

DEFORMACIJSKA ANALIZA PO POSTOPKU HANNOVER

dr. Tomaž Ambrožič *

Izvleček

KLJUČNE BESEDE:
deformacijska analiza,
postopek Hannover,
računski primer,
računalniški program

V članku je opisan postopek Hannover, ki je eden izmed postopkov deformacijske analize. Z uporabo statističnih metod in na osnovi geodetskih opazovanj določimo nastale prostorske premike točk opazovanega objekta. Podani so rezultati testnega primera, izračunanega z računalniškim programom.

Abstract

KEYWORDS:
deformation analysis,
Hannover approach,
numerical example,
computer program

Deformation analysis after the Hannover approach

Hannover approach, which is one of the methods of the deformation analysis, is presented in the article. Based on geodetic observations, space displacements of the surface are determined by statistical methods. A numerical example, computed with computer program, shows the effectiveness of the presented method.

1. UVOD

Deformacijska analiza je postopek, ki na osnovi geodetskih opazovanj odkrije in določi nastale prostorske premike točk fizične površine Zemlje z metodami statistične analize.

Postopek Hannover je razvil H. Pelzer na Geodetskem inštitutu Univerze Hannover v Zvezni republiki Nemčiji (Dupraz et al., 1979).

2. POSTOPEK HANNOVER

Bistvo postopka Hannover je ugotavljanje stabilnosti točk v geodetski mreži, ki jo izračunamo na osnovi srednjega neujemanja med dvema neodvisnima izmerama. Na podlagi srednjega neujemanja določimo morebitne premike točk mreže.

Postopek lahko razdelimo na šest korakov:

- izravnava opazovanj posameznih izmer z analizo natančnosti, odkrivanje morebitnih grobih pogreškov med opazovanji in transformacija izravnanih koordinat posamezne izmere v identičen datum,
- testiranje homogenosti natančnosti opazovanj v dveh izmerah,
- globalni test stabilnosti točk mreže v dveh izmerah,
- testiranje stabilnosti osnovnih točk,
- postopek določitve nestabilnih osnovnih točk in
- testiranje premikov točk na objektu.

Pri opisovanju postopka uporabljamo v matematičnih izrazih enake oznake, kot jih je uporabil avtor postopka.

2.1 Izravnava opazovanj posameznih izmer z analizo natančnosti, odkrivanje morebitnih grobih pogreškov med opazovanji in transformacija izravnanih koordinat posamezne izmere v identičen datum

V prvem koraku moramo opazovanja izravnati v prosti mreži za vsako izmero posebej in izračunati analizo natančnosti. Predpostaviti moramo, da opazovanja med izmerama niso korelirana. Ugotoviti moramo prisotnost morebitnih grobih pogreškov med opazovanji in jih odstraniti. Če v izmerah nimamo samo identičnih točk, moramo transformirati izravnane koordinate posamezne izmere v datum, ki ga definirajo identične točke.

Opazovanja v posamezni izmeri izravnamo v prosti mreži. To pomeni, da mora biti poleg minimalne vsote kvadratov popravkov opazovanj $\mathbf{v}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{v}_i = \min$. minimalna tudi vsota kvadratov popravkov približnih vrednosti neznank $\hat{\mathbf{x}}_i^T \hat{\mathbf{x}}_i = \min$. Indeks i označuje posamezno izmero.

Postopek odkrivanja grobih pogreškov med opazovanji temelji na posredni izravnavi opazovanj v geodetski mreži. Grobo pogrešeno opazovanje lahko določimo po Baardovi, Popovi, danski ali ustrezni drugi metodi (Caspary, 1988).

Eliminacijo koordinatnih neznank neidentičnih točk pa lahko opravimo s transformacijo S (Mierlo, 1978).

Rezultat prvega koraka sta torej ocenjena vektorja koordinatnih neznank identičnih točk $\hat{\mathbf{x}}_i$ in a posteriori referenčna varianca enote uteži $\hat{\sigma}_0^2$ za posamezno izmero.

2.2 Testiranje homogenosti natančnosti opazovanj v dveh izmerah

Na osnovi rezultatov izravnave opazovanj v posamezni izmeri izračunamo a posteriori referenčni varianci enote uteži. Pri ugotavljanju homogenosti natančnosti opazovanj v dveh izmerah uporabimo testiranje naslednje hipoteze (Ašanin, 1986, Dupraz et al., 1979, Mihailović et al., 1994, Niemeier, 1985):

$$H_0: \quad E(\hat{\sigma}_{0_1}^2) = E(\hat{\sigma}_{0_2}^2) = \sigma_0^2 \quad \text{homogenost natančnosti opazovanj v dveh izmerah in} \quad (1)$$

$$H_1: \quad E(\hat{\sigma}_{0_1}^2) \neq E(\hat{\sigma}_{0_2}^2) \neq \sigma_0^2 \quad \text{nehomogenost natančnosti opazovanj v dveh izmerah.} \quad (2)$$

Tvorimo testno statistiko

$$T = \frac{\hat{\sigma}_{0_1}^2}{\hat{\sigma}_{0_2}^2} \quad \text{za} \quad \hat{\sigma}_{0_1}^2 > \hat{\sigma}_{0_2}^2 \quad \text{ozioroma} \quad (3)$$

$$T = \frac{\hat{\sigma}_{0_2}^2}{\hat{\sigma}_{0_1}^2} \quad \text{za} \quad \hat{\sigma}_{0_2}^2 > \hat{\sigma}_{0_1}^2 \quad (3a)$$

ki se porazdeljuje po porazdelitvi F s f_1 in f_2 prostostnimi stopnjami, kjer je:

$f_i = n_i - r_i$... število nadštevilnih opazovanj v posamezni izmeri,

n_i ... število opazovanj v posamezni izmeri,

$r_i = \text{rang } \mathbf{A}_i = u_i - d_i$,

u_i ... število koordinatnih neznank (orientacijske neznanke smo odstranili z redukcijo enačb popravkov!) v posamezni izmeri,

d_i ... defekt datuma = defekt ranga matrike \mathbf{N}_i v posamezni izmeri.

Če je testna statistika manjša ali enaka kot kritična vrednost pri izbrani stopnji značilnosti testa α

$$T \leq F_{f_1, f_2, 1-\alpha/2},$$

potem ne moremo zavrniti ničelne hipoteze (1), ki pravi, da sta natančnosti opazovanj v dveh izmerah homogeni.

Če je testna statistika večja od kritične vrednosti pri izbrani stopnji značilnosti testa α

$$T > F_{f_1, f_2, 1-\alpha/2},$$

potem zavrnilo ničelno hipotezo (1). To pomeni, da natančnosti opazovanj v dveh izmerah nista homogeni.

Če ne zavrnilo ničelne hipoteze (1), izračunamo boljše oceno za a posteriori referenčno varianco enote uteži, ki predstavlja homogenost natančnosti opazovanj dveh izmer, po naslednji enačbi

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\mathbf{v}_1^T \mathbf{P}_{\Pi_1} \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2^T \mathbf{P}_{\Pi_2} \mathbf{v}_2}{f_1 + f_2} = \frac{f_1 \hat{\sigma}_{0_1}^2 + f_2 \hat{\sigma}_{0_2}^2}{f} \quad (4)$$

$f = f_1 + f_2$... skupno število nadštevilnih opazovanj v obeh izmerah.

Ta ocena vsebuje informacijo o natančnosti opazovanj v obeh izmerah.

Če ničelno hipotezo (1) zavrnilo, ne izračunamo ocene za a posteriori referenčno varianco enote uteži (4) in deformacijsko analizo prekinemo.

2.3 Globalni test stabilnosti točk mreže v dveh izmerah

Ta korak bi lahko imenovali tudi testiranje skladnosti geodetske mreže (Ašanin, 1986, Dupraz et al., 1979, Mihailović et al., 1994, Niemeier, 1985).

Stabilne točke so tiste, ki niso spremenile svojega položaja v časovnem intervalu med dvema izmerama. Koordinate stabilnih točk dveh izmer se lahko razlikujejo med seboj le za vrednosti, ki so manjše od natančnosti določitve koordinat. Stabilnost točk določimo s testiranjem naslednje hipoteze:

$$H_0: \quad E(\hat{\mathbf{x}}_1) = E(\hat{\mathbf{x}}_2) \quad \text{koordinate točk se med dvema izmerama niso spremenile in} \quad (5)$$

$$H_1: \quad E(\hat{\mathbf{x}}_1) \neq E(\hat{\mathbf{x}}_2) \quad \text{koordinate točk so se med dvema izmerama spremenile} \quad (6)$$

oziroma

$$H_0: \quad E(\mathbf{d}) = \mathbf{0} \quad \text{in} \quad (5a)$$

$$H_1: \quad E(\mathbf{d}) \neq \mathbf{0}, \quad (6a)$$

kjer je:

$\hat{\mathbf{x}}_i$... vektor ocenjenih koordinat posamezne izmere in

$\mathbf{d} = \hat{\mathbf{x}}_2 - \hat{\mathbf{x}}_1 \dots$ vektor koordinatnih razlik.

Matriko kofaktorjev koordinatnih razlik izračunamo z naslednjo enačbo:

$$\mathbf{Q}_{dd} = \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_1 \hat{\mathbf{x}}_1} + \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_2 \hat{\mathbf{x}}_2} = (\mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_{11} \mathbf{A}_1)^+ + (\mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_{22} \mathbf{A}_2)^+,$$

kjer je:

$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_i \hat{\mathbf{x}}_i} = (\mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_{ii} \mathbf{A}_i)^+ \dots$ pseudoinverzija matrike normalnih enačb posamezne izmere.

Oceno za a priori referenčno varianco enote uteži σ_0^2 , ki jo označimo s θ^2 , lahko izračunamo iz vektorja koordinatnih razlik in pripadajoče matrike kofaktorjev. Ta ocena vsebuje informacijo o premikih točk. θ^2 je neodvisna od $\hat{\sigma}_0^2$, ki jo izračunamo z enačbo (4). Oceno θ^2 imenujemo srednje neujemanje in jo izračunamo z naslednjo enačbo:

$$\theta^2 = \frac{\mathbf{d}^T \mathbf{Q}_{dd}^+ \mathbf{d}}{h}, \quad (7)$$

kjer je:

$\mathbf{Q}_{dd}^+ \dots$ pseudoinverzija matrike kofaktorjev koordinatnih razlik in

$$h = \text{rang } \mathbf{Q}_{dd} = \text{rang} (\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_1 \hat{\mathbf{x}}_1} + \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_2 \hat{\mathbf{x}}_2}) = \text{rang } \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_1 \hat{\mathbf{x}}_1} = \text{rang } \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_2 \hat{\mathbf{x}}_2} = u - d = r,$$

saj imamo identično obliko mreže v obeh izmerah (število linearno neodvisnih vektorjev matrike \mathbf{Q}_{dd}).

Tvorimo testno statistiko

$$T = \frac{\theta^2}{\hat{\sigma}_0^2}, \quad (8)$$

ki se porazdeljuje po porazdelitvi F s h in f prostostnimi stopnjami.

Če je testna statistika manjša ali enaka kot kritična vrednost pri izbrani stopnji značilnosti testa α

$$T \leq F_{h,f,1-\alpha},$$

potem ne moremo zavrnila ničelne hipoteze (5), ki pravi, da se koordinate točk med dvema izmerama niso spremenile.

Če je testna statistika večja od kritične vrednosti pri izbrani stopnji značilnosti testa α

$$T > F_{h,f,1-\alpha},$$

potem zavrnemo ničelno hipotezo (5). To pomeni, da so se koordinate točk med dvema izmerama spremenile, v mreži imamo tudi nestabilne točke.

Rečemo lahko, da mreži nista kongruentni (skladni). Premike točk ne moremo razložiti kot slučajna odstopanja zaradi pogreškov opazovanj, ampak kažejo na to, da imamo opraviti s statistično značilnimi premiki točke, dela mreže ali cele mreže.

2.4 Testiranje stabilnosti osnovnih točk

Če zavrnamo ničelno hipotezo (5), pomeni, da imamo v mreži tudi nestabilne točke. Te točke moramo določiti (Ašanin, 1986, Dupraz et al., 1979, Mihailović et al., 1994).

Razdelimo vektor koordinatnih razlik \mathbf{d} na dva dela: na vektor koordinatnih razlik osnovnih točk \mathbf{d}_s in vektor koordinatnih razlik točk na objektu \mathbf{d}_o :

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_s \\ \mathbf{d}_o \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Na enak način razdelimo pripadajočo matriko kofaktorjev koordinatnih razlik:

$$\mathbf{Q}_{dd}^+ = \mathbf{P}_{dd} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{ss} & \mathbf{P}_{so} \\ \mathbf{P}_{os} & \mathbf{P}_{oo} \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Tvorimo kvadratno formo

$$\mathbf{d}^T \mathbf{Q}_{dd}^+ \mathbf{d} \quad (11)$$

z izrazoma (9) in (10):

$$\mathbf{d}^T \mathbf{P}_{dd} \mathbf{d} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_s^T & \mathbf{d}_o^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{ss} & \mathbf{P}_{so} \\ \mathbf{P}_{os} & \mathbf{P}_{oo} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_s \\ \mathbf{d}_o \end{bmatrix}.$$

Pomnožimo vektorja in matriko med seboj

$$\mathbf{d}^T \mathbf{P}_{dd} \mathbf{d} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_s^T \mathbf{P}_{ss} + \mathbf{d}_o^T \mathbf{P}_{os} & \mathbf{d}_s^T \mathbf{P}_{so} + \mathbf{d}_o^T \mathbf{P}_{oo} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_s \\ \mathbf{d}_o \end{bmatrix} \quad \text{in}$$

$$\mathbf{d}^T \mathbf{P}_{dd} \mathbf{d} = \mathbf{d}_s^T \mathbf{P}_{ss} \mathbf{d}_s + \mathbf{d}_o^T \mathbf{P}_{os} \mathbf{d}_s + \mathbf{d}_s^T \mathbf{P}_{so} \mathbf{d}_o + \mathbf{d}_o^T \mathbf{P}_{oo} \mathbf{d}_o.$$

Dobljeno enačbo preuredimo tako, da upoštevamo $\mathbf{P}_{os}^T = \mathbf{P}_{so}$:

$$\mathbf{d}^T \mathbf{P}_{dd} \mathbf{d} = \mathbf{d}_s^T \mathbf{P}_{ss} \mathbf{d}_s + 2\mathbf{d}_s^T \mathbf{P}_{so} \mathbf{d}_o + \mathbf{d}_o^T \mathbf{P}_{oo} \mathbf{d}_o. \quad (12)$$

Kvadratno formo (11) pa lahko razcepimo na dva statistično neodvisna dela:

$$\mathbf{d}^T \mathbf{P}_{dd} \mathbf{d} = \mathbf{d}_s^T \overline{\mathbf{P}}_{ss} \mathbf{d}_s + \mathbf{d}_o^T \overline{\mathbf{P}}_{oo} \mathbf{d}_o, \quad (13)$$

kjer je:

$$\bar{\mathbf{d}}_o = \mathbf{d}_o + \mathbf{P}_{oo}^{-1} \mathbf{P}_{os} \mathbf{d}_s \quad (14)$$

$$\bar{\mathbf{P}}_{ss} = \mathbf{P}_{ss} - \mathbf{P}_{so} \mathbf{P}_{oo}^{-1} \mathbf{P}_{os} \quad (15)$$

Dokažimo, da sta kvadratni formi (12) in (13) enaki. Vstavimo v enačbo (13) izraza (14) in (15)

$$\mathbf{d}^T \mathbf{P}_{dd} \mathbf{d} = \mathbf{d}_s^T (\mathbf{P}_{ss} - \mathbf{P}_{so} \mathbf{P}_{oo}^{-1} \mathbf{P}_{os}) \mathbf{d}_s + (\mathbf{d}_o + \mathbf{P}_{oo}^{-1} \mathbf{P}_{os} \mathbf{d}_s)^T \mathbf{P}_{oo} (\mathbf{d}_o + \mathbf{P}_{oo}^{-1} \mathbf{P}_{os} \mathbf{d}_s).$$

Transponirajmo člene v oklepaju zadnjega seštevanca in upoštevajmo, da je zaradi simetričnosti $(\mathbf{P}_{oo}^{-1})^T = \mathbf{P}_{oo}^{-1}$ ter $\mathbf{P}_{os}^T = \mathbf{P}_{so}$:

$$\mathbf{d}^T \mathbf{P}_{dd} \mathbf{d} = \mathbf{d}_s^T (\mathbf{P}_{ss} - \mathbf{P}_{so} \mathbf{P}_{oo}^{-1} \mathbf{P}_{os}) \mathbf{d}_s + (\mathbf{d}_o^T + \mathbf{d}_s^T \mathbf{P}_{so} \mathbf{P}_{oo}^{-1}) \mathbf{P}_{oo} (\mathbf{d}_o + \mathbf{P}_{oo}^{-1} \mathbf{P}_{os} \mathbf{d}_s).$$

Pomnožimo člene med seboj

$$\begin{aligned} \mathbf{d}^T \mathbf{P}_{dd} \mathbf{d} &= \mathbf{d}_s^T \mathbf{P}_{ss} \mathbf{d}_s - \mathbf{d}_s^T \mathbf{P}_{so} \mathbf{P}_{oo}^{-1} \mathbf{P}_{os} \mathbf{d}_s + \\ &+ \mathbf{d}_o^T \mathbf{P}_{oo} \mathbf{d}_o + \mathbf{d}_o^T \mathbf{P}_{oo} \mathbf{P}_{oo}^{-1} \mathbf{P}_{os} \mathbf{d}_s + \mathbf{d}_s^T \mathbf{P}_{so} \mathbf{P}_{oo}^{-1} \mathbf{P}_{oo} \mathbf{d}_o + \mathbf{d}_s^T \mathbf{P}_{so} \mathbf{P}_{oo}^{-1} \mathbf{P}_{oo} \mathbf{P}_{oo}^{-1} \mathbf{P}_{os} \mathbf{d}_s \end{aligned}$$

in upoštevajmo, da je $\mathbf{P}_{oo} \mathbf{P}_{oo}^{-1} = \mathbf{P}_{oo}^{-1} \mathbf{P}_{oo} = \mathbf{E}$:

$$\mathbf{d}^T \mathbf{P}_{dd} \mathbf{d} = \mathbf{d}_s^T \mathbf{P}_{ss} \mathbf{d}_s - \mathbf{d}_s^T \mathbf{P}_{so} \mathbf{P}_{oo}^{-1} \mathbf{P}_{os} \mathbf{d}_s + \mathbf{d}_o^T \mathbf{P}_{oo} \mathbf{d}_o + \mathbf{d}_o^T \mathbf{P}_{os} \mathbf{d}_s + \mathbf{d}_s^T \mathbf{P}_{so} \mathbf{d}_o + \mathbf{d}_s^T \mathbf{P}_{so} \mathbf{P}_{oo}^{-1} \mathbf{P}_{os} \mathbf{d}_s.$$

Drugi in šesti seštevanec se odštejeta in peti seštevanec je enak četrtemu. Tako dobimo enačbo

$$\mathbf{d}^T \mathbf{P}_{dd} \mathbf{d} = \mathbf{d}_s^T \mathbf{P}_{ss} \mathbf{d}_s + \mathbf{d}_o^T \mathbf{P}_{oo} \mathbf{d}_o + 2\mathbf{d}_s^T \mathbf{P}_{so} \mathbf{d}_o,$$

ki je enaka enačbi (12). S tem je dokaz o enakosti (12) in (13) zaključen.

Razcepljena kvadratna forma (13) je sestavljena iz dveh delov. Prvi del predstavlja neujemanje osnovnih točk, drugi del pa neujemanje točk na objektu. Srednje neujemanje samo za osnovne točke izračunamo, podobno kot (7), z naslednjo enačbo:

$$\theta_s^2 = \frac{\mathbf{d}_s^T \bar{\mathbf{P}}_{ss} \mathbf{d}_s}{h_s}, \quad (16)$$

kjer je:

$$h_s = \text{rang } \bar{\mathbf{P}}_{ss}.$$

Tvorimo testno statistiko

$$T = \frac{\theta_s^2}{\hat{\sigma}_0^2}, \quad (17)$$

ki se porazdeljuje po porazdelitvi F s h_s in f prostostnimi stopnjami.

Če je testna statistika manjša ali enaka kot kritična vrednost pri izbrani stopnji značilnosti testa α

$$T \leq F_{h_s, f, 1-\alpha},$$

potem ne moremo zavrniti ničelne hipoteze (5), ki pravi, da se koordinate osnovnih točk med dvema izmerama niso spremenile.

Če je testna statistika večja od kritične vrednosti pri izbrani stopnji značilnosti testa α

$$T > F_{h_s, f, 1-\alpha},$$

potem zavrnemo ničelno hipotezo (5), kar pomeni, da so se koordinate osnovnih točk med dvema izmerama spremenile.

V tem koraku še nismo mogli določiti, katera osnovna točka ni stabilna. To naredimo v naslednjem koraku.

2.5 Postopek določitve nestabilnih osnovnih točk

Ko v prejšnjem koraku zaključimo, da imamo med osnovnimi točkami tudi take, ki so se premaknile, moramo te točke določiti. Pomagamo si tako, da razdelimo vektor koordinatnih razlik osnovnih točk \mathbf{d}_s na dva dela (Ašanin, 1986, Dupraz et al., 1979, Mihailović et al., 1994, Niemeier, 1985):

$$\mathbf{d}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_F \\ \mathbf{d}_B \end{bmatrix}, \quad (18)$$

kjer je:

\mathbf{d}_F ... vektor koordinatnih razlik osnovnih točk, za katere predpostavimo, da so stabilne in

\mathbf{d}_B ... vektor koordinatnih razlik osnovne točke, za katero preverjamo, ali se je premaknila.

Na enak način razdelimo pripadajočo matriko kofaktorjev koordinatnih razlik osnovnih točk:

$$\bar{\mathbf{P}}_{ss} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{FF} & \mathbf{P}_{FB} \\ \mathbf{P}_{BF} & \mathbf{P}_{BB} \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Tvorimo kvadratno formo

$$\mathbf{d}_s^T \bar{\mathbf{P}}_{ss} \mathbf{d}_s$$

in jo razcepimo na dva statistično neodvisna dela, podobno kot smo storili pri (13):

$$\mathbf{d}_s^T \bar{\mathbf{P}}_{ss} \mathbf{d}_s = \mathbf{d}_F^T \bar{\mathbf{P}}_{FF} \mathbf{d}_F + \bar{\mathbf{d}}_B^T \mathbf{P}_{BB} \bar{\mathbf{d}}_B, \quad (20)$$

kjer je:

$$\bar{\mathbf{d}}_B = \mathbf{d}_B + \mathbf{P}_{BB}^{-1} \mathbf{P}_{BF} \mathbf{d}_F \quad \text{in}$$

$$\bar{\mathbf{P}}_{FF} = \mathbf{P}_{FF} - \mathbf{P}_{FB} \mathbf{P}_{BB}^{-1} \mathbf{P}_{BF}.$$

Razcepljena kvadratna forma (20) je sestavljena iz dveh delov. Prvi del predstavlja neujemanje osnovnih točk, za katere smo predpostavili, da so stabilne. Drugi del pa predstavlja neujemanje osnovne točke, za katero preverjamo, ali se je premaknila.

Srednje neujemanje izračunamo za vsako osnovno točko, za katero preverjamo, ali se je premaknila, podobno kot (7), z naslednjo enačbo:

$$\theta_j^2 = \frac{\bar{\mathbf{d}}_{B_j}^T \mathbf{P}_{BB_j} \bar{\mathbf{d}}_{B_j}}{h_{B_j}} \quad (j=1,2,\dots,k), \quad (21)$$

kjer je:

$$h_{B_j} = \text{rang } \mathbf{P}_{BB_j} = m,$$

m ... število koordinat točke j (za enorazsežno mrežo je $m=1$, za dvorazsežno mrežo je $m=2$) in

k ... število osnovnih točk, za katere smo predpostavili, da so se premaknile.

Določitev nestabilnih točk opravimo po naslednjem postopku.

- V prvem izračunu θ_1^2 (21) postavimo koordinatni razliki prve osnovne točke, za katero preverjamo, ali se je premaknila, v vektor \mathbf{d}_B . Koordinatne razlike vseh drugih $k-1$ osnovnih točk postavimo v vektor \mathbf{d}_F .
- Izračun srednjega neujemanja (21) ponovimo še $k-1$ -krat.
- Poiščemo največje srednje neujemanje

$$\theta_{\max}^2 = \max \theta_j^2 \quad (j=1,2,\dots,k)$$

in za točko, na katero se to neujemanje nanaša, privzamemo, da je nestabilna. To točko prestavimo iz seznama osnovnih točk, za katere smo predpostavili, da so stabilne, v seznam nestabilnih točk oziroma točk na objektu.

- Izračunamo še srednje neujemanje, podobno kot (7), z naslednjo enačbo:

$$\theta_{\text{Rest}}^2 = \frac{\mathbf{d}_F^T \bar{\mathbf{P}}_{FF} \mathbf{d}_F}{h_F}, \quad (22)$$

kjer je:

$$h_F = \text{rang } \bar{\mathbf{P}}_{FF} = h - m.$$

- Tvorimo testno statistiko

$$T = \frac{\theta_{\text{Rest}}^2}{\hat{\sigma}_0^2}, \quad (23)$$

ki se porazdeljuje po porazdelitvi F s h_F in f prostostnimi stopnjami.

- Če je testna statistika manjša ali enaka kot kritična vrednost pri izbrani stopnji značilnosti testa α

$$T \leq F_{h_F, f, 1-\alpha},$$

potem ne moremo zavrniti ničelne hipoteze (5), ki pravi, da se koordinate vseh ostalih $k - 1$ osnovnih točk med dvema izmerama niso spremenile. Postopek določitve nestabilnih točk torej prekinemo.

- Če je testna statistika večja od kritične vrednosti pri izbrani stopnji značilnosti testa α

$$T > F_{h_F, f, 1-\alpha},$$

potem zavrnemo ničelno hipotezo (5), kar pomeni, da je med $k - 1$ osnovnimi točkami, za katere smo predpostavili, da so stabilne, vsaj še ena nestabilna. Postopek določitve nestabilnih točk moramo torej še najmanj enkrat ponoviti.

2.6 Testiranje premikov točk na objektu

Testiranje premikov točk na objektu opravimo tako, da razdelimo vektor koordinatnih razlik \mathbf{d} na dva dela. Prvi del je vektor koordinatnih razlik osnovnih točk \mathbf{d}_F , ki smo jih v prejšnjem koraku določili kot stabilne. Drugi del pa je vektor koordinatnih razlik točk na objektu in tistih, ki smo jih v prejšnjem koraku določili kot nestabilne \mathbf{d}_O (Ašanin, 1986, Dupraz et al., 1979, Mihailović et al., 1994):

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_F \\ \mathbf{d}_O \end{bmatrix}. \quad (24)$$

Na enak način razdelimo pripadajočo matriko kofaktorjev koordinatnih razlik:

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{d}\mathbf{d}}^+ = \mathbf{P}_{\mathbf{d}\mathbf{d}} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{FF} & \mathbf{P}_{FO} \\ \mathbf{P}_{OF} & \mathbf{P}_{OO} \end{bmatrix}. \quad (25)$$

Srednje neujemanje samo za točke na objektu izračunamo, podobno kot (7), z naslednjo enačbo:

$$\theta_o^2 = \frac{\bar{\mathbf{d}}_o^T \mathbf{P}_{oo} \bar{\mathbf{d}}_o}{h_o}, \quad (26)$$

kjer je:

$$\bar{\mathbf{d}}_o = \mathbf{d}_o + \mathbf{P}_{oo}^{-1} \mathbf{P}_{of} \mathbf{d}_f \text{ in} \quad (27)$$

$h_o = \text{rang } \mathbf{P}_{oo} \dots$ število elementov vektorja $\bar{\mathbf{d}}_o$.

Tvorimo testno statistiko

$$T = \frac{\theta_o^2}{\hat{\sigma}_o^2}, \quad (28)$$

ki se porazdeljuje po porazdelitvi F s h_o in f prostostnimi stopnjami.

Testna statistika bi morala biti vedno večja od kritične vrednosti, saj testiramo nestabilne točke in točke na objektu. Če je torej testna statistika večja od kritične vrednosti pri izbrani stopnji značilnosti testa α .

$$T > F_{h_o, f, 1-\alpha},$$

potem zavrnilo ničelno hipotezo (5), kar pomeni, da so se koordinate nestabilnih točk in točk na objektu med dvema izmerama spremenile.

3. Približni postopek določitve nestabilnih osnovnih točk

Če so premiki točk na objektu veliki glede na natančnost določitve točk, potem ni potrebno opraviti detajlne analize premikov točk na objektu z globalnim testom stabilnosti točk mreže med dvema izmerama in postopkom določitve nestabilnih osnovnih točk (Ašanin, 1986, Dupraz et al., 1979). V tem primeru je dovolj, če uporabimo primeren približni postopek. Tak postopek je "razmerje signal - šum". Uporabimo ga kot mero za statistično značilne premike točk. Določiti moramo standardno odstopanje vsakega elementa \bar{d}_{o_j} vektorja $\bar{\mathbf{d}}_o$:

$$q_j = \frac{\bar{d}_{o_j}}{\sigma_j}, \quad (29)$$

kjer je:

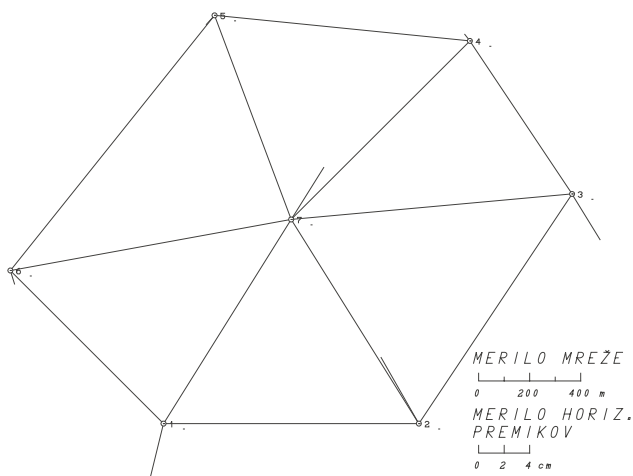
$$\sigma_j = \hat{\sigma}_o \sqrt{q_{jj}} \text{ in}$$

$q_{jj} \dots$ pripadajoči element matrike \mathbf{P}_{oo}^{-1} .

Če je \bar{d}_{o_j} petkrat večji kot pripadajoče standardno odstopanje (29), privzamemo, da se je koordinata točke statistično značilno premaknila.

4. RAČUNSKI PRIMER

Uporabo postopka Hannover želimo prikazati na primeru. Uporabimo primer iz literature (Mihailović et al., 1994). Skico mreže prikazujemo na sliki 1. V ta namen smo pripravili računalniški program **DAH** (Deformacijska Analiza Hannover).



Slika 1: Skica mreže

Izravnavo opazovanj v posameznih izmerah z analizo natančnosti, odkrivanje grobih pogreškov med opazovanji in transformacijo izravnanih koordinat posamezne izmere v identičen datum in tako pripravo vhodnih podatkov za deformacijsko analizo po postopku Hannover s programom **DAH** izvedemo s programom **ViM** (Ambrožič et al., 1999) ali **RaM** (Ambrožič et al., 1997) ter **Str** (Ambrožič, 1999). S programom **DAH** pa opravimo testiranje homogenosti natančnosti opazovanj v dveh izmerah, globalni test stabilnosti točk mreže v dveh izmerah, testiranje stabilnosti osnovnih točk, izvedemo postopek določitve nestabilnih osnovnih točk in nazadnje opravimo testiranje premikov točk na objektu.

Vhodne podatke za izravnavo s programom **RaM** podajamo v preglednici 1.

Točka	y [m]	x [m]
1	1000,0	1000,0
2	2000,0	1000,0
3	2600,0	1900,0
4	2200,0	2500,0
5	1200,0	2600,0
6	400,0	1600,0
7	1500,0	1800,0

Preglednica 1a: Seznam približnih koordinat točk mreže

Preglednica 1b: Seznam opazovanih smeri in dolžin obeh izmer

Točka		1. izmera				2. izmera			
Od	do	Opazovana smer			Dolžina	Opazovana smer			Dolžina
		°	'	"	[m]	°	'	"	[m]
1	6	314	59	58,6	848,5203	315	0	8,3	848,5437
1	7	32	0	18,4	943,4058	32	0	18,0	943,4930
1	2	90	0	0,6	1000,0017	89	59	40,2	999,9867
2	1	269	59	58,1	1000,0077	269	59	41,6	999,9797
2	7	327	59	41,6	943,3963	327	59	50,4	943,3690
2	3	33	41	24,9	1081,6692	33	41	43,8	1081,6196
3	2	213	41	23,2	1081,6572	213	41	43,6	1081,6252
3	7	264	48	19,6	1104,5400	264	48	36,1	1104,5261
3	4	326	18	35,0	721,1132	326	18	35,9	721,1641
4	3	146	18	33,4	721,1152	146	18	35,7	721,1602
4	7	224	59	59,9	989,9525	225	0	0,3	989,9073
4	5	275	42	39,1	1004,9917	275	42	37,1	1004,9992
5	4	95	42	37,9	1004,9861	95	42	36,1	1004,9865
5	7	159	26	39,7	854,4009	159	26	29,0	854,3696
5	6	218	39	36,1	1280,6231	218	39	35,9	1280,6217
6	5	38	39	35,0	1280,6242	38	39	34,6	1280,6267
6	7	79	41	43,7	1118,0403	79	41	36,3	1118,0745
6	1	134	59	59,5	848,5338	135	0	10,4	848,5325
7	6	259	41	42,2	1118,0366	259	41	36,6	1118,0680
7	5	339	26	38,3	854,4000	339	26	28,6	854,3591
7	4	45	0	0,9	989,9507	45	0	3,6	989,8993
7	3	84	48	21,1	1104,5387	84	48	37,2	1104,5244
7	2	147	59	40,6	943,3984	147	59	50,3	943,3528
7	1	212	0	19,3	943,3992	212	0	15,7	943,4907

A priori standardni odklon enote uteži za smeri je 1", a priori standardni odklon enote uteži za dolžine pa 5 mm.

V preglednici 2 podajamo z izravnavo ocenjene koordinate točk 1. in 2. izmere. Izračunali smo jih s programom **RaM** in so vhodni podatki za program **DAH**. Matrike kofaktorjev koordinatnih razlik zaradi velikosti ne prikazujemo (bralec jo lahko izračuna sam, zato pa smo podali vse vhodne podatke za izravnavo).

Točka	1. izmera		2. izmera		Koord. razlike	
	\hat{y}_1 [m]	\hat{x}_1 [m]	\hat{y}_2 [m]	\hat{x}_2 [m]	$d_{\hat{y}}$ [m]	$d_{\hat{x}}$ [m]
1	999,9988	999,9995	999,9880	999,9554	-0,0108	-0,0441
2	2000,0013	1000,0012	1999,9718	1000,0530	-0,0295	0,0518
3	2600,0037	1899,9984	2600,0257	1899,9626	0,0220	-0,0358
4	2200,0004	2500,0000	2199,9964	2500,0051	-0,0040	0,0051
5	1199,9988	2600,0007	1199,9924	2599,9936	-0,0064	-0,0071
6	399,9973	1599,9989	400,0006	1599,9883	0,0033	-0,0106
7	1499,9997	1800,0013	1500,0252	1800,0421	0,0255	0,0408

Preglednica 2: Seznam izravnanih koordinat točk 1. in 2. izmere ter koordinatnih razlik

Izračunan a posteriori standardni odklon enote uteži v izravnavi 1. izmere je 0,96990, po izravnavi 2. izmere pa 1,15618. Število nadštevilnih opazovanj v posamezni izmeri je 30. Defekt datuma posamezne izmere je 3. Navedeni podatki so tudi vhodni podatki za program **DAH**. Pri vseh testih smo izbrali stopnjo značilnosti testa 0,05.

Najprej program **DAH izvede** testiranje homogenosti natančnosti opazovanj v dveh izmerah. Izračunana testna statistika po enačbi (3) je 1,42. Ker je testna statistika manjša od kritične vrednosti pri izbrani stopnji značilnosti testa ($F_{30,30,0.975} = 2,07$), ne moremo zavrniti ničelne hipoteze (1), ki pravi, da je natančnost dveh izmer homogena.

Nato program **DAH** izračuna globalni test stabilnosti točk mreže v dveh izmerah. Izračunana testna statistika po enačbi (7) je 141,29. Ker je testna statistika večja od kritične vrednosti pri izbrani stopnji značilnosti testa ($F_{11,60,0.95} = 1,95$), zavrnemo ničelno hipotezo (5), kar pomeni, da so se koordinate točk med dvema izmerama spremenile. Ker je izračunana testna statistika bistveno večja od kritične vrednosti, je dejansko tveganje, da storimo napako, ko zavrnemo ničelno hipotezo, praktično enako nič.

Ker smo ničelno hipotezo (5) zavrnili, pomeni, da imamo v mreži tudi nestabilne točke. Zato v naslednjem koraku program **DAH** določi nestabilne točke. V vsakem iteracijskem koraku izračuna za vsako točko srednje neujemanje po enačbi (21), poišče največje srednje neujemanje (v preglednici 3 je podčrtano) in tvori testno statistiko po enačbi (23), ki jo primerja s kritično vrednostjo pri izbrani stopnji značilnosti testa. Iteracijski proces ponavlja toliko časa, dokler je testna statistika manjša, kot je kritična vrednost pri izbrani stopnji značilnosti testa. V tem primeru ne moremo zavrniti ničelne hipoteze, ki pravi, da se koordinate ostalih $k - 1$ točk med dvema izmerama niso spremenile. Rezultate postopka določitve nestabilnih točk podajamo v preglednici 3.

Preglednica 3: Rezultati postopka določitve nestabilnih točk

Točka	θ_j^2			
	1. iteracija	2. iteracija	3. iteracija	4. iteracija
1	<u>377,1</u>			
2	280,7	160,3	<u>252,4</u>	
3	207,2	173,7	197,1	<u>72,9</u>
4	47,2	49,4	26,3	37,9
5	33,9	37,8	8,6	1,9
6	4,5	47,9	25,8	0,3
7	332,3	<u>181,8</u>		
T (enačba 23)	99,09	81,78	25,82	0,37
h_F	9	7	5	3
$F_{h_F, f, 1-\alpha}$	2,04	2,17	2,37	2,76

Na koncu program **DAH** izvede testiranje premikov točk na objektu. Izračunana testna statistika po enačbi (28) je 194,14. Ker je testna statistika večja od kritične vrednosti pri izbrani stopnji značilnosti testa ($F_{8,60,0.95} = 2,10$), zavrnilo ničelno hipotezo, kar pomeni, da so se koordinate točk na objektu med dvema izmerama spremenile. To je seveda pričakovan rezultat. Program **DAH** izpiše izračunane premike točk na objektu po enačbi (27), ki jih podajamo v preglednici 4. "Premiki" stabilnih točk so koordinatne razlike po izravnavi – glej preglednico 2.

52

Preglednica 4: Seznam premikov vseh točk

Točka	d_y [mm]	d_x [mm]	Stabilna
4	- 4,00	5,10	da
5	- 6,40	-7,10	da
6	3,30	-10,60	da
1	-19,63	-38,00	ne
7	23,62	42,87	ne
2	-38,70	49,04	ne
3	20,58	- 44,34	ne

5. ZAKLJUČEK

V praksi se mnogokrat srečamo z nalogami določanja stabilnosti točk v geodetskih mrežah. Vzroki za spremembe položajev točk so različni. Prav zaradi tega zelo težko odgovorimo na vprašanja: "Ali je točka stabilna?", "Ali je določen del mreže stabilen?" in "Ali je vsa mreža stabilna?" Tako so nastale metode, ki temeljijo na statistični analizi za odkrivanje in določanje nastalih premikov točk fizične površine Zemlje. To so metode deformacijske analize. Eden izmed postopkov deformacijske analize je postopek Hannover, ki smo ga podrobno predstavili.

Prednosti postopka Hannover so naslednje:

- ni potreben enak plan opazovanj v obeh izmerah,
- ni potrebno opraviti iste vrste opazovanj v obeh izmerah,
- ni potrebno imeti enakega števila opazovanj v obeh izmerah,
- ni potrebno imeti geodetske mreže identične oblike v obeh izmerah, vendar moramo koordinatne neznanke neidentičnih točk pred inverzijo ustrezno odstraniti in
- ni potrebno opraviti stroge analize, če ugotovimo, da je premik točke petkrat večji od pripadajočega standardnega odstopanja.

Omejitvi postopka Hannover sta naslednji:

- v obeh izmerah moramo imeti statistično enaki a posteriori referenčni varianci enote uteži in
- v obeh izmerah moramo imeti iste približne koordinate točk.

Podan primer deformacijske analize prikazuje uporabnost programa **DAH**, s katerim lahko opravimo testiranje ter oceno stabilnosti točk v enorazsežnih, dvorazsežnih in trirazsežnih geodetskih mrežah.

Literatura:

Ambrožič, T., Turk, G., Navodila za uporabo programa **RaM** ver. 3.2, avg. 96 in **GeM3** ver. 3.1, mar. 97. Interna izdaja, 1997

Ambrožič, T., Turk, G., Navodila za uporabo programa **ViM** ver. 3.1, feb. 99 in **ViM8** ver. 3.1, feb. 99. Interna izdaja, 1999

Ambrožič, T., Navodila za uporabo programa **Str** ver. 2.0, nov. 99. Interna izdaja, 1999

Ašanin, S., Prilog obradi i analizi geodetskih merjenja za odredjivanje pomeranja i deformacija objekta i tla. Doktorska disertacija. Beograd, Univerzitet u Beogradu, Gradjevinski fakultet, Institut za geodeziju, 1986, str. 1-61

Caspary, W. F., Concepts of Network and Deformation Analysis. Kensington, The University of New South Wales, School of Surveying, 1988, str. 68-84

Dupraz, H., Niemeier, W., Pelzer, H., Analyse von Deformationsmessungen durch Klaffungszерlegung, angewandt auf die Netze "Montsalvens" und "Huaytapallana". V: Seminar über Deformationsanalysen (ed. W. Caspary, W. Welsch). Schriftenreihe, Wissenschaftlicher Studiengang Vermessungswesen. München [Hochschule der Bundeswehr München], 1979. Heft 4, str. 45-66

Mierlo, J. van, A Testing Procedure for Analysing Geodetic Deformation Measurements. V: 2nd FIG Symposium on Deformation Measurements by Geodetic Methods, Bonn, 1978. str. 9.1-9.33

Mihailović, K., Aleksić, I. R., Deformaciona analiza geodetskih mreža. Beograd, Gradjevinski fakultet Univerziteta u Beogradu, Institut za geodeziju, 1994, str. 2-237

Niemeier, W., Deformationsanalyse. V: Kontaktstudium 1985. Geodätische Netze in Landes- und Ingenieurvermessung II (ed. H. Pelzer). Stuttgart [Konrat Wittwer], 1985. str. 559-623

Recenzija: dr. Bojan Stopar, dr. Goran Turk

Prispelo za objavo: 2001-04-24