsota števil med indeksoma i in j (vključno z mejama), kjer velja $1 \leq i \leq j \leq n$. Če si seznam števil shranimo v polje a , potem bomo za eno takšno popraševanje morali pregledati vse elemente polja med indeksoma i in j . V splošnem za eno poizvedbo to pomeni linearno časovno zahtevnost glede na velikost seznama. Ali smo lahko bolj učinkoviti?

Hitro opazimo, da bi si pri tem lahko pomagali s kumulativnimi frekvencami. Naj bo k polje kumulativnih frekvenc za polje a . Za vsak indeks i , kjer je $1 \leq i \leq n$, je kumulativna frekvenca k_i enaka vsoti vseh elementov od a_1 do a_i , torej $k_i = a_1 + \dots + a_i$. Za izračun polja k naj bo $k_1 = a_1$ in element $k_i = k_{i-1} + a_i$ za vsak $i \in \{2, \dots, n\}$. Vidimo, da je vsota števil med indeksoma i in j sedaj enaka kar $k_j - k_{i-1}$. Če izračunamo polje kumulativnih frekvenc, potem dobimo konstantno ča-

sovno zahtevnost za eno poizvedbo vsote elementov med dvema indeksoma. Zelo učinkovito, ampak v portalu se število uporabnikov nenehno spreminja in zato moramo omogočiti še posodabljanje elementov v polju a . Ko posodobimo element a_i to pomeni, da moramo v polju kumulativnih frekvenc k posodobiti vse elemente od k_i do k_n . Vidimo, da v splošnem dobimo linearno časovno zahtevnost za posodobitev polja kumulativnih frekvenc. Z uporaba polja kumulativnih frekvenc smo dobili konstantno časovno zahtevnost za poizvedbo, vendar smo s posodabljanjem elementov spet prišli do linearne časovne zahtevnosti.

Drevesne podatkovne strukture se pri podobnih problemih izkažejo kot zelo učinkovite, saj velikokrat pohitrijo reševanje problema. Razvitih je precej različnih drevesnih podatkovnih struktur in ena izmed njih je tudi Fenwickovo drevo. Fenwickovo drevo je podatkovna struktura, ki z uporabo ideje o kumulativnih frekvencah omogoča poizvedbo za vsoto elementov med dvema indeksoma in posodabljanje elementov polja v logaritemski časovni zahtevnosti glede na velikost polja. Fenwickovo drevo je leta 1994 prvi predstavil Peter M. Fenwick.

Osnovna ideja

Osnovna ideja Fenwickovega drevesa je, da lahko vsako naravno število izrazimo kot vsoto ustreznih potenc števila 2. To pomeni, da bi lahko kumulativno frekvenco k_i predstavili kot vsoto ustreznih delnih kumulativnih frekvenc (predstavimo s poljem f) glede na razcep števila i na vsoto potenc števila 2. Če lahko indeks i predstavimo kot vsoto treh potenc števila 2, potem bo npr. k_i enak vsoti treh delnih kumulativnih frekvenc. Seveda morajo biti delne kumulativne frekvence podane za ustrezne intervale, da bomo s tem pristopom uspeli sestaviti celotno kumulativno frekvenco za indeks i . Za vsako potenco števila 2 iz razcepa indeksa i bo delna kumulativna frekvenca obsegala interval, ki bo širok toliko, kot,





starost	do 10	11-15	16-20	21-25	26-30	31-35	36-40	41-45
Število	3	1	0	0	2	2	5	3
starost	46-50	51-55	56-60	61-65	66-70	71-75	nad 75	
Število	1	5	4	0	0	2	3	

TABELA 1.

Tabela kategorij

je vrednost te potence. V zgornjem delu tabele 2 so prikazani intervali za delne kumulativne frekvence do števila 15. Oglejmo si osnovno idejo na konkretnem primeru za indeks 11. Število $11 = 2^3 + 2^1 + 2^0$, kar pomeni, da bo k_{11} sestavljen iz delnih kumulativnih frekvenc za intervale širine 8, 2 in 1 oziroma iz delnih kumulativnih frekvenc za intervale 1..8, 9..10 in 11.

V spodnjem delu tabele 2 lahko vidimo primer, kjer imamo v prvi vrstici zapisano polje a , v drugi vrstici polje za kumulativne frekvence k in v tretji vrstici polje za delne kumulativne frekvence f . Vrnimo se na primer indeksa 11. Kumulativna frekvenca za indeks 11 je sestavljena iz $k_{11} = f_{11} + f_{10} + f_8$, kar ustreza vsoti $= a_{11} + a_{9..10} + a_{1..8}$, kjer je $a_{1..8} = a_1 + \dots + a_8$. Zaporedje števil 11, 10, 8 dobimo, če v dvojiški predstavitvi števila $11 = 1011_{(2)}$ po vrsti nadomeščamo najbolj desno enico z ničlo. Izračun kumulativne frekvence k_i iz polja delnih kumulativnih frekvenc f torej dobimo tako, da seštejemo vse elemente polja f , ki jih dobimo, ko indeksu i po vrsti nadomeščamo najbolj desno enico z ničlo, dokler ne pridemo do števila 0.

Takšno indeksiranje nam iz polja delnih kumulativnih frekvenc generira drevo. Za koren drevesa postavimo indeks 0. Drevo ni uravnoteženo. Vsako vozlišče drevesa ima toliko otrok, kot je število ničel do prve enice v dvojiški predstavitvi indeksa, gledano iz desne strani. Globina vozlišča (razdalja do korena) pa je enaka številu enic v dvojiški predstavitvi indeksa. Polje, opremljeno s takšnim indeksiranjem imenujemo *Fenwickovo drevo*. Zaradi načina indeksiranja takšno strukturo imenujemo tudi *binarno indeksirano drevo*. Na sliki 1 je predstavljeno drevo za primer polja velikosti 15. V vozliščih drevesa so navedeni indeksi, v katerih se nahajajo ustrezni elementi v polju delnih kumulativnih frekvenc.

Operacije

S pomočjo opisane strukture želimo v logaritemskem času izvajati naslednji dve operaciji:

- poizvedbo za kumulativno frekvenco do nekega indeksa i ,
- posodobitev polja delnih kumulativnih frekvenc f glede na posodobitev elementa a_i .

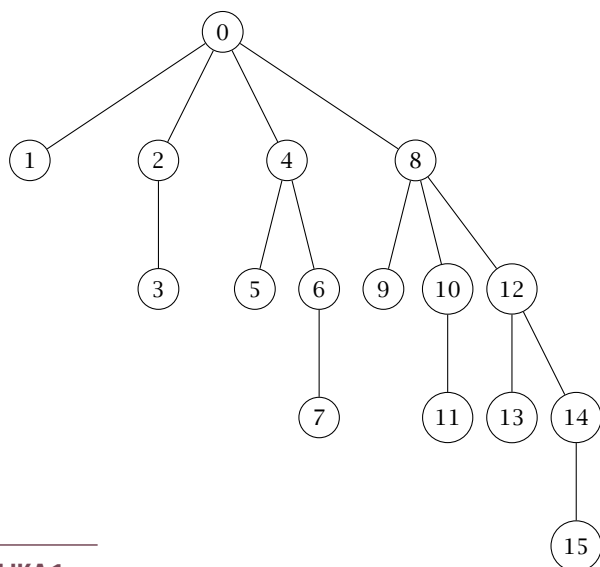
Pri obeh operacijah bomo indekse računali s pomočjo najbolj desne enice v dvojiški predstavitvi. Za izračun najbolj desne enice v dvojiški predstavitvi nekega števila si bomo pomagali z dvojiškim komplementom. Z dvojiškim komplementom so v računalniku predstavljena negativna števila. Iz pozitivnega števila m dobimo z dvojiškim komplementom $-m$ tako, da v dvojiški predstavitvi od m obrnemo vse bite in prištejemo ena. V tabeli 3 imamo primer za dvojiški komplement števila $18 = 00010010_{(2)}$, ki znaša 11101110 . Opazimo, da je edino mesto, kjer se enica hkrati pojavi tako v dvojiški predstavitvi števila 18 kot tudi v dvojiški predstavitvi števila -18 , ravno mesto najbolj desne enice v obeh dvojiških predstavvah. S pomočjo logičnega operatorja \wedge dobimo rezultat 00000010 . Najbolj desno enico indeksa i dobimo z $(i \wedge -i)$, kar pomeni, da v drevesu za poizvedbe indeks starša vozlišča i izračunamo kot $i - (i \wedge -i)$.

Poizvedba za kumulativno frekvenco

Spodaj imamo prikazano funkcijo v programskem jeziku C++, ki vrne kumulativno frekvenco za indeks i . Za polje delnih kumulativnih frekvenc uporabimo `vector<int> f`. Število iteracij `while` zanke je enako številu enic indeksa i v bitni predstavitvi - v drevesu za poizvedbe to predstavlja dolžino poti od vozlišča i do korena. V najslabšem primeru to pomeni,

indeks	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
interval	1	1..2	3	1..4	5	5..6	7	1..8	9	9..10	11	9..12	13	13..14	15
polje <i>a</i>	3	1	0	0	2	2	5	3	1	5	4	0	0	2	3
polje <i>k</i>	3	4	4	4	6	8	13	16	17	22	26	26	26	28	31
polje <i>f</i>	3	4	0	4	2	4	5	16	1	6	4	10	0	2	3

TABELA 2.
Primer za polje velikosti 15



SLIKA 1.
Drevo za poizvedbe na polju velikosti 15

da je časovna zahtevnost funkcije enaka logaritmu velikosti polja *a*.

```
int vrniKumulativnoFrekv(int i) {
    int vsota = 0;
    while (i > 0) {
        vsota += f[i];
        i -= (int)(i & -i);
        // odštejemo najbolj desno enico
    }
    return vsota;
}
```

Ko imamo metodo za izračun kumulativne frekvence za poljubni indeks, potem lahko vsoto elementov med indeksoma *i* in *j* izračunamo kot `vrniKumulativnoFrekv(j) - vrniKumulativnoFrekv(i - 1)`.

$$\begin{array}{r}
 18 \quad 00010010 \\
 \quad 11101101 \\
 + \quad 00000001 \\
 \hline
 -18 \quad 11101110
 \end{array}$$

TABELA 3.
Dvojiški komplement števila 18

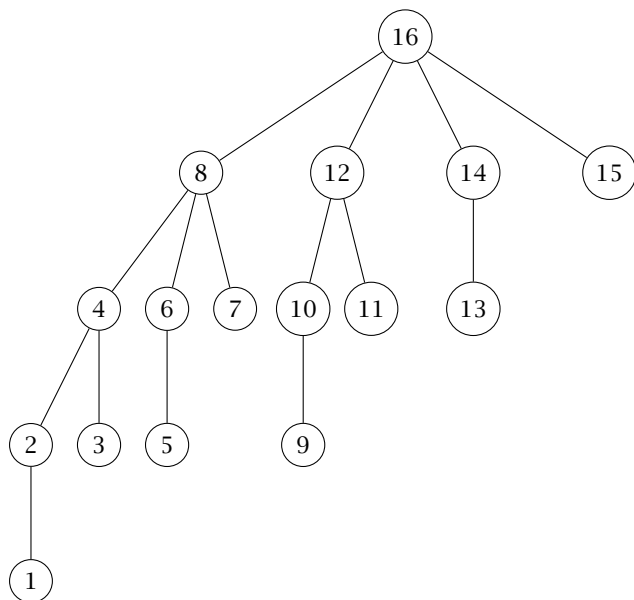
Posodabljanje elementa polja

Pri poizvedbi za kumulativno frekvenco smo indeksu vsakič enico na desni strani nadomestili z ničlo. S tem smo se premikali proti začetku polja delnih kumulativnih frekvenc oziroma proti korenu drevesa za poizvedbe. Za posodobitev elementa polja *a* pa moramo posodobiti vrednosti vsem delnim kumulativnim frekvencam, ki vsebujejo ta element. V tabeli 2 pogledjmo, katere elemente polja delnih kumulativnih frekvenc *f* moramo posodobiti, če v polju *a* posodobimo element *a*₃. Elementi polja *f*, katerih intervali vsebujejo element *a*₃, so *f*₃, *f*₄ in *f*₈. Iz indeksa 3 se moramo premakniti na indeks 4 (prištejemo 1) in potem na indeks 8 (prištejemo 4). Opazimo, da namesto odstranjevanja (odštevanja) enega bita na desni strani, moramo k trenutnemu indeksu dodati (prišteti) najbolj desni bit na vsakem koraku. Ta korak ponavljamo, dokler ne pridemo preko velikosti polja.

Z indeksiranjem za posodabljanje elementov dobimo drugačno drevo, kot smo ga dobili z indeksiranjem za poizvedbe. Drevo za polje velikosti 15 je prikazano na sliki 2.

Za koren drevesa dodamo vozlišče z indeksom 16, ki služi kot stražar, pri katerem se moramo zaustraviti pri posodabljanju. Opazimo, da je glede na





SLIKA 2.
 Drevo za posodabljanje elementov polja velikosti 15

obliko drevo za posodabljanje zrcalna slika drevesa za poizvedbe.

Napišimo še funkcijo v programskem jeziku C++, ki posodobi polje delnih kumulativnih vsot, če k elementu polja a_i prištejemo vrednost v , kjer je vrednost v lahko tudi negativna.

```
void posodobi(int i, int v) {
    while (i < f.size()) {
        f[i] += v;
        i += (int) (i & -i);
        // prištejemo najbolj desno enico
    }
}
```

Časovno zahtevnost funkcije za posodabljanje lahko ocenimo s pomočjo časovne zahtevnosti funkcije poizvedbe. Število iteracij `while` zanke je enako dolžini poti od vozlišča i do korena v drevesu za posodabljanje. Ker je drevo za posodabljanje zrcalna slika drevesa za poizvedbe, sledi, da je najslabša časovna zahtevnost metode `void posodobi(int i, int v)` prav tako enaka logaritmu velikosti polja a .

S tem smo opisali podatkovno strukturo, ki omogoča, da za podano polje števil a izvajamo poizvedbe za kumulativne vsote in posodabljanje elemen-

tov v logaritemski časovni zahtevnosti glede na velikost polja a . V našem primeru starostnih kategorij spletnega portala je polje velikosti 15. V praksi sprememba časovne zahtevnosti iz linearne na logaritemsko pri polju velikosti 15 ne pride do izraza, vendar pa opisano podatkovno strukturo lahko uporabimo za poljubno velikost polja. S povečevanjem velikosti polja pa pridemo do bistvene razlike pri časovni učinkovitosti omenjenih operacij.

Literatura

- [1] P. M. Fenwick, *A New Data Structure for Cumulative Frequency Tables*, *Software-practice and experience* **24** 3, (1994), 327-336.
- [2] F. Halim in S. Halim, *Competitive Programming 3: The New Lower Bound of Programming Contests*, 2013.
- [3] Wikipedia: Fenwick tree, ogled: 14. 1. 2017. https://en.wikipedia.org/wiki/Fenwick_tree.

Barvni sudoku



REŠITEV BARVNI SUDOKU

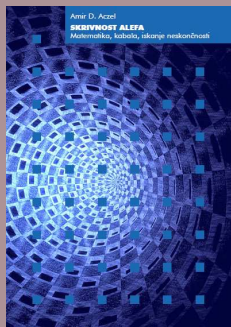
1	7	4	6	5	3	8	2
3	5	8	2	1	6	7	4
2	3	6	8	7	1	4	5
7	4	5	1	3	2	6	8
6	2	7	4	8	5	1	3
5	8	1	3	4	7	2	6
4	6	3	7	2	8	5	1
8	1	2	5	6	4	3	7



Novosti v naši ponudbi

V DMFA – založništvo izdajamo različne vrste literature.

Predstavljamo vam dve zadnji novosti:



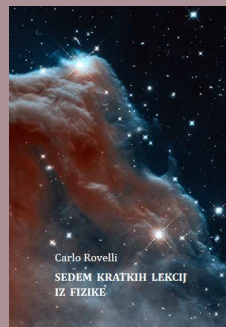
Amir D. Aczel:

SKRIVNOST ALEFA

Matematika, kabala, iskanje neskončnosti

184 strani, format 14 × 20 cm

19,50 EUR



Carlo Rovelli

SEDEM KRATKIH LEKCIJ IZ FIZIKE

76 strani, format 12 × 17 cm

9,50 EUR

Poleg omenjenih lahko v naši ponudbi najdete še veliko drugih zbirk nalog. Podrobnejše predstavitve so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse zbirke tudi naročite:

<http://www.dmfa-zaloznistvo.si/cenik/>

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA Slovenije, dijaki in študentje imate ob naročilu pri DMFA-založništvo 20 % popusta, razen za najnovejše knjige! Dodatne informacije lahko dobite v uredništvu Preseka po telefonu (041) 721 264.



REŠITEV NAGRADNE KRIŽANKE PRESEK 44/3

→ Pravilna rešitev nagra-
dne križanke iz tretje
številke 44. letnika Pre-
seka je **Astronomski
izziv**. Izmed pravilnih
rešitev so bili izžrebani
TOMAŽ TERČIČ iz Nove
Gorice, PETER ŽUREJ
iz Frankolovega in VID
KAVČIČ iz Črnomlja, ki
so razpisane nagrade
prejeli po pošti.



Atmosferski tlak in plastenka

↓↓↓

ALEŠ MOHORIČ

→ Prejšnji teden sem si po koncu smučanja privoščil plastenko vode in na višini 2664 m nazdravil vrhovom masiva Dachstein, kot kaže tokratna naravoslovna fotografija (levo). Prazno plastenko sem nato zatesnil. Med vračanjem sem na parkirišču, ki ima nadmorsko višino 1691 m, posnel še eno fotografijo (sredina). Zadnjo (desno) sem naredil v meglenem Schladmingu pri nadmorski višini 728 m. Nadmorsko višino lahko natančno določimo s satelitsko navigacijo, če pa ta ni na voljo, si lahko pomagamo s spletom. Koordinate krajev sem poiskal na Google maps, za dane koordinate pa nadmorsko višino na strani <http://www.mapcoordinates.net/en>.

Na sliki jasno vidimo, kako je plastenka stisnjena vse bolj, nižje kot smo. Zakaj? Na površju Zemlje se nahajamo na dnu tekočine, ozračja, ki na vsa telesa deluje z atmosferskim tlakom. V srednji šoli učimo, da na telesa potopljena v mirujočo tekočino deluje tlak, ki narašča z globino. Globina je razdalja od telesa do gladine tekočine. Običajno spreminjanje zračnega tlaka z višino zanemarimo, kadar imamo opravka z majhnimi spremembami, saj so gostote plinov približno tisočkrat manjše od gostote kapljevin. Če so spremembe nadmorske višine znatne, pojav brez težav opazimo. Z natančnimi merilniki ga opazimo tudi pri manjših višinskih razlikah. Tlak ozračja se spreminja z vremenom. Kot standardni tlak na morski gladini upoštevamo $p_0 = 101325 \text{ Pa}$. Ta tlak pomeni, da vsak kvadratni meter vodoravnega površja nosi težo zračnega stolpca, ki ustreza masi zraka 10 ton. Za gravitacijski pospešek vzamemo $g = 9,80665 \text{ m/s}^2$. Gostota zraka na morski

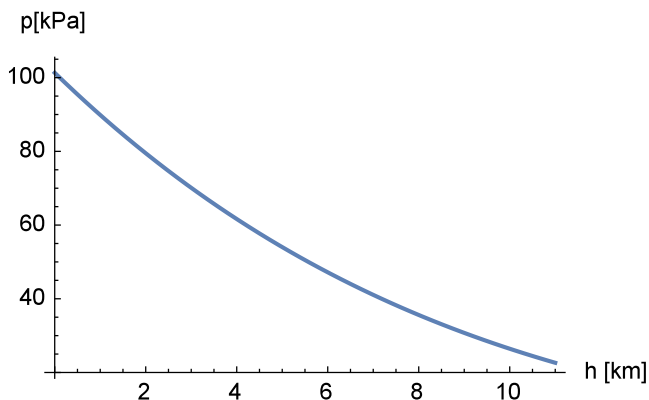


SLIKA 1. Plastenka, neprodušno zaprta na visoki nadmorski višini (levo), se skrči zaradi zračnega tlaka (sredina, desno), ko se spustimo nižje.

gladini je $1,2 \text{ kg/m}^3$, kar bi pomenilo višino zračnega stolpca $H = 8,6 \text{ km}$, če bi bila gostota zraka na vseh višinah enaka. Ta približek upravičeno naredimo pri kapljevinah, ki so skoraj nestisljive. Gostota zraka z višino pada. To nam pove plinska enačba $\rho = \frac{pM}{RT}$. Kilomolska masa suhega zraka je $M = 28,9644 \text{ kg/kmol}$ in $R = 8314,47 \text{ J/kmol/K}$ je splošna plinska konstanta. Z višino se spreminjata tako tlak kot temperatura, dodatno pa opis zapletejo tudi vlaga v zraku, gibanje zračnih mas in svetlobno sevanje. V prvem približku se tlak zmanjša po 100-metrskem dvigu za 1,2 kPa. Boljši približek dobimo, če spreminjanje tlaka z višino opišemo z eksponentno funkcijo. Še bolj natančna obravnava da izraz

$$\blacksquare p = p_0 \left(1 - \frac{Lh}{T_0} \right)^{\frac{gM}{RL}}$$

kjer je $L = 0,0065 \text{ K/m}$ temperaturni višinski gradient in $T_0 = 288,15 \text{ K}$ standardna temperatura na morski gladini. Odvisnost tlaka od nadmorske višine kaže slika 2.



SLIKA 2.

Spreminjanje tlaka z nadmorsko višino

Upoštevajmo barometrično enačbo ter izračunajmo kvocient tlaka na koncu poti in tlaka na vrhu smučišča in dobimo 1,27. To pomeni, da je tlak v dolini dobro četrtno višji kot na gori. Ustrezno temu se zmanjša prostornina plastenke. Premislite, kako bi izmerili prostornino plastenke. Ali na zmanjšanje prostornine vpliva še kaj drugega kot zunanji zračni tlak?

Barometrična enačba

Enačbo izpeljemo iz enačbe idealnega plina $p = \frac{\rho RT}{M}$. Upoštevamo še izraz za spreminjanje hidrostatskega tlaka: $dp = -\rho g dh$. h pomeni nadmorsko višino in ne, kot običajno, globino. Zato v izrazu stoji spredaj minus. Izraza delimo med seboj in ostane $\frac{dp}{p} = -\frac{Mgdh}{RT}$, ki ga lahko integriramo od nadmorske višine $h = 0$, kjer je tlak enak p_0 , do poljubne višine h . Dobimo barometrično enačbo

$$\blacksquare p = p_0 e^{-\frac{Mgdh}{RT}}$$

Izraz lahko izračunamo, če poznamo višinsko odvisnost temperature. V izotermni atmosferi, če zanemarimo spreminjanje gravitacijskega pospeška z višino, dobimo eksponentno padanje tlaka z višino

$$\blacksquare p = p_0 e^{-Mgh/RT}$$

Temperaturni višinski gradient

Gradient opiše spreminjanje temperature z višino. Za suh zrak lahko v adiabatnem približku, ko se med zračnimi plastmi ne izmenjuje toplota, zapišemo enačbo stanja plina $p dV = -V dp / \kappa$. Energijski zakon se glasi: $mc_v dT + p dV = 0$. Iz prve enačbe vstavimo $p dV$ v drugo in ostane zveza $c_p dT - V dp / m = 0$. Upoštevamo še $dp = -\rho g dh$ in dobimo

$$\blacksquare L = -\frac{dT}{dh} = \frac{g}{c_p} = 9,8^\circ\text{C/km}$$

Ker je zrak vlažen, je povprečna vrednost manjša, $6,5^\circ\text{C/km}$.

× × ×

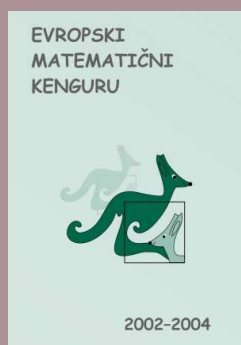
www.presek.si

www.dmfa-zaloznistvo.si

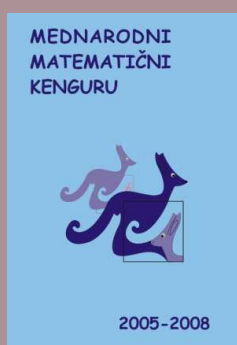
Matematični kenguru

Osnovna naloga tekmovanja Kenguru je popularizacija matematike. Zanimiv, zabaven in igriv način zastavljanja matematičnih problemov je pripomogel, da se je tekmovanje kmalu razširilo po vsej Evropi, hkrati pa so se v tekmovanje vključevali tudi otroci in mladostniki iz drugih držav sveta. Tekmovanje je preseglo evropske okvire in postalo Mednarodni matematični kenguru. Leta 2016 se ga je udeležilo več kot 6 milijonov tekmovalcev iz več kot 60 držav sveta. V Sloveniji Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije organizira tekmovanje za učence od prvega razreda osnovne šole do četrtega letnika srednje šole. Poseben izbor je pripravljen za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol, za dijake srednjih poklicnih šol ter za študente.

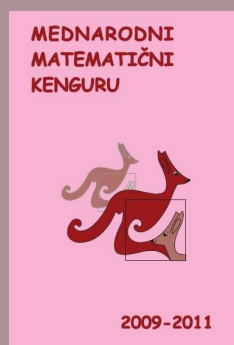
Naloge, zbrane v teh knjigah, so najboljše možno gradivo za pripravo na prihodnja tekmovanja. Predvsem zato, ker je vsaki nalogi dodana podrobno razložena rešitev, ki bralca vodi v logično mišljenje in spoznavanje novih strategij reševanja. Marsikatera naloga, ki je sprva na videz nerešljiva, postane tako dosegljiv iskriv matematični izziv.



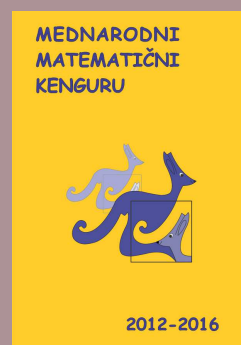
10,99 EUR



18,74 EUR



14,50 EUR



23,00 EUR


Pri DMFA-založništvo je v Presekovi knjižnici izšlo že pet knjig Matematičnega kenguruja. Na zalogi so še:

- *Evropski matematični kenguru 2002-2004,*
- *Mednarodni matematični kenguru 2005-2008,*
- *Mednarodni matematični kenguru 2009-2011,*
- *Mednarodni matematični kenguru 2012-2016 (novost).*

Poleg omenjenih ponujamo tudi druga matematična, fizikalna in astronomska dela. Podrobnejše predstavitev so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse publikacije tudi naročite:

<http://www.dmfa-zaloznistvo.si/>

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA Slovenije, dijaki in študentje imate ob naročilu starejših zbirk nalog pri DMFA-založništvo 20 % popusta na zgornje cene - izkoristite ga!

OSREDNJE KOČKASTO ISLAMSKO SVETIŠČE V MEKI									NAŠ NEKDANJI SMUČARSKI FUNKCIONAR, DIREKTOR REPREZENTANC (TONE)	ENOTA ZA PROŠTORSKE KOTE	REKA V FURLANJJI, PRITOK SOČE	VZDEVEK SLIKARJA OSKARJA ROTOVNIKA	UVRSTITEV	VRVICA IZ UMETNE SNOVI KOT REZILO PRI KOŠILNICI	LENOBNEŽ	ACETI-LENSKA SVETILKA
									CEVASTA PRIPRAVA ZA DOVOD ZRAKA MOTORJU	2						
									IZBOKLINA ZARADI POŠKODBE ALI BOLEZNI				21			
									ZDRAVNIK SPECIALIST ZA STAROSTNIKE							
									ENAKA SOGLASNIKA			STARO NASELJE PRI ZADRU, ANTICNA AENONA	OBČUTEK NEMIRA ZARADI TEŽKEGA POLOŽAJA			
									ANG. PISEC FLEMING TELEVI-ZIJKJA TODOROVSKI				PREDSTOJ-NICA VERS-KEGA REDA JAMES ENSOR			
V ZRAKU RAZPRŠENA TEKOČA ALI TRDNA SNOV							NEODIM BLATNO JEZERO									
"SKUPINA" ELEMENTOV, KI SO HKRATI ELEMENTI KAKŠNE VEČJE "SKUPINE"	DRŽAVA V JUŽNI AMERIKI	VISOK, PROSTO STOJEČ KAMNIT SPOMENIK	NEUREJENA MNŽICA NASILNIH LJUDI	KRAJ POD MENINO OB CESTI VRANSKO-KAMNIK	NACE SIMONČIČ	SORTA ZGOD-NJEGA BELEGA KROMPIRJA	REKA V NEMČIJI DESKAR NA SNEGU KOŠIR	OBRAMBNI IGRALEC, BRANILEC JEZIKOVNI IZRAZ								
CHARLES FOURIER								PREDMET, KI KAJ DRŽI POKONCI	SORTA, VRSTA (V OBE SMERI)							
1						11		ŠVEDSKI IZUMITELJ (ALFRED) AM. ASTRO-NAVIT (NEIL)			NARAVNI SATELIT PLANETA	DRŽAVA NA JUGO-VZHODU ARABSKEGA POLOTOKA				
					ENOJKA NEKDANJI SLOVANSKI VLADARSKI NASLOV		UČNI PARK LESNATIH RASTLIN IZUMRLI SLOVAN									
NEKDANJI POLJSKI KONJENIKI S KOPJI NABAVA				14									9			
	STARO-GRŠKI EP DOMAČA PTICA PEVKA							NEKD. ARG. NOGOMETAS (DIEGO) TOČENJE SOLZ								
		13	ZGODOVIN. SLOVENSKA DEŽELA ZGOR. ROB STREHE													
POGREŠEK ZELO SLAN GRŠKI KOZJI ALI OVČJI SIR				VAS VZHODNO OD KOČEJVJA	NAJVIŠJA GORA NA SICILIJI	MADŽ. PESNIK (ARPAD) STEBLO PRI GOBI										
		FR. RALLY DIRKAČ (SEBASTIEN) VRSTA HRASTA					ČRNA PODZEMNA ŽIVAL PARADIŽ							16		
19																
	TOVARNA V TRBOVLJAH IN ANHOVEM															
	BETELOVA PALMA IZ JUGO-VZHODNE AZIJE			18		SLOVITI ČESKI HOKEJIST (JAROMIR)								20		

NAGRADNI RAZPIS

→ Črke iz oštevilčenih polj vpišite skupaj z osebniimi podatki v obrazec na spletni strani

www.presek.si/krizanka

ter ga oddajte do 15. marca 2017, ko bomo izžrebali tri nagrajence, ki bodo prejeli knjižno nagrado.

× × ×