

DOLOČITEV PRIMERNEGA GEODETSKEGA DATUMA Z UPORABO ROBUSTNIH STATISTIČNIH METOD

DEFINITION OF APPROPRIATE GEODETIC DATUM USING ROBUST STATISTICAL METHODS

Aleš Marjetič, Klemen Kregar

UDK: 528.1:528.3:519.246
Klasifikacija prispevka po COBISS.SI: 1.01
Prispelo: 18. 3. 2016
Sprejeto: 13. 5. 2016

DOI: 10.15292/geodetski-vestnik.2016.02.212-226
SCIENTIFIC ARTICLE
Received: 18. 3. 2016
Accepted: 13. 5. 2016

IZVLEČEK

Pravilna določitev geodetskega datuma je nujen pogoj za pravilno določitev premikov točk. Obstajajo različne metode deformacijske analize, katerih bistvo je pravilna določitev tistih točk, ki niso podvržene premikom in ki lahko predstavljajo primerno koordinatno osnovo za izračun realnih vrednosti premikov ostalih točk. Te metode v večini temeljijo na statističnemu testiranju. Predstavljajo celovito in hkrati kompleksno analizo spreminjanja oblike geodetske mreže in omogočajo določitev statistično značilnih premikov. Če poznamo lastnosti transformacije med rešitvami premikov, ki so določene na podlagi različnih definicij geodetskih datumov, lahko problem definiranja primernege geodetskega datuma rešujemo nekoliko drugače.

V obravnavanem članku smo se osredotočili na določitev ustrezne utežne matrike E v transformaciji S . Pri tem smo uporabili splošno znane metode robustne statistike. Robustnost treh izbranih metod smo preverili na dveh različnih situacijah izbranih premikov v obravnavani geodetski mreži ter rezultate primerjali tudi na izbranem primeru geodetske mreže z rezultati klasičnih metod deformacijske analize.

KLJUČNE BESEDE

geodetski datum, transformacija S , robustna statistika, premik, vplivna funkcija, iterativno prilagajanje uteži

ABSTRACT

The correct determination of geodetic datum is an obligatory condition for the proper determination of the point displacements. There are various methods of deformation analysis focused on the right identification of stable points, which may define an appropriate coordinate basis for calculating the displacements of other points. These methods are largely based on the statistical testing and represent a comprehensive and complex analysis of change of geometry of geodetic network and allow definition of statistically significant displacements. Knowing the characteristics of the transformation between the solutions of displacements that are based on different definitions of geodetic datums, the problem of defining an appropriate geodetic datum can be solved in a slightly different way.

In this article we have focused on the problem of determining the appropriate weighting matrix E in the model of S -transformation. We used the generally known methods of robust statistics. The robustness of the three selected methods were tested on two different situations of preselected displacements in the considered geodetic network and the results on selected case of geodetic network with results of conventional methods of deformation analysis were compared.

KEY WORDS

geodetic datum, S transformation, robust statistics, displacement, influence function, IWP – iterative weighted projection

1 UVOD

Deformacije v geodetskem smislu v splošnem obravnavamo kot premike posameznih točk objekta, ki so položajno določene z meritvami (dolžin, kotov, višinskih razlik, GNSS-opazovanj itd.). Meritve ne podajajo vseh informacij o geodetskem datumu. Z izravnavo geodetske mreže po metodi najmanjših kvadratov (v nadaljevanju: MNK) izračunamo rešitev za vektor koordinatnih neznank točk mreže v posamezni epohi t . Če predpostavimo, da so opazovanja med posameznimi izmerami med seboj neodvisna, lahko vektorsko polje premikov predstavimo z razliko koordinat točk mreže \mathbf{x}_1 in \mathbf{x}_2 med dvema epohama t_1 in t_2 :

$$\mathbf{u} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2. \quad (1)$$

Posamezni rezultati izravnave geodetske mreže (\mathbf{x}_1 in \mathbf{x}_2) ter \mathbf{u} so seveda datumsko pogojeni, kar pomeni, da vsebujejo tudi vse informacije o datumu geodetske mreže v posamezni terminski izmeri. Tako lahko vektor \mathbf{u} v začetni fazi imenujmo samo vektor koordinatnih sprememb. Pogoji, da lahko spremembe koordinat definirajo tudi vektorsko polje premikov, so opisani v Xu et al., 2000, in Marjetič, 2013. Najpomembnejša pa je zahteva, da moramo zagotoviti enak in smiselno definiran geodetski datum v obeh časovno ločenih izmerah, ki ju primerjamo. Enak koordinatni sistem v dveh ločenih izmerah bi teoretično lahko zagotovili, če bi imeli enako geometrijo mreže, enak tip in število opazovanj, enak instrumentarij, enake vremenske pogoje, enake vrednosti danih količin ter način obdelave opazovanj (Sterle, 2007). To pa je tako rekoč nemogoče zagotoviti. Zato iz vseh navedenih razlogov vektorja \mathbf{u} ne moremo obravnavati kot vektor premikov točk, ampak samo vektor koordinatnih sprememb.

Opisane težave po nekaterih standardnih metodah deformacijske analize, kot so Delft, Hannover, Karlsruhe, Muenchen in Fredericton (Chrzanowski et al., 1983; Van Mierlo, 1978; Welsch in Zhang, 1983; Vrečko in Ambrožič, 2013), rešujejo s primerjavo koordinat točk izravnave proste mreže dveh izmer. S tem zagotovijo enakost geodetskih datumov, in sicer z identično datumsko matriko, ki zagotavlja ustrezne notranje datumске vezi v geodetski mreži. S postopki statističnega testiranja se določijo domnevno mirujoče točke geodetske mreže, s katerimi lahko na novo definiramo geodetski datum s transformacijo S (Marjetič in Stopar, 2007). Tako transformiramo vektor koordinatnih sprememb preostalih točk v datum domnevno mirujočih točk.

V članku problem definicije primernege geodetskega datuma obravnavamo nekoliko drugače. Prek lastnosti transformacije S in osnov robustne statistike lahko iterativno lociramo množico točk, ki se med dvema terminskima izmerama niso premaknile, in točke, ki ne ohranjajo položaja med izmerama in so z vidika robustne statistike grobo pogošena opazovanja.

2 DOLOČITEV GEODETSKEGA DATUMA Z ROBUSTNIMI STATISTIČNIMI METODAMI

Pri iskanju optimalnega geodetskega datuma z metodami robustne statistike (Chen et al., 1990) obravnavamo funkcionalni model transformacije S . Imamo vektor premikov točk \mathbf{u} in pripadajočo matriko kofaktorjev \mathbf{Q}_{uu} kot razliko rezultatov izravnave (proste mreže) dveh terminskih izmer. Pogoj obeh rešitev terminskih izmer je, da sta izračunani v istem geodetskem datumu. Na podlagi lastnosti transformacije S (Baarda, 1981; Marjetič in Stopar, 2007) lahko rešitev \mathbf{u} transformiramo iz datuma i v poljubno izbran geodetski datum j . Model transformacije S ima obliko:

$$\mathbf{u}_j = \mathbf{S}_j \mathbf{u}_i = \left(\mathbf{I} - \mathbf{H} \left(\mathbf{H}^T \mathbf{E}_j \mathbf{H} \right)^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{E}_j \right) \mathbf{u}_i, \tag{2}$$

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{u}\mathbf{u}}^j = \mathbf{S}_j \mathbf{Q}_{\mathbf{u}\mathbf{u}}^i \mathbf{S}_j^T,$$

kjer indeks i in j označuje geodetski datum, ter:

\mathbf{I} – enotska matrika dimenzije $2m \times 2m$, kjer je m število točk v mreži,

$$\mathbf{H}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ -y_1^0 & x_1^0 & -y_2^0 & x_2^0 & \dots & -y_m^0 & x_m^0 \\ x_1^0 & y_1^0 & x_2^0 & y_2^0 & \dots & x_m^0 & y_m^0 \end{bmatrix} - \text{matrika dimenzije } 4 \times 2m, \text{ ki izhaja iz pogojev za}$$

definiranje notranjih vezi za določitev geodetskega datuma (Caspary, 1988) oziroma matrika Helmertove transformacije za vse točke geodetske mreže, kjer prvi dve vrstici podajata zahtevo, da se mreža v povprečju ne premakne, tretja, da se ne zasuka, in četrta, da ne spremeni merila po izravnavi.

\mathbf{E}_j – matrika dimenzije $2m \times 2m$, katere izvendiagonalni elementi so enaki 0, na diagonali pa so vrednosti 1 samo na mestih, ki pripadajo posamezni koordinatni komponenti, ki je dana količina za definiranje geodetskega datuma i .

Če zapišemo Gauss-Markov funkcionalni model geodetske mreže, imamo (Teunissen, 2003):

$$\mathbf{v} + \mathbf{B}\Delta = \mathbf{f} = \mathbf{d} - \mathbf{l}. \tag{3}$$

V teoriji izravnave po metodi najmanjših kvadratov iščemo rešitve, ki izpolnjujejo pogoj najmanjše vsote kvadratov popravkov opazovanj. Te rešitve dobimo, ko izpolnimo pogoj ortogonalnosti med vektorjem popravkov opazovanj in prostorom matrike \mathbf{B} (Teunissen, 2003), pri čemer upoštevamo različen vpliv opazovanj, ki ga podajamo z matriko uteži \mathbf{P} :

$$\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = \mathbf{0}, \tag{4}$$

$$\mathbf{B}^T \mathbf{P} (\mathbf{f} - \mathbf{B}\Delta) = \mathbf{0},$$

iz katerega izhajajo normalne enačbe:

$$\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B} \Delta = \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{f}. \tag{5}$$

Iz (4) in (5) izhajajo rešitve izravnave po metodi najmanjših kvadratov (tu jih posebej označujemo s strešico):

$$\Delta = \left(\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B} \right)^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{f} = \mathbf{N}^{-1} \mathbf{t}, \tag{6}$$

$$\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{d} - \mathbf{B}\Delta,$$

$$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{f} - \mathbf{B}\Delta = \mathbf{f} - \mathbf{B} \left(\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B} \right)^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{f} = \left(\mathbf{I} - \mathbf{B} \left(\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B} \right)^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \right) \mathbf{f}.$$

Primerjava modelov (2) in (6) kaže, da je funkcionalni model transformacije \mathbf{S} (2) dejansko Gauss-Markov model, ki povezuje »opazovanja« \mathbf{u}_p , »popravke« \mathbf{u}_j ter »neznanke« vektorja transformacijskih parametrov \mathbf{t}_s :

$$\mathbf{u}_j + \mathbf{H} \mathbf{t}_s = \mathbf{u}_p, \tag{7}$$

kjer je rešitev za \mathbf{t}_s :

$$\mathbf{t}_s = (\mathbf{H}^T \mathbf{E} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{E} \mathbf{u}_i \quad (8)$$

Matrika transformacije S in matrika $\mathbf{H}(\mathbf{H}^T \mathbf{E} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{E}$ sta ortogonalna projektorja, ki projicirata vektor opazovanj \mathbf{u}_i na dve ortogonalni komponenti: \mathbf{t}_s in \mathbf{u}_j .

Če bi reševali model (7), bi iskali rešitev za \mathbf{t}_s pod pogoji metode najmanjših kvadratov, tokrat minimuma vsote kvadratov elementov vektorja \mathbf{u}_j s predhodno nastavljenno matriko uteži \mathbf{E} . Model transformacije S podaja torej rešitev, ki minimizira evklidsko normo vektorja koordinatnih komponent točk mreže.

Matrika \mathbf{H} je datumska matrika notranjih vezi, ki vključuje vse točke geodetske mreže, ali drugače: matrika, ki zagotavlja, da vse točke geodetske mreže definirajo datum (primer: prosta mreža). To pomeni, da je matrika \mathbf{E} kot matrika uteži tista, ki določa, katerim točkam dodati večji oziroma manjši vpliv pri definiranju datuma. Želimo torej nastaviti tako matriko uteži \mathbf{E} , ki bo prek matrike \mathbf{S} definirala optimalni geodetski datum oziroma na koncu zagotavljala optimalno rešitev za vektor \mathbf{u}_j .

V matematičnem smislu je primerno definiran geodetski datum pogoj za uspešno reševanje modela (7), ki je parametrični model (tudi vsak model izravnave je parametrični model). Parametrični modeli imajo v splošnem nekaj prednosti in slabosti (Hampel et al., 1986):

- pojav grobih pogreškov vpliva na računane parametre,
- model je samo idealizirana aproksimacija realnosti, ki pa je seveda tako matematično veliko lažje obvladljiva,
- parametričnemu modelu pripada dokaj enostaven stohastični model,
- obstaja možnost, da je parametrični model napačno izbran,
- parametrični modeli ločujejo informacije iz opazovanj na strogo strukturne in strogo slučajne spremenljivke.

3.1 Metoda največjega verjetja

Pri definiranju geodetskega datuma v funkcionalnem modelu (7) se lahko pojavi problem točk, ki so se premaknile. Te točke so v modelu transformacije S neke vrste grobo pogrešena opazovanja (enačba (2)). Ta problem lahko rešimo z robustnimi statističnimi metodami, ki v splošnem minimizirajo vpliv grobo pogrešenih opazovanj v modelu. Optimalni geodetski datum lahko v tem primeru določimo z uporabo metode največjega verjetja (angl. *MLE – Maximum Likelihood Estimation*; Hampel et al., 1986) ali ocene M , ki omogoča določitev najverjetnejše vrednosti za iskani parameter in je tudi najpogosteje uporabljena ocena v linearnih (lineariziranih) modelih. V splošnem uporaba ocene M za rešitev obravnavanega funkcionalnega modela zahteva določitev minimuma funkcije odstopanj (Jäger et al., 2005; Berné Valero in Baselga Moreno, 2005) ali popravkov \mathbf{u}_{gdj} . V obravnavanem primeru transformacije S iščemo minimum funkcije r (Jäger et al., 2005; Chen et al., 1990; Hampel et al., 1986; Rousseeuw in Leroy, 1987):

$$\rho(\mathbf{u}_{gdj}) = \min. \quad (9)$$

Za ekstrem (minimum) funkcije $\rho(\mathbf{u}_{gdj})$ velja, da je prvi odvod te funkcije po \mathbf{u}_{gdj} enak 0. Prvi odvod definira vplivno funkcijo (Hampel et al., 1986), v tuji literaturi pogosto označeno z IF (angl. influence function). Vplivna funkcija predstavlja vpliv grobega pogreška na ocenjene vrednosti neznank v izravnavi (Hampel et al., 1986). Funkcija je oblike (Jäger et al., 2005; Berné Valero in Baselga Moreno, 2005):

$$\psi(\mathbf{u}_{gdj}) = \text{IF}(\mathbf{u}_{gdj}) = \frac{\partial \rho(\mathbf{u}_{gdj})}{\partial \mathbf{u}_{gdj}} = 0. \tag{10}$$

Ker je \mathbf{u}_{gdj} odvisen od \mathbf{t}_s , za določitev minimuma uporabimo pravilo posrednega odvajanja odvisne funkcije (Jäger et al., 2005) in imamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho(\mathbf{u}_j(\mathbf{t}))}{\partial t_p} &= \frac{\partial}{\partial t_p} \sum_k \rho(u_j^k(\mathbf{t}_s)) = \sum_k \frac{\partial \rho(u_j^k(\mathbf{t}_s))}{\partial u_j^k} \cdot \frac{\partial u_j^k}{\partial t_p} = \\ &= \sum_k \psi(u_j^k) \cdot \frac{\partial u_j^k}{\partial t_p} = 0, \\ \sum_k \psi(u_j^k) \cdot \frac{\partial u_j^k}{\partial t_p} &= \sum_k \psi(u_j^k) \mathbf{h}^k = 0, \end{aligned} \tag{11}$$

kjer je:

u_j^k – k -ti element vektorja \mathbf{u}_j , $k = 1 \dots 2m$ (št. koord. komponent),

\mathbf{h}^k – k -ta vrstica matrike \mathbf{H} , ki je dimenzije $2m \times d$ (d – defekt datuma),

$p = t_x, t_y$, ω, ds – indeks, ki predstavlja transformacijske parametre med dvema koordinatnima sistemoma (geodetskima datumoma).

Iz (11) izhaja pogoj ortogonalnosti (4) za določitev optimalne rešitve modela transformacije S:

$$\mathbf{H}^T \begin{bmatrix} \psi(u_j^1) \\ \psi(u_j^2) \\ \vdots \\ \psi(u_j^{2m}) \end{bmatrix} = \mathbf{H}^T \begin{bmatrix} \frac{\psi(u_j^1)}{u_j^1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\psi(u_j^2)}{u_j^2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{\psi(u_j^{2m})}{u_j^{2m}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_j^1 \\ u_j^2 \\ \vdots \\ u_j^{2m} \end{bmatrix} = \mathbf{H}^T \mathbf{E} \mathbf{u}_j = \mathbf{0}. \tag{12}$$

Za določitev minimuma funkcije ρ (enačbe 9–11) imamo pri uporabi ocene M več možnosti izbire različnih ocen (Chen et al., 1990; Jäger et al., 2005). Lahko izberemo več oblik funkcije ρ .

a) **norma L_1** oziroma prva norma vektorja \mathbf{u}_j :

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{u}_j) &= \|\mathbf{u}_j\|_1 = \min., \\ \sum_k \rho(u_j^k) &= \sum_k |u_j^k| = \sum_k |u_j^k - \mathbf{h}^k \mathbf{t}_s| = \min. \end{aligned} \tag{13}$$

Potem je vplivna funkcija teoretično definirana z (Jäger et al., 2005):

$$\psi(u_j^k) = \begin{cases} +1, & \rho(u_j^k) > 0 \\ -1, & \rho(u_j^k) < 0 \end{cases} \rightarrow \psi(u_j^k) = 1. \tag{14}$$

b) **metoda Welsch** (Jäger et al., 2005):

$$\rho(\mathbf{u}_j) = \frac{1}{2}(a \cdot \sigma)^2 \cdot \left(1 - e^{-\left(u_j / (a \cdot \sigma)\right)^2}\right) = \min., a = 2.985 \tag{15}$$

Vplivna funkcija ima obliko:

$$\psi(u_j^k) = u_j^k \cdot e^{-\left(u_j^k / (a \cdot \sigma_k)\right)^2} \tag{16}$$

V literaturi (Jäger et al., 2005) je metoda izpeljana za standardizirani »popravek«, tu pa govorimo o dejanski vrednosti »popravka« (koordinatne spremembe med dvema epohama), zato predpostavljen faktor a pomnožimo s pripadajočo standardno deviacijo spremembe.

Naslednja možnost, ki je v geodeziji precej razširjena predvsem pri iskanju grobih pogreškov v opazovanih in pomeni modifikacijo metode Welsch, je:

c) **danska metoda** (Jäger et al., 2005; Grigillo in Stopar, 2003):

Pri danski metodi napišimo samo vplivno funkcijo:

$$\psi(u_j^k) = \begin{cases} \mathbf{E}_{k,k}^{it-1} \cdot u_j^k, & |u_j^k| < c \cdot \sigma_k \\ u_j^k \cdot e^{-u_j^k / (c \cdot \sigma_k)}, & |u_j^k| \geq c \cdot \sigma_k \end{cases} \tag{17}$$

kjer je:

c – konstanta v intervalu [2, 3].

Za različne metode (a, b, c) in z upoštevanjem izraza (12) ter izraza za vplivno funkcijo $\psi(u_j^k)$ posamezne metode a, b ali c imamo lahko različne načine definiranja diagonalnih elementov matrike \mathbf{E} . Za določitev optimalne rešitve oziroma optimalne definicije geodetskega datuma uporabimo iterativni postopek prilagajanja »uteži« v diagonalni matriki \mathbf{E} , ki jo na začetku izberemo kot enotsko matriko.

$$\mathbf{E}^{it=1} = \mathbf{I}_{2m \times 2m}, \text{ za } it=1, \tag{18}$$

oziroma za nadaljnje iteracije

Metoda	Matrika \mathbf{E} v iteraciji $it \geq 2$
L1	$\mathbf{E} = \text{diag}_{it} \left\{ 1 / \left \mathbf{u}_j^{it-1,k} \right \right\}$
Welsch	$\mathbf{E} = \text{diag}_{it} \left\{ e^{-\left(u_j^{it-1,k} / (a \cdot \sigma_k^{it-1})\right)^2} \right\}$
Danska	$\mathbf{E} = \begin{cases} 1, & u_j^{it-1,k} < c \cdot \sigma_k^{it-1} \\ e^{-u_j^{it-1,k} / (c \cdot \sigma_k^{it-1})}, & u_j^{it-1,k} \geq c \cdot \sigma_k^{it-1} \end{cases}$

kjer je:

it – število ponovitve ali iteracije,

$\mathbf{u}_{gdj}^{it-1,k}$ – k -ti element vektorja \mathbf{u}_{gdj} po predhodni ($it - 1$) iteraciji,

σ_k^{it-1} – standardna deviacija k -tega elementa vektorja \mathbf{u}_{gdj}^{it-1} .

Postopek ponavljamo toliko časa, dokler razlika med dvema iteracijama za vektor \mathbf{u}_{gdj} ni manjša od izbranega kriterija prekinitve iteracijskega postopka. V vsakem iteracijskem koraku izračunamo vrednost vektorja premikov točk in pripadajočo matriko kofaktorjev:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{gdj}^{it} &= \mathbf{S}^{it} \mathbf{u}_{gdi}, \\ \mathbf{Q}_{gdj}^{it} &= (\mathbf{S}^{it})^T \mathbf{Q}_{gdi} \mathbf{S}^{it}. \end{aligned} \quad (20)$$

Opisani postopek prilagajanja uteži matrike \mathbf{E} po metodi LL je dejansko sestavni del metode deformacijske analize Fredericton (Vrečko in Ambrožič, 2013). Tu jo obravnavamo z nekoliko drugačnega vidika. Zanima nas robustnost metode z vidika zmožnosti določitve optimalnega geodetskega datuma v geodetski mreži, ko so v njej prisotni premiki, ki jih v tem primeru obravnavamo kot neke vrste grobo pogrešene meritve.

V nadaljevanju prikazujemo delovanje opisanih metod na praktičnem primeru geodetske mreže.

4 PRAKTIČNI PRIMER

Obravnavamo ravninsko geodetsko mrežo sedmih točk (slika 1), v kateri lahko računsko simuliramo opazovanja horizontalnih smeri in dolžin z metodo Monte Carlo (Rubinstein, 1981; Savšek-Safić, 2002) s predpostavljeno natančnostjo merjenih dolžin $\sigma_{0,dol} = 0.3$ mm in smeri $\sigma_{0,smer} = 0.5''$. V obravnavani mreži imamo tako: $n = 48 - 24$ smeri in 24 dolžin ter $7 \times 2 = 14$ koordinatnih neznank. Tako imamo 30 nadštevilnih opazovanj z defektom datuma $d = 3$ (trije neznani datumski parametri – 2 translaciji in rotacija).

Preglednica 1: Izhodiščne koordinate točk v geodetski mreži.

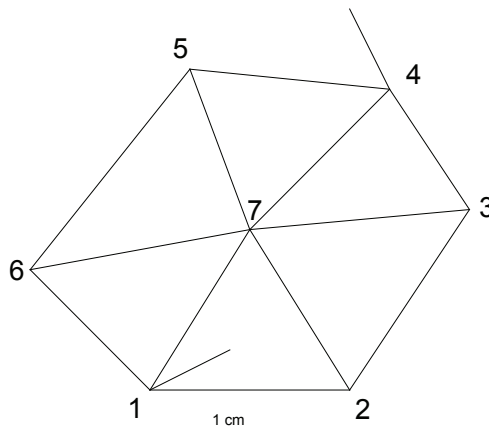
T	x_0 [m]	y_0 [m]
1	1000,000	1000,000
2	2000,000	1000,000
3	2600,000	1900,000
4	2200,000	2500,000
5	1200,000	2600,000
6	400,000	1600,000
7	1500,000	1800,000

V mreži predpostavimo, da se je zgodil premik izbranih točk. Tako imamo dve predpostavljene epohi v geodetski mreži – pred premikom t_0 in po premiku t_1 . Mrežo za obe epohi simuliranih meritev izravnamo kot prosto mrežo. Pri izračunu premikov točk med dvema epohama v prosti mreži je pričakovan rezultat tak, da za vse točke zaznamo premik, tudi za tiste, ki se dejansko niso premaknile. Glede na to, da geodetsko mrežo za obe epohi izravnamo kot prosto mrežo z enakimi približnimi koordinatami točk, ohranimo v obeh epohah enak geodetski datum, ki je definiran z notranjimi vezmi oziroma tako imenovano datumsko matriko \mathbf{H} . Tako v posamezni epohi pri izravnavi proste mreže težimo k temu, da se mreža v povprečju ne premakne, ne rotira in ne spremeni merila, kar seveda ne omogoča realne ocene premikov točk v mreži.

Način definicije geodetskega datuma, kot ga definirajo notranje vezi v mreži, torej ne podaja ustrezne rešitve. Iščemo način, kako ustrezno definirati geodetski datum. Kot alternativo klasičnim deformacijskim metodam, ki na podlagi statističnega testiranja hipotez ugotavljajo spremembe oblik v geodetski mreži, preizkusimo obravnavane robustne statistične metode na dveh različnih situacijah v geodetski mreži.

SITUACIJA 1:

Najprej izberemo premik relativno majhnega števila točk (slika 1). To pomeni, da se z vidika robustne statistike pri definiciji geodetskega datuma v sklopu transformacije S spopadamo z malo opazovanji, ki so kontaminirana z grobimi pogreški (premikami). Predpostavimo torej, da se je v geodetski mreži zgodil premik točk 1 in 4 (preglednica 2 in slika 1).



Slika 1: Obravnavana geodetska mreža z izbranimi premiki – situacija 1 (merilo premikov je večje od merila mreže – glej grafično merilo).

Na podlagi simuliranih meritev horizontalnih smeri in dolžin v dveh »epohah« izravnamo mrežo kot prosto z enakimi približnimi koordinatami točk (preglednica 1) in izračunamo vektor premikov (preglednica 2).

Preglednica 2: Situacija 1 – predpostavljen premik točk v mreži (slika 1) in rezultati proste mreže.

T	Predpostavljeni premik		Prosta mreža			
	Δx [m]	Δy [m]	Δx [m]	$\sigma_{\Delta x}$ [m]	Δy [m]	$\sigma_{\Delta y}$ [m]
1	+0,0200	+0,0100	0,0147	0,0002	0,0087	0,0003
2	0,0000	0,0000	-0,0050	0,0002	-0,0067	0,0002
3	0,0000	0,0000	-0,0008	0,0002	-0,0095	0,0002
4	-0,0100	+0,0200	-0,0078	0,0002	0,0123	0,0003
5	0,0000	0,0000	0,0024	0,0002	-0,0024	0,0002
6	0,0000	0,0000	-0,0023	0,0002	0,0018	0,0002
7	0,0000	0,0000	-0,0012	0,0002	-0,0041	0,0002

Rezultat izračuna premikov med dvema epohama v prosti mreži je pričakovan. Za vse točke izračunamo vrednosti premikov, ki niso samo posledica slučajnih pogreškov v opazovanjih, ampak tudi posledica ohranjanja položaja težišča mreže, orientacije in merila v izravnavi proste mreže v posamezni epohi.

Z izvedbo iteracijskega postopka prilaganja uteži glede na vrednosti sprememb koordinat točk med dvema epohama po treh različnih metodah dobimo rezultate, zbrane v preglednici 3. Pri vseh treh metodah dobimo skoraj enake rezultate. Izračunane vrednosti premikov točk sovpadajo s predpostavljenimi premiki (preglednica 2). Seveda vrednosti na ostalih točkah niso povsem enake 0, ker so v meritvah prisotni tudi slučajni vplivi.

Preglednica 3: Situacija 1 – rezultati iteracijskega postopka.

Metoda	<i>LI</i>				<i>Welsch</i>				<i>Danska</i>			
	Δx	$\sigma_{\Delta x}$	Δy	$\sigma_{\Delta y}$	Δx	$\sigma_{\Delta x}$	Δy	$\sigma_{\Delta y}$	Δx	$\sigma_{\Delta x}$	Δy	$\sigma_{\Delta y}$
T	[m]	[m]	[m]	[m]	[m]	[m]	[m]	[m]	[m]	[m]	[m]	[m]
1	0,0198	0,0002	0,0102	0,0003	0,0200	0,0002	0,0102	0,0003	0,0200	0,0002	0,0102	0,0003
2	0,0001	0,0002	-0,0005	0,0002	0,0003	0,0002	-0,0002	0,0002	0,0003	0,0002	-0,0002	0,0002
3	0,0000	0,0002	-0,0005	0,0002	0,0000	0,0002	0,0000	0,0002	0,0000	0,0002	0,0000	0,0002
4	-0,0098	0,0002	0,0194	0,0003	-0,0100	0,0002	0,0198	0,0003	-0,0100	0,0002	0,0198	0,0003
5	-0,0001	0,0002	0,0000	0,0002	-0,0003	0,0002	0,0001	0,0002	-0,0003	0,0002	0,0001	0,0002
6	-0,0001	0,0002	0,0004	0,0002	0,0000	0,0002	0,0003	0,0002	0,0000	0,0002	0,0003	0,0002
7	0,0001	0,0002	-0,0003	0,0002	0,0001	0,0002	-0,0001	0,0002	0,0001	0,0002	-0,0001	0,0002
št. iteracij	15				8				5			

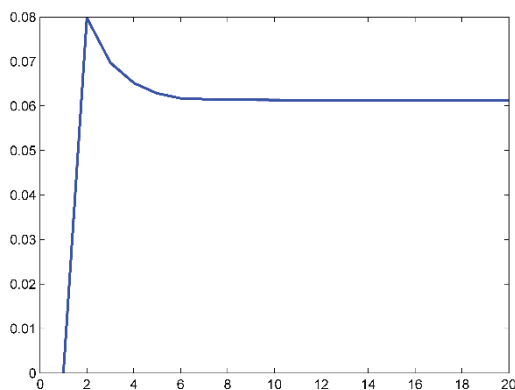
Zanimajo nas tudi komponente »utežne« matrike **E** transformacije **S** pri posamezni izbrani metodi.

Preglednica 4: Situacija 1 – diagonalni elementi matrike **E**.

Točka	<i>LI</i>		<i>Welsch</i>		<i>Danska</i>	
	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>x</i>	<i>y</i>
1	0,005	0,010	0,000	0,000	0,000	0,000
2	1,000	0,186	0,815	0,919	1,000	1,000
3	1,000	0,196	0,999	1,000	1,000	1,000
4	0,010	0,005	0,000	0,000	0,000	0,000
5	1,000	1,000	0,755	0,986	1,000	1,000
6	1,000	0,237	0,999	0,787	1,000	1,000
7	1,000	0,340	0,977	0,958	1,000	1,000

Število potrebnih iteracij za izračun optimalnega datuma je odvisno od stopnje konvergence posamezne numerične metode h končni rešitvi. Iteracijski proces ustavimo, ko maksimalna absolutna vrednost razlike v vektorja **u** med dvema zaporednima iteracijskima korakoma pade pod določeno vrednost (v našem primeru smo izbrali 10^{-5}). S tega vidika nam najhitreje poda optimalni rezultat danska metoda. Pri ugotavljanju števila potrebnih iteracijskih korakov za določitev optimalne rešitve lahko gledamo tudi vrednost prve norme vektorja koordinatnih razlik med dvema epohama (enačba 1). Graf na sliki 2 kaže odvisnost prve norme vektorja **u** od števila iteracij. V prvem koraku je vrednost prve norme vektorja **u** pričakovano 0, kajti izhajamo iz rezultatov izravnave proste mreže v dveh epohah. Lastnost izravnave proste mreže je tudi, da se težišče mreže točk glede na približne koordinate za posamezno izmero po

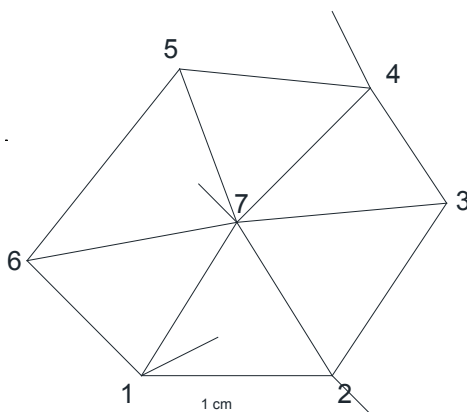
izravnavi ne premakne. Če izhajamo iz istih približnih koordinat v obeh izmerah, je jasno, da enako velja tudi za vektor \mathbf{u} kot razliko rezultatov izravnave proste mreže v posamezni epohi, kar dejansko dobimo v prvem koraku. V drugem iteracijskem koraku se vrednost v obravnavanem primeru povzpne na 0.08, potem zlimitira do vrednosti 0.0612 za metodo L1 po petnajstih korakih oziroma do vrednosti 0.0614 za metodo Welsch (po osmih korakih) in dansko metodo (po petih korakih). Graf je v vseh treh primerih približno enake oblike.



Slika 2: Odvisnost prve norme vektorja \mathbf{u} od števila iteracij.

SITUACIJA 2:

V drugem primeru izberemo premike 4 točk (premikoma točk 1 in 4 dodamo še premik točk 2 in 7). Imamo torej spremembo 8 koordinatnih komponent ali 57 % vseh. Iz teorije robustne statistike izhaja, da so robustne statistične metode zmožne kompenzirati približno 50 % »kontaminacijo« meritev z grobimi pogreški. Pričakujemo torej, da izbrani načini uporabe robustnih statističnih metod za določitev geodetskega datuma ne bodo zagotovili zadovoljivih rezultatov v obravnavani geodetski mreži.



Slika 3: Obravnavana geodetska mreža z izbranimi premiki – situacija 2.

Preglednica 5: Situacija 2 – predpostavljen premik točk v mreži (slika 3) in rezultati proste mreže.

T	Predpostavljen premik		Prosta mreža			
	Δx [m]	Δy [m]	Δx [m]	$\sigma_{\Delta x}$ [m]	Δy [m]	$\sigma_{\Delta y}$ [m]
1	+0,0200	+0,0100	0,0141	0,0002	0,0086	0,0003
2	+0,0100	-0,0100	0,0042	0,0002	-0,0170	0,0002
3	0,0000	0,0000	-0,0012	0,0002	-0,0098	0,0002
4	-0,0100	+0,0200	-0,0074	0,0002	0,0126	0,0003
5	0,0000	0,0000	0,0035	0,0002	-0,0025	0,0002
6	0,0000	0,0000	-0,0021	0,0002	0,0024	0,0002
7	-0,0100	+0,0100	-0,0112	0,0002	0,0059	0,0002

Preglednica 6: Situacija 1 – rezultati iteracijskega postopka.

Metoda	L1				Welsch				Danska			
	Δx [m]	$\sigma_{\Delta x}$ [m]	Δy [m]	$\sigma_{\Delta y}$ [m]	Δx [m]	$\sigma_{\Delta x}$ [m]	Δy [m]	$\sigma_{\Delta y}$ [m]	Δx [m]	$\sigma_{\Delta x}$ [m]	Δy [m]	$\sigma_{\Delta y}$ [m]
1	0,0125	0,0002	0,0043	0,0003	0,0180	0,0002	0,0105	0,0003	0,0198	0,0002	0,0097	0,0003
2	0,0026	0,0002	-0,0244	0,0002	0,0081	0,0002	-0,0121	0,0002	0,0099	0,0002	-0,0104	0,0002
3	0,0000	0,0002	-0,0191	0,0002	0,0000	0,0002	-0,0031	0,0002	-0,0005	0,0002	0,0002	0,0002
4	-0,0043	0,0002	0,0046	0,0003	-0,0080	0,0002	0,0181	0,0003	-0,0101	0,0002	0,0204	0,0003
5	0,0069	0,0002	-0,0074	0,0002	0,0026	0,0002	0,0000	0,0002	0,0003	0,0002	-0,0003	0,0002
6	-0,0018	0,0002	0,0000	0,0002	0,0000	0,0002	0,0025	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0002
7	-0,0103	0,0002	0,0001	0,0002	-0,0097	0,0002	0,0093	0,0002	-0,0100	0,0002	0,0098	0,0002
št. iteracij	58				5				6			

Rezultati v preglednici 6 so neposredno povezani z diagonalnimi elementi matrike **E** transformacije **S** pri posamezni izbrani metodi.

Preglednica 7: Situacija 2 – diagonalni elementi matrike **E**.

Točka	L1		Welsch		Danska	
	x	y	x	y	x	y
1	0,008	0,023	0,000	0,000	0,000	0,000
2	0,039	0,004	0,000	0,000	0,000	0,000
3	1,000	0,005	1,000	0,000	1,000	1,000
4	0,023	0,022	0,000	0,000	0,000	0,000
5	0,015	0,014	0,000	1,000	1,000	1,000
6	0,055	1,000	1,000	0,000	1,000	1,000
7	0,010	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000

Vidimo, da pri metodi *L1* ne dobimo zadovoljivih rezultatov. Po izvedenem postopku iskanja optimalnega geodetskega datuma dobimo celo slabše rezultate premikov točk kot pri obravnavi samo proste mreže. V

nasprotju z metodo *L1* rezultati metode *Welsch* in *danske metode* odražajo precej realno stanje premikov. Vidimo lahko, da danska metoda zagotovi najboljše rezultate, če jih primerjamo s predpostavljenimi premiki v preglednici 5, pri tem pa potrebuje 6 iteracij.

SITUACIJA 3:

Tretja situacija se nanaša na geodetsko mrežo Pesje, ki jo je v diplomski nalogi obravnavala Anja Vrečko (Vrečko, 2010; Vrečko in Ambrožič, 2013). Gre za geodetsko mrežo, ki je bila razvita v okolici Velenja za potrebe tamkajšnjega premogovnika. V izračunu obravnavamo rezultate izmer dveh epoh – oktober 2000 in april 2001. V mreži so bile merjene horizontalne smeri, zenitne razdalje in poševne dolžine. Izhajamo iz rezultatov izravnave proste mreže za obe obravnavani epohi na podlagi enakih približnih vrednosti koordinat točk (Vrečko, 2010, str. 31–32).

Za določitev premikov točk v mreži so bile v navedeni diplomski nalogi uporabljene vse klasične metode deformacijske analize. Te rezultate primerjamo z rezultati izračuna z robustnimi statističnimi metodami, obravnavanimi v tem članku (preglednica 8).

Preglednica 8: Primerjava rezultatov klasičnih metod deformacijske analize in obravnavanih robustnih metod v mreži Pesje.

Točka	Klasične metode deformacijske analize								Robustne metode					
	Delft		Karlsruhe		Hannover		Fredericton		L1		Welsch		Danska	
	<i>dx</i>	<i>dy</i>	<i>dx</i>	<i>dy</i>	<i>dx</i>	<i>dy</i>	<i>dx</i>	<i>dy</i>	<i>dx</i>	<i>dy</i>	<i>dx</i>	<i>dy</i>	<i>dx</i>	<i>dy</i>
[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]
26Z/A	1,5	-4,0	-	-	7,3	0,0	0	0	6,6	-2,1	-0,4	-6,3	6,4	-1,3
11A	3,7	-0,4	-	-	5,9	-1,9	0	0	5,9	2,7	3,1	-0,8	5,7	-2,1
N6A	-3,9	4,9	4,8	4	-3,8	4,6	-3,3	4,3	-4,7	-10,6	-3,1	4,7	-4,9	2,7
S5A	10,9	-17,1	6,7	-13,9	7,8	-14,2	8,2	-14,4	2,3	1,2	15,1	-21,2	2,1	-10,6
PP	-2,5	2,0	-2,2	1,2	-1,7	1,6	0	0	-4,0	3,1	-1,5	1,1	-4,1	1,2
VII/5	0,0	3,9	-	-	-2,2	3,6	0	0	-1,4	0,1	1,0	3,1	-1,5	3,1
VII/4	-1,3	0,9	-	-	-3,2	0,6	0	0	-2,4	0,4	-0,4	0,1	-2,6	0,1
PD4	-0,9	0,1	-	-	-3,0	1,1	0	0	-2,2	2,8	0,0	-1,2	-2,3	0,4
PC3	0,8	3,6	-	-	-0,7	3,3	0	0	0,0	0,4	1,5	2,8	-0,2	2,8
PBI	5,2	2,5	6,2	2,5	5,8	1,9	7,3	1,7	5,6	-5,1	5,4	2,2	5,5	0,4
PB0	-2,0	-2,5	-1,1	-4,0	-0,5	-3,3	-1,0	-3,3	-1,5	-2,3	-1,9	-2,5	-1,7	-5,0
PB8	-1,6	0,2	-	-	-1,9	-2,2	0	0	-1,5	3,6	-1,4	0,1	-1,6	-2,3
PA1	-0,5	6,8	-	-	-0,2	6,1	1,4	5,7	-0,8	16,6	0,0	7,1	-1,0	3,6
XI/A1	-5,1	19,6	-6,7	17,9	-5,3	19,4	-4,5	19,1	-6,6	-1,6	-4,0	19,7	-6,7	16,7
PB7	-0,8	0,5	-	-	-1,2	-1,4	0	0	-0,7	-0,1	-0,4	0,2	-0,9	-1,6
PB9	0,0	2,5	-	-	0,7	0,0	0	0	1,0	3,3	-0,1	2,5	0,8	0,0
PA0	0,7	6,4	-	-	1,1	5,8	1,4	5,7	0,9	-5,6	0,9	6,7	0,8	3,3
PCK	-2,2	-5,1	-	-	-1,2	-5,0	0	0	-1,0	1,2	-2,4	-6,1	-1,1	-5,6
PC0	7,2	2,5	7,6	1,9	5,3	2,2	7,3	1,7	8,0	1,6	7,2	1,9	7,9	1,2
PD2	-1,5	-1,5	-	-	-2,0	2,3	0	0	-1,5	-3,3	-1,1	0,3	-1,6	1,6
PC2	-0,3	-2,2	-	-	-1,2	-2,9	-1,2	-3,6	-0,6	-4,2	0,2	-2,9	-0,8	-3,3
PC1	-1,2	-3,0	-0,9	-2,0	-1,6	-3,8	-1,2	-3,6	-1,1	-1,3	-0,9	-3,6	-1,3	-4,2

Točka	Klasične metode deformacijske analize								Robustne metode					
	Delft		Karlsruhe		Hannover		Fredericton		L1		Welsch		Danska	
	dx	dy	dx	dy	dx	dy	dx	dy	dx	dy	dx	dy	dx	dy
[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]
PD0	2,2	-1,1	-	-	3,8	-0,7	3,1	-1,8	3,9	-1,3	1,8	-2,2	3,7	-1,3
PC8	-0,9	0,1	-	-	0,0	-1,0	0	0	0,2	0,3	-1,0	-0,4	0,1	-1,3
PC9	0,6	1,8	-	-	1,8	0,6	0	0	2,0	-0,4	0,4	1,3	1,8	0,3
PD1	1,0	-0,4	0,8	-0,9	1,1	0,3	0	0	1,5	0,8	1,2	-1,6	1,3	-0,4
PE1	0,8	0,8	-	-	-3,3	0,9	0	0	1,5	-1,8	0,9	-0,4	1,4	0,8
PE2	3,6	-2,1	-	-	4,5	-1,1	3,1	-1,8	4,7	0,1	3,5	-3,4	4,6	-1,8
PD3	-0,3	0,6	-	-	-0,4	0,6	0	0	0,0	-11,1	-0,1	-0,4	-0,1	0,1
PE0	0,1	-11,4	-0,7	-11,7	5,6	-11,0	-0,7	-11,2	0,8	0,0	0,2	-12,7	0,7	-11,1
							št. it =		35		14		6	

Primerjava rezultatov kaže na največje ujemanje premikov točk, izračunanih z dansko metodo, s premiki, izračunanimi z metodo Hannover. Tako kot v situaciji 2 lahko rečemo, da danska metoda zagotavlja »najrealnejše« vrednosti, hkrati pa za to potrebuje najmanj iteracij. Pričakovali smo sicer največje ujemanje z metodo Fredericton, ki že v osnovi uporablja iterativno prilagajanje uteži v matriki E . Razlika obravnavanih metod robustne statistike v primerjavi z metodo Fredericton je kljub temu precejšnja, saj metoda Fredericton temelji na delitvi celotne mreže v posamezne bloke točk, ki imajo približno enake deformacijske karakteristike. Na podlagi blokov točk se odločamo o različnih deformacijskih modelih, ki jih statistično na podlagi izbrane stopnje tveganja ter globalnega testa modela zavrnamo ali ne.

5 SKLEP

V članku smo obravnavali tri različne metode robustne statistike za določitev optimalnega geodetskega datuma. Skupni imenovalac vseh treh je, da iterativno prilagajamo diagonalne elemente matrike E matematičnega modela transformacije S , ki povezuje vektor koordinatnih sprememb točk v aktualnem geodetskem datumu glede na predhodno definiran geodetski datum. Dejansko gre za uporabo robustnih statističnih metod, ki temeljijo na vplivni funkciji (Hampel et al., 1986). Obravnavane metode oziroma pristopi se razlikujejo samo v vplivni funkciji, iz katere izhajamo. Različne vplivne funkcije uvajajo različne načine definiranja uteži v matriki E transformacije S .

Obravnavane metode robustne statistike smo preizkusili na praktičnem primeru geodetske mreže, v kateri smo predpostavili premik določenega števila točk. V mreži smo na podlagi predpostavljenih premikov točk simulirali meritve in mrežo za obe epohi izravnali po metodi najmanjših kvadratov. Vektor koordinatnih sprememb izravnave proste mreže v dveh epohah ter približne koordinate točk so bile podlaga za nadaljnji izračun, to je iskanje optimalne rešitve za vektor koordinatnih sprememb med dvema epohama, ki bo odražal tudi vrednosti dejanskih premikov točk v mreži. Pri predpostavljenem relativno majhnem številu točk, ki so se premaknile med dvema epohama, ne glede na izbrano metodo, zelo enostavno, elegantno pridemo do optimalnega rezultata v le nekaj iteracijskih korakih. Pri premikih večjega števila točk, to je več kot polovice točk, pa pričakovano ne dobimo zadovoljivih rezultatov za vse tri obravnavane metode. »Okuženost« modela transformacije S z grobo pogrešenimi meritvami oziroma

premiki je v tem primeru prevelika. Najboljšo oziroma najprimernejšo rešitev zagotavlja danska metoda. Podobno se je izkazalo tudi, ko smo rezultate vseh treh metod primerjali z rezultati metod deformacijske analize na primeru mreže Pesje.

Ugotovimo lahko, da so robustne statistične metode enostavno orodje za definiranje optimalnega geodetskega datuma za izračun realnih vrednosti premikov točk v geodetski mreži med dvema epohama. Med obravnavanimi metodami se je kot najbolj zanesljiva izkazala danska metoda, saj ima največjo stopnjo odpornosti proti grobim pogreškom v modelu. Tudi drugače je danska metoda splošno uveljavljena metoda, predvsem v nalogah iskanja grobih pogreškov v modelih, ki povezujejo meritve in iskane količine. Ne glede na to je treba biti pri definiranju geodetskega datuma previden, saj je težko zanesljivo vedeti, katere so tiste točke, ki se dejansko niso premaknile. Zatorej so opisane metode lahko le podpora ali pa sestavni del že obravnavanih in uporabljenih bolj celostnih metod deformacijske analize, ki lahko prinesejo optimalne rešitve le ob dobrem poznavanju stanja v geodetski mreži.

Literatura in viri:

- Baarda, W. (1981). *S-Transformations and Criterion Matrices*. Publications on Geodesy, 5(1). Delft, Nizozemska: Geodetic Commission, 168 str.
- Berné-Valero, J. L., Baselga Moreno, S. (2005). Robust Estimation in Geodetic Network. *Física de la Tierra*, 17, 7–22.
- Caspar, W. F. (1988). *Concepts of Network and Deformation Analysis*. Kensington, N. S. W., Avstralija: The University of New South Wales.
- Chen, Y. Q., Chrzanowski, A., Secord, J. M. (1990). A Strategy for the Analysis of the Stability of Reference Points in Deformation Measurements. *CISM Journal ACSGC*, 44(2), 141–149.
- Chrzanowski, A., Chen, Y. Q., Secord, J. M. (1983). *Analysis of the Simulated Monitoring Network Using the Fredericton Approach*. V: W. Welsch (ur.), *Deformationsanalysen '83, Geometrische Analyse und Interpretation von Deformationen Geodätischer Netze*. Schriftenreihe des Wissenschaftlichen Studiengangs Vermessungswesen. München: Hochschule der Bundeswehr München.
- Grigillo, D., Stopar, B. (2003). Metode odkrivanja grobih pogreškov v geodetskih opazovanjih. *Geodetski vestnik*, 47(4), 387–403.
- Hampel, F. R., Ronchetti, E. M., Rousseeuw, P. J., Stahel, W. A. (1986). *Robust Statistics: The Approach Based on Influence Functions*. New York: John Wiley & Sons, 502 str.
- Jäger, R., Müller, T., Saler, H., Schwäble, R. (2005). *Klassische und robuste Ausgleichungsverfahren*. Heidelberg: Wichmann Verlag, 340 str.
- Marjetič, A. (2013). Datumsko odvisnost deformacij in rotacij geodetske mreže. *Geodetski vestnik*, 57(3), 447–464. DOI: <http://dx.doi.org/10.15292/geodetski-vestnik.2013.03.447-464>
- Marjetič, A., Stopar, B. (2007). Geodetski datum in S-transformacija. *Geodetski vestnik*, 51(3), 549–564.
- Rubinstein, R. Y. (1986). *Monte Carlo Optimization, Simulation and Sensitivity of Queueing Networks*. New York: John Wiley & Sons, 260 str.
- Rousseeuw, P. J., Leroy, A. M. (1987). *Robust Regression and Outlier Detection*. John Wiley & Sons, 329 str. DOI: <http://dx.doi.org/10.1002/0471725382>
- Savšek Safič, S. (2002). *Optimalna metoda določanja stabilnih točk v deformacijski analizi*. Doktorska disertacija. Ljubljana: Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, 211 str.
- Sterle, O. (2007). *Združevanje klasičnih geodetskih in GNSS-opazovanj v geodinamičnih raziskavah*. Magistrsko delo. Ljubljana: Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, 118 str.
- Teunissen, P. J. G. (2003). *Adjustment Theory*. Delft, Nizozemska: VSSD, 193 str.
- Van Mierlo, J. (1978). *A Testing Procedure for Analyzing Geodetic Deformation Measurements*. 2nd FIG Symposium on Deformation Measurements by Geodetic Methods, Bonn.
- Vrečko, A. (2010). *Določitev premikov točk v geodetski mreži po metodi Fredericton*. Diplomsko naloga. Ljubljana: Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo.
- Vrečko, A., Ambrožič, T. (2013). Deformacijska analiza po postopku Fredericton. *Geodetski vestnik*, 57(3), 479–497. DOI: <http://dx.doi.org/10.15292/geodetski-vestnik.2013.03.479-497>
- Welsch, W., Zhang, Y. (1983). *Einige Methoden zur Untersuchung kongruenter und affiner Beziehungen in geodätischen Überwachungsnetzen zur Ermittlung von Deformationen*. V W. Welsch (ur.), *Deformationsanalysen '83: Geometrische Analyse und Interpretation von Deformationen Geodätischer Netze*. Schriftenreihe des Wissenschaftlichen Studiengangs Vermessungswesen. München: Hochschule der Bundeswehr München.
- Xu, P., Shimada, S., Fujii, Y., Tanaka, T. (2000). Invariant Geodynamical Information in Geometric Geodetic Measurements. *Geophysical Journal International*, 142(2), 586–602. DOI: <http://dx.doi.org/10.1046/j.1365-246x.2000.00181.x>



Marjetič A., Kregar K. (2016). Določitev primernega geodetskega datuma z uporabo robustnih statističnih metod. Geodetski vestnik, 60 (2): 221-226.
DOI: 10.15292/geodetski-vestnik.2016.02.212-226

doc. dr. Aleš Marjetič, univ. dipl. inž. geod.

Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo
Jamova cesta 2, SI-1000 Ljubljana
e-naslov: ales.marjetic@fgg.uni-lj.si

asist. Klemen Kregar, univ. dipl. inž. geod.

Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo
Jamova cesta 2, SI-1000 Ljubljana
e-naslov: klemen.kregar@fgg.uni-lj.si