

Sferna trigonometrija in čas v astronomiji

NALOGE ZA BRALCE



VID KAVČIČ

→ **Bralke in bralci se gotovo spomnijo prispevka o sforni trigonometriji iz 6. številke prejšnjega letnika revije Presek. V prispevku smo si ogledali osnovne obrazce sfere trigonometrije in izpeljali nekaj osnovnih zvez za obravnavo lege nebesnih teles na nebesni sferi. Poleg tega pa smo omenili tudi osnovna načela, na katerih temelji merjenje časa.**

V tokratni številki objavljamo nekaj rešenih vaj iz sfere trigonometrije in časa, ki so se pojavile na preteklih izbirnih ter mednarodnih tekmovanjih iz astronomije in astrofizike. Naloge lahko služijo kot odlična priprava na izbirno tekmovanje za olimpijsko ekipo za Mednarodno olimpijado iz astronomije in astrofizike, ki bo avgusta prihodnje leto potekala v Rio v Braziliji.

Tekmovalkam in tekmovalcem želim mnogo močganskih užitkov pri trenju astronomskih orehov.

Rešene naloge

Bralec lahko v nadaljevanju najde nekaj primerov rešenih nalog z izbirnih in mednarodnih tekmovanj iz astronomije in astrofizike, v naslednjem razdelku pa ga čaka tudi nekaj dodatnih nerešenih izzivov, s katerimi si lahko popestri prosti čas.

Izbirno tekmovanje 2014

Opazujemo dve zvezdi, za kateri vemo, da bosta sočasno prečkali južni meridian na višinah $h_1 = 30,0^\circ$ in $h_2 = 40,0^\circ$ (zgornja kulminacija). Kolikšen bo azimut obeh zvezd, ko bosta zašli? Katera zvezda

bo zašla prej in kolikšna bo razlika njunih časovnih kotov ob zahodu? Opazujemo iz Ljubljane ($\varphi = 46,0^\circ, \lambda = 14,5^\circ$). Vplive atmosfere zanemari.

Rešitev.

Podatki: $\varphi = 46,0^\circ, \lambda = 14,5^\circ, h_1 = 30,0^\circ, h_2 = 40,0^\circ$

Zemljepisna širina opazovališča je večja od višine zvezde, kar pomeni, da se bo prečkanje južnega meridiana (zgornja kulminacija) zgodila med zenitom in smerjo juga. Deklinacijo zvezd določimo iz

$$\delta = \varphi + h - 90^\circ.$$

Deklinacija prve zvezde $\delta_1 = -14,0^\circ$, deklinacija druge pa $\delta_2 = -4,0^\circ$. Azimut zahoda obeh zvezd (ko sta $h_1 = h_2 = 0^\circ$) določimo iz

$$\cos A = -\frac{\sin \delta - \sin \varphi \sin h}{\cos \varphi \cos h} = -\frac{\sin \delta}{\cos \varphi},$$

dobimo $A_1 = 69,7^\circ$ za prvo zvezdo in $A_2 = 84,3^\circ$ za drugo.

Prej bo zašla prva zvezda. Razlika njunih časovnih kotov ob zahodu bo

$$\Delta H = \arccos(-\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta_2) - \arccos(-\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta_1) = 43 \text{ min.}$$

Izbirno tekmovanje 2019

Na letošnjih počitnicah smo opazovali nočno nebo iz Wellingtona v Novi Zelandiji ($\varphi = -41^\circ 17' 20''$, $\lambda = +174^\circ 46' 19''$).

a) Ugotovi, katere zvezde so iz te lokacije nadobzornice, podobzornice ter vzhajalke.

b) Dne 30. avgusta 2019 bi radi opazovali zvezdo Ankaa v ozvezdju Feniks ($\alpha = 0^{\text{h}}26^{\text{m}}17^{\text{s}}$,





$\delta = -42^\circ 18' 21''$). Izračunaj čas kulminacije in koliko časa bo zvezda nad obzorjem. Kako visoko nad obzorjem bo ob kulminaciji? Upoštevaj $S(0^h \text{ UT}, 30.8.) = 22^h 31^m 36^s$. (IT 2019)

Rešitev.

Podatki: $\varphi = -41^\circ 17' 20''$, $\lambda = +174^\circ 46' 19''$, $\alpha = 0^h 26^m 17^s$, $\delta = -42^\circ 18' 21''$, $S(0^h \text{ UT}, 30.8.) = 22^h 31^m 36^s$

a) Če naredimo skico za nebo na jugu, ugotovimo, da so podobzornice zvezde, za katere velja

- $90^\circ - |\varphi| - \delta < 0$, $\delta > 90^\circ - |\varphi|$.

Podobzornice so za Wellington vse zvezde z deklinacijo $\delta > 48,71^\circ$.

Za nadobzornice mora veljati pogoj

- $|\varphi| - \delta - 90^\circ > 0$, $\delta < |\varphi| - 90^\circ$.

Nadobzornice v Wellingtonu so vse zvezde, za katere je $\delta < -48,7^\circ$.

Vzhajalke v Wellingtonu so vse tiste zvezde, za katere velja $-48,7^\circ < \delta < 48,7^\circ$.

b) Najprej izračunamo časovni kot vzhoda/zahoda:

- $\cos H_{v,z} = -\text{tg } \varphi \text{ tg } \delta = -0,7988$,

iz česar dobimo $H_v = -9,53^h$ in $H_z = 9,53^h$. Zvezda je nad obzorjem

- $\Delta t = \frac{H_z - H_v}{y} = 18,9^h$,

kjer smo upoštevali $y = \frac{366,25}{365,25}$. Čas kulminacije izračunamo iz enačbe

- $\alpha = S(0^h \text{ UT}, 30.8.) + \lambda + (t_k - 12^h)y$,

kjer upoštevamo, da je 30. avgusta v Wellingtonu zima. Dobimo $t_j = 2,35^h$. Zvezda kulminira 29. avgusta ob 2.21. Ob kulminaciji bo zvezda na višini

- $h = 90^\circ + |\varphi| - |\delta| = 89^\circ$.

Astronomsko tekmovanje treh dežel 2022

Leta 2022 je bil poletni solsticij 21. junija. Toda Zemlja bo v afeliju šele dva tedna kasneje, 4. julija. Inklinacija Zemljine osi je $\varepsilon = 23,5^\circ$.

a) Perioda precesije vrtilne osi je 26000 let. Oцени, v katerem letu bosta ali sta se poletni solsticij in afelij zgodila na isti dan, 4. julija.

b) Večkrat se omenja, da bo v prihodnosti zvezda Vega ($\alpha_V = 18^h 37^m$, $\delta_V = +38^\circ 47'$) kazala smer severa. Oцени, čez koliko let se bo to zgodilo.

Zanemari nutacijo, gibanje perihelija in ostale učinke drugega reda.

Rešitev.

Podatki: $\varepsilon = 23,5^\circ$, $\alpha_V = 18^h 37^m$, $\delta_V = +38^\circ 47'$, $\delta_E = 66,5^\circ$, $\alpha_E = 18^h$ $P = 26000$ let

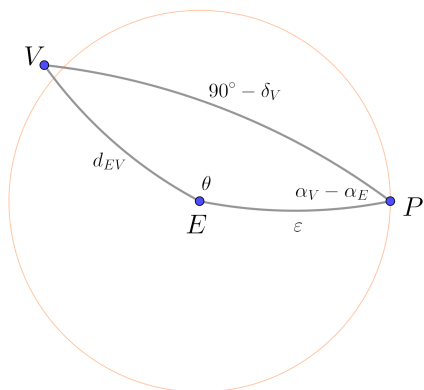
V prvem delu naloge nam bo prav prišlo računanje z ekliptično dolžino, zato se spomnimo tudi, da ekliptična dolžina Sonca s časom teče enakomerno kot $L = \frac{\Delta t}{365,25} \cdot 360^\circ$, pri čemer smo s Δt označili čas v dnevih po spomladanskem enakonočju.

a) Izračunajmo ekliptično dolžno Sonca ob poletnem solsticiju in v trenutku, ko je Zemlja v afeliju. Imamo $\Delta t_1 = 10 + 30 + 31 + 21 = 92$ dni in $\Delta t_2 = 10 + 30 + 31 + 30 + 4 = 105$ dni, od koder sledi $L_1 = 90,678^\circ$ in $L_2 = 103,490^\circ$. Precesija se dogaja glede na ravnino ekliptike s periodo $P = 26000$ let, zato se bosta poletni solsticij in afelij zgodila na isti dan čez:

- $t = \frac{\Delta L}{360^\circ} \cdot P = 925$ let.

b) Označimo z V lego Vege in s P lego nebesnega pola na nebesni sferi. Razmislimo, da so koordinate severnega pola ekliptike $E(\delta_E = 66,5^\circ$, $\alpha_E = 18^h)$. Gledamo sferični trikotnik VPE , ki je za lažjo predstavbo prikazan tudi na sliki 1.

Razmislimo, da v trikotniku velja $VP = 90^\circ - \delta_V$, $EP = \varepsilon$, poleg tega pa velja $\angle VPE = \alpha_V -$



SLIKA 1.

Sferični trikotnik Vega (V) – severni nebesni pol (P) – severni pol ekliptike (E). Zvezde, ki se nahajajo na oranžni krožnici, v času ene periode precesije prečkajo severni nebesni pol.

α_E . Dolžino d_{EV} izrazimo s formulo za razdaljo med točkama na sferi

$$\cos d_{EV} = \sin \delta_V \sin \delta_E + \cos \delta_V \cos \delta_E \cos(\alpha_V - \alpha_E),$$

iz česar izračunamo $d_{EV} = 28^{\circ}13'$.

Iz sinusnega izreka za sferični trikotnik VPE sledi

$$\sin \angle PEV = \frac{\sin VP}{\sin VE} \sin \angle VPE,$$

$$\sin \theta = \frac{\cos \delta_V}{\sin d_{EV}} \sin(\alpha_V - \alpha_E),$$

iz česar dobimo edino smiselno rešitev $\theta = 164^{\circ}38'$.

Zemljina navidezna os se mora torej zaradi precesije zavrteti za kot θ in ker se ta s časom spreminja enakomerno, bo Vega v bližini severnega nebesnega pola čez približno

$$\Delta t = \frac{\theta}{360^{\circ}} \cdot P = 11\,900 \text{ let.}$$

Naloge bralcu

1. Za sferični trikotnik s podatki $a = 70^{\circ}$, $b = 50^{\circ}$, $C = 85^{\circ}$ izračunaj dolžino preostale stranice in velikost preostalih kotov.

2. Kolikšna je razdalja (po površju, v kilometrih) med Ljubljano ($\varphi = 46^{\circ}$, $\lambda = 14^{\circ}32'$) in Rio de Janeirom ($\varphi = -23^{\circ}$, $\lambda = -43^{\circ}13'$)? V kakšni smeri (v stopinjah) od severa bi morali odpotovati, da bi iz Ljubljane v Rio de Janeiro šli po najkrajši poti? Polmer Zemlje je $R_Z = 6400 \text{ km}$.
3. (IOAA 2014) Romunska astronoma Ovidiu Terclu in Alex Dumitriu iz kraja Galati Romania sta pred kratkim odkrila dve spremenljivi zvezdi. Galaktične koordinate zvezd so: Galati V1 ($l_1 = 114,37^{\circ}$, $b_1 = -11,35^{\circ}$) in Galati V2 ($l_1 = 113,27^{\circ}$, $b_1 = -16,18^{\circ}$). Oцени kotno razdaljo med zvezdama Galati V1 in Galati V2.
4. (IOAA 2015) Letalo leti z Lime ($\varphi = -12^{\circ}2'$, $\lambda = -77^{\circ}1'$) v Džakarto ($\varphi = -7^{\circ}47'$, $\lambda = 110^{\circ}26'$), pri čemer za let izbere najkrajšo pot po površju. Določi koordinate najjužnejše točke, v kateri se nahaja med letom.
5. (IOAA 2022) Astronomka Keto je ponoči letela z letalom v zahodni smeri po najkrajši poti od Tbilisija (prestonica Gruzije) do Atlante (prestonica ameriške zvezne države Georgia). Skozi okno letala je lahko ves čas videla zvezdo Furud v ozvezdju Veliki pes, čeprav se je zvezda na neki točki poleta navidezno dotaknila natančno južne točke obzorja. Izračunaj zemljepisno širino φ_B in dolžino λ_B Atlante, kjer je Keto pristala.
Potovanje je trajalo 11 ur in 25 minut in letalo je letelo s povprečno hitrostjo 875 km/h. Deklinacija Furud $\delta_F = -30^{\circ}4'$. Koordinate Tbilisija so: $\varphi_A = 41^{\circ}43'$, $\lambda_A = 41^{\circ}48'$. Zanemari učinke vrtenja Zemlje, višino letala, atmosfersko refrakcijo in vetrove.
6. Izračunaj višino Sonca na meridianu prvega poletnega dne za opazovalca na geografski širini 42° severno. Kolikšna je največja višina Sonca na prvi zimski dan v istem kraju?
7. Koordinate Arkturja so $\alpha = 14^{\text{h}}16^{\text{m}}0^{\text{s}}$ in $\delta = 18^{\circ}11'$. Določi zvezdni čas v trenutkih, ko Arktur vzide in zaide v Bostonu ($\varphi = 42^{\circ}19'$).
8. Polna Luna je 19. junija za opazovalca v kraju s koordinatami $\lambda = 107^{\circ}35'$ in $\varphi = 6^{\circ}49'$ kulminirala ob $0^{\text{h}}30^{\text{ms}}$. Kdaj je tistega dne vzšla in kdaj zašla?





9. (Izbirno tekmovanje 2015) Astronomski mrak se začne ob Sončnem zahodu (ko rob zahajajočega Sonca ravno zaide pod obzorje) in konča, ko je središče Sonca 18° pod obzorjem. Izračunaj dolžino astronomskega mraka ob enakonočju ter na prvi poletni dan. Izračunaj, ob kateri uri se 14. marca zaključi astronomski mrak. Naše opazovališče je na koordinatah $\varphi = +46^\circ$, $\lambda = +14,5^\circ$. Zanemari pojave v atmosferi.
10. (Izbirno tekmovanje 2016) Neki komet, ki ga opazujemo iz naših krajev ($\varphi = +46^\circ$, $\lambda = +14,5^\circ$) je imel 21. decembra navidezni sij 5,31, njegovi koordinati sta bili $\delta = +34^\circ 21' 10''$, $\alpha = 16^h 14^m 58^s$.
- Na kolikšni razdalji od Zemlje (v astronomskih enotah) je bil takrat, če je bila njegova absolutna magnituda 38,6?
 - Kolikšna je bila takrat njegova kotna razdalja od Sonca?
 - Kolikšna je bila takrat hitrost kometa, če se giblje po paraboli?
 - Za koliko časa po začetku astronomske noči je bil 21. decembra komet še nad obzorjem? Astronomska noč se začne, ko je Sonca -18° pod obzorjem. Predpostavi, da se kometu v tem času koordinate niso bistveno spremenile.
11. (Izbirno tekmovanje 2017) Veliki Magellanov oblak ($\alpha_1 = 5^h 23^m 35^s$, $\delta_1 = -69^\circ 45' 22''$) in Mali Magellanov oblak ($\alpha_2 = 0^h 52^m 45^s$, $\delta_2 = -72^\circ 49' 23''$) sta nepravilni pritlikavi galaksiji, ki krožita okrog naše Galaksije. V nadaljevanju predpostavite, da razsežnost objektov ni pomembna.
- Koliko stopinj južno od Avberja ($\varphi = 46^\circ$) moramo najmanj iti, da bosta oba Magellanova oblaka vedno nad obzorjem?
 - Kolikšna bo iz tistega kraja najvišja višina nad obzorjem za vsakega izmed njiju in na katerem območju azimutov ju bomo lahko opazovali?
 - Kolikšno zorno polje bi moral pokriti objektiv fotoaparata, da bi lahko na posnetek ujeli oba Magellanova oblaka? Senzor CCD v fotoaparatu je velik $35 \text{ mm} \times 35 \text{ mm}$. Kolikšna mora biti goriščna razdalja objektiva, ki bil primeren za tako fotografijo?
12. (Izbirno tekmovanje 2018) Dne 24. junija opazujemo zvezdo Vega ($\alpha = 18^\circ 36' 56''$, $\delta = +38^\circ 47' 1''$) iz Ljubljane ($\varphi = +46^\circ 13'$, $\lambda = +14^\circ 27'$).
- Kdaj kulminira Vega? Kolikšna je njena višina ob kulminaciji?
 - Kolikšna sta višina in azimut zvezde, če jo opazujemo ob 23.00?
13. (IOAA 2013) Koliko znašata časovni kot H in zenitna razdalja z Vege ($\delta = 38^\circ 47'$ v kraju Thessaloniki ($\lambda_1 = 1^h 32^m 0^s$, $\varphi_1 = 40^\circ 37'$) v trenutku, ko ta kulminira na lokalnem nebesnem poldnevniku v Lizboni ($\lambda_2 = -0^h 36^m 0^s$, $\varphi_2 = +39^\circ 43'$)?
14. **Zahtevnejša naloga** (IOAA 2020): Opazovalec zvezd v Chiayi, Kitajski Taipei ($23,5^\circ \text{N}$, $120,4^\circ \text{E}$, GMT+8) je opazil dva meteorja ob 21:00 (po času Kitajskega Taipei) dne 25. septembra 2020. Prvi meteor se je pojavil točno na zahodnem obzorju in švignil do točke na višini 15° natanko nad severnim obzorjem. Drugi meteor pa se je pojavil na višini $23,5^\circ$ in azimutu 210° in svojo sled končal na višini 75° in azimutu 255° .
- Kolikšen je lokalni zvezdni čas (LST) v trenutku opazovanja?
 - Poišči višino in azimut radianta meteorskega roja.
 - Poišči ekvatorialne koordinate navideznega radianta.
 - Katero od ozvezdji je najbliže radiantu meteorskega roja? Crux / Dorado / Pavo / Tucana / Triangulum Australes

Opombi:

- Azimuti so merjeni od severa (0°) proti vzhodu.
- Zvezdni čas na Greenwichu (GST) ob 00:00 UT dne 1. januarja 2020 je $6^h 40^m 30^s$.

× × ×