

# Elastični trki in prevajanje toplote



ANDREJ LIKAR

→ V enem prejšnjih prispevkov [1] smo se prepričali, da dobimo smiselne rezultate pri opisu dvorazsežnega toka tekočin, če se opremo le na elastične trke med molekulami, okroglimi ploščicami. Hitrosti ploščic smo na danem mestu povprečevali, povprečna hitrost pa je dobro sovpadala s hitrostjo pri gibanju tekočine, če smo le poskrbeli za smiselne hitrosti na njenem robu.

Pri zaprti posodi z mirujočimi stenami se povprečne hitrosti ploščic povsod hitro bližajo ničli. Ploščice pa se kljub temu ves čas neurejeno gibljejo sem in tja, se odbijajo od sten in trkajo med seboj. Tudi pri tekočini je tako, saj se pri dani temperaturi molekule ves čas neurejeno gibljejo. Povprečna kinetična energija molekule je sorazmerna z absolutno temperaturo tekočine. Ali lahko z elastičnimi trki med ploščicami opišemo tudi prevajanje toplote od toplejšega dela stene proti hladnejšemu tako, da na danem mestu povprečimo kinetično energijo ploščic? Pri prevajanju toplote se v tekočini po daljšem času vzpostavi, kot pravimo, časovno neodvisno temperaturno polje – na izbranem mestu je temperatura tekočine konstantna, od mesta do mesta pa se spreminja. Pod vplivom teže se toplota prevaja tudi s konvekcijo. Torej zaradi vzgona segrete tekočine. Vpliva teže tu ne bomo upoštevali; denimo, da smo v breztežnem prostoru. Do časovno nespremenljivih polj pridemo računsko z reševanjem posebne enačbe, imenujemo jo *difuzijska enačba*, za katero vemo, da pravilno napove potek temperature v posodi, če le poznamo temperaturo na njenem robu. Teh računov se tu ne bomo lotili, uporabili pa bomo njihove rezultate, da jih bomo primerjali z izidi pri elastičnih trkih ploščic. Preizkusili bomo torej možnost, da s sledenjem ploščic pridemo do temperatur znotraj posode na podlagi znanih temperatur na robu. S tem bi prispevali nov način reševanja difuzijske enačbe, ki ji za časovno nespremenljive primere rečemo *Laplaceova*

*enačba*. Ta metoda ne bo posebno uporabna, je pa zanimiva, ker razkrije osnovne pojave pri prevajanju toplote.

Ukvarjali se bomo z dvorazsežnimi primeri, ker so le-ti pregledni. Tu gre za toplotno prevajanje v dolgih ceveh, kjer so po vsej dolžini cevi razmere enake. Presek cevi bo pri vseh primerih kvadraten. Izbrali bomo tri primere časovno nespremenljivih polj, ki jih narekuje difuzijska enačba. Pri vseh treh je torej temperaturno polje vnaprej znano, ploščice pa bodo seznanjene le s temperaturo polja na robu kvadrata. Zanima nas, če bomo s povprečevanjem njihove kinetične energije znotraj kvadrata prišli do polja, kot ga tam napove Laplaceova enačba.

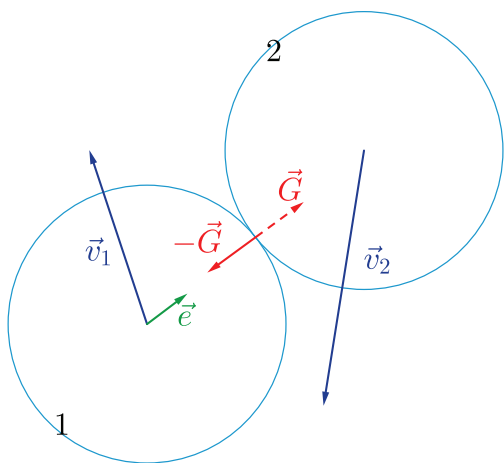
Da bi zgornjo idejo preverili, naredimo načrt. Okrogle ploščice naj drsijo po ravnini  $xy$  in naj predstavljajo molekule tekočine. Zvezo med absolutno temperaturo (merjeno v Kelvinih) tekočine na danem mestu in kinetično energijo molekul prav tam poznamo:

$$\frac{m}{2}v^2 = 2\frac{kT}{2}.$$

Vsaka komponenta hitrosti, torej  $v_x$  in  $v_y$ , kjer je  $v^2 = v_x^2 + v_y^2$ , prinese molekuli v povprečju kinetično energijo  $\frac{kT}{2}$ . Povprečna kinetična energija molekule je torej kar enaka  $kT$ , kjer je  $k$  Boltzmannova konstanta. Ker sta povprečna kinetična energija molekule in absolutna temperatura sorazmerni, lahko odslej temperaturo predstavimo kar s povprečno kinetično energijo. Bomo pač namesto kelvinov uporabili joule. S sledenjem ploščic in računanjem njihove povprečne kinetične energije na danem mestu bomo ocenjevali temperaturo in jo primerjali s pravo vrednostjo, ki jo napove difuzijska enačba. Vse to bomo opravili z računalnikom in se tako izognili zapletenemu eksperimentiranju.

Ker bo glavno vlogo igral elastični trk, povzemimo, kar smo že dognali o njem.

Na sliki 1 sta ploščici ravno v stiku. Po trku se obema spremeni gibalna količina. Zaradi tretjega



SLIKA 1.

Ploščici med trkom – izmenjana gibalna količina  $G\vec{e}$  je v smeri veznice obeh središč. Enotski vektor  $\vec{e}$  kaže od enega središča do drugega, vektor, ki ju povezuje, je torej  $2r\vec{e}$ , kjer je  $r$  polmer ploščice

Newtonovega zakona, ki pravi, da je sila ene ploščice na drugo nasprotno enaka sili druge na prvo, in enakega časa delovanja obeh sil sta spremembi gibalnih količin nasprotni, po velikosti pa enaki. Sili delujeta le vzdolž enotskega vektorja  $\vec{e}$ , ki povezuje središči obeh ploščic in kaže od ploščice 1 k ploščici 2 zato, ker se ploščici pri trku vdata le pravokotno na obod, sicer pa ob stiku le zdrsneta. Sprememba gibalne količine druge ploščice je potem  $\Delta\vec{G}_2 = G\vec{e}$ , prve pa  $-G\vec{e}$ . Da določimo velikost  $G$ , upoštevamo, da se skupna kinetična energija pri trku ohrani, torej

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}m(\vec{v}_1 - \frac{G}{m}\vec{e})^2 + \frac{1}{2}m(\vec{v}_2 + \frac{G}{m}\vec{e})^2.$$

Na levi strani smo zapisali kinetično energijo ploščic pred trkom, na desni pa po njem. Ko maso ploščice  $m$  pokrajšamo, sledi po krajšem računu

$$\frac{G}{m} = \vec{e} \cdot (\vec{v}_1 - \vec{v}_2),$$

od tod pa takoj dobimo hitrosti ploščic po trku  $\vec{v}_1^{po} = \vec{v}_1 - \frac{G}{m}\vec{e}$  in  $\vec{v}_2^{po} = \vec{v}_2 + \frac{G}{m}\vec{e}$ . Enotski vektor  $\vec{e}$  moramo določiti za vsak trk posebej. Pri sledenju ploščic zaznamo trk, ko se središči približata bolj kot na razdaljo premera. Vmes ploščice premikamo glede na njihove hitrosti in čas med zaporednimi koraki. Na robu posode se ploščice odbijajo v posodo enakomerno na vse strani s povprečno kinetično energijo,

ki je skladna s tamkajšnjo temperaturo. Pri vsakokratnem trku na robu določimo hitrosti po odboju naključno, da dobijo ploščice v povprečju kinetično energijo, ki ustreza temperaturi roba. Na tak način se najbolj približamo pravim razmeram pri trku molekul s steno. Izidi računov pa se ne bi kaj dosti spremenili, če bi ob trku ploščici podelili kar povprečno energijo pri znani temperaturi na mestu odboja.

Z nekaj preprostega računanja pridemo do kinetične energije ploščice po trku:

$$E_1^{po} = E_1 - \frac{m}{2}(\vec{v}_1 \cdot \vec{e})^2 + \frac{m}{2}(\vec{v}_2 \cdot \vec{e})^2,$$

pri čemer je  $E_1$  kinetična energija pred trkom. Pri povprečnem trku je pri danih hitrostih pred trkom  $\vec{v}_1$  in  $\vec{v}_2$   $(\vec{v}_1 \cdot \vec{e})^2 = \frac{1}{2}v_1^2$  in  $(\vec{v}_2 \cdot \vec{e})^2 = \frac{1}{2}v_2^2$ , zato sledi

$$E_1^{po} = E_1 + \frac{1}{2}(E_2 - E_1).$$

Kinetična energija se v povprečju torej spremeni prav za razliko kinetičnih energij  $E_1$  in  $E_2$  ploščic pred trkom. To je v skladu s toplotno prevodnostjo, kjer teče toplota od mesta z višjo temperaturo na mesto z nižjo temperaturo. Hladna ploščica, torej taka z manjšo kinetično energijo, se segreje na račun toplejše. Pri ploščicah, ki se povsod od roba elastično odbijajo ali kjer je robna temperatura povsod enaka, se torej hočeš nočeš vzpostavi ravnovesje; takrat imajo vse v povprečju enako kinetično energijo, torej enako temperaturo. To je v skladu s spoznanjem, da se v toplotno izoliranem delu narave vzpostavi ravnovesno stanje s povsod konstantno temperaturo.

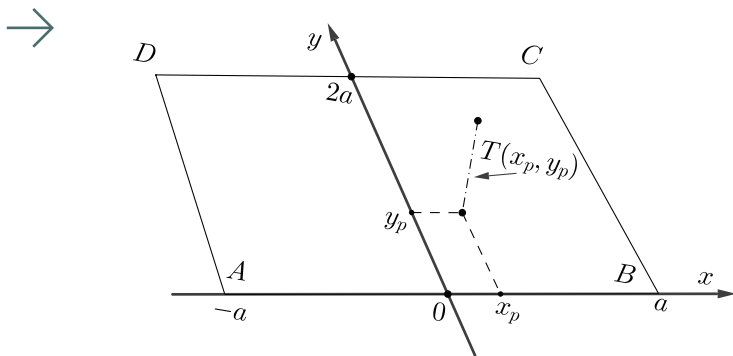
Sedaj pa pogledjmo, kako se trkajoče ploščice odrežejo pri nalogah o prevajanju toplote. Ker bomo zaradi nazornosti obravnavali dvorazsežne primere, bomo postavili koordinatni sistem tako, kot kaže slika 2. Presek cevi je pri vseh obravnavanih primerih kvadraten z dolžino stranice  $2a$ . Temperaturo v točki s koordinatama  $x_p$  in  $y_p$  prikažemo kot daljico, pravokotno na ravnino  $xy$  z enim krajiščem v tej točki in z dolžino  $T(x_p, y_p)$ .

V prvem primeru izberemo temperaturo znotraj preseka in na robu cevi takole:

$$T(x, y) = T_c \frac{2a - y}{2a} + T_0.$$

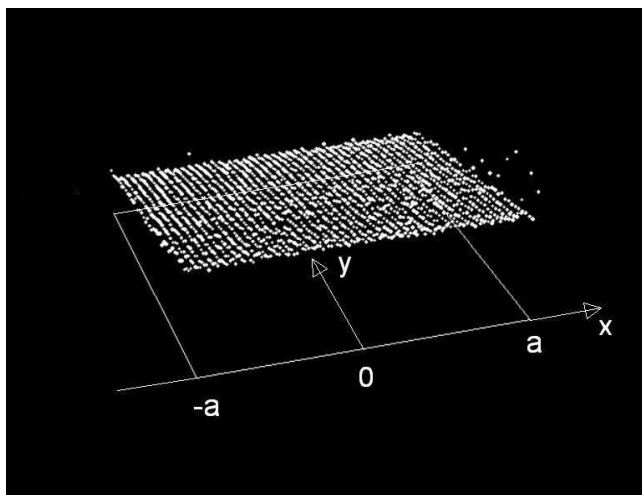
S  $T_0$  smo označili absolutno temperaturo na stranici  $\overline{CD}$ , stranica  $\overline{AB}$  pa je pri temperaturi  $T_c + T_0$ . Ostali





SLIKA 2.

Postavitev koordinatnega sistema pri slikah temperaturnih polj. V navpični smeri, torej pravokotni na ravnino  $xy$ , nanašamo temperaturo  $T(x_p, y_p)$  pri točki s koordinatama  $x_p$  in  $y_p$ . Rob kvadrata tvorijo stranice  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CD}$  in  $\overline{DA}$ .



SLIKA 3.

Slika temperaturnega polja pri prevajanju toplote v prvem primeru

dve stranici sta toplotno izolirani. Ploščice se na njima le elastično odbijajo. Difuzijska enačba pove, da se takšno temperaturno polje s časom ne spreminja. Pri tako preprostem polju bi to lahko tudi uganili. V poljubno področje znotraj cevi priteče prav toliko toplote, kot je iz nje odteče, zato se področje niti ne segreva niti ohlaja. Tolpotni tok je pri zgoraj omenjenem polju povsod enak, v tenko plast z debelino  $2\delta y$  pri konstantnem  $y + \delta y$  priteče prav

toliko toplote, kot je pri  $y - \delta y$  odteče. Vsa plast ima tako ves čas enako temperaturo. Pri obravnavi toplotnega toka se že v osnovni šoli seznanimo s takim potekom temperature v prevodni plasti.

Prepustimo sedaj ploščicam, da same zgradijo temperaturno polje znotraj kvadrata le na podlagi odbojev na robu. Na začetku imajo ploščice sicer poljubne, od nič različne hitrosti, ki jih izberemo naključno. V izbranih točkah čakamo na ploščice in tam ves čas računamo povprečno kinetično energijo. Po daljšem času, ko se temperaturno polje dovolj zgladi, ga primerjamo s pravim, ki ga podaja zgornja enačba za  $T(x, y)$ . Pogled na sliki 3 pove, da so se ploščice tu dobro izkazale, slika temperaturnega polja je res ravnina, čeprav smo pri zgledu uporabili le kakih sto ploščic.

V drugem primeru si izberemo nekoliko bolj zapleteno polje, podano takole:

$$T(x, y) = \frac{T_c \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sinh\left(\pi \frac{2a-y}{a}\right)}{\sinh(2\pi) + T_0}.$$

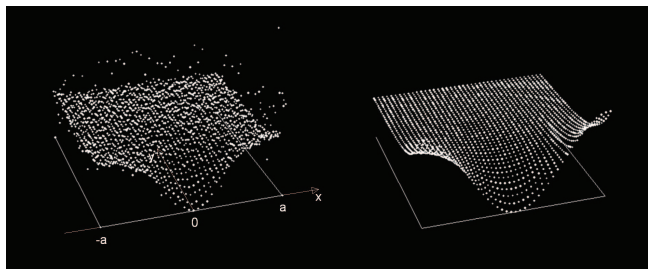
Funkcija  $\sinh$  je definirana takole:

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

in jo imenujemo hiperbolični sinus. Zaradi preglednosti smo izbrali  $T_c < 0$ ; kljub temu je temperatura povsod večja od nič. Spet ploščice vedo le za temperaturo na robu kvadrata. Slika 4 pokaže primerjavo temperaturnega polja, ki ga dobimo s trki, s privzetim poljem pri enakem poteku temperature po robu. Primerjava je kar dobra. Upoštevati moramo, da se povprečje kinetične energije ploščic na danem mestu le počasi bliža končni vrednosti. K temu precej prispeva vnašanje negotovosti z roba cevi, kjer po odboju naključno spreminjamo kinetično energijo in smer odbite ploščice, a v skladu s predpisano temperaturo roba na mestu odboja. Za primerjavo si pogledjmo še potek temperatur pri zasukani sliki 4, kjer kaže os  $x$  proti nam (slika 5). Tudi tu je primerjava prav dobra.

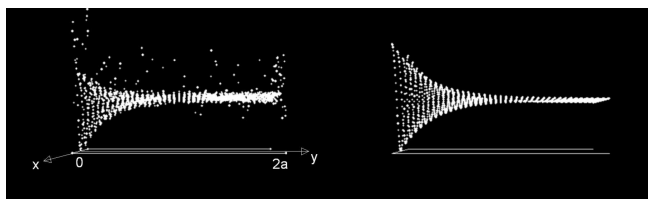
Podobno ujemanje opazimo za temperaturo točk znotraj kvadrata v tretjem primeru:

$$T(x, y) = \frac{T_c \cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right) \sinh\left(\pi \frac{2a-y}{2a}\right)}{\sinh(\pi)} + T_0.$$



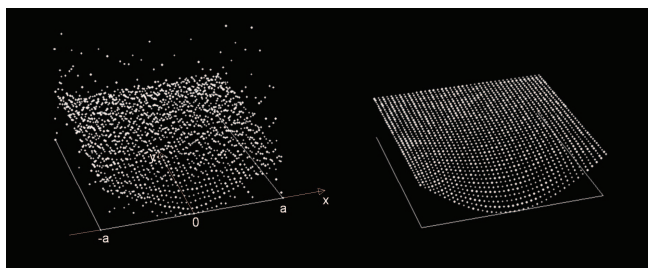
SLIKA 4.

Temperaturni polji, kot ju dobimo s trki ploščic (leva slika), in z računom (desna slika) za polje  $T(x, y) = T_c \cos(\frac{\pi x}{a}) \sinh(\pi \frac{2a-y}{a}) / \sinh(2\pi) + T_0$ .



SLIKA 5.

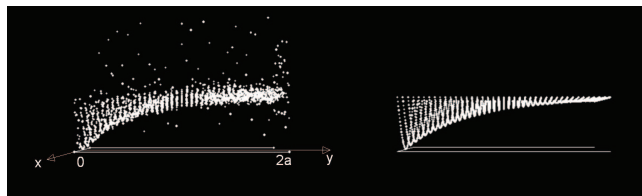
Sliki temperaturnih polj, ko sliko 4 zasučemo tako, da os  $x$  kaže proti nam.



SLIKA 6.

Temperaturni polji, kot ju dobimo s trki ploščic (leva slika), in z računom (desna slika) za polje  $T(x, y) = T_c \cos(\frac{\pi x}{2a}) \sinh(\pi \frac{2a-y}{2a}) / \sinh(\pi) + T_0$ .

Spet smo odvisnost  $T(x, y)$  izbrali tako, da se s časom ne spreminja, kar potrди difuzijska enačba. Le-ta se po preseku cevi nekoliko počasneje spreminja v primeri s prejšnjo. Tudi tu so ploščice dobro našle temperature znotraj kvadrata.



SLIKA 7.

Pogled na temperaturno polje v tretjem primeru pri zasukani sliki 6.

Doslej smo obravnavali dvodimenzionalne primere. Ploščice so se gibale po gladki plošči z robom. Ne dvomimo, da bi pri trirazsežnih primerih prav tako dobili dobro ujemanje med pravim in temperaturnim poljem, dobljenim s trki. Kaj pa v enorazsežnem primeru, ko ploščicam dovolimo le gibanje po daljici? Ploščice tedaj le čelno trkajo med seboj, pri takih trkih pa velja

$$\blacksquare E_1^{po} = E_2.$$

Po trku dobi prva ploščica kinetično energijo  $E_2$  druge. Ploščici le izmenjata energiji, pri taki dinamiki pa ne moremo pričakovati kaj drugega kot konstantno temperaturno polje ne glede na temperaturo na koncih. Na izbranem mestu namreč lahko pričakamo le ploščico z energijo enega ali drugega konca. Na počasnejše ploščice naletimo pogostejše kot na hitrejše. Konstantna temperatura po celi dolžini daljice je zato nekoliko nižja kot povprečna temperatura na koncih. Tudi porazdelitev ploščic po hitrosti ni taka kot v dvo ali trirazsežnih primerih. Podobnosti trkajočih ploščic s primeri prevajanja toplote je v tem primeru konec. Seveda tako tanke palice, po kateri bi se pretakala toplota iz enega konca na drugi le s centralnimi trki med molekulami, pač ni. Primer pa pokaže, da ploščic ne gre preveč utesnjevati, če želimo z njimi rešiti kako zapleteno nalogo o prevajanju toplote.

## Literatura

- [1] A. Likar, *Vrtinci v toku kapljev in plinov*, Presek 48 (2020/2021) 3, 15, 18-20.

× × ×