UČINEK METULJA IN REKURZIVNA ZAPOREDJA

UROŠ KUZMAN

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2020): 37E05, 39A33

V članku so predstavljena tri preprosta enokoračna rekurzivna zaporedja, ki so občutljiva na začetne podatke. Z njimi ilustriramo fenomen, ki je v teoriji kaosa pogosto poimenovan kot učinek metulja.

BUTTERFLY EFFECT AND RECCURENCE RELATIONS

We present three simple examples of sequences that are given by a first order reccurence relation and are sensitive to the initial conditions. We use them to illustrate a phenomenon from the chaos theory which is often called the butterfly effect.

»It's not what you sell, it's how you sell it!« se je glasil slogan plakata, ki sem ga med nedavnim obiskom Združenih držav Amerike uzrl skozi okno. Zelo ne-akademska misel, ni kaj. Kljub temu se bom uvodoma naslonil nanjo. Znanost kot vsaka dejavnost piše številne zgodbe, od katerih le redke prestopijo meje strokovnih krogov. Številne anekdote, metode in rezultati kljub svojemu potencialu utonejo v pozabo. Obstajajo pa tudi take, ki so na videz nepomembne, a se nato zapišejo v zgodovino in celo v popkulturo. V tem članku predstavljam eno od najbolj znanih te, druge vrste.

V sedemdesetih letih preteklega stoletja je matematik in meteorolog Edward Norton Lorentz razvil model, s katerim je želel napovedovati razvoj vremena. Ker so bile zmogljivosti takratnih računalnikov bistveno šibkejše, je svoje izračune pogosto ponavljal in pri tem v model vstavil vrednost katere izmed kasnejših iteracij. Pri enem od tovrstnih preverjanj je med vnosom napravil zaokrožitveno napako. Ker je ta povzročila odstopanje od pričakovane rešitve, je sprva posumil, da gre za okvaro računalnika. Ko je račun ponovil še nekajkrat, je presenečen ugotovil, da je njegov model močno občutljiv na začetne podatke. Čeprav ta ugotovitev ni bila posebej revolucionarna – primere tovrstnih sistemov je že v 19. stoletuju opisoval Henri Poincaré – se je njen »how you sell it« moment zgodil desetletje kasneje. Po spletu okoliščin je namreč Lorentzovo predavanje o tej temi dobilo naslov v obliki vprašanja »Ali lahko utrip metuljevih kril sredi Brazilije povzroči tornado v Teksasu?« Tako je kljub dejstvu, da je bilo kasneje ugotovljeno, da vreme vendarle ni tako zelo spremenljivo, njegova numerična nespretnost botrovala rojstvu besedne zveze *učinek metulja* (angl. butterfly effect), ki je danes stalnica v teoriji kaosa in jo poznajo celo v Hollywoodu.

Če povzamem, gre za poljuden koncept, o katerem bi vas znali kdaj povprašali tudi vaši znanci ali dijaki. In ker je prav, da smo pedagogi na take trenutke pripravljeni, vam v tem sestavku ponujam nekaj matematičnih modelov tega fenomena. Konkretno, ogledali si ga bomo na primeru rekurzivnih zaporedij, ki jih bomo analizirali s pomočjo dvojiškega sistema in ilustrirali s pajčevinastimi diagrami, izdelanimi v Geogebri. V duhu uvoda pa začnimo z uganko in na filmski način.

Sherlock Holmes predstavi rekurzivna zaporedja

Naloga. Sherlock Holmes prispe na kraj zločina in v jezeru najde truplo. Takoj opravi meritve in ugotovi, da je temperatura jezera 5 °C, telesna temperatura pokojnika pa 9 °C. Po eni uri drugo meritev ponovi in ugotovi, da se je temperatura trupla spustila na 7 °C. Koliko časa pred njegovim prihodom se je zgodil umor?

Rešitev. Telesna temperatura se spreminja sorazmerno s temperaturno razliko med temperaturo trupla in temperaturo jezera. Natančneje, naj bo x_n telesna temperatura pokojnika po $n \in \mathbb{N}_0$ urah in T temperatura jezera. Potem lahko spreminjanje temperature x_n opišemo z zvezo

$$x_{n+1} = x_n - k(x_n - T),$$

kjer je $k > 0$ konstanta, ki je odvisna od fizikalnih lastnosti trupla.

Naj bo $m \in \mathbb{N}$ trenutek, ko je detektiv našel truplo. Glede na njegove meritve velja, da je $x_m = 9$ °C in $x_{m+1} = 7$ °C. Če oba podatka vstavimo v zgornjo zvezo, ugotovimo, da je $k = \frac{1}{2}$. Sedaj upoštevamo, da je začetna telesna temperatura enaka $x_0 = 37$ °C in opazujmo nadaljnje člene zaporedja:

$$\begin{aligned}
x_1 &= 37\ ^\circ\text{C} - \frac{1}{2}(37\ ^\circ\text{C} - 5\ ^\circ\text{C}) = 21\ ^\circ\text{C},\\
x_2 &= 21\ ^\circ\text{C} - \frac{1}{2}(21\ ^\circ\text{C} - 5\ ^\circ\text{C}) = 13\ ^\circ\text{C},\\
x_3 &= 13\ ^\circ\text{C} - \frac{1}{2}(13\ ^\circ\text{C} - 5\ ^\circ\text{C}) = 9\ ^\circ\text{C}.
\end{aligned}$$

Prišli smo do odgovora, umor se je zgodil 3 ure pred detektivovim prihodom.

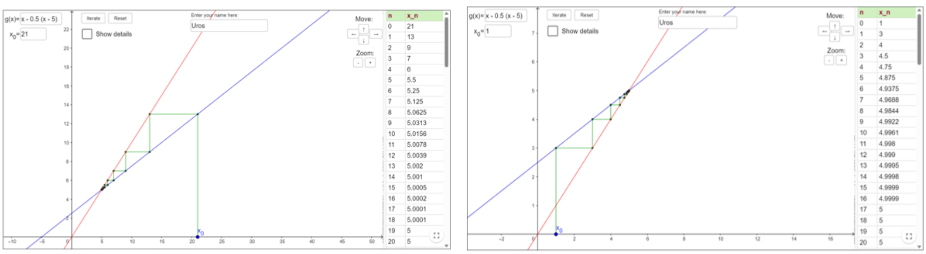
Kot napovedano, bomo uganko uporabili za vpeljavo osnovnih pojmov, ki jih nameravamo obravnavati. Ukvarjali se bomo torej z zaporedji, ki so podana z enokoračno rekurzivno zvezo $x_{n+1} = g(x_n)$, kjer je $g\colon I \to I$

funkcija, ki interval $I \subseteq \mathbb{R}$ preslika sam vase. Zaloga vrednosti takega zaporedja je odvisna od začetnega člena $x_0 \in I$, naboru števil x_m, ki se za indekse $m \geq 1$ zvrstijo v njej, pa pravimo *orbita točke* x_0 ter jo označimo z $\mathcal{O}_g(x_0)$. Na primer, v zgornji nalogi smo imeli zvezo

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}(x_n - 5) = g(x_n),$$

ki smo jo obravnavali na intervalu $I = [0, \infty)$, orbito točke $x_0 = 37$ pa so tvorila števila $\mathcal{O}_g(37) = \{21, 13, 9, 7, 6, \ldots\}$.

Kadar je zaporedje podano z enokoračno rekurzivno zvezo, lahko orbito poljubne točke ponazorimo tudi s t. i. *pajčevinastim diagramom* (angl. cobweb diagram). Postopek za njegovo konstrukcijo je naslednji: V koordinatni sistem narišemo graf funkcije g in simetralo lihih kvadrantov. Na abscisni osi označimo vrednost x_0 in jo z navpično črto povežemo z grafom funkcije. Višina, ki jo pri tem dosežemo, je enaka $x_1 = g(x_0)$. To vrednost z ordinatne prenesemo na abscisno os, tako da točko $(x_0, g(x_0))$ z vodoravno črto povežemo s simetralo. Projekcija presečišča na abscisno os podaja vrednost x_1. S ponavljanjem tega postopka lahko skiciramo tudi nadaljnje člene zaporedja, kar je prikazano na spodnjih slikah.



Slika 1. Orbiti zaporedja iz naloge pri začetnem pogoju $x_0 = 21$ in $x_0 = 1$.

Sliki prikazujeta člene zaporedja iz začetne naloge ob dveh različnih začetnih pogojih. Opazimo, da je za $x_0 < 5$ zaporedje naraščajoče, za $x_0 > 5$ pa padajoče, v obeh primerih pa je njegova limita enaka 5, kar lahko tudi računsko preverimo. To pomeni, da je razvoj orbit v tem primeru »zelo predvidljiv«, kar je ravno v nasprotju s fenomenom, ki ga želimo izpostaviti.

Učinek metulja in dvojiški decimalni zapis

Sedaj, ko smo uvedli osnovne pojme, podajmo formalno definicijo pojava, ki ga obravnavamo. Ker je to slogovno bolj primerno, bomo za zaporedja, ki ilustrirajo učinek metulja, rekli, da so *občutljiva na začetne podatke*.

Definicija 1. *Naj bo $I \subseteq \mathbb{R}$ interval in $g\colon I \to I$ funkcija. Rekurzivno zaporedje, ki je podano z zvezo $x_{n+1} = g(x_n)$,* je občutljivo na začetne podatke*, če obstaja $\beta > 0$, da za poljuben začetni pogoj $x_0 \in I$ in poljubno število $\epsilon > 0$ obstajata začetni pogoj $\widehat{x}_0 \in I$ in indeks $m \in \mathbb{N}$, da zanju in za m-ta elementa orbit $x_m \in \mathcal{O}_g(x_0)$ in $\widehat{x}_m \in \mathcal{O}_g(\widehat{x}_0)$ velja*

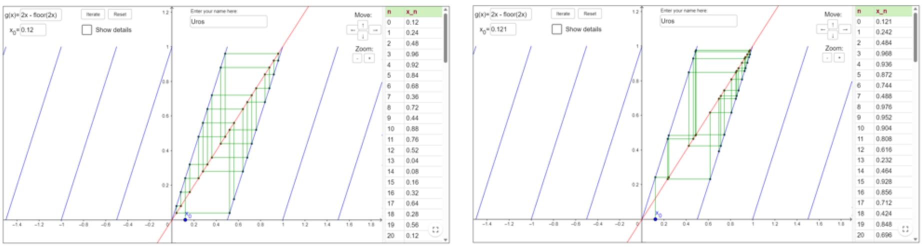
$$|x_0 - \widehat{x}_0| < \epsilon \ \text{ in } \ |x_m - \widehat{x}_m| \geq \beta.$$

Definicija pove, da je mogoče s »poljubno majhno« motnjo začetnega pogoja doseči »veliko spremembo« orbite, kar lahko interpretiramo kot tornado, ki nastane zaradi zamaha metuljevih kril. Oglejmo si dva primera zaporedij s to lastnostjo.

Primer 2. Naj bo $g\colon [0,1) \to [0,1)$ funkcija, ki je podana s predpisom

$$g(x) = 2x - \lfloor 2x \rfloor .$$

Geometrijsko to pomeni, da oddaljenost števila x od koordinatnega izhodišča najprej podvojimo, nato pa ji, v primeru, da smo pri tem zapustili interval $[0,1)$, odštejemo število 1. V literaturi g pogosto najdemo pod imenom *podvojitvena preslikava* (angl. doubling map). Zaporedje, podano z zvezo $x_{n+1} = g(x_n)$, je občutljivo na začetne podatke, kar lepo ilustrirata že spodnji sliki. Vseeno poskrbimo še za formalni dokaz tega dejstva z uporabo dvojiškega decimalnega zapisa.



Slika 2. Orbiti podvojitvene preslikave pri začetnih pogojih $x_0 = 0{,}12$ in $x_0 = 0{,}121$.

Vsako število $x_0 \in [0,1)$ lahko zapišemo z naslednjo konvergentno vrsto:

$$x_0 = 0{,}c_1c_2c_3\ldots_{(2)} = c_1 \cdot \frac{1}{2} + c_2 \cdot \frac{1}{4} + c_3 \cdot \frac{1}{8} + \cdots ,$$

kjer je $c_j \in \{0,1\}$. Tovrsten zapis ni enoličen, saj lahko števila s končnim decimalnim zapisom podamo na dva načina. Na primer $\frac{1}{2} = 0{,}1_{(2)} = 0{,}0\overline{1}_{(2)}$.

Naj bo število $x_0 \in [0,1)$ zapisano brez ponavljajočih se enic. Oglejmo si, kam ga slika g. Množenje s številom 2 pomeni, da se decimalna pika v dvojiškem zapisu premakne za eno mesto v desno, oz. da je

$$2x_0 = c_1{,}c_2c_3c_4\ldots_{(2)}\,.$$

Celi del tega števila je torej enak številu c_1, kar pomeni, da je

$$g(x_0) = 0{,}c_2c_3c_4\ldots_{(2)}\,.$$

Preslikava g iz dvojiškega zapisa števila x_0 torej izpusti prvo decimalko. Taki preslikavi rečemo tudi *operator zamika* (angl. shift map).

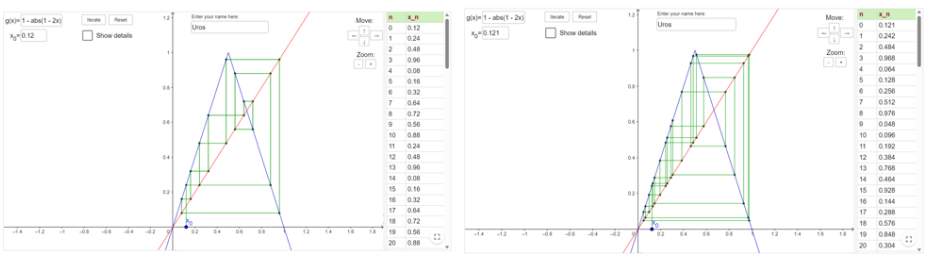
Sedaj poiščimo število $\widehat{x}_0 \in [0,1)$, ki bo lahko poljubno blizu števila x_0, hkrati pa bo njegova orbita po zadostnem številu korakov daleč stran od orbite števila x_0. Na primer,

$$\widehat{x}_0 = 0{,}c_1c_2\ldots c_m\tilde{c}_{m+1}c_{m+2}\ldots_{(2)}\,,$$

kjer je $\tilde{c}_{m+1} \neq c_{m+1}$ edina števka, ki se v zapisu števila $\widehat{x}_0$ ne ujema s števkami iz zapisa števila x_0. Razdalja med x_0 in $\widehat{x}_0$ je enaka $2^{-(m+1)}$ oz. poljubno majhna za dovolj velik $m \in \mathbb{N}$. Hkrati pa se, ko v m korakih izpustimo prvih m decimalk, člena x_m in $\widehat{x}_m$ ujemata povsod razen v prvi decimalki. Torej se razlikujeta za konstanto $\beta = \frac{1}{2}$. V geometrijskem smislu to pomeni, da smo na točkah x_0 in $\widehat{x}_0$ uporabljali funkcijo g toliko časa, da sta se istoležna člena obeh orbit znašla vsak v svoji polovici intervala $[0,1)$.

Primer 3. Naj bo $g\colon [0,1] \to [0,1]$ funkcija, ki je podana s predpisom

$$g(x) = 1 - |1-2x| = \min\{2x, 2-2x\}\,.$$



Slika 3. Orbiti šotorske preslikave pri začetnih pogojih $x_0 = 0{,}12$ in $x_0 = 0{,}121$.

Zaradi oblike njenega grafa ji pravimo *šotorska preslikava* (angl. tent map). Spodnji grafični prikaz dveh orbit znova namiguje, da je z njo podano zaporedje, ki je občutljivo na začetne podatke. Dokažimo tudi to dejstvo!

Naj bo število $x_0 \in [0,1)$ podano na enak način kot v predhodnem primeru. Potem sta števili, ki se pojavita v zgornjem minimumu, enaki:

$$2x_0 = c_1{,}c_2c_3c_4\ldots_{(2)}\,,$$

$$2 - 2x_0 = \tilde{c}_1{,}\tilde{c}_2\tilde{c}_3\tilde{c}_4\ldots_{(2)}\,,$$

kjer za vsak $j \in \mathbb{N}$ velja $c_j \neq \tilde{c}_j$ oz. se v drugem zapisu na vseh mestih pojavijo spremenjene števke. V primeru, da je $c_1 = 0$, je manjše prvo izmed obeh števil, sicer pa drugo. To pomeni, da je

$$g(x_0) = \begin{cases} 0{,}c_2c_3c_4\ldots_{(2)}\,, & c_1 = 0, \\ 0{,}\tilde{c}_2\tilde{c}_3\tilde{c}_4\ldots_{(2)}\,, & c_1 = 1. \end{cases}$$

Funkcija g torej znova izpusti prvo decimalko, vendar pa v primeru, ko je ta enaka 1, dodatno spremeni še vse druge.

V primeru, ko je decimalni zapis števila $x_0 \in [0,1)$ končen in prva cifra enaka $c_1 = 1$, zgornji predpis vrne število, ki je podano z neskončnim nizom ponavljajočih se enic. Ker želimo g iterirati večkrat in ga uporabiti tudi za števila s tovrstno predstavitvijo, preverimo, da velja

$$g(0{,}c_1c_2\ldots c_{k-1}1_{(2)}) = \begin{cases} 0{,}c_2c_3\ldots c_{k-1}1_{(2)}, & c_1 = 0, \\ 0{,}\tilde{c}_2\tilde{c}_3\ldots\tilde{c}_{k-1}0\overline{1}_{(2)}, & c_1 = 1. \end{cases}$$

$$g(0{,}c_1c_2\ldots c_{k-1}0\overline{1}_{(2)}) = \begin{cases} 0{,}c_2c_3\ldots c_{k-1}0\overline{1}_{(2)}, & c_1 = 0, \\ 0{,}\tilde{c}_2\tilde{c}_3\ldots\tilde{c}_{k-1}1_{(2)}, & c_1 = 1. \end{cases}$$

Predpis za g je torej dobro definiran tudi v primeru neenoličnega decimalnega zapisa. To nam ustreza tudi zato, ker interval I vsebuje enico, ki jo predstavimo z nizom $1 = 0{,}\overline{1}_{(2)}$.

Sedaj potrdimo, da je zaporedje občutljivo na začetne podatke. Naj bo $x_0 \in [0,1]$ predstavljen z decimalkami c_j, $j \in \mathbb{N}$. Primerna motnja je

$$\widehat{x}_0 = 0{,}c_1c_2c_3\ldots c_{m-1}\tilde{c}_m c_{m+1}\tilde{c}_{m+2}\tilde{c}_{m+3}\ldots_{(2)}\,,$$

kjer je $\tilde{c}_j \neq c_j$ za $j \geq m$. Ker se števili x_0 in $\widehat{x}_0$ v prvih $m-1$ decimalkah ujemata, funkcija g v prvih $m-1$ iteracijah na njih deluje usklajeno. Ko jo nato uporabimo še enkrat, v orbiti dobimo števili, katerih decimalni zapis se razlikuje le v prvi števki. Razlika takih števil je enaka $\beta = \frac{1}{2}$, torej lahko to vrednost znova izberemo za občutljivostno konstanto. Ker je razlika med x_0 in $\widehat{x}_0$ kvečjemu 2^{-m+1} in s tem poljubno majhna, je dokaz končan.

Pekova preslikava

Primera, ki smo ju obravnavali doslej, lepo ilustrirata učinek metulja, a žal nimata interpretacije iz »vsakdanjega življenja«. Ker so laičnim poslušalcem najpogosteje zanimive prav te, v tem razdelku dodajam še primer t. i. *pekove preslikave* (angl. baker's map). Zanjo bomo morali rekurzivna zaporedja obravnavati tudi v ravnini. Natančneje, naše zaporedje bo podano s predpisom $(x_{n+1}, y_{n+1}) = g(x_n, y_n)$, kjer je $g\colon I \times J \to I \times J$ preslikava produkta intervalov $I, J \subseteq \mathbb{R}$ vase. Pogoj, pri katerem je tako zaporedje občutljivo na začetne pogoje, je analogen prejšnjemu, le oba začetna pogoja je treba obravnavati v ravnini in absolutno vrednost nadomestiti z evklidsko razdaljo. Formulacijo ustrezne definicije prepuščam bralcu, mi pa si oglejmo opisni in matematični model pekove preslikave.

Opazujmo peka, ki mesi testo. En korak njegove metode je sestavljen iz dveh delov. V prvem testo v obliki kvadrata enakomerno razvalja do oblike pravokotnika, ki je dvakrat daljši in dvakrat ožji od prvotnega kvadrata. Nato ta kos razpolovi in – gledano iz naše perspektive – desno polovico položi na vrh leve, da znova dobi kvadraten kos testa (glej sliko 4).

Slika 4. En korak pekove preslikave.

Ta postopek modeliramo z zaporedjem, ki je podano s preslikavo

$$g\colon [0,1) \times [0,1) \to [0,1) \times [0,1),$$

$$g(x,y) = \left(2x - \lfloor 2x \rfloor, \frac{y}{2} + \frac{1}{2}\lfloor 2x \rfloor\right).$$

Prvi del pekovega koraka ustreza linearni preslikavi $(x, y) \to \left(2x, \frac{y}{2}\right)$, ki koordinato x podvoji, koordinato y pa razpolovi. V drugem delu koraka premaknemo le točke, katerih abscisa po prvem delu preseže vrednost $x \geq 1$.

Te točke se v smeri abscise premaknejo za 1 v levo, v smeri ordinate pa za polovico te vrednosti navzgor. V primerjavi z resničnim modelom tako malce goljufamo le, ko namesto produkta dveh zaprtih intervalov obravnavamo produkt intervala $[0, 1)$ s samim seboj. V nasprotnem primeru bi se predpis preslikave namreč precej zapletel.

Dokažimo, da je zaporedje, podano z zvezo $(x_{n+1}, y_{n+1}) = g(x_n, y_n)$, občutljivo na začetne podatke. Naj bo $(x_0, y_0) \in [0, 1) \times [0, 1)$. Uporabimo enolično verzijo dvojiškega sistema in zapišemo:

$$x_0 = 0{,}c_1c_2c_3\ldots_{(2)}\,,\ \ y_0 = 0{,}d_1d_2d_3\ldots_{(2)}\,,\ \ c_j, d_j \in \{0, 1\}\,,\ j \in \mathbb{N}.$$

Delovanje preslikave g na prvi koordinati se ujema s podvojitveno preslikavo iz predhodnega razdelka. V sliki tako dobimo število, ki mu priprada zapis brez prve decimalke. Po drugi strani pa je prav vrednost števke c_1 tista, ki pove, ali koordinati y_0 dodamo število $\frac{1}{2}$ ali ne. Natančneje, to storimo natanko takrat, ko je $c_1 = 1$ in se točka z absciso x_0 po podvojitvi širine znajde na desni polovici prečnega prereza. To pomeni, da sta koordinati naslednjega člena zaporedja enaki

$$x_1 = 0{,}c_2c_3c_4\ldots_{(2)}\,,\ \ y_1 = 0{,}c_1d_1d_2\ldots_{(2)}\,.$$

Če oba zapisa združimo, tako da števke člena y_0 nanizamo proti levi, števke člena x_0 pa proti desni, lahko delovanje preslikave g znova ilustriramo z operatorjem zamika, le da ga tokrat uporabimo na dvostranskem nizu oblike

$$\ldots, d_3, d_2, d_1|c_1, c_2, c_3\ldots \to \ldots, d_2, d_1, c_1|c_2, c_3, c_4, \ldots,$$

pri čemer znak | pomeni pozicijo decimalne pike. Da je to zaporedje občutljivo na začetne podatke, tako sledi iz dejstva, da enaka lastnost velja za zaporedje, ki je bilo podano s podvojitveno preslikavo.

Nekaj malega o kaosu

Uvodoma smo povedali, da je besedna zveza »učinek metulja« stalnica teorije kaosa, vendar pa to ne pomeni, da vsebinsko podaja njen ekvivalent. Natančneje, občutljivost na začetne podatke predstavlja le najbolj znano izmed treh lastnosti, ki morajo veljati za kaotične sisteme oz. zaporedja. Opredelitvi preostalih dveh posvečam zadnji razdelek.

Spomnimo, da je podmnožica $U \subset I$ *gosta v* I, če se njeni elementi pojavijo v vsakem odprtem podintervalu $(a, b) \subset I$. Nadalje pravimo, da je $x_0 \in I$ *periodična točka* zaporedja, podanega z zvezo $x_{n+1} = g(x_n)$, če za neki $k \in \mathbb{N}$ velja $x_k = x_0$. Poleg občutljivosti na začetne podatke morajo *kaotična zaporedja* izpolnjevati tudi naslednja pogoja [1]:

(1) Množica periodičnih točk je gosta v I.

(2) Za vsako število $x_0 \in I$, odprt interval $(a, b) \subset I$ in $\epsilon > 0$ obstajata $\widehat{x}_0 \in I$ in $m \in \mathbb{N}$, da zanju in za m-ti člen orbite $\widehat{x}_m \in \mathcal{O}_g(\widehat{x}_0)$ velja

$$|x_0 - \widehat{x}_0| < \epsilon \text{ in } \widehat{x}_m \in (a, b).$$

Drugo lastnost imenujemo *topološka tranzitivnost*, pove pa, da lahko s poljubno majhno motnjo zaporedja, ki se začne v x_0, dobimo zaporedje, katerega orbita obišče poljuben odprt interval. To pomeni, da lahko iz »vsakega intervala okoli x_0« pridemo »kamorkoli«, torej tudi v točke, ki niso niti blizu orbite $\mathcal{O}_g(x_0)$. Skupaj z občutljivostjo na začetne podatke in prvo lastnostjo, ki trdi, da v vsaki taki okolici obstajajo tudi točke, ki se po končno korakih vrnejo na začetek, tako dobimo preplet pogojev, ki ga najlepše opiše stavek: *Kaotični so sistemi, v katerih se s približnim začetkom niti približno ne da povedati, kaj se bo zgodilo.*

Za ilustracijo si oglejmo lastnosti (1) in (2) na primeru podvojitvene preslikave oz., ekvivalentno, na operatorju zamika. Spomnimo, za števke $c_j \in \{0, 1\}$, $j \in \mathbb{N}$, in enolično podan dvojiški zapis smo imeli operator

$$0{,}c_1c_2c_3\ldots_{(2)} \longmapsto 0{,}c_2c_3c_4\ldots_{(2)}\,.$$

Zanj so periodična natanko tista števila, katerih dvojiški zapis je v celoti periodičen. Naj bo $(a, b) \subset I$ nek odprt podinterval, ki vsebuje število

$$x = 0{,}c_1c_2c_3\ldots_{(2)}\,.$$

Trdimo, da lahko poljubno blizu – torej tudi znotraj intervala (a, b) – najdemo periodično točko. Res, za dovolj velik $k \in \mathbb{N}$ je taka na primer

$$\tilde{x} = x = 0{,}\overline{c_1c_2c_3\ldots c_k}_{(2)},$$

kjer smo pri konstrukciji uporabili prvih k števk dvojiškega zapisa števila x.

Na tem mestu dodajmo tudi, da je pri rekurzivnih zaporedjih pogosta obravnava t. i. *predperiodičnih točk.* To so tiste, za katere za neka $k \in \mathbb{N}$ in $m \in \mathbb{N}_0$ velja $x_m = x_{m+k}$, vendar pa število m ni nujno ničelno. To pomeni, da je njihova orbita končna, a se periodični cikel zgodi šele po

[1] Večina virov se pri tem nasloni na knjigo [1].

nekaj korakih. Taka je na primer točka $x_0 = 1$ v šotorski preslikavi, saj je $\mathcal{O}_g(1) = \{0\}$. V primeru podvojitvene preslikave so predperiodične vse točke, katerih zapis je od nekje dalje periodičen. Te, tako kot v primeru desetiškega decimalnega zapisa, ustrezajo natanko racionalnim številom, ki so prav tako gosta znotraj intervala $[0,1)$. Dokaz te trditve, vsaj po mojem mnenju, predstavlja zanimiv izziv za dokazovanja željne bralce.

Sedaj si oglejmo še topološko tranzitivnost. Zadostni pogoj zanjo je obstoj števila $x_0 \in I$, katerega orbita $\mathcal{O}_g(x_0)$ je gosta v I. Res, to pomeni, da se njeni elementi pojavijo v vseh odprtih intervalih, torej tudi v vnaprej predpisanem. Dokažimo, da operator zamika premore tako orbito. Vse možne končne nize števil 0 in 1 lahko razvrstimo v zaporedje

$$0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111, \ldots.$$

Naj bo $x_0 \in I$ število, v dvojiškem decimalnem zapisu katerega se pojavijo vsi ti nizi v natanko tem vrstnem redu:

$$x_0 = 0{,}0100011011\ldots_{(2)}.$$

Trdimo, da obstaja iterand tega števila, ki je lahko poljubno blizu kateremukoli elementu $x \in I$. Res, naj bo $k \in \mathbb{N}$ velik in naj bo $c_1c_2\ldots c_k$ niz, ki se pojavi na začetku števila x. Po ustreznem številu korakov se bo ta niz pojavil tudi na začetku števila x_0. Torej lahko dosežemo, da je za ustrezen $m \in \mathbb{N}$ člen $x_m \in \mathcal{O}_g(x_0)$ poljubno blizu x.

Tako, menim, da je osnovna intuicija, kaj pomenita besedni zvezi učinek metulja in kaotično zaporedje, vzpostavljena. Ostane pa mi le, da vam po klasični pedagoški navadi dodam še kako domačo nalogo – za vas, za znance ali za vaše dijake. Izkaže se, da so vsa tri zaporedja, ki sem jih predstavil, kaotična, kar pa je treba za zaporedji, podani s šotorsko in pekovo preslikavo, še potrditi. Dodatno menim, da je vredno oba primera iz drugega razdelka še malce raziskati tudi z vidika pajčevinastih diagramov. Pri tem si lahko, kot sem si jaz, pomagate s spletno stranjo [3]. Nazadnje dodajam tudi vir [2, poglavje 15], v katerem so predstavljeni nadaljnji primeri diskretnih kaotičnih sistemov, obravnavanih s t. i. simbolično dinamiko. V našem primeru je slednjo nadomestil decimalni dvojiški zapis na intervalu $[0,1)$.

LITERATURA

[1] L. R. Devaney, *Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Addison-Wesley Publishing Company, Advanced Book Program, Redwood City, CA, 1989.

[2] S. Smale, L. R. Devaney in M. W. Hirsch, *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*, Elsevier, 2004.

[3] *Cobweb plotter*, dostopno na `https://www.geogebra.org/m/QJ79IWCL`, ogled 6. 11. 2023.